

Анализ микрополосковых антенн с подложками из киральных метаматериалов методом сингулярных интегральных уравнений

А.М. Нещерет

АО «Самарское инновационное предприятие радиосистем»
443022, Российская Федерация, г. Самара
пр. Кирова, 26

Настоящая статья посвящена вопросам разработки корректных методов электродинамического анализа микрополосковых антенн с подложками из киральных метаматериалов. Предложен метод анализа таких антенн на основе метода сингулярных интегральных представлений поля и метода поверхностных импедансов. Получено сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции распределения плотности тока по излучателю. Показаны два метода решения данного уравнения: метод моментов и метод частичного обращения оператора. Приведено исследование на сходимость. Выполнена апробация предложенного метода на примере решения тестовой задачи с использованием программного комплекса Feko.

Ключевые слова: метаматериал, киральная среда, микрополосковая антенна, сингулярное интегральное уравнение, сходимость, корректная математическая задача.

В последнее время особенно актуальными становятся вопросы сокращения габаритов устройств современной радиоэлектроники. Особенно это касается антенной техники, поскольку именно антенны являются одними из наиболее крупногабаритных элементов. В портативных устройствах радиоэлектроники в большинстве случаев используются микрополосковые антенны (МПА) в различном исполнении. Однако в настоящее время традиционные подходы к совершенствованию их характеристик практически исчерпали себя.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что один из относительно новых подходов к созданию МПА с улучшенными электрическими и массо-габаритными характеристиками непосредственно связан с применением метаматериалов в конструкции МПА, в частности в качестве подложек [1–4]. Применение метаматериалов в конструкции МПА позволяет существенно уменьшить габариты, компенсировать реактивность электрически малых антенн, значительно повысить направленность, улучшить согласование, уменьшить взаимное влияние между излучателями в антенных решетках.

Среди метаматериалов особенно следует выделить киральные среды [5; 6], представляющие

собой диэлектрический контейнер в котором определенным образом расположены проводящие элементы зеркально-асимметричной формы (спирали, S-элементы, Ω -элементы). Благодаря их уникальным электродинамическим свойствам, их применение в конструкции МПА позволяет значительно улучшить их характеристики.

С другой стороны, на данный момент отсутствует единая строгая теория МПА на их основе, отсутствуют строгие самосогласованные физические и математические модели таких антенн, а также методы их анализа и синтеза. Кроме того, мало изучены процессы, явления и закономерности излучения электромагнитных волн такими антеннами, недостаточно исследованы их характеристики. В связи с этим, существует актуальная научная проблема развития теории МПА с подложками из метаматериала, а также разработки адекватных методов их электродинамического анализа, обеспечивающих корректность, точность и устойчивость решений.

В настоящее время можно выделить два основных подхода к исследованиям МПА на основе киральных метаматериалов. Первый подход, пользующийся наибольшей популярностью, связан с использованием программных комплексов электродинамического моделирования, та-

ких как CST Microwave Studio, Feko, HFSS и т.д. Как известно, в основе данных пакетов заложены численные алгоритмы, предполагающие разбиение (дискретизацию) всего пространства или его части на элементарные ячейки. Здесь следует отметить, что дискретизация нарушает исходную структуру объекта таким образом, что его свойства могут исказиться. Безусловно, что по мере уменьшения размеров ячеек и увеличения их числа, поле, рассчитанное с помощью этих пакетов, стремится к истинному полю в структуре, то есть имеется сходимость итерационного процесса, но решение задачи при большом количестве ячеек требует применения быстродействующих процессоров и больших объемов оперативной памяти. Поэтому необходимо искать компромисс между точностью решения, временем и вычислительными ресурсами, необходимыми для его реализации. Кроме того очень часто при решении электродинамических задач даже небольшие искажения структуры могут вызывать существенные отклонения в вычисленном поле. Это происходит, например, в резонансных структурах, к которым относятся и киральные среды. Поэтому, такие программы нередко выдают результаты, которые просто не соответствуют физическому смыслу. И вопрос «доверия» полученным результатам всегда остается открытым.

Другой подход к анализу подобных микрополосковых структур связан с разработкой электродинамических моделей МПА с подложками из метаматериала на основе интегральных уравнений Фредгольма первого рода при представлении поверхностных токов эквивалентным распределением [6; 7]. Существенным недостатком данных моделей является сложность получения устойчивого решения, вследствие некорректности математической задачи по Адамару.

В целях устранения указанных недостатков, для корректного электродинамического анализа МПА на основе киральных метаматериалов предлагается использовать подход, суть которого заключается в получении сингулярного интегрального представления электромагнитного поля, которое при подстановке соответствующих граничных условий переходит в сингулярное интегральное уравнение (СИУ), численное решение которого является корректной математической задачей. Данный метод, в отличие от самосоглавленного подхода к решению электродинамических задач [8–10], предполагает использова-

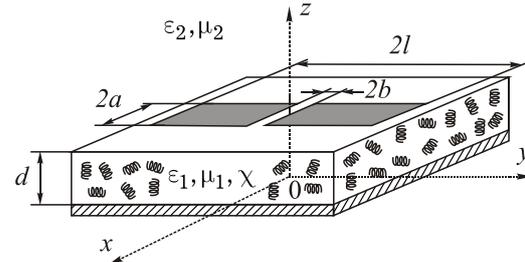


Рис. 1. Структура МПА

ние сторонних источников электрического поля, что в свою очередь, приводит к неоднородным интегральным уравнениям.

1. Постановка задачи.

Метод поверхностных импедансов

Рассмотрим микрополосковую антенну, у которой подложка выполнена из кирального метаматериала, толщиной d , и металлизирована с нижней стороны (рис. 1). Макроскопические параметры киральной подложки при этом равны ϵ_1, μ_1 и χ , где ϵ_1, μ_1 – относительные диэлектрические и магнитные проницаемости, а χ – параметр киральности, физический смысл которого, заключается в определении степени взаимосвязи процессов магнитной и электрической поляризации в среде. На данной подложке расположен бесконечно тонкий и идеально проводящий прямоугольный симметричный излучатель длиной $2l$ и шириной $2a$. Над излучателем находится диэлектрическое полупространство, у которого относительные диэлектрические и магнитные проницаемости равны ϵ_2, μ_2 .

Было положено, что излучатель является достаточно узким, в связи с чем, поперечной составляющей поверхностной плотности тока можно пренебречь $\vec{\eta} = (0, \eta_y)$. В зазор излучателя шириной $2b$ подключен источник электродвижущей силы, обеспечивающий непрерывность функции поверхностной плотности тока в зазоре и на поверхности излучателя. Предполагалось также, что тангенциальная составляющая напряженности стороннего поля имеет лишь одну продольную компоненту $\vec{E}_\tau^{cm} = \{0, E_y^{cm}, 0\}$. Кроме того, на поверхности плоского излучателя предполагается выполнение граничных условий:

$$\eta_y(x, -l) = \eta_y(x, +l) = 0,$$

$$\vec{E}_\tau(x, y) = 0 \text{ при } x \in [-a, a], y \in [-l, -b] \cup [b, l], \quad (1)$$

$$\vec{E}_\tau(x, y) = -\vec{E}_\tau^{CT} \text{ при } x \in [-a, a], y \in [-b, b].$$

Для решения задач электродинамического анализа был использован метод поверхностных

импедансов. Суть метода поверхностных импедансов заключается в определении матрицы поверхностных импедансов, связывающей Фурье-образ $\vec{T}_f = \{T_x, T_y\}$ тангенциальной составляющей напряженности электрического поля \vec{E}_t с Фурье-образом $\vec{F} = \{F_x, F_y\}$ поверхностной плотности тока на излучателе \vec{n} :

$$\begin{bmatrix} T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_y \\ F_x \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где Z_{ij} ($i, j = 1, 2$) – элементы матрицы поверхностных импедансов $[Z]$, которые являются функциями переменных β и h Фурье-пространства $Z_{ij} = Z_{ij}(\beta, h)$.

В связи с этим, возникает необходимость разложения напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей, а также поверхностной плотности тока \vec{n} в интеграл Фурье.

Элементы матрицы поверхностных импедансов Z_{ij} ($i, j = 1, 2$) определяются через элементы матрицы поверхностных адмитансов Y_{ij} ($i, j = 1, 2$), которые, в свою очередь, определяются через элементы матрицы входных адмитансов кирального слоя (киральной подложки) $Y_{ij}^{(1)}$ ($i, j = 1, 2$) и диэлектрического полупространства $Y_{ij}^{(2)}$ ($i, j = 1, 2$). Выражение для определения элементов матрицы поверхностных адмитансов имеет следующий вид:

$$Y_{ij} = Y_{ij}^{(2)} - Y_{ij}^{(1)}, \quad (3)$$

где $Y_{ij}^{(1)}$ и $Y_{ij}^{(2)}$ ($i, j = 1, 2$) – элементы матриц входных адмитансов кирального и диэлектрического слоев, соответственно.

Следует отметить, что матрица поверхностных адмитансов является обратной матрицей поверхностных импедансов, в связи с чем, элементы матрицы поверхностных импедансов будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Y_{22}/\Delta, & Z_{12} &= -Y_{12}/\Delta, \\ Z_{21} &= -Y_{21}/\Delta, & Z_{22} &= Y_{11}/\Delta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$.

Ниже приведено выражение для определения элементов матрицы входных адмитансов:

$$\begin{bmatrix} M_x^{(1,2)} \\ M_y^{(1,2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{(1,2)} & Y_{12}^{(1,2)} \\ Y_{21}^{(1,2)} & Y_{22}^{(1,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y^{(1,2)} \\ T_x^{(1,2)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $T_x^{(1)}, T_y^{(1)}, M_x^{(1)}, M_y^{(1)}$ – выражения Фурье-образов тангенциальных составляющих напряженности электрического и магнитного поля, соответственно, в киральном метаматериале.

$T_x^{(2)}, T_y^{(2)}, M_x^{(2)}, M_y^{(2)}$ – выражения Фурье-образов тангенциальных составляющих напряженности электрического и магнитного поля, соответственно, в диэлектрическом полупространстве.

2. Определение элементов матрицы входных импедансов

В большинстве случаев в основе исследований киральных сред лежит феноменологическая теория, которая предполагает использование следующих материальных уравнений [5; 6].

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_1 \vec{E} \mp i\chi \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_1 \vec{H} \pm i\chi \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \vec{E}, \end{aligned} \quad (6)$$

где ϵ_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

В данных выражениях присутствует параметр киральности χ , характеризующий степень взаимосвязи процессов электрической и магнитной поляризации в среде. Следует отметить, что здесь и далее верхние знаки в выражении (6) соответствуют киральной среде на основе «правосторонних» элементов (например, правовинтовых спиралей), а нижние знаки – киральной среде на основе «левосторонних» элементов (соответственно, левовинтовых спиралей).

С учетом вышеприведенных материальных уравнений, дифференциальные уравнения Максвелла для кирального слоя запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial z} &= -i\omega \mu_0 \mu_1 H_x^{(1)} \pm k\chi E_x^{(1)}, \\ \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z} &= i\omega \epsilon_0 \epsilon_1 E_x^{(1)} \pm k\chi H_x^{(1)}, \\ \frac{\partial E_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial x} &= -i\omega \mu_0 \mu_1 H_y^{(1)} \pm k\chi E_y^{(1)}, \\ \frac{\partial H_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial x} &= i\omega \epsilon_0 \epsilon_1 E_y^{(1)} \pm k\chi H_y^{(1)}, \\ \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(1)}}{\partial y} &= -i\omega \mu_0 \mu_1 H_z^{(1)} \pm k\chi E_z^{(1)}, \\ \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial H_x^{(1)}}{\partial y} &= i\omega \epsilon_0 \epsilon_1 E_z^{(1)} \pm k\chi H_z^{(1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где ω – циклическая частота; $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ – волновое число.

Из системы уравнений (7), путем алгебраических преобразований, выразим $E_x^{(1)}, H_x^{(1)}$ через $E_y^{(1)}, H_y^{(1)}$, а затем разложим составляющие $E_x^{(1)}, H_x^{(1)}, E_y^{(1)}, H_y^{(1)}$ в интеграл Фурье. В результате получим выражения связи для тангенциальных

составляющих Фурье-образов напряженностей электрического и магнитного полей ($T_x^{(1)}$, $M_x^{(1)}$, $T_y^{(1)}$, $M_y^{(1)}$):

$$\begin{aligned} M_x^{(1)} &= a(h) \left[-\beta h M_y^{(1)} - i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 s(h) \frac{\partial T_y^{(1)}}{\partial z} \mp \right. \\ &\left. \mp q(h) \frac{\partial M_y^{(1)}}{\partial z} \pm \zeta(h) i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \beta h T_y^{(1)} \right], \\ T_x^{(1)} &= a(h) \left[-\beta h T_y^{(1)} + i\omega \mu_0 \mu_1 s(h) \frac{\partial M_y^{(1)}}{\partial z} \mp \right. \\ &\left. \mp q(h) \frac{\partial T_y^{(1)}}{\partial z} \mp \zeta(h) i\omega \mu_0 \mu_1 \beta h M_y^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a(h) &= \frac{1}{(k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (k\chi)^2 - h^2)} \times \\ &\times \left(1 - \frac{4(k\chi)^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{(k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (k\chi)^2 - h^2)^2} \right)^{-1}, \\ \zeta(h) &= \frac{2k\chi}{(k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (k\chi)^2 - h^2)}, \\ s(h) &= 1 - \frac{2(k\chi)^2}{(k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (k\chi)^2 - h^2)}, \\ q(h) &= k\chi - \frac{2k^2 \varepsilon_1 \mu_1 k\chi}{(k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (k\chi)^2 - h^2)_1}. \end{aligned}$$

В свою очередь, $T_y^{(1)}$ и $M_y^{(1)}$ определяются из следующей системы дифференциальных уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + k^2 (\varepsilon_1 \mu_1 + \chi^2) \vec{E} \mp 2i\omega \mu_0 \mu_1 k\chi \vec{H} &= 0, \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 (\varepsilon_1 \mu_1 + \chi^2) \vec{H} \pm 2i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 k\chi \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В связи с тем, что требуется определить выражения Фурье-образов составляющих электрического и магнитного полей $T_y^{(1)}$, $M_y^{(1)}$, то также разложим выражения (9) в интеграл Фурье, а затем возьмем производные по x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{T}}{\partial z^2} + \left[k^2 (\varepsilon_1 \mu_1 + \chi^2) - \beta^2 - h^2 \right] \vec{T} \mp \\ \mp 2i\omega \mu_0 \mu_1 k\chi \vec{M} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial z^2} + \left[k^2 (\varepsilon_1 \mu_1 + \chi^2) - \beta^2 - h^2 \right] \vec{M} \pm \\ \pm 2i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 k\chi \vec{T} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражения $T_y^{(1)}$ и $M_y^{(1)}$ определяются из решения данной системы дифференциальных урав-

нений относительно Фурье-образов (10). При этом следует учитывать граничное условие: $T_y^{(1)}(z=0) = 0$.

$$\begin{aligned} T_y^{(1)} &= \pm (C_R \sin(\gamma_R z) + C_L \sin(\gamma_L z)), \\ M_y^{(1)} &= i \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} (C_R \sin(\gamma_R z) - C_L \sin(\gamma_L z)), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \sqrt{k^2 (n + \chi)^2 - \beta^2 - h^2}; \\ \gamma_L &= \sqrt{k^2 (n - \chi)^2 - \beta^2 - h^2}; \\ n &= \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}; \end{aligned}$$

C_R, C_L – некоторые константы.

В результате из матрицы (5) были получены выражения элементов матрицы входных адмитансов кирального слоя:

$$\begin{aligned} Y_{11}^{(1)}(\beta, h) &= \\ &= \frac{a(h) \left[i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 v^+(\beta, h) - Y_{12}^{(1)}(\beta, h) w^+(\beta, h) \right]}{\pm (\sin(\gamma_R z) + \sin(\gamma_L z))}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$Y_{12}^{(1)}(\beta, h) = \frac{w^-(\beta, h)}{i\omega \mu_0 \mu_1 v^-(\beta, h)},$$

$$Y_{21}^{(1)}(\beta, h) = \frac{a(h) Y_{22}^{(1)}(\beta, h)}{\mp (\sin(\gamma_R z) + \sin(\gamma_L z))} w^+(\beta, h),$$

$$Y_{22}^{(1)}(\beta, h) = \frac{\sin(\gamma_R z) - \sin(\gamma_L z)}{i\omega \mu_0 \mu_1 v^-(\beta, h) a(h)},$$

где

$$\begin{aligned} v^+(\beta, h) &= \\ &= -s(h) (\pm (\gamma_R \cos(\gamma_R z) + \gamma_L \cos(\gamma_L z))) + \\ &+ \zeta(h) \beta h (\sin(\gamma_R z) + \sin(\gamma_L z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^-(\beta, h) &= \\ &= -s(h) (\gamma_R \cos(\gamma_R z) - \gamma_L \cos(\gamma_L z)) \pm \\ &\pm \zeta(h) \beta h (\sin(\gamma_R z) - \sin(\gamma_L z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^+(\beta, h) &= \\ &= -\beta h (\pm (\sin(\gamma_R z) + \sin(\gamma_L z))) \mp \\ &\mp q(h) (\pm (\gamma_R \cos(\gamma_R z) + \gamma_L \cos(\gamma_L z))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^-(\beta, h) &= \\ &= \beta h (\sin(\gamma_R z) - \sin(\gamma_L z)) \pm \\ &\pm q(h) (\gamma_R \cos(\gamma_R z) - \gamma_L \cos(\gamma_L z)). \end{aligned}$$

Таким образом, данные выражения позволяют определить элементы матрицы входных адмитансов кирального слоя на основе «право-» и

«левосторонних» проводящих включений зеркально-асимметричной формы.

Выражения для элементов матрицы входных адмитансов ($Y_{11}^{(2)}, Y_{12}^{(2)}, Y_{21}^{(2)}, Y_{22}^{(2)}$) диэлектрического полупространства определяются аналогичным образом и приведены в монографии [11].

3. Математическая модель микрополосковой антенны с киральной подложкой.

Метод сингулярных интегральных представлений поля

На поверхности излучателя и киральной среды должны выполняться следующие граничные условия:

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, \quad E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \quad (13)$$

$$\eta_x = H_y^{(2)} - H_y^{(1)}, \quad \eta_y = H_x^{(2)} - H_x^{(1)},$$

где $E_x^{(1)}$ и $E_x^{(2)}$, $E_y^{(1)}$ и $E_y^{(2)}$ – соответственно x - и y -составляющие вектора напряженности электрического поля на границе раздела в киральной среде и в верхнем полупространстве, $H_x^{(1)}$ и $H_x^{(2)}$, $H_y^{(1)}$ и $H_y^{(2)}$ – x - и y -составляющие вектора напряженности магнитного поля на границе раздела в киральной среде и в верхнем полупространстве, η_x , η_y – x - и y -составляющие вектора плотности тока на поверхности излучателя (киральной среды).

Так как излучатель МПА является узким, то поперечная составляющая плотности тока η_x много меньше продольной η_y , поэтому определяются лишь элемент Z_{11} , поскольку, как следует из (2), данные элементы связывают Фурье-образы продольной составляющей напряженности электрического поля с Фурье-образом продольной составляющей поверхностной плотности тока:

$$T_y = Z_{11}F_y, \quad (14)$$

Поскольку выражения (14) записаны относительно Фурье-образов, то применим к ним обратное преобразование Фурье, а также учтем то, что плотность тока равна нулю везде, кроме излучателя. В итоге получаем следующее выражение для определения напряженности поля на поверхности излучателя:

$$E_y^{cm}(x, y, d) = \int_{-a}^a \int_{-l}^l \eta_y(x', y') Z^\Sigma(x', y'; x, y) dx' dy'. \quad (15)$$

где

$$Z^\Sigma(x', y', x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{11}(\beta, h) e^{-i\beta(x-x')} e^{-ih(y-y')} d\beta dh.$$

Поскольку излучатель достаточно узкий, то поперечную вариацию продольной составляющей поверхностной плотности тока можно представить в виде квазистатического приближения: $\eta_y(x') = 1/\sqrt{1-(x'/a)^2}$, поэтому функция распределения поверхностной плотности тока принимает следующий вид:

$$\eta_y(x', y') = \frac{f(y')}{\sqrt{1-(x'/a)^2}}, \quad (16)$$

где $f(y')$ – неизвестная функция, описывающая продольное распределение плотности тока.

Несобственный интеграл в выражении (16) является расходящимся, поэтому для устранения расходимости вычтем и прибавим слагаемое с асимптотическим множителем $Z_{11}^\infty(h)$, а затем произведем подстановку выражения (16) в (15), при этом учитывая граничное условие $f(-l) = f(l) = 0$ и производя интегрирование получившегося выражения по частям по y' , а также проведя ряд алгебраических операций, получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $f'(y') = df(y')/dy'$:

$$E_y(x, y, d) = \int_{-a}^a \int_{-l}^l \frac{f'(y')}{\sqrt{1-(x'/a)^2}} \Delta Z_{11}^\Sigma(x', y'; x, y) dx' dy' + \int_{-a}^a \int_{-l}^l \frac{f'(y')}{\sqrt{1-(x'/a)^2}} Z_{11}^\infty(x', y'; x, y) dx' dy', \quad (17)$$

где

$$\Delta Z_{11}^\Sigma(x', y', x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ih} \Delta Z_{11}(\beta, h) \times e^{-i\beta(x-x')} e^{-ih(y-y')} d\beta dh.$$

$$\Delta Z_{11}(\beta, h) = Z_{11}(\beta, h) - Z_{11}^\infty(h);$$

$$Z_{11}^\infty(h) - \text{это } Z_{11}(\beta, h) \text{ при } |h| \rightarrow \infty.$$

Асимптотическое представление элемента матрицы поверхностных импедансов $Z_{11}(\beta, h)$ при $|h| \rightarrow \infty$ имеет следующий вид:

$$Z_{11}(\beta, h) \xrightarrow{|h| \rightarrow \infty} Z_{11}^\infty(h) = \frac{i\omega\mu_0(\mu_1 + \mu_2)}{(k^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)(\mu_1 + \mu_2) - (k\chi)^2)} |h|. \quad (18)$$

Таким образом, подставляя асимптотическое представление (18) в выражение (17), при этом учитывая ряд табличных интегралов, получим сингулярное интегральное представление тангенциальной составляющей электрического поля $E_y(x, y, z)$:

$$E_y(x, y, d) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l af'(y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\beta a) \times \\ \times \frac{\Delta Z_{11}(\beta, h)}{ih} e^{-i\beta x} e^{-ih(y-y')} d\beta dh dy' - \\ - \frac{C_{\varepsilon, \mu, \chi}}{\pi} \zeta(x) \int_{-l}^l \frac{af'(y')}{y' - y} dy', \quad (19)$$

где

$$C_{\varepsilon, \mu, \chi} = \frac{i\omega\mu_0(\mu_1 + \mu_2)}{\left(k^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\mu_1 + \mu_2) - (k\chi)^2\right)}, \\ \zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Подставляя в выражение (19) граничные условия (1), которые, вообще говоря, справедливы в любой точке излучателя, получим сингулярное интегральное уравнение с особенностью Коши относительно неизвестной функции $f'(y')$, характеризующей продольное распределение плотности тока по излучателю.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{af'(y')}{y' - y} dy' = F(y), \quad (20)$$

где

$$F(y) = \sigma v(y) - \frac{1}{C_{\varepsilon, \mu, \chi}} \frac{a}{4\pi} \int_{-l}^l af'(y') K(y, y') dy';$$

$$K(y, y') = \frac{1}{C_{\varepsilon, \mu, \chi}} \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\beta a) \times \\ \times \frac{\Delta Z_{11}(\beta, h)}{ih} e^{-ih(y-y')} d\beta dh; \\ \sigma = i \frac{1}{2} \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{1}{Z_c} \frac{l}{a} \frac{1}{C_{\varepsilon, \mu, \chi}} V;$$

$v(y)$ – профиль напряжения в зазоре вибратора; $V = 2bE_0$ – величина напряжения в зазоре; Z_c – волновое сопротивление среды.

В дальнейшем для численных расчетов предполагается использование безразмерных величин: a/λ , l/λ , d/λ , b/l , поэтому были введены новые переменные: $\alpha = \beta a$, $\xi = ha$, $t = y/l$, $t' = y'/l$.

Данное уравнение было решено несколькими методами. Во-первых, использовался широко

известный метод моментов (МоМ). При этом в качестве базисных функций использовались полиномы Чебышева 1-го рода:

$$af'(t') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n T_n(t')}{\sqrt{1-t'^2}}, \quad (21)$$

Выбор такой базисной функции был обусловлен наличием возможности аналитического вычисления следующих интегралов:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t')}{\sqrt{1-t'^2}(t'-t)} dt' = \pi U_{n-1}(t); \\ \int_{-1}^1 \frac{T_n(t') T_p(t')}{\sqrt{1-t'^2}} dt' = \begin{cases} \pi, & p = n = 0, \\ \pi/2, & p = n, \\ 0, & p \neq n. \end{cases} \quad (22)$$

По этой же причине в качестве весовых функций были выбраны полиномы Чебышева 2-го рода:

$$\int_{-1}^1 U_{m-1}(t) U_{k-1}(t) \sqrt{1-t^2} dt = \begin{cases} \pi/2, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (23)$$

Были также разложены экспоненты в ядре СИУ по функциям Бесселя и полиномам Чебышева 1-го и 2-го рода:

$$e^{-i\frac{l}{a}\xi t} = \frac{2i}{(\xi l/a)} \sum_{k=1}^{\infty} i^{-k} k J_k(\xi l/a) U_{k-1}(t), \quad (24)$$

$$e^{i\frac{l}{a}\xi t} = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{(1 + \delta_{0,p})} J_p(\xi l/a) T_p(t'),$$

где $\delta_{0,p}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{0,p} = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

С учетом вышеизложенного, задача свелась к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), относительно неизвестных коэффициентов A_m .

$$\frac{2}{\pi} \sigma \int_{-b/l}^{b/l} \sqrt{1-t^2} U_{m-1}(t) v(t) dt = \\ = A_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{m i^{n-m+1}}{(1 + \delta_{0,n})} c_{m,n}. \quad (25)$$

Функция продольного распределения плотности тока на излучателе определяется следующим образом:

$$af(t) = \int_{-1}^t af'(t') dt' = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^t \frac{A_n T_n(t')}{\sqrt{1-t'^2}} dt' = \\ = -\sqrt{1-t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} U_{n-1}(t). \quad (26)$$

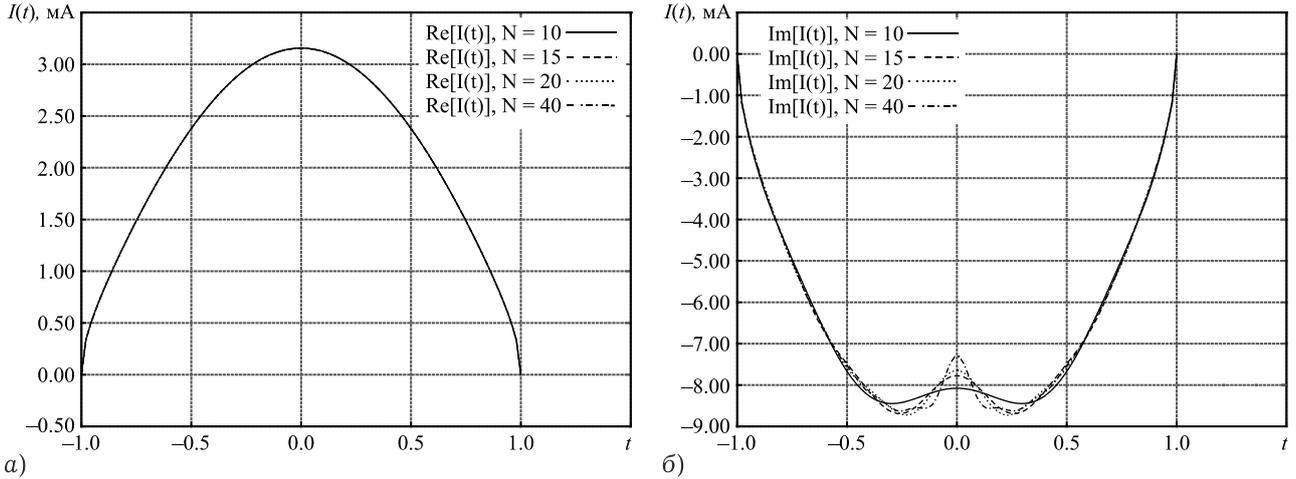


Рис. 2. Распределение тока по излучателю МПА (МоМ)

В свою очередь, токовая функция определяется как:

$$I_y(t) = \int_{-a}^a \eta_y(x, t) dx = \int_{-a}^a \frac{f(t)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} dx = a\pi f(t). \quad (27)$$

На рис. 2 приведены результаты расчета действительной (рис. 2, а) и мнимой (рис. 2, б) частей токовой функции при различном количестве членов аппроксимирующего ряда (26).

Из приведенных графиков видно, что количество членов ряда оказывает достаточно сильное влияние на функцию распределения тока

Данное уравнение решалось с помощью метода частичного обращения оператора (МЧОО), суть которого состоит в сведении сингулярного уравнения (20) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с помощью формулы обращения интеграла типа Коши неограниченного на интервале $[-1; 1]$:

$$af'(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} \left[a_0\pi - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t'^2}}{t'-t} F(t') dt' \right], \quad (28)$$

где $a_0 = 0$ – константа, определяемая из условия $f(-l) = f(l) = 0$.

Обозначая

$$Int(t) = \int_{(l_0-b)/l}^{(l_0+b)/l} \frac{\sqrt{1-t'^2}}{t'-t} v(t') dt',$$

где $l_0 \in [-l; l]$ – точка возбуждения, и учитывая (21) в результате получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $af'(t)$:

$$af'(t) = -\frac{\sigma Int(t)}{\pi\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t'^2}}{t'-t} af'(t'') K(t', t'') dt'' dt'. \quad (29)$$

Второе слагаемое в правой части интегрального уравнения (29) выразим через функцию $\varphi(t)$, в результате чего, выражение (29) переписывается следующим образом:

$$af'(t) = -\frac{\sigma Int(t) + \varphi(t)}{\pi\sqrt{1-t^2}}, \quad (30)$$

где

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t'^2}}{t'-t} \frac{Int(t'') + \varphi(t'')}{\sqrt{1-t''^2}} \times K(t', t'') dt'' dt'.$$

Аналогично, как и в случае с МоМ, разложим экспоненциальные функции в ряд по полиномам Чебышева и функциям Бесселя (24), а также учтем интегралы (22), (23) и в результате получим следующее выражение:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} 4i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ki^{n-k}}{1 + \delta_{0,n}} \zeta_{n,k} \times \int_{-1}^1 \frac{Int(t'') + \varphi(t'')}{\sqrt{1-t''^2}} T_n(t'') dt'' \times T_k(t), \quad (31)$$

где

$$\zeta_{n,k} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi l/a) J_k(\xi l/a)}{\xi} \Delta g(\xi) d\xi.$$

Неизвестную функцию $\varphi(t)$, можно представить в виде разложения в ряд по полиномам Чебышева 1-го рода:

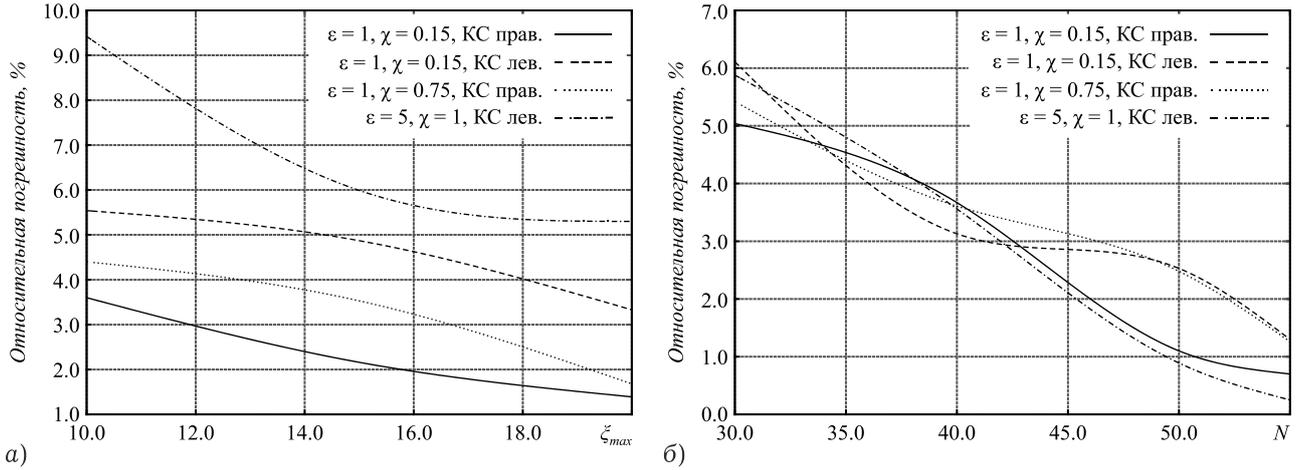


Рис. 3. Зависимости относительных погрешностей от ξ_{\max} (а) и от N (б)

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(t). \quad (32)$$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_k :

$$A_k = \frac{4i}{\pi} \sum_{n=1}^N k i^{n-k} \zeta_{n,k} \left(\text{Int}_n + \frac{\pi}{2} A_n \right), \quad (33)$$

$$k = \overline{1..N},$$

где

$$\text{Int}_n = \int_{-1}^1 \frac{\text{Int}(t'') T_n(t'')}{\sqrt{1-t''^2}} dt''.$$

Окончательно получаем выражение для функции $af(t)$:

$$af(t) = -\frac{\sigma}{\pi} \left[\int_{-1}^t \frac{\text{Int}(t')}{\sqrt{1-t'^2}} dt' - \sqrt{1-t^2} \sum_{k=1}^N \frac{A_k U_{k-1}(t)}{k} \right]. \quad (35)$$

Следует отметить, что в возбуждение задается функцией $v(t)$. Данная функция выбирается, вообще говоря, произвольным образом, но к ней предъявляется ряд требований, связанных с вопросами сходимости интеграла в выражении для $\text{Int}(t)$. В частности, функция $v(t)$ должна быть непрерывна в области зазора и равна нулю на его краях, что, в свою очередь, соответствует физической действительности. Других ограничений к выбору функции возбуждения не возникает. С учетом этого, в качестве такой функции $v(t)$ была выбрана функция $v'(t)$ вида:

$$v(t) = v'(t) = \begin{cases} 0, & |t - l_0| > b/l; \\ \sqrt{1 - ((t - l_0)l/b)^2}, & |t - l_0| < b/l. \end{cases} \quad (36)$$

В ходе численных расчетов было выявлено, что основными параметрами, которые значительно влияют на сходимость алгоритма, являются ξ_{\max} – предельное значение переменной интегрирования несобственного интеграла по h в (31), при котором достигается требуемая точность вычислений и N – число членов ряда, состоящего из полиномов Чебышева, умноженных на соответствующие коэффициенты (32). Безусловно, от выбора значений данных параметров будет зависеть точность вычислений, а кроме того, еще и сходимость всего метода в целом, поэтому достаточно важной задачей является определение их оптимального значения.

Для исследования численного алгоритма на сходимость предлагается использовать значения функции распределения тока, определенные в точках, соответствующих центру излучателя ($t = 0$), и вычисленные для разных нормированных длин излучателя l/λ (от 0.25λ до 2λ , где λ – длина волны) при различных значениях параметра киральности и относительной диэлектрической проницаемости, а также при различных типах киральной подложки. Под типами подложек понимаются киральные подложки, выполненные на основе «лево-» и «правосторонних» включений.

В результате данного исследования была оценена относительная погрешность вычислений и определены оптимальные значения параметров ξ_{\max} и N для различных длин излучателя, а также для различных значений параметра киральности. Под истинным значением будем понимать значения функции распределения тока, определенные при максимальных значениях ξ_{\max} и N . Графики зависимостей погрешностей от ξ_{\max} , а также от N приведены на рис. 3.

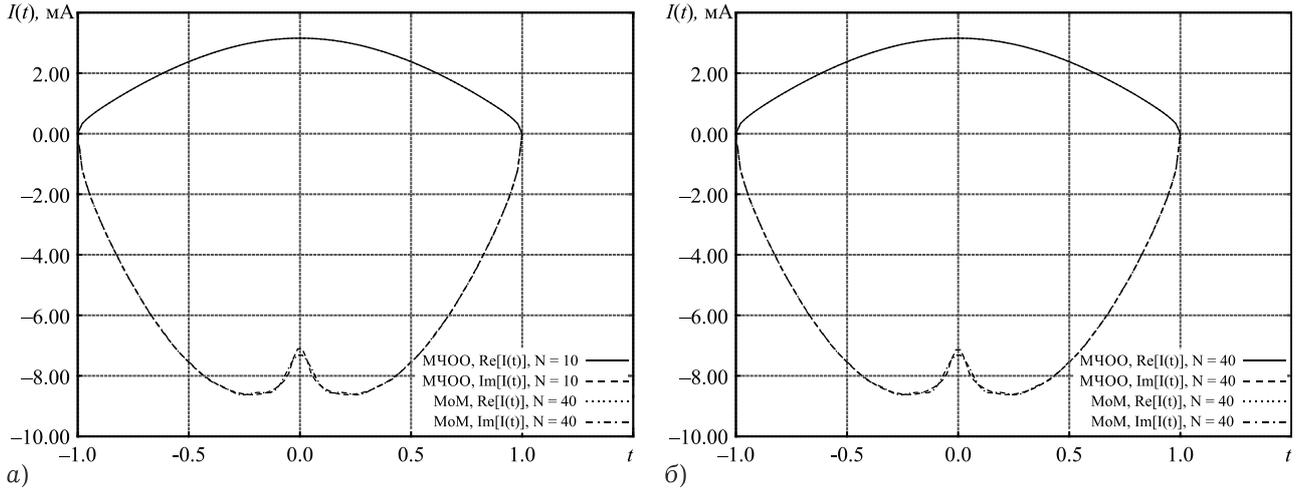


Рис. 4. Распределение тока по излучателю МПА (МоМ и МЧОО)

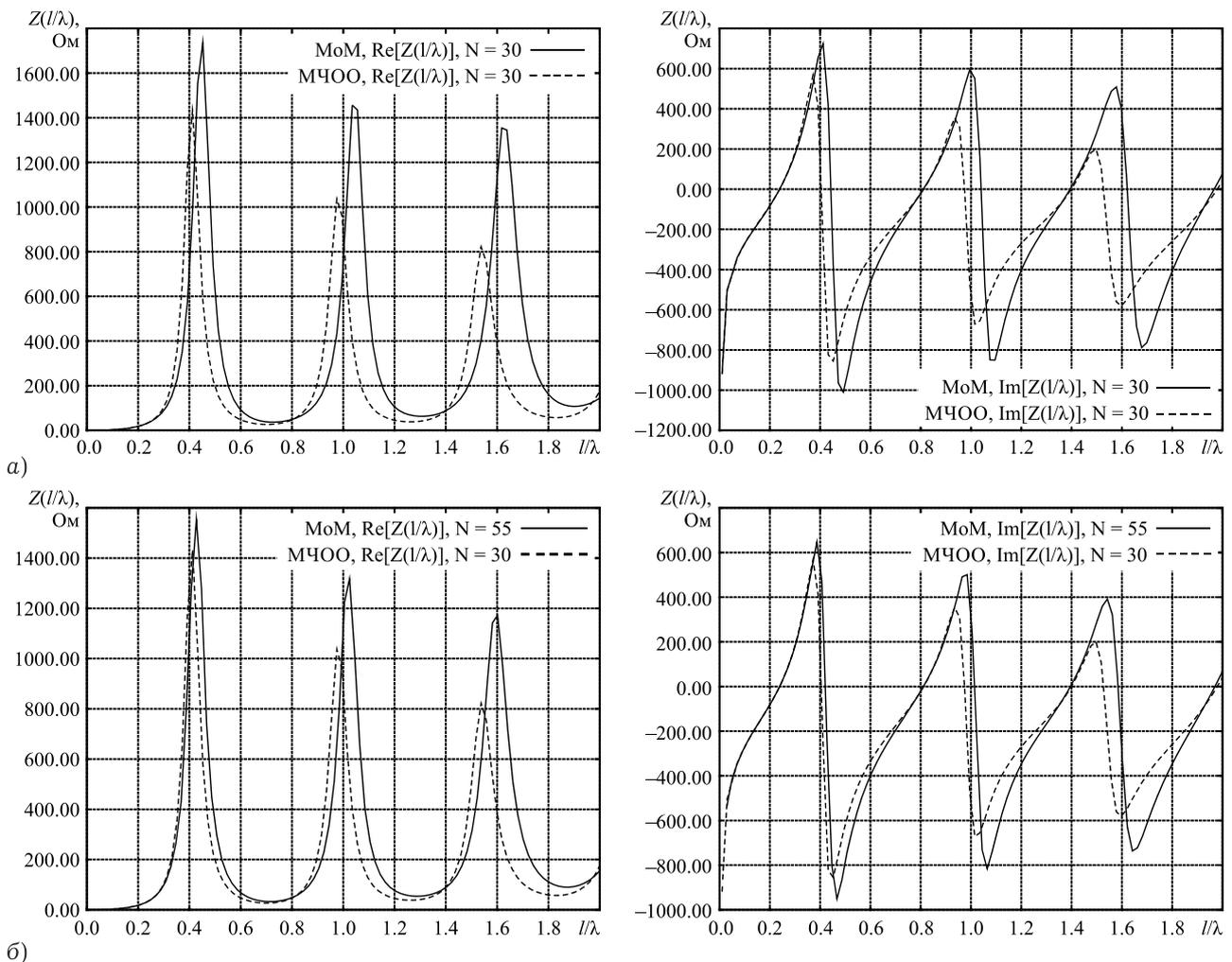


Рис. 5. Зависимость входного импеданса от l/λ (МоМ и МЧОО)

Метод МЧОО относительно параметра ξ_{\max} обладает достаточно быстрой сходимостью. Исходя из соображений ресурсоемкости метода и точности расчета, при численных расчетах, в зависимости от макроскопических параметров киральной среды, из которых наиболее важным является параметр киральности, а также типа

подложки, значение параметра ξ_{\max} следует выбирать равным не более 20. С другой стороны, гораздо сильнее влияние оказывает количество членов аппроксимирующего ряда N .

На рис. 4 приведены распределения тока по излучателю МПА, вычисленные с помощью МЧОО при $N = 10$ (рис. 4, а) и при $N = 40$

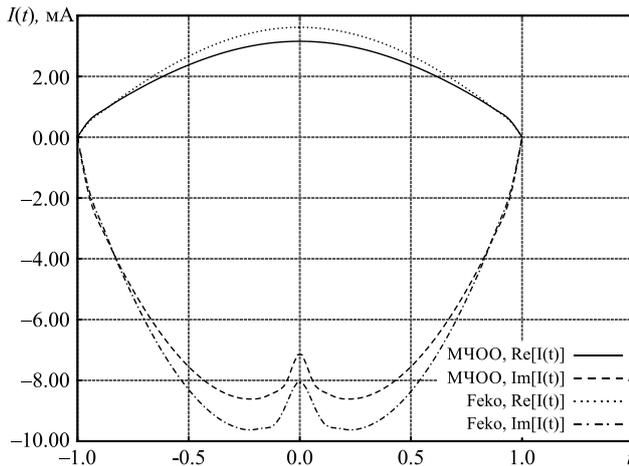


Рис. 6. Распределения токовых функций по излучателю, полученные методом МЧОО и Feko

(рис. 4, б). Приведены также распределения тока, вычисленные МоМ при $N = 40$.

Как видно, данные графики совпадают, однако при использовании МЧОО количество необходимых членов аппроксимирующего ряда для точного определения токовой функции составляет всего 10, в то время как для МоМ – 40, что, в свою очередь, несомненно, скажется на времени вычисления. Однако использование МоМ является более простым решением с математической точки зрения, что важно при решении сложных задач.

Ниже, на рис. 5 приведены зависимости входного импеданса от длины плеча излучателя нормированной на длину волны, вычисленные разными методами (МоМ и МЧОО) при $\epsilon_1 = 1$ и $\chi = 0.3$ для киральной подложки на основе правосторонних элементов. При этом количество членов ряда МЧОО выбиралось постоянным и равным 30. На рис. 5, а представлены действительные (слева) и мнимые (справа) части входного импеданса МПА с киральной подложкой, вычисленные при использовании МоМ с числом членов ряда, равном 30, а на рис. 5, б – при количестве членов ряда, равном 55.

При этом входное сопротивление микрополосковой антенны определяется следующим образом:

$$Z_{in} = \frac{V}{I(t=0)}, \quad (37)$$

где $I(t=0)$ – значение функции распределения тока, в зазоре вибратора.

При расчете характеристик микрополосковой антенны с киральной подложкой значение напряжения в зазоре вибратора было положено равным 1 В ($V = 2bE_0 = 1$ В).

Очевидно, что при дальнейшем увеличении числа членов аппроксимирующего ряда данные функции совпадут.

На рис. 6 представлен график функции распределения тока по излучателю, полученный методом МЧОО, а также с помощью программного комплекса Feko 7.0 при $\epsilon_1 = 1$ и $\chi = 0$. Такой набор параметров соответствует МПА с диэлектрической подложкой. Как видно из данного графика, данные токовые функции практически совпадают, что, в свою очередь, свидетельствует об адекватности предложенного метода электродинамического анализа.

Таким образом, предложенный подход к анализу МПА с подложками из кирального метаматериала, позволяет корректно рассчитывать распределение тока. Знание токовой функции, в свою очередь, позволяет рассчитывать поле в любой точке пространства, включая ближнюю зону, а кроме того, определять другие характеристики антенны. Предложенный подход может быть обобщен на случай различных типов излучателей (спиральные, кольцевые, фрактальные и т.п.), а также на случай многослойных структур.

Список литературы

1. Перспективы использования метаматериалов в антеннах нового поколения / А.Л. Бузов [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20. № 3. С. 15–20.
2. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор) // Журнал технической физики. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 3–28.
3. Ziolkowski R.W., Erentok A. Metamaterial-based efficient electrically small antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2006. Vol. 54. № 7. P. 2113–2130.
4. Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media / I.V. Lindell [et al.]. London: Artech House, 1994. 291 p.
5. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.
6. Будагян И.Ф., Ковальчук А.А., Чебышев В.А. Микрополосковая спиральная антенна в многослойной среде на основе диэлектрических и метаматериалов в режиме излучения наносекундных импульсов // Т-Comm. 2012. № 10. С. 30–33.
7. Zhao R., Koschny T., Soukoulis C.M. Chiral metamaterials: retrieval of the effective parameters with and without substrate // Optics Express. 2010. Vol. 18. № 14. P. 14553–14567.
8. Метод коллокаций в самосогласованной задаче об излучении из круглого отверстия в проводящем экране /

- К.И. Кисиленко [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 3. С. 73–80.
9. Формулировка некоторых самосогласованных задач радиоэлектроники / К.И. Кисиленко [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 3. С. 81–92.
10. Малышев Г.С., Раевский А.С., Раевский С.Б. Формирование функции источника, создающего заданное поле излучения // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63. № 7. С. 673–681.
11. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн / А.Н. Дементьев [и др.]. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.

Analysis of microstrip antennas with chiral metamaterials substrates by method of singular integral equations

A.M. Neshcheret

This article is devoted to the development of correct methods of electrodynamic analysis of microstrip antennas with substrates of chiral metamaterials. The method of analysis of such antennas based on the method of singular integral representations of the field and the method of surface impedances is proposed. A singular integral equation for the unknown function of the current density distribution over the radiator is obtained. Two methods of solving this equation are shown: the method of moments and the method of partial reversal of the operator. A convergence study was conducted. The approbation of the proposed method on the example of solving the test problem using the Feko software complex is performed.

Keywords: metamaterial, chiral environment, microstrip antenna, singular integral equation, convergence, correct a math problem.

Неганов, В.А.

Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.

ISBN 5-256-01812-4

В.А. Неганов, Г.П. Яровой

**ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ
УСТРОЙСТВ СВЧ**



УДК 621.396.67
ББК 32.840
Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.