2019 г. *Том 22, № 1*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.373.12

Дискретная бигармоническая модель томсоновских автогенераторов

И.Е. Борисова, А.А. Вербицкий, В.В. Зайцев

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева
443086, Российская Федерация, г. Самара
Московское шоссе, 34

Для моделирования автоколебаний в генераторах томсоновского типа предложен численно-аналитический метод, базирующийся на представлении автоколебательной системы в виде совокупности двух осцилляторов – основной частоты и ее третьей гармоники. Ведущий осциллятор генерирует строго монохроматические автоколебания в дискретном времени и возбуждает вынужденные колебания осциллятора третьей гармоники. Основное внимание уделено автоколебаниям в трехточечных схемах с емкостной и индуктивной связями. Показано, что предложенный метод моделирования позволяет давать сравнительные оценки амплитуд гармонических составляющих спектра автоколебаний.

Ключевые слова: трехточечные схемы автогенераторов, метод гармонической линеаризации, гармоники автоколебаний, автоколебания в дискретном времени.

Введение

К классическим схемам автогенераторов томсоновского типа относятся схема Хартли (индуктивная трехточка), схема Колпитца (емкостная трехточка) и схема Мейснера [1–3]. В квазигармоническом приближении динамика этих автоколебательных систем (АКС) адекватно описывается в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. При высоких уровнях возбуждения для моделирования автоколебаний приходится использовать численные методы. Но этот путь для генератора Хартли сопряжен с определенными трудностями, поскольку математическая модель генератора формулируется как задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно старшей производной.

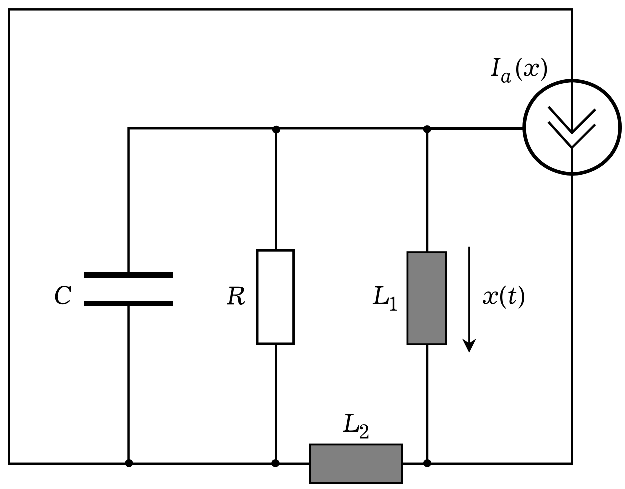

Рис. 1. Эквивалентная схема генератора Хартли

В настоящем сообщении предлагается комбинированный численно-аналитический метод моделирования АКС, базирующийся на представлении системы в виде совокупности осцилляторов основной частоты и ее третьей гармоники. Ведущий осциллятор генерирует строго монохроматические автоколебания в дискретном времени в соответствии с алгоритмом (разностным уравнением движения), предложенным в работе [4]. Осцилляторы гармоник – линейные осцилляторы с узкополосным возбуждением.

Основное внимание уделено анализу генерации третьей гармоники в схемах Хартли и Колпитца в сравнении с третьей гармоникой генератора Мейснера.

1. Эквивалентные схемы и уравнения движения

Генератор Хартли. Рассмотрение начнем с генератора с автотрансформаторной связью – генератора Хартли. Его эквивалентная схема представлена на рис. 1.

Математическая модель АКС в форме дифференциального уравнения движения, составленного на основе ее схемы, имеет вид

DOI: 10.18469/1810-3189.2019.22.1.32-35
© Борисова И.Е., Вербицкий А.А., Зайцев В.В., 2019

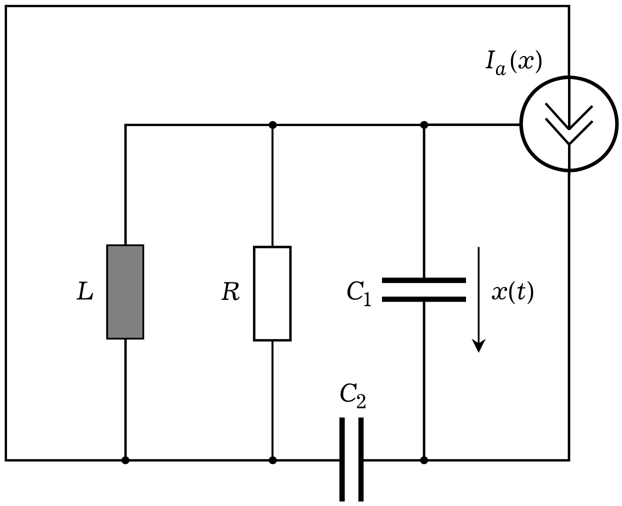

Рис. 2. Эквивалентная схема генератора Колпитца

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=-\frac{nZ_0}{\omega_0}\frac{d^3}{dt^3}I_a(x), \quad (1)$$

где ω_0, Q и Z_0 – собственная частота, добротность и характеристическое сопротивление LRC-контура ($L=L_1+L_2$); $n=L_1L_2/(L_1+L_2)^2$ – коэффициент автотрансформаторной связи. Активный трехполюсник (генератор тока, управляемый напряжением) представлен в уравнении (1) вольтамперной характеристикой $I_a(x)$. В дальнейшем будем записывать ее в виде $I_a(x)=G_0u(x)$, где G_0 – крутизна характеристики в малосигнальном (линейном) приближении, а для нелинейности примем «классическую» аппроксимацию

$$u(x)=x-\frac{x^3}{3}.$$

Дифференциальное уравнение (1) не разрешено относительно старшей производной, что затрудняет его численное интегрирование. Здесь предлагается один из способов решения этой задачи.

Для удобства дальнейших преобразований уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\gamma\omega_0\frac{d}{dt}z\big(x(t)\big), \quad (2)$$

где обозначено $\gamma=nG_0Z_0$ и

$$z\big(x(t)\big)=-\omega_0^{-2}\frac{d^2}{dt^2}u\big(x(t)\big). \quad (3)$$

Константа γ связана с параметром превышения порога генерации соотношением $p=\gamma Q$ (порог: $p=1$).

Генератор Колпитца. Эквивалентная высокочастотная схема генератора представлена на рис. 2.

Дифференциальное уравнение движения, записанное на основе схемы рис. 2, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=-n\omega_0^3Z_0\int_0^t I_a\big(x(t)\big)\,dt, \quad (4)$$

где ω_0, Q и Z_0 – собственная частота, добротность и характеристическое сопротивление LRC-контура ($C^{-1}=C_1^{-1}+C_2^{-1}$), $n=C/(C_1+C_2)$. Вольт-амперная характеристика активного трехполюсника $I_a(x)$ имеет тот же вид, что и в генераторе Хартли (1).

Уравнение (4) приведем к форме (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\gamma\omega_0\frac{d}{dt}z\big(x(t)\big),$$

где теперь введено обозначение

$$z\big(x(t)\big)=-\omega_0^2\int_0^t dt'\int_0^t dt''u\big(x(t'')\big). \quad (5)$$

Отметим, что уравнение (2) при условии $z\big(x(t)\big)=u\big(x(t)\big)$ моделирует автоколебания в *генераторе Мейснера* (см. рис. 3).

2. Бигармоническая модель автоколебаний

Для осцилляций

$$x(t)=x_1(t)=a_1\cos\big(\omega_0t\big)$$

с амплитудой a_1 функция $u\big(x_1(t)\big)$ в правой части уравнения (2) представляется рядом Фурье

$$u\big(x_1(t)\big)=u_1(a_1)\cos\big(\omega_0t\big)+ \\ +u_3(a_1)\cos\big(3\omega_0t\big),$$

где

$$u_1(a_1)=\left(1-\frac{1}{4}a_1^2\right)a_1= \\ =S(a_1^2)a_1,\ \ u_3(a_1)=-\frac{1}{12}a_1^3.$$

Интегро-дифференциальные преобразования в функциях, входящих в правые части уравнений (2) в дальнейшем проводится с учетом медленности амплитуды a_1. Поэтому приближенное выражение для осциллирующих функций (3) и (5) имеет вид

$$z\big(x_1(t)\big)=u_1(a_1)\cos\big(\omega_0t\big)+ \\ +ku_3(a_1)\cos\big(3\omega_0t\big), \quad (6)$$

где множитель $k=9$ для схемы Хартли, $k=1/9$ для схемы Колпитца и $k=1$ для схемы Мейснера.

Теперь приравнивая соответствующие гармоники в правой и левой частях уравнения движения (2), его можно свести к совокупности двух осцилляторов первой $x_1(t)$ и третьей $x_3(t)$ гармоник:

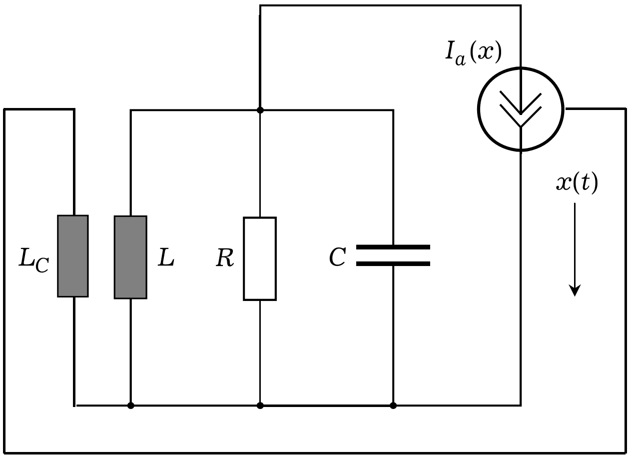

Рис. 3. Эквивалентная схема генератора Мейснера

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx_1}{dt}+\omega_0^2x_1=\gamma\omega_0S(a_1^2)\frac{dx_1}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx_3}{dt}+\omega_0^2x_3= \quad (8)$$
$$=-3k\gamma\omega_0^2u_3(a_1)\sin\left(3\omega_0t\right).$$

Для анализа генерации первой гармоники линеаризованным осциллятором (7) воспользуемся его дискретной моделью, предложенной в работе [4]. Предполагая дискретизацию времени с интервалом Δ в уравнение (7) вводится безразмерная временная переменная $\tau = t / \Delta$:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+2\pi\nu\frac{dx_1}{d\tau}+4\pi^2\Omega_0^2x_1=2\pi\nu pS(a^2)\frac{dx_1}{d\tau}. \quad (9)$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta$; $\nu = \Omega_0 / Q$ – полоса резонатора.

На временной сетке $\tau_n = n$ дифференциальное уравнение (9) заменяется разностным уравнением

$$x[n]-2\alpha\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n-1]+\alpha^2x[n-2]=$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}\left(2-W[n-1]\right)\times \quad (10)$$
$$\times\left(\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n-1]-x[n-2]\right),$$

где $\varepsilon = 2\pi\alpha\nu p$ и $\alpha = \exp(-\pi\nu)$ – параметры глубины обратной связи и диссипативности. При этом мощность автоколебаний $W = a_1^2 / 2$ вычисляется по мгновенным значениям осцилляций:

$$W[n]=\frac{1}{2\sin^2\left(2\pi\Omega_0\right)}\times \quad (11)$$
$$\times\left(x^2[n]-2\cos\left(2\pi\Omega_0\right)x[n]x[n-1]+x^2[n-1]\right).$$

Таким образом, дискретный осциллятор (8)–(9) моделирует первую гармонику автоколебаний.

Колебания линейного осциллятора третьей гармоники (8) с квазистационарным возбуждением проанализируем методом медленно меняющихся амплитуд, в рамках которого осцилляции представляются в виде

$$x_3(t)=\frac{1}{2}A_3(t)\exp\left(j3\omega_0t\right)+$$
$$+\frac{1}{2}A_3^*(t)\exp\left(-j3\omega_0t\right)$$

и для «медленной» комплексной амплитуды $A_3(t)$ записывается укороченное уравнение

$$j6\omega_0\left(\frac{d}{dt}A_3(t)+\frac{\omega_0}{2Q}A_3(t)\right)-$$
$$-8\omega_0^2A_3(t)=j3k\gamma\omega_0^2u_3(a_1).$$

С учетом того, что $Q >> 1$ и $\left|dA_3 / dt\right| << \omega_0\left|A_3\right|$ первыми двумя слагаемыми в этом уравнении можно пренебречь. Тогда

$$a_3(t)=\frac{3}{8}k\gamma u_3(a_1(t)). \quad (12)$$

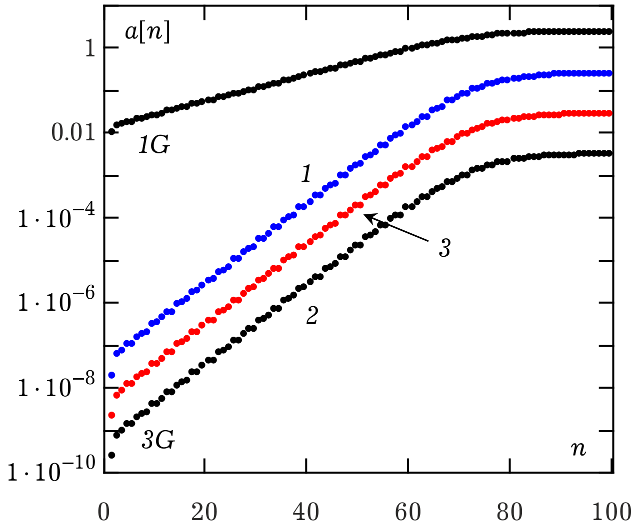

Рис. 4. Временные зависимости амплитуд первой (1G) и третьей (3G) гармоник автоколебаний в схемах Хартли (1), Колпитца (2) и Мейснера (3)

На рис. 4 для иллюстрации показан процесс установления амплитуды $a_1[n]=\sqrt{2W[n]}$ автоколебаний основной частоты и амплитуды $a_3[n]$ третьей гармоники в рассматриваемых генераторах при $\Omega_0 = 0.19$, $Q = 30$, $p = 5$.

Из выражения (12) следует очевидный вывод о том, что при одинаковых условиях амплитуды третьих гармоник в схемах Хартли, Мейснера и Колпитца находятся в отношении $9:1:9^{-1}$. Предложенная модель дает простое объяснение этому эффекту – ток возбуждения колебательного контура в схемах Хартли и Колпитца подвергается дополнительным, по сравнению со схемой Мейснера, преобразованиям. Дифференцирование тока в схеме Хартли увеличивает повышает уровень высокочастотных составляющих спектра автоколебаний, в то время как интегрирование тока в схеме Колпитца снижает этот уровень.

Заключение

Предложенный метод моделирования АКС дает наглядное представление о соотношении уровней гармоник в основных схемах автогенераторов томсоновского типа. В рамках классификации теории нелинейных колебаний представленная модель соответствует улучшенному первому приближению метода усреднения.

Список литературы

1. Евтянов С.И. Ламповые генераторы. М.: Связь, 1967. 384 с.
2. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
3. Титце У., Шенк Л. Полупроводниковая схемотехника. 12-е изд. Т. 2. М.: ДМК Пресс, 2015. 943 с.
4. Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю. Генератор монохроматических автоколебаний в дискретном времени // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 1. С. 54–57.

The discrete biharmonic model of Thomson self-oscillators

I.E. Borisova, A.A. Verbitsky, V.V. Zaitsev

For modeling of self-oscillations in generators of Thomson type the numerical-analytic method is offered. The method is based on representation of self-oscillatory system in the form of set of two oscillators – the main frequency and its third harmonica. The leading oscillator generates strictly monochromatic self-oscillations in discrete time and excites on the oscillator of the third harmonica. The main attention is paid to self-oscillations in three-point schemes with capacitor and inductive communications. It is shown that the offered method of modeling allows to give comparative estimates of amplitudes of harmonious components of a spectrum of self-oscillations

Keywords: three-point schemes of oscillators, method of harmonious linearization, harmonicas of self-oscillations, self-oscillations in discrete time.

Неганов, В.А.

Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.

ISBN 5-256-01812-4

УДК 621.396.67
ББК 32.840
Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.