

О собственных значениях интегрального оператора сингулярного интегрального уравнения тонкого трубчатого вибратора

Д.П. Табаков, А.Г. Майоров

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

Рассмотрено сингулярное интегральное уравнение тонкого трубчатого вибратора. Исследована зависимость собственных значений интегрального оператора сингулярного интегрального уравнения от частоты и геометрических размеров вибратора с определением их асимптотического поведения при малых длинах и малых радиусах вибратора. Показано, что данные зависимости допускают простую полиномиальную аппроксимацию, а для собственных функций интегрального оператора целесообразна аппроксимация гармоническими функциями. Полученные результаты могут послужить основой при построении приближенных решений внутренней задачи для тонкого трубчатого вибратора.

Ключевые слова: собственные значения, собственные векторы, сингулярное интегральное уравнение, электрический вибратор, аппроксимация, метод коллокаций, резонансная частота.

Введение

Тонкий электрический вибратор является классическим объектом исследования в теории антенн. Особое значение имеет решение внутренней электродинамической задачи, подразумевающей отыскание функции распределения тока по поверхности вибратора. Зная вид этой функции, можно переходить к решению внешней электродинамической задачи – определению электромагнитного поля в любой точке пространства. Наиболее известной на сегодняшний день является тонкопроволочная модель вибратора, в рамках которой внутренняя задача сводится к интегральному уравнению (ИУ) Поклингтона [1]. Данная модель имеет ряд недостатков, рассмотренных в [2]. Там же предложена более совершенная трубчатая модель вибратора, решение внутренней задачи для которого сводится к сингулярному интегральному уравнению (ИУ) с особенностью типа Коши, записанному относительно производной поверхностной плотности тока. В [3] распределение тока для трубчатой модели вибратора вычисляется с помощью гиперсингулярного ИУ.

Решение ИУ осуществляется путем его сведения к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом моментов [4]. В рамках данного метода сходимость решения определена DOI: 10.18469/1810-3189.2019.22.1.26-31

ляется выбором базисных и тестовых функций. В случае, когда базисные и тестовые функции являются собственными функциями интегрального оператора (ИО), необходимость в решении СЛАУ отпадает, так как ее матрица становится диагональной, а элементы диагонали определяются собственными значениями ИО.

Определение собственных значений и собственных функций ИО также является непростой задачей, но если она решена, то появляются по крайней мере три преимущества. Первое преимущество заключается в независимости вида собственных функций от частоты, второе – в возможности аппроксимации частотных зависимостей собственных значений, и, соответственно, аппроксимации решения внутренней задачи без решения СЛАУ на конкретной частоте. Третье преимущество заключается в отсутствии необходимости решения СЛАУ при изменении функции возбуждения. Также представление решения внутренней задачи в форме разложения в ряд по собственным функциям позволяет лучше понять причины его формирования.

1. Сингулярное интегральное уравнение

Подробное описание физической модели трубчатого вибратора можно найти в [2]. Геометрия © Табаков Д.П., Майоров А.Г., 2019

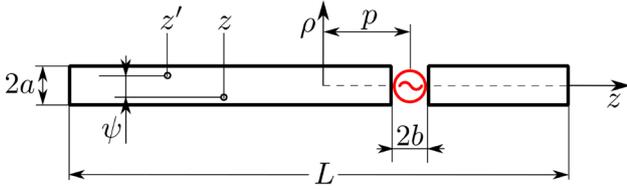


Рис. 1. Геометрия трубчатого вибратора

трубчатого вибратора показана на рис. 1. Здесь L – длина вибратора; a – радиус трубки; $2b$ – ширина зазора; p – смещение центра зазора вдоль оси Oz .

Сингулярное ИУ (СИУ) трубчатого вибратора связывает z -компоненту неизвестной функции распределения плотности тока $\eta(z)$ с z -компонентой распределения стороннего электрического поля $E_z^{(cm)}(z)$. В рамках модели данные функции предполагаются азимутально-независимыми. При этом данное СИУ удобно представить в операторной форме:

$$\mathcal{Z}_m[\bar{Z}\eta(z')] = E_z^{(cm)}(z), \quad z \in [-L/2; L/2]. \quad (1)$$

Здесь:

$$\bar{Z}(\ast) = \int_{-L/2}^{L/2} (\ast)K(z, z')dz'$$

– нормированный ИО, осуществляющий линейное преобразование функции без изменения размерности; $\eta(z')$ – функция распределения плотности электрического тока вдоль поверхности вибратора; \mathcal{Z}_m – волновой импеданс свободного пространства,

$$K(z, z') = \frac{ai}{4\pi k} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} G(z, z', \psi) d\psi$$

– ядро СИУ; $G = e^{-ikR}/R$ – функция Грина свободного пространства;

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2(\psi/2)} \quad (2)$$

– расстояние между точкой источника и точкой наблюдения, располагающихся на поверхности вибратора; k – волновое число. В неявном виде ядро СИУ содержит логарифмическую и гиперсингулярную особенности [6] и может быть записано в виде:

$$K(z, z') = D(z, z') + c_1 \ln |z - z'| + \frac{c_2}{(z - z')^2}. \quad (3)$$

Здесь $D(z, z')$ – ядро, не содержащее особенностей; c_1, c_2 – известные коэффициенты.

В отличие от ИУ Поклингтона [1], классифицируемого как ИУ Фредгольма первого рода [2], решение представленного СИУ корректно и устойчиво при любых отношениях a/λ , где λ – длина волны излучения.

2. Собственные значения и собственные функции интегрального оператора

Задача на собственные значения и собственные функции в нашем случае может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} [\bar{Z}\phi_k(z')] &= \xi_k \phi_k(z), \\ z &\in [-L/2; L/2], \\ k &= 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ξ_k – k -е собственное значение интегрального оператора; $\phi_k(z)$ – соответствующая ему собственная функция. Учитывая, что $\eta(z) = H_\varphi(z)$, значения \mathcal{Z}_m / ξ_k приобретают смысл поверхностного импеданса для соответствующих собственных функций. Отметим, что оператор \bar{Z} является несамосопряженным вследствие того, что энергия излучения, создаваемая поверхностным током $\eta(z)$, уходит в открытое пространство в виде электромагнитных волн. В результате этого собственные значения и собственные функции задачи (4) являются комплексными. В теории характеристических мод для перехода к вещественным ξ_k и $\phi_k(z)$ используют иную формулировку задачи [7; 8]. Свойство ортогональности собственных функций выражается в форме:

$$\int_L \phi_n(z) \phi_k(z) dz = \delta_{n,k}, \quad (5)$$

где $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера. С учетом этого прямое $K = K^{\pm 1}$ и обратное $K = K^{-1}$ ядра СИУ могут быть представлены в виде:

$$K^{\pm 1}(z, z') = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{\pm 1} \phi_k(z) \phi_k(z'). \quad (6)$$

Если функции распределения тока и стороннего поля представлены в виде разложения в ряды по собственным функциям:

$$\eta(z') = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \phi_k(z'), \quad E^{(cm)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \phi_k(z), \quad (7)$$

то коэффициенты η_k могут быть определены следующим образом:

$$\eta_k = \varepsilon_k \sigma_k / \mathcal{Z}_m, \quad \sigma_k = \xi_k^{-1}. \quad (8)$$

В результате при известных или заранее определенных функциях $\phi_k(z)$ внутренняя задача может быть решена без использования СЛАУ, а аппроксимация зависимостей $\xi_k = \xi_k(L/\lambda, a/L)$ позволяет осуществлять аппроксимацию решения СИУ (4) с помощью (7), (8).

При численном моделировании необходимо осуществить дискретизацию задачи (4). Наи-

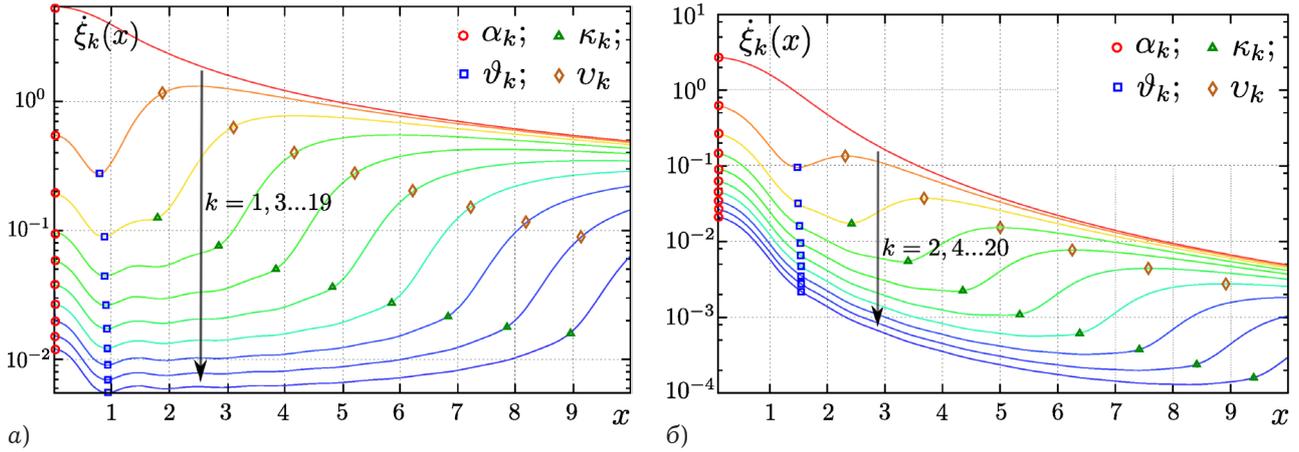


Рис. 2. Вид функций $\dot{\xi}_k(x)$ для нечетных (а) и четных (б) k

более просто и наглядно данный процесс осуществляется с помощью метода коллокаций [9]. Суть метода заключается в разбиении вибратора на короткие сегменты длиной $\Delta_j \ll \lambda$, токовая функция на которых считается постоянной: $\eta(z') = \eta(z_j) = \eta_j$. Здесь: z_j – точки коллокации, расположенные в центрах соответствующих сегментов; $j = 1 \dots N$ – номер сегмента, N – их общее число. В результате получаем задачу на собственные значения и собственные векторы в стандартной формулировке:

$$\hat{\mathbf{Z}}\phi_k = \xi_k\phi_k, \quad k = 1 \dots N. \quad (9)$$

Здесь:

$$Z_{i,j} = \int_{-\Delta_j/2}^{\Delta_j/2} K(z_i, z_j + z') dz', \quad i, j = 1 \dots N,$$

– элементы матрицы $\hat{\mathbf{Z}}$; ϕ_k – собственные векторы, содержащие значения собственных функций в точках коллокации z_j .

Значения поверхностной плотности тока $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2 \dots \eta_N\}$ в точках коллокации можно вычислить следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathcal{Z}_m \hat{\mathbf{\Phi}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}}^{-1} \hat{\mathbf{\Phi}} \mathbf{e}. \quad (10)$$

Здесь $\hat{\mathbf{\Phi}}$ – матрица, k -я строка которой содержит ϕ_k ; $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ – диагональная матрица, содержащая собственные значения ξ_k ; \mathbf{e} – вектор стороннего поля в точках коллокаций. Далее рассмотрим особенности поведения собственных чисел ИО.

3. Численные результаты

Численное моделирование проводилось в диапазонах значений

$$L / \lambda \equiv x \in [10^{-4}; 10],$$

$$a / \lambda \equiv y \in 4 \cdot [10^{-4}; 10^{-2}],$$

при которых трубчатый вибратор можно считать тонким. Волновое сопротивление среды

предполагалось равным $\mathcal{Z}_m = 120\pi$ Ом, что соответствует воздуху или вакууму. Число сегментов в расчетах полагалось равным 300. Вычисления проводились с использованием чисел двойной точности. При этом были получены массивы собственных чисел и собственных векторов, послужившие основой представленных ниже результатов.

Рассмотрим зависимость собственных значений ξ_k от x и y . Ее можно записать в следующем виде:

$$\xi_k(x, y) = \dot{A}_k(x) \dot{\xi}_k(x, y) + i \ddot{A}_k(x) \ddot{\xi}_k(x, y), \quad (11)$$

здесь

$$\dot{A}_k(x) = \begin{cases} x^2, & k \in 1, 3, \dots, \\ x^4, & k \in 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (12)$$

$$\ddot{A}_k(x) \equiv \ddot{A} = 1 / x$$

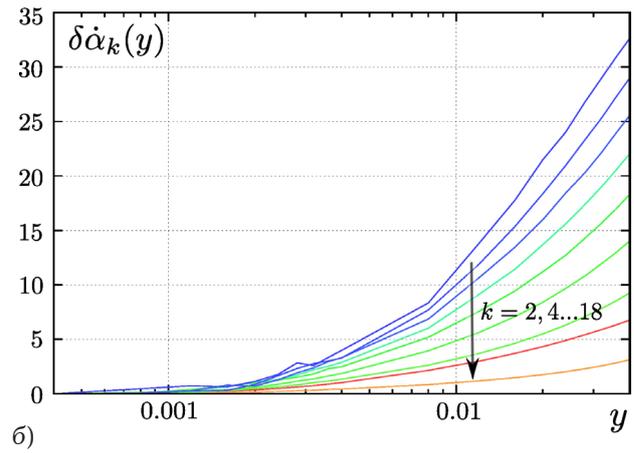
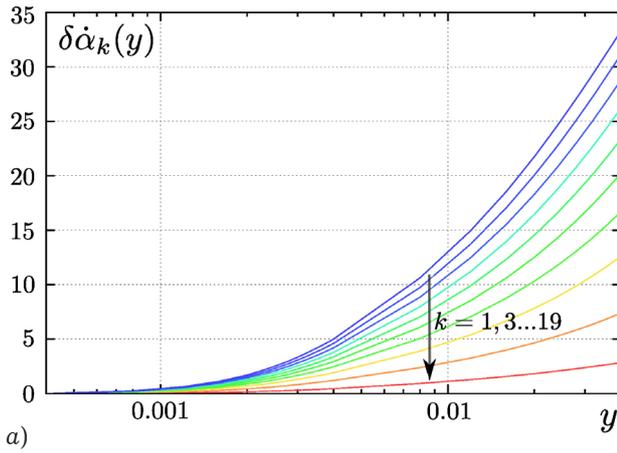
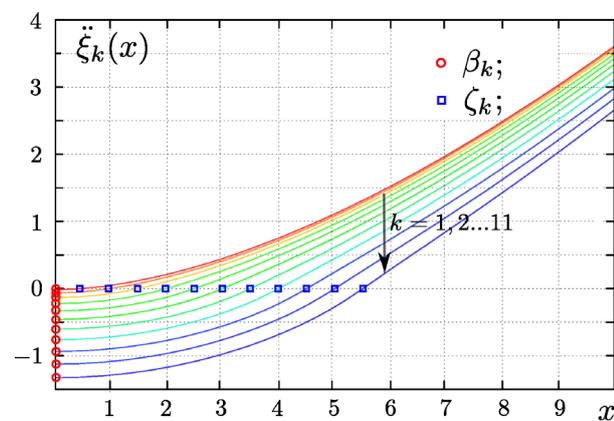
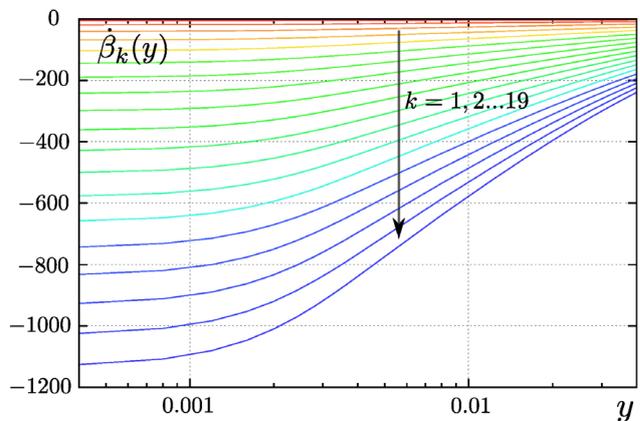
– функции, с точностью до множителя определяющие асимптотическое поведение собственных значений при $x \rightarrow 0$; $\dot{\xi}_k(x, y)$, $\ddot{\xi}_k(x, y)$ – функции, гладкие относительно переменной x , причем:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k(x \rightarrow 0, y) &\rightarrow \alpha_k(y), \\ \ddot{\xi}_k(x \rightarrow 0, y) &\rightarrow \beta_k(y), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha_k(y)$, $\beta_k(y)$ – граничные функции.

Таким образом, действительная часть ξ_k демонстрирует разное асимптотическое поведение для четных и нечетных значений k , а мнимая часть ξ_k ведет себя асимптотически одинаково с точностью до множителя для всех k . В целом при $x \rightarrow 0$ собственные числа становятся чисто мнимыми, что отражается в емкостном характере сопротивления электрического вибратора при малых x [5].

Вид функций $\dot{\xi}_k(x, y)$ для нечетных и четных k при $y = 4 \cdot 10^{-3}$ приведен на рис. 2. Можно отметить, что они ведут себя несколько по-разному

Рис. 3. Вид функций $\delta\dot{\alpha}_k(y)$ для нечетных (а) и четных (б) k Рис. 4. Вид функций $\ddot{\xi}_k(x)$ Рис. 5. Вид функций $\dot{\beta}_k(y)$

с ростом x , но также имеют и схожие черты. Очевидно, что при устремлении x к нулю функции $\ddot{\xi}_k(x)$ стремятся к значениям α_k , обозначенным на рис. 2 точками. Функции $\ddot{\xi}_k(x)$ с нечетными $k > 1$ имеют первый локальный минимум ϑ_k вблизи $x = 1$. Точки начала их интенсивного роста обозначены как κ_k , а точки замедления роста – как υ_k .

Для четных k значения ϑ_k находятся вблизи $x = 1.5$ и соответствуют точкам, в которых происходит замедление спада $\ddot{\xi}_k(x)$, а значения κ_k и υ_k также соответствуют точкам начала интенсивного роста $\ddot{\xi}_k(x)$ и его замедления. Для $k > 2$ точки κ_k и υ_k находятся вблизи $x = (k - 1) / 2$ и $x = (k + 1) / 2$ соответственно.

В результате расчетов было выявлено, что зависимость α_k от y целесообразно представить в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_k(y) = y\dot{\alpha}_k(y), \\ \alpha_k(y \rightarrow 0) &\rightarrow \dot{\alpha}_k^{(0)} = \text{const.} \end{aligned} \quad (14)$$

Значения $\dot{\alpha}_k$ относительно слабо зависят от y . Это можно видеть из рис. 3, на котором представлены относительные погрешности $\dot{\alpha}_k$, вычисляемые по формуле:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\alpha}_k(y) &= 100 \left| \dot{\alpha}_k(y) - \dot{\alpha}_k(y_0) \right| / \dot{\alpha}_k(y_0), \\ y_0 &= 4 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (15)$$

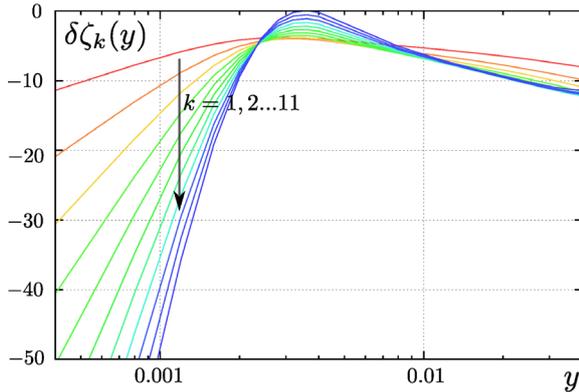
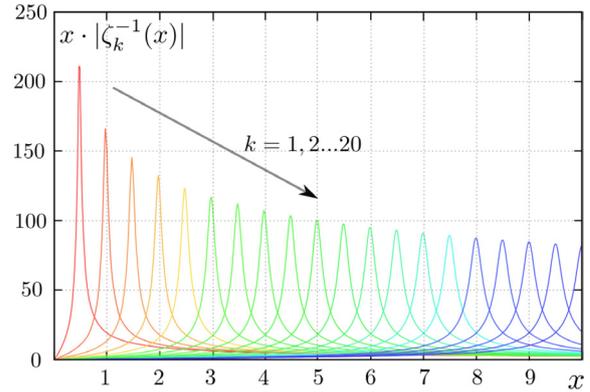
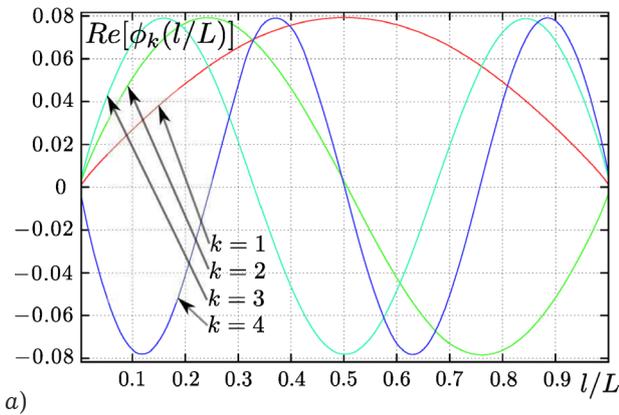
Вид функций $\ddot{\xi}_k(x, y)$ при $y = 4 \cdot 10^{-4}$ приведен на рис. 4. При устремлении x к нулю функции $\ddot{\xi}_k(x)$ стремятся к значениям β_k , обозначенным на рис. 4 точками. В результате расчетов было выявлено, что зависимость β_k от y целесообразно представить в виде:

$$\begin{aligned} \beta_k &= \beta_k(y) = y\dot{\beta}_k(y), \\ \dot{\beta}_k(y \rightarrow 0) &\rightarrow \dot{\beta}_k^{(0)} = \text{const.} \end{aligned} \quad (16)$$

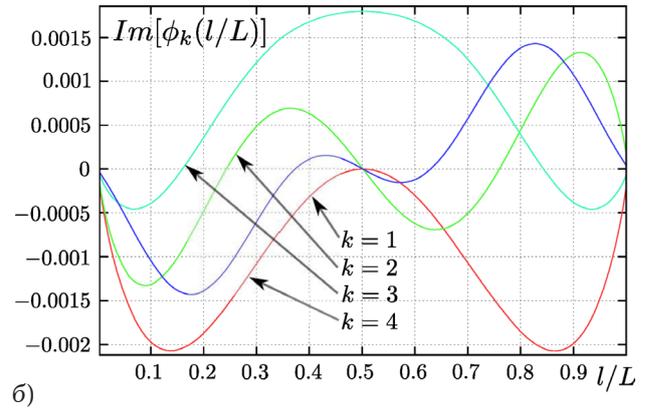
Вид функций $\dot{\beta}_k(y)$ приведен на рис. 5. Очевидно, что функции $\dot{\alpha}_k(y)$ и $\dot{\beta}_k(y)$ допускают достаточно простую полиномиальную аппроксимацию.

Важное значение имеют нули ζ_k функций $\ddot{\xi}_k(x)$ при фиксированных значениях y , определяющие резонансную частоту соответствующей собственной функции. Они расположены вблизи значений $x = k / 2$, но смещены относительно них в зависимости от k и отношения y . На рис. 6 приведены зависимости смещений, отнесенных к длине интервала между двумя соседними корнями

$$\delta\zeta_i = 200(k/2 - \zeta_k). \quad (17)$$

Рис. 6. Вид функций $\delta\zeta_k(y)$ Рис. 7. Вид функций $x |\zeta_k^{-1}(x)|$ 

а)



б)

Рис. 8. Вид первых 4-х собственных функций: а) действительная часть; б) мнимая часть

Наиболее важное значение с практической точки зрения имеет смещение первого собственного значения, которое, по сути, определяет коэффициент укорочения вибратора. Из графиков, приведенных на рис. 6, видно, что наименьшее смещение для всех собственных функций реализуется в окрестности $y \approx 0.0035$. Также из данного рисунка можно видеть, что смещение ζ_k сторону более низких частот усиливается как с уменьшением, так и с ростом y , а при $k > 11$ и $y \approx 0.0035$ наблюдается смещение ζ_k в сторону более высоких частот.

На рис. 7 представлены зависимости $x |\zeta_k^{-1}(x)|$, которые демонстрируют резонансные свойства собственных значений. Видно, что в исследуемом диапазоне каждое собственное значение имеет только один резонанс, при котором в общем распределении тока преобладает соответствующая собственная функция. Особенно ярко этот резонанс проявляется для первой собственной функции вблизи $x \approx 0.47$. Известно, что при этом распределение тока практически не зависит от положения точки питания вибратора [5]. Также можно отметить, что амплитуда и добротность резонансов убывает с увеличением x и k .

На рис. 8 представлен вид первых четырех собственных функций $\phi_k(l/L)$, вычисленных при

$y = 4 \cdot 10^{-4}$, где $l \in [0; L]$ – координата точки на вибраторе. Отметим, что собственные функции являются комплексными, причем мнимая часть $\phi_k(l/L)$ по максимальной амплитуде примерно в 40 раз меньше действительной. Данное соотношение уменьшается с увеличением y . Это позволяет сделать вывод о том, что фаза колебаний собственных функций зависит от координаты l на вибраторе, и максимальная разность фаз нарастает с увеличением y . Анализируя графики, представленные на рис. 8, можно предположить, что собственные функции тонкого вибратора допускают достаточно простую тригонометрическую аппроксимацию.

Заключение

Таким образом, в статье рассмотрены собственные числа и собственные функции интегрального оператора СИУ трубчатого вибратора. Проведен анализ поведения собственных чисел в зависимости от $x = l/\lambda$ и $y = a/L$.

В результате численных расчетов эмпирическим путем были определены асимптотические устремления зависимостей действительной и мнимой части собственных чисел при $x \rightarrow 0$. Выявлено, что действительная часть собственных

чисел для четных и нечетных k имеет соответственно асимптотики $\alpha_k(y)x^2$ и $\alpha_k(y)x^4$, а мнимая часть собственных чисел для всех k имеет асимптотику $\beta_k(y)x^{-1}$. В результате этого при $x \rightarrow 0$ собственные числа становятся чисто мнимыми.

Определены асимптотики граничных функций $\alpha_k(y)$ и $\beta_k(y)$ при $y \rightarrow 0$. Установлено, что частота резонанса собственной функции определяется частотой, на которой мнимая часть соответствующего собственного числа обращается в нуль. Данные частоты представлены зависимостями $\zeta_k(y)$. Резонансные свойства собственных чисел также были рассмотрены в статье. Анализ собственных функций показал, что они могут быть достаточно легко представлены с помощью тригонометрических рядов с небольшим числом коэффициентов. В целом численные результаты, представленные в статье, могут послужить хорошей основой при построении приближенных решений внутренней задачи для рассматриваемой структуры, а также позволяют достаточно просто объяснить возникающие при решении явления, например, явление укорочения вибратора или эффект независимости распределения тока по вибратору от положения точки возбуждения.

Список литературы

1. Pocklington H.C. Electrical oscillations in wire // Camb. Phil. Soc. Proc. 1897. № 9. P. 324–332.
2. Неганов В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики. М.: Сайнс-Пресс, 2008. 450 с.
3. Лифанов И.К., Ненашев А.С. Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 11. № 1. С. 121–137.
4. Harrington R.F. Field Computation by Moment Method. N.-Y.: Macmillan, 1968. 150 p.
5. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн / под ред. В.А. Неганова. М.: Радио и связь, 2002. 416 с.
6. Неганов В.А., Клюев Д.С., Табаков Д.П. Физическая регуляризация некорректных задач теории антенн // Электросвязь. 2011. № 11. С. 35–37.
7. Garbacz R.J., Turpin R.H. A generalized expansion for radiated and scattered fields // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1971. Vol. 19. № 3. P. 348–358.
8. Harrington R., Mautz J. Theory of characteristic modes for conducting bodies // IEEE Trans. Antennas Propag. 1971. Vol. 19 (5). P. 622–628.
9. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 487 с.

Eigenvalues of integral operator of the singular integral equation for a thin tubular vibrator antenna

D.P. Tabakov, A.G. Mayorov

The singular integral equation of a thin tubular vibrator is considered. This paper analyzed the dependence of the eigenvalues of the integral operator of the singular integral equation on the frequency and geometric dimensions of the vibrator with the determination of their asymptotic behavior at small lengths and small radii of the vibrator. It is shown that these dependences admit a simple polynomial approximation, and it is shown that an approximation in harmonic functions can be used for the eigenfunctions of an integral operator. Results can be used as the basis for constructing approximate solutions of current on the tubular vibrator.

Keywords: eigenvalues, eigenvectors, singular integral equation, vibrator antenna, approximation, collocation method, resonant frequency.
