2019 г. *Том 22, № 1*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 537.87

О некоторых интегралах от произведений цилиндрических функций

В.А. Бурдин

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

Для ряда решений задач многослойного волоконного световода, поле которого в каждом слое описывается суммой соответствующих функций Бесселя, представляют интерес интегралы от произведений этих функций. К сожалению, далеко не все из этих интегралов представлены в литературе в таблицах интегралов в явном виде. В предлагаемой работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

Ключевые слова: многослойный волоконный световод, цилиндрические функции, функции Бесселя, модифицированные функции Бесселя, интегралы от произведений функций Бесселя.

Введение

Для ряда решений задач волоконного световода представляют интерес некоторые интегралы от произведений функций Бесселя вида $\int Z_p(ax)G_q(bx)x^{\pm 1}dx$ и их частные случаи. Здесь $Z_p(z)$ и $G_p(z)$ произвольные цилиндрические функции первого, второго или третьего рода порядка p. К сожалению, далеко не все из представляющих интерес интегралов такого типа представлены в явном виде в таблицах интегралов в литературе. Некоторые частные случаи представлены в отдельных работах. Однако в систематизированном виде рассматриваемую группу интегралов автору найти не удалось. В предлагаемой работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

Следует отметить, что искомые интегралы являются частными случаями табличного, который имеет вид [1]:

$$\int\left[(a^2-b^2)x-\frac{p^2-q^2}{x}\right]Z_p(ax)G_q(bx)\,dx = = x\left[Z_p(ax)\frac{dG_q(bx)}{dx}-G_q(bx)\frac{dZ_p(ax)}{dx}\right]. \tag{1}$$

Или, после подстановки формул для производных функций Бесселя [1–3]:

$$\int\left[(a^2-b^2)x-\frac{p^2-q^2}{x}\right]Z_p(ax)G_q(bx)\,dx = = x\left[aZ_{p+1}(ax)G_q(bx)-Z_p(ax)G_{q+1}(bx)\right]- -(p-q)Z_p(ax)G_q(bx). \tag{2}$$

В частном случае, для условий $p=q$ и $a\neq b$ из (1)–(2) следует [1–3]:

$$\int Z_p(ax)G_p(bx)x\,dx = \frac{x}{a^2-b^2}\times \times\left[Z_p(ax)\frac{dG_p(bx)}{dx}-G_p(bx)\frac{dZ_p(ax)}{dx}\right]= =\frac{x}{a^2-b^2}\left[aZ_{p+1}(ax)G_p(bx)- -bZ_p(ax)G_{p+1}(bx)\right]. \tag{3}$$

Для условий $a=b$ и $p\neq q$ из (1)–(2) следует [1–3]:

$$\int\frac{Z_p(ax)G_q(ax)}{x}dx = =\frac{-x}{p^2-q^2}\left[Z_p(ax)\frac{dG_q(ax)}{dx}- -G_q(ax)\frac{dZ_p(ax)}{dx}\right]=\frac{-ax}{p^2-q^2}\times \times\left[Z_{p+1}(ax)G_q(ax)-Z_p(ax)G_{q+1}(ax)\right]+ +\frac{Z_p(ax)G_q(ax)}{p+q}. \tag{4}$$

Ниже рассмотрим частные случаи интегралов (3) и (4).

1. Неопределенные интегралы типа $\int Z_p(ax)G_p(ax)\,x\,dx$

Искомый интеграл может быть получен из (3) при $a\to b$. В [1], используя правило Лопиталя [3], записали решение в общем виде. Для

DOI: 10.18469/1810-3189.2019.22.1.21-25

функций Бесселя первого и второго рода произвольного порядка формула принимает вид:

$$\int J_p(ax)Y_p(ax)\,x\,dx = \\ = \frac{1}{2}\left[x^2\frac{dJ_p(ax)}{dx}\frac{dY_p(ax)}{dx} + \right. \\ \left. + \left(x^2 - \frac{p^2}{a^2}\right)J_p(ax)Y_p(ax)\right]. \tag{5}$$

Для вычисления производных в (5) можно воспользоваться известными формулами [2–5]:

$$\frac{dJ_p(z)}{dz} = \frac{J_{p-1}(z) - J_{p+1}(z)}{2}, \tag{6}$$

$$\frac{dY_p(z)}{dz} = \frac{Y_{p-1}(z) - Y_{p+1}(z)}{2}. \tag{7}$$

Для модифицированных функций Бесселя первого и второго рода произвольного порядка формула (5) принимает вид:

$$\int I_p(ax)K_p(ax)xdx = \\ = -\frac{1}{2}\left[x^2\frac{dI_p(ax)}{dx}\frac{dK_p(ax)}{dx} - \right. \\ \left. - \left(x^2 + \frac{p^2}{a^2}\right)I_p(ax)K_p(ax)\right]. \tag{8}$$

Для вычисления производных в (8) можно воспользоваться известными формулами [2–5]:

$$\frac{dI_p(z)}{dz} = \frac{I_{p-1}(z) + I_{p+1}(z)}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{dK_p(z)}{dz} = -\frac{K_{p-1}(z) + K_{p+1}(z)}{2}. \tag{10}$$

В [6] получен частный случай искомого интеграла для $p = 0$.

Из (3), также как частный случай, можно получить известный табличный интеграл [2; 3]:

$$\int Z_p^2(ax)\,x\,dx = \\ = \frac{x^2}{2}\left[Z_p^2(ax) - Z_{p-1}(ax)Z_{p+1}(ax)\right]. \tag{11}$$

2. Неопределенные интегралы типа $\int \frac{Z_p(ax)G_p(ax)}{x}dx$

Рассматриваемый интеграл получается из (4) при $p \to q$. Поскольку при этом знаменатель правой части стремится к нулю, используют правило Лопиталя [1; 3]. При этом производные цилиндрических функций по индексу определяются известными формулами [2; 3]:

$$\frac{dJ_v(z)}{dv} = \frac{(\pm 1)^n}{2} \times \\ \times \left[\pi Y_n(z) \pm n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^{k-n}J_k(z)}{k!(n-k)}\right], \tag{12}$$

$$\frac{dY_v(z)}{dv} = \frac{(\pm 1)^n}{2} \times \\ \times \left[-\pi J_n(z) \pm n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^{k-n}Y_k(z)}{k!(n-k)}\right], \tag{13}$$

$$\frac{dI_v(z)}{dv} = (-1)^n \times \\ \times \left[-K_n(z) \pm \frac{n!}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(z/2)^{k-n}I_k(z)}{k!(n-k)}\right], \tag{14}$$

$$\frac{dK_v(z)}{dv} = \pm\frac{n!}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^{k-n}K_k(z)}{k!(n-k)}. \tag{15}$$

Здесь $v = \pm n$, где n – целое число.

В [1], используя правило Лопиталя [3], решение записали в общем виде. Для функций Бесселя первого и второго рода произвольного порядка формула принимает вид:

$$\int \frac{J_p(ax)Y_p(ax)}{x}dx = \\ = \frac{1}{2p}\left\{J_p(ax)Y_p(ax) + ax \times \right. \\ \left. \times \left[Y_{p+1}(ax)\frac{dJ_p(ax)}{dp} - Y_p(ax)\frac{dJ_{p+1}(ax)}{dp}\right]\right\}. \tag{16}$$

Для модифицированных функций Бесселя первого и второго рода произвольного порядка формулу представим в следующем виде:

$$\int \frac{I_p(ax)K_p(ax)}{x}dx = \\ = -\frac{ax}{4p}\left\{\left[I_{p-1}(ax) + I_{p+1}(ax)\right]\frac{dK_p(ax)}{dp} + \right. \\ \left. + I_p(ax)\left[\frac{dK_{p-1}(ax)}{dp} + \frac{dK_{p+1}(ax)}{dp}\right]\right\} \tag{17}$$

Используя описанный выше способ в [1] получили также общую формулу для следующего интеграла:

$$\int \frac{Z_p^2(ax)}{x}dx = \frac{1}{2p}\left\{Z_p^2(ax) + \right. \\ \left. + ax\left[Z_{p+1}(ax)\frac{dZ_p(ax)}{dp} - Z_p(ax)\frac{dZ_{p+1}(ax)}{dp}\right]\right\}, \tag{18}$$

где $Z_p(z)$ – произвольная функция Бесселя первого или второго рода или произвольная модифицированная функция Бесселя первого или второго рода.

Производные по индексу в (16)–(18) вычисляются по формулам (12)–(15).

3. Аналитическая формула для интегралов вида $\int Z_{p-1}(x)Z_{p+1}(x)\,x\,dx$

Чтобы найти аналитическое решение для интеграла рассматриваемого вида, воспользуемся известными рекуррентными формулами [1–5]:

$$\frac{2p}{z}J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x), \tag{19}$$

$$\frac{2p}{z}Y_p(x) = Y_{p-1}(x) + Y_{p+1}(x), \tag{20}$$

$$\frac{2p}{z}I_p(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x), \tag{21}$$

$$-\frac{2p}{z}K_p(x) = K_{p-1}(x) - K_{p+1}(x). \tag{22}$$

Возводя правые и левые части равенств (19)–(22) в квадрат, получаем:

$$\frac{4p^2}{x^2}J_p^2(x) = J_{p-1}^2(x) + J_{p+1}^2(x) + 2J_{p-1}(x)J_{p+1}(x), \tag{19}$$

$$\frac{4p^2}{x^2}Y_p^2(x) = Y_{p-1}^2(x) + Y_{p+1}^2(x) + 2Y_{p-1}(x)Y_{p+1}(x), \tag{20}$$

$$\frac{4p^2}{x^2}I_p^2(x) = I_{p-1}^2(x) + I_{p+1}^2(x) - 2I_{p-1}(x)I_{p+1}(x), \tag{21}$$

$$\frac{4p^2}{x^2}K_p^2(x) = K_{p-1}^2(x) + K_{p+1}^2(x) - 2K_{p-1}(x)K_{p+1}(x). \tag{22}$$

Отсюда, для функций Бесселя первого и второго рода $Z_p(x)$ получаем, что:

$$Z_{p-1}(x)Z_{p+1}(x) = -\frac{Z_{p-1}^2(x) + Z_{p+1}^2(x)}{2} + \frac{2p^2}{x^2}Z_p^2(x). \tag{24}$$

А для модифицированных функций Бесселя первого и второго рода $\overline{Z}_p(x)$ справедливо:

$$\overline{Z}_{p-1}(x)\overline{Z}_{p+1}(x) = \frac{\overline{Z}_{p-1}^2(x) + \overline{Z}_{p+1}^2(x)}{2} - \frac{2p^2}{x^2}\overline{Z}_p^2(x). \tag{25}$$

Умножая правые и левые части на x и интегрируя получаем:

$$\int Z_{p-1}(x)Z_{p+1}(x)xdx = -\frac{1}{2}\int Z_{p-1}^2(x)xdx - \frac{1}{2}\int Z_{p+1}^2(x)xdx + 2p^2\int\frac{Z_p^2(x)}{x}dx. \tag{26}$$

$$\int \overline{Z}_{p-1}(x)\overline{Z}_{p+1}(x)xdx = \frac{1}{2}\int \overline{Z}_{p-1}^2(x)xdx + \frac{1}{2}\int \overline{Z}_{p+1}^2(x)xdx - 2p^2\int\frac{\overline{Z}_p^2(x)}{x}dx. \tag{27}$$

В правой части данных равенств интегралы, которые согласно (11) и (18) берутся аналитически.

4. Вывод формул для интегралов вида $\int\left[Z_{p-1}(x)G_{p+1}(x) + Z_{p+1}(x)G_{p-1}(x)\right]x\,dx$

Рассмотрим интеграл:

$$\int\left[J_{p-1}(x)Y_{p+1}(x) + J_{p+1}(x)Y_{p-1}(x)\right]x\,dx.$$

Чтобы взять его аналитически поступим, как и в предыдущем разделе. Обратимся к формулам (19) и (20). Перемножив правые и левые части указанных равенств, получаем:

$$\frac{4p^2}{x^2}J_p(x)Y_p(x) = J_{p-1}(x)Y_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)Y_{p+1}(x) + J_{p-1}(x)Y_{p+1}(x) + J_{p+1}(x)Y_{p-1}(x), \tag{28}$$

Отсюда следует:

$$J_{p-1}(x)Y_{p+1}(x) + J_{p+1}(x)Y_{p-1}(x) = \frac{4p^2}{x^2}J_p(x)Y_p(x) - \left[J_{p-1}(x)Y_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)Y_{p+1}(x)\right], \tag{29}$$

Умножив левую и правую части равенства (29) на x и интегрируя полученные выражения, находим, что рассматриваемый интеграл равен:

$$\int\left[J_{p-1}(x)Y_{p+1}(x) + J_{p+1}(x)Y_{p-1}(x)\right]x\,dx = 4p^2\int\frac{J_p(x)Y_p(x)}{x}dx - \int J_{p-1}(x)Y_{p-1}(x)\,x\,dx - \int J_{p+1}(x)Y_{p+1}(x)\,x\,dx. \tag{30}$$

Входящие в правую часть равенства (30) интегралы берутся аналитически согласно (5) и (16). Таким образом, для рассматриваемого интеграла получена искомая аналитическая формула.

Аналогично поступим в случае модифицированных функций Бесселя. Перемножив правые и левые части равенств (21) и (22), получаем:

$$-\frac{4p^2}{x^2}I_p(x)K_p(x) = I_{p-1}(x)K_{p-1}(x) +$$

Таблица

№	**Формула**
	Общие формулы
1.	$\int Z_p^2(ax)x\,dx = \frac{x^2}{2}\left[Z_p^2(ax) - Z_{p-1}(ax)Z_{p+1}(ax)\right]$
2.	$\int \frac{Z_p^2(ax)}{x}dx = \frac{1}{2p}\left\{Z_p^2(ax) + ax\left[Z_{p+1}(ax)\frac{dZ_p(ax)}{dp} - Z_p(ax)\frac{dZ_{p+1}(ax)}{dp}\right]\right\}$
Здесь $Z_p(y)$ − произвольная функция Бесселя или модифицированная функция Бесселя первого, второго или третьего рода [1−3]	
	Функции Бесселя первого и второго рода
3.	$\int J_p(ax)Y_p(ax)\,x\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\frac{dJ_p(ax)}{dx}\frac{dY_p(ax)}{dx} + \left(x^2 - \frac{p^2}{a^2}\right)J_p(ax)Y_p(ax)\right]$
4.	$\int \frac{J_p(ax)Y_p(ax)}{x}dx = \frac{1}{2p}\left\{J_p(ax)Y_p(ax) + ax\left[Y_{p+1}(ax)\frac{dJ_p(ax)}{dp} - Y_p(ax)\frac{dJ_{p+1}(ax)}{dp}\right]\right\}$
5.	$\int\left[J_{p-1}(x)Y_{p+1}(x) + J_{p+1}(x)Y_{p-1}(x)\right]xdx = 4p^2\int\frac{J_p(x)Y_p(x)}{x}dx -$ $-\int J_{p-1}(x)Y_{p-1}(x)xdx - \int J_{p+1}(x)Y_{p+1}(x)\,x\,dx$
6.	$\int Z_{p-1}(x)Z_{p+1}(x)\,x\,dx = -\frac{1}{2}\int Z_{p-1}^2(x)\,x\,dx - \frac{1}{2}\int Z_{p+1}^2(x)\,x\,dx + 2p^2\int\frac{Z_p^2(x)}{x}dx$
Здесь $Z_p(x)$ − произвольная функция Бесселя первого или второго рода	
	Модифицированные функции Бесселя первого и второго рода
7.	$\int I_p(ax)K_p(ax)\,x\,dx = -\frac{1}{2}\left[x^2\frac{dI_p(ax)}{dx}\frac{dK_p(ax)}{dx} - \left(x^2 + \frac{p^2}{a^2}\right)I_p(ax)K_p(ax)\right]$
8.	$\int\frac{I_p(ax)K_p(ax)}{x}dx = -\frac{ax}{4p}\left\{\left[I_{p-1}(ax) + I_{p+1}(ax)\right]\frac{dK_p(ax)}{dp} + I_p(ax)\left[\frac{dK_{p-1}(ax)}{dp} + \frac{dK_{p+1}(ax)}{dp}\right]\right\}$
9.	$\int\left[I_{p-1}(x)K_{p+1}(x) + I_{p+1}(x)K_{p-1}(x)\right]xdx = 4p^2\int\frac{I_p(x)K_p(x)}{x}dx +$ $+\int I_{p-1}(x)K_{p-1}(x)\,x\,dx + \int I_{p+1}(x)K_{p+1}(x)\,x\,dx$
10.	$\int\bar{Z}_{p-1}(x)\bar{Z}_{p+1}(x)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int\bar{Z}_{p-1}^2(x)\,x\,dx + \frac{1}{2}\int\bar{Z}_{p+1}^2(x)\,x\,dx - 2p^2\int\frac{\bar{Z}_p^2(x)}{x}dx$
Здесь $\bar{Z}_p(x)$ − произвольная модифицированная функция Бесселя первого или второго рода	
	Формулы для производных [2; 3]
11.	$\frac{dJ_p(z)}{dz} = \frac{J_{p-1}(z) - J_{p+1}(z)}{2}$
12.	$\frac{dY_p(z)}{dz} = \frac{Y_{p-1}(z) - Y_{p+1}(z)}{2}$
13.	$\frac{dI_p(z)}{dz} = \frac{I_{p-1}(z) + I_{p+1}(z)}{2}$
14.	$\frac{dK_p(z)}{dz} = -\frac{K_{p-1}(z) + K_{p+1}(z)}{2}$
15.	$\frac{dJ_v(z)}{dv} = \frac{(\pm1)^n}{2}\left[\pi Y_n(z) \pm n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^{k-n}J_k(z)}{k!(n-k)}\right]$
16.	$\frac{dK_v(z)}{dv} = \pm\frac{n!}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^{k-n}K_k(z)}{k!(n-k)}$
Здесь $v = \pm n$, где n − целое число	

$$+ I_{p+1}(x)K_{p+1}(x) - I_{p-1}(x)K_{p+1}(x) - \\ - I_{p+1}(x)K_{p-1}(x). \tag{31}$$

Откуда следует, что:

$$I_{p-1}(x)K_{p+1}(x) + I_{p+1}(x)K_{p-1}(x) = \\ = \frac{4p^2}{x^2} I_p(x)K_p(x) + \\ + I_{p-1}(x)K_{p-1}(x) + I_{p+1}(x)K_{p+1}(x). \tag{32}$$

Умножив левую и правую части равенства (32) на x и интегрируя полученные выражения, находим, что рассматриваемый интеграл равен:

$$\int \Big[I_{p-1}(x)K_{p+1}(x) + I_{p+1}(x)K_{p-1}(x) \Big] x\,dx = \\ = 4p^2 \int \frac{I_p(x)K_p(x)}{x} dx + \\ + \int I_{p-1}(x)K_{p-1}(x)\,x\,dx + \\ + \int I_{p+1}(x)K_{p+1}(x)\,x\,dx. \tag{33}$$

Входящие в правую часть равенства (30) интегралы берутся аналитически согласно (8) и (17). Таким образом, для рассматриваемого интеграла получена искомая аналитическая формула.

5. Сводная таблица формул

Сведем рассматриваемые интегралы и необходимые для их вычисления формулы для их производных в таблице.

Заключение

В работе представлена сводная таблица некоторых интегралов от произведений цилиндрических функций, в которой приведены как известные табличные интегралы, так и полученные в данной работе аналитические формулы, а также необходимые для расчетов по данным формулам аналитические выражения для производных цилиндрических функций.

Список литературы

1. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. М.: Изд. ИЛ, 1949. 799 с.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. СПБ.: БХВ-Петербург, 2011. 1232 с.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы // М.: Наука, 1977. 344 с.
6. Киреев А.П., Степанов В.Н. Интегралы, содержащие функции Бесселя // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. 2016. № 4. С. 45–50.

On some integrals of products of cylindrical functions

V.A. Burdin

For a number of solutions to problems of a multilayer optical fiber, the field of which in each layer is described by the sum of the corresponding Bessel functions, integrals of the products of these functions are of interest. Unfortunately, not all of these integrals are presented in the literature in integral tables in explicit form. In the proposed work an attempt was made to fill this gap.

Keywords: multilayer fiber light guide, cylindrical functions, Bessel functions, modified Bessel functions, integrals from products of Bessel functions.