2019 г. *Том 22, № 1*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.372

Единственность решения задачи синтеза двухзвенного ступенчатого трансформатора волнового сопротивления с чебышевской частотной характеристикой

А.С. Арефьев

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

Доказана единственность решения задачи синтеза двухзвенного ступенчатого трансформатора волнового сопротивления с чебышевской частотной характеристикой.

Ключевые слова: двухзвенный ступенчатый трансформатор волнового сопротивления, трансформатор волнового сопротивления с чебышевской частотной характеристикой.

Эквивалентная схема волноводного тракта, содержащего двухзвенный ступенчатый трансформатор волнового сопротивления (ТВС), изображена на рис. 1. Здесь участки 0 и 3 с волновыми сопротивлениями z_0, z_3 соответствуют согласуемым отрезкам линии передачи $(z_0 \neq z_3)$; участки 1 и 2 представляют собой звенья трансформатора, имеющие одинаковую длину l. Решение задачи синтеза ТВС сводится к определению параметров трансформатора l, z_1, z_2 при заданных значениях волновых сопротивлений согласуемых отрезков линии передачи z_0, z_3, а также ширины полосы согласования или максимального значения рабочего затухания в полосе согласования.

Матрица передачи ТВС $\widehat{A}$ [1], связывающая комплексные амплитуды суммарных напряжений U_1, U_2 и токов I_1, I_2 на его входе и выходе

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \widehat{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix},$$

равна произведению матриц передачи звеньев $\widehat{A}^{(j)}$ $(j = 1,2)$, $\widehat{A} = \widehat{A}^{(1)}\widehat{A}^{(2)}$, где

$$\widehat{A}^{(j)} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma l) & i z_j \sin(\gamma l) \\ \dfrac{i}{z_j}\sin(\gamma l) & \cos(\gamma l) \end{pmatrix}, \quad (j = 1,2). \tag{1}$$

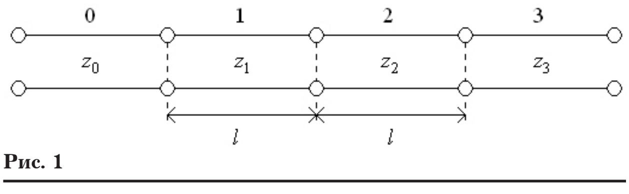

Рис. 1

При записи (1) предполагается, что на отрезках 1 и 2, образующих ТВС, постоянная распространения волны γ имеет одинаковые значения. Тем самым, элементы матрицы $\widehat{A}$ имеют вид:

$$A_{11} = \cos^2(\gamma l) - \frac{z_1}{z_2}\sin^2(\gamma l), \tag{2}$$

$$A_{12} = i(z_1 + z_2)\cos(\gamma l)\sin(\gamma l), \tag{3}$$

$$A_{21} = i\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\cos(\gamma l)\sin(\gamma l), \tag{4}$$

$$A_{22} = \cos^2(\gamma l) - \frac{z_2}{z_1}\sin^2(\gamma l). \tag{5}$$

Рабочее затухание трансформатора L определяется как отношение мощностей прямых волн напряжения на его входе и выходе. Параметр L выражается через элементы матрицы передачи ТВС $\widehat{A}$ следующим образом [1]:

$$L = \frac{1}{4}\frac{z_0}{z_3}\left|A_{11} + \frac{1}{z_2}A_{12} + z_1 A_{21} + \frac{z_1}{z_2}A_{22}\right|^2. \tag{6}$$

Исходя из соотношений (2)–(6) можно представить рабочее затухание трансформатора в виде многочлена второго порядка по степеням $\cos^2(\gamma l)$

$$L = \sum_{m=0}^{2} D_m \cos^{2m}(\gamma l). \tag{7}$$

Коэффициенты D_m $\left(m = \overline{0,2}\right)$ определяются равенствами

$$D_0 = \frac{1}{4}\left(q + 2 + \frac{1}{q}\right), \tag{8}$$

DOI: 10.18469/1810-3189.2019.22.1.16-20

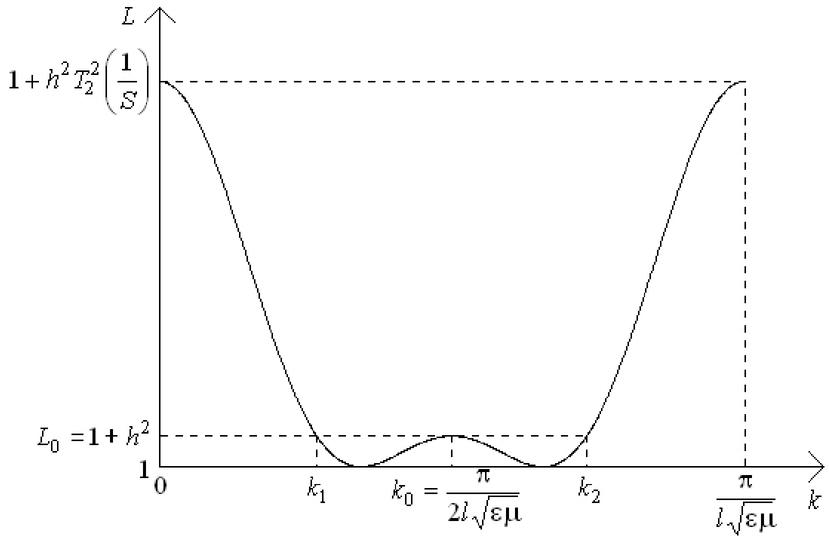

Рис. 2

$$D_1=\frac{1}{4}\left(\frac{z_1^2}{z_0z_3}+\frac{z_0z_3}{z_1^2}+\frac{z_2^2}{z_0z_3}+\frac{z_0z_3}{z_2^2}+2\frac{z_0z_3}{z_1z_2}+\right.$$
$$\left.+2\frac{z_1z_2}{z_0z_3}-2\frac{z_0z_2}{z_1z_3}-2\frac{z_1z_3}{z_0z_2}-2q-\frac{2}{q}\right), \quad (9)$$

$$\sum_{m=0}^{2}D_m=\frac{1}{4}\left(\frac{z_3}{z_0}+2+\frac{z_0}{z_3}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{z_3}{z_0}}+\sqrt{\frac{z_0}{z_3}}\right)^2, \quad (10)$$

где

$$q=\frac{z_0z_2^2}{z_1^2z_3}. \quad (11)$$

Выражение (7) задает частотную характеристику ТВС.

Согласно определению рабочего затухания трансформатора, а также формуле (6), параметр L является действительной величиной. Поэтому соотношения (7)–(11) справедливы только при условии отсутствия затухания на любом из участков волноводного тракта, изображенного на рис. 1. В этом случае мнимые части волновых сопротивлений звеньев z_1, z_2, а также постоянной распространения волны γ равны нулю.

Если волновые сопротивления звеньев трансформатора и согласуемых отрезков линии передачи не зависят от частоты, то можно подобрать параметры z_1 и z_2 таким образом, что многочлен (7) будет иметь вид

$$L=1+h^2T_2^2\left(\frac{\cos(\gamma l)}{S}\right). \quad (12)$$

Здесь $T_2(x)$ – многочлен Чебышева 1-го рода 2-го порядка; величины h и S называются, соответственно, амплитудным и масштабным множителями.

Будем предполагать, что в волноводном тракте отсутствует дисперсия. При этом постоянная распространения волны γ пропорциональна частоте. Например, для основной волны коаксиальной линии передачи справедливо соотношение

$$\gamma=k\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (13)$$

где ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости заполнения; $k=\omega/c$ – волновое число свободного пространства; ω – круговая частота колебаний; c – скорость света в вакууме. Постоянная распространения основной волны полосковой линии передачи с высокой степенью точности также определяется равенством (13), в котором ε и μ следует рассматривать как проницаемости подложки.

Частотная характеристика двухзвенного ступенчатого чебышевского ТВС приведена на рис. 2. Полосе согласования трансформатора соответствует диапазон значений волнового числа $(k_1<k<k_2)$, на границах которого, как и на средней частоте, рабочее затухание принимает значение $L_0=1+h^2$.

Тем самым, амплитудный множитель h в соотношении (12) определяется максимальным значением рабочего затухания в полосе согласования

$$h=\sqrt{L_0-1}. \quad (14)$$

Из рис. 2 и формулы (12) следуют равенства $\cos\left(k_1\sqrt{\varepsilon\mu}l\right)=S$, $\cos\left(k_2\sqrt{\varepsilon\mu}l\right)=-S$, на основании которых получаем

$$\cos\left(k_1\sqrt{\varepsilon\mu}l\right)-\cos\left(k_2\sqrt{\varepsilon\mu}l\right)=$$
$$=2\sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}\sqrt{\varepsilon\mu}l\right)\sin\left(\frac{k_2-k_1}{2}\sqrt{\varepsilon\mu}l\right)=2S.$$

Среднее значение волнового числа в полосе согласования

$$k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\pi}{2l\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{2\pi}{\Lambda_0}. \quad (15)$$

Здесь Λ_0 − соответствующее значение длины волны в линии передачи. Поэтому

$$S = \sin\left(\frac{\Delta k}{2}\sqrt{\varepsilon\mu}l\right), \quad (16)$$

где $\Delta k = k_2 - k_1$. Таким образом, масштабный множитель S определяется шириной полосы согласования трансформатора Δk. Из равенства (15) также следует, что на средней частоте полосы согласования длина звена трансформатора l равна четверти длины волны в линии передачи Λ_0.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\cos^2(\gamma l)$ в выражениях (7), (12) получаем систему уравнений:

$$D_0 = 1 + h^2, \quad (17)$$

$$D_1 = -\frac{4h^2}{S^2}, \quad (18)$$

$$D_2 = \frac{4h^2}{S^4}. \quad (19)$$

В качестве неизвестных в этих уравнениях выступают волновые сопротивления звеньев трансформатора z_1, z_2. Если задача синтеза ТВС решается при заданной ширине полосы согласования Δk, то из (16) можно определить масштабный множитель S. В этом случае третьей неизвестной в системе (17)−(19) является амплитудный множитель h. Другой вариант постановки задачи синтеза ТВС предполагает известным максимальное значение рабочего затухания в полосе согласования L_0. При этом, в соответствии с (14), амплитудный множитель h является исходным параметром задачи синтеза, а масштабный множитель S − неизвестной величиной.

Согласно (10), сумма коэффициентов D_m, ($m = \overline{0,2}$) определяется только известными волновыми сопротивлениями согласуемых отрезков линии передачи z_0, z_3. На основании (10), (17)−(19) имеем

$$\sum_{m=0}^{2} D_m = 1 + h^2\left(\frac{2}{S^2} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{z_3}{z_0}} + \sqrt{\frac{z_0}{z_3}}\right)^2.$$

Данная формула позволяет выразить амплитудный множитель через масштабный

$$h = \frac{1}{2}\frac{S^2}{2 - S^2}\left|\sqrt{\frac{z_3}{z_0}} - \sqrt{\frac{z_0}{z_3}}\right| = \frac{1}{2}\frac{S^2}{2 - S^2}\operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right)\left(\sqrt{\frac{z_3}{z_0}} - \sqrt{\frac{z_0}{z_3}}\right), \quad (20)$$

либо получить обратное соотношение

$$S = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2h}\left|\sqrt{\frac{z_3}{z_0}} - \sqrt{\frac{z_0}{z_3}}\right| + 1\right]^{-1/2}.$$

Тем самым, дальнейшие наши рассуждения будут справедливы для обоих вариантов постановки задачи синтеза ТВС.

На основании (8), (17) можно получить квадратное уравнение относительно величины q

$$q^2 - 2\left(1 + 2h^2\right)q + 1 = 0.$$

Его решения:

$$q_{1,2} = 1 + 2h^2 \pm 2h\sqrt{1 + h^2} = \left(\sqrt{1 + h^2} \pm h\right)^2. \quad (21)$$

При помощи формулы (11) можно выразить одно из неизвестных волновых сопротивлений звеньев трансформатора через другое

$$z_2 = \sqrt{q}\sqrt{\frac{z_3}{z_0}}z_1. \quad (22)$$

С учетом соотношений (9), (22) можно привести уравнение (18) к виду

$$az_1^4 - 2bz_1^2 + c = 0. \quad (23)$$

Здесь

$$a = \frac{1}{z_0 z_3} + \frac{q}{z_0^2} + \frac{2\sqrt{q}}{z_0\sqrt{z_0 z_3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{z_0 z_3}} + \frac{\sqrt{q}}{z_0}\right)^2, \quad (24)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{\frac{z_3}{z_0}} + \sqrt{q}\sqrt{\frac{z_0}{z_3}} + \frac{1}{q} + q - 8\frac{h^2}{S^2}, \quad (25)$$

$$c = z_0 z_3 + \frac{z_0^2}{q} + \frac{2}{\sqrt{q}}z_0\sqrt{z_0 z_3} = \left(\sqrt{z_0 z_3} + \frac{z_0}{\sqrt{q}}\right)^2. \quad (26)$$

В результате имеем

$$z_1^2 = \frac{1}{a}\left(b \pm \sqrt{\Delta}\right), \quad (27)$$

где

$$\Delta = b^2 - ac = \left(b - \sqrt{ac}\right)\left(b + \sqrt{ac}\right). \quad (28)$$

В соответствии с (24), (26)

$$ac = \left(2 + \sqrt{q}\sqrt{\frac{z_3}{z_0}} + \frac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{\frac{z_0}{z_3}}\right)^2. \quad (29)$$

Выразим все величины, присутствующие в (25), (29) через амплитудный и масштабный множители h, S. Согласно (8), (17)

$$\frac{1}{q_{1,2}} = 2\left(1 + 2h^2\right) - q_{1,2}.$$

Подстановка (21) дает

$$\frac{1}{q_{1,2}} = 1 + 2h^2 \mp 2h\sqrt{1 + h^2} = \left(\sqrt{1 + h^2} \mp h\right)^2. \quad (30)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \sqrt{\frac{z_3}{z_0}},\quad \beta = \sqrt{\frac{z_0}{z_3}} = \frac{1}{\alpha}.$$

С учетом этого, равенство (20) можно записать в виде квадратного уравнения относительно α или β

$$\alpha^2 - \alpha \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) 2h \frac{2 - S^2}{S^2} - 1 = 0,$$

$$\beta^2 + \beta \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) 2h \frac{2 - S^2}{S^2} - 1 = 0.$$

Положительные решения этих уравнений имеют вид:

$$\alpha = \sqrt{h^2 \frac{\left(2 - S^2\right)^2}{S^4} + 1} + \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) h \frac{2 - S^2}{S^2}, \quad (31)$$

$$\beta = \sqrt{h^2 \frac{\left(2 - S^2\right)^2}{S^4} + 1} - \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) h \frac{2 - S^2}{S^2}. \quad (32)$$

Подставляя выражения (21), (30)–(32) в (25), (29) находим

$$b = 2 + 2\sqrt{1 + h^2}\sqrt{h^2 \frac{\left(2 - S^2\right)^2}{S^4} + 1} \mp \mp 2 \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) h^2 \frac{2 - S^2}{S^2} - 4h^2 \frac{2 - S^2}{S^2}, \quad (33)$$

$$\sqrt{ac} = 2 + 2\sqrt{1 + h^2}\sqrt{h^2 \frac{\left(2 - S^2\right)^2}{S^4} + 1} \pm \pm 2 \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) h^2 \frac{2 - S^2}{S^2}, \quad (34)$$

или

$$b_{1,2} = \sqrt{a_{1,2} c_{1,2}} - 4h^2 \frac{2 - S^2}{S^2}\left[1 \pm \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right)\right]. \quad (35)$$

Из (33), (34) также следует, что

$$b + \sqrt{ac} = 4\left[1 + \sqrt{1 + h^2}\sqrt{h^2 \frac{\left(2 - S^2\right)^2}{S^4} + 1} - h^2 \frac{2 - S^2}{S^2}\right].$$

Записав данное соотношение в виде

$$b + \sqrt{ac} = 4\left[1 + \sqrt{1 + h^2 + h^2 \frac{\left(2 - S^2\right)^2}{S^4} + h^4 \frac{\left(2 - S^2\right)^2}{S^4}} - h^2 \frac{2 - S^2}{S^2}\right],$$

легко убедиться в справедливости неравенства

$$b + \sqrt{ac} > 0. \quad (36)$$

Если волновые сопротивления согласуемых отрезков линии передачи удовлетворяют условию $z_3 > z_0$, то, в соответствии с (35) $b_1 < \sqrt{a_1 c_1}$, $b_2 = \sqrt{a_2 c_2}$.

При этом, согласно (28), (36) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$. В случае $z_3 < z_0$ имеем $b_1 = \sqrt{a_1 c_1}$, $b_2 < \sqrt{a_2 c_2}$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 < 0$.

Таким образом, вне зависимости от того, как соотносятся величины z_0, z_3, одно из решений (27) уравнений (23) является действительным положительным

$$z_1^2 = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad (37)$$

оставшиеся два решения имеют отличные от нуля мнимые части, являясь комплексно сопряженными.

Обратимся теперь к определениям, связывающим волновое сопротивление z и постоянную распространения волны γ с погонными параметрами линии передачи [2]:

$$z^2 = \frac{R_\Pi + i\omega L_\Pi}{G_\Pi + i\omega C_\Pi} = \frac{R_\Pi G_\Pi + \omega^2 L_\Pi C_\Pi}{G_\Pi^2 + \omega^2 C_\Pi^2} + i\omega \frac{L_\Pi G_\Pi - R_\Pi C_\Pi}{G_\Pi^2 + \omega^2 C_\Pi^2}, \quad (38)$$

$$\gamma = -i\sqrt{\left(R_\Pi + i\omega L_\Pi\right)\left(G_\Pi + i\omega C_\Pi\right)} = -i\sqrt{\left(R_\Pi G_\Pi - \omega^2 L_\Pi C_\Pi\right) + i\omega\left(L_\Pi G_\Pi + R_\Pi C_\Pi\right)}. \quad (39)$$

Здесь L_Π и C_Π – погонные индуктивность и емкость; R_Π – погонное сопротивление проводников линии передачи; G_Π – погонная проводимость изолятора, разделяющего проводники. Как следует из (38), для того, чтобы мнимая часть величины z^2 была отлична от нуля, необходимо наличие потерь в линии передачи $R_\Pi \neq 0$ и (или) $G_\Pi \neq 0$. При этом, согласно (39) $0 < \arg\left[(i\gamma)^2\right] < \pi$.

Отсюда получаем

$$0 < \arg\left(i\gamma\right) < \frac{\pi}{2},$$

или

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\left(\gamma\right) < 0.$$

Тем самым, комплексным значениям величин z^2, z соответствует комплексная постоянная распространения γ. Как было отмечено выше, в этом случае неуместно представление рабочего затухания трансформатора в виде многочлена (7) с коэффициентами, задаваемыми формулами (8)–(10). Таким образом, как бы ни соотносились волновые сопротивления согласуемых отрезков линии передачи z_0 и z_3, существует единственное решение (z_1, z_2) задачи синтеза двухзвенного ступенчатого ТВС с чебышевской частотной характеристикой.

На основании (24), (26), (37) имеем

$$z_1^2 = \left(\sqrt{z_0 z_3} + \frac{z_0}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z_0 z_3}} + \frac{\sqrt{q}}{z_0}\right)^{-1},$$

или

$$z_1^2 = \frac{1}{\sqrt{q}} z_0 \sqrt{z_0 z_3}.$$

Принимая во внимание соотношения (21), (22) получаем следующие выражения для волновых сопротивлений звеньев трансформатора

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} \sqrt[4]{z_0^3 z_3}, \qquad (40)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{q}\sqrt[4]{z_0 z_3^3}, \qquad (41)$$

где

$$q = 1 + 2h^2 - \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) 2h\sqrt{1 + h^2} =$$

$$= \left[\sqrt{1 + h^2} - \operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right) h\right]^2.$$

Легко убедиться в том, что величины z_1 и z_2 удовлетворяют условию

$$z_1 z_2 = z_0 z_3.$$

Формулы (40), (41) отличаются от аналогичных соотношений, полученных в [1], множителем

$$\operatorname{sign}\left(\frac{z_3 - z_0}{\sqrt{z_0 z_3}}\right).$$

Следует также отметить, что использованный в [1] подход оставляет открытым вопрос о существовании иных решений задачи синтеза двухзвенного ступенчатого ТВС с чебышевской частотной характеристикой.

Список литературы

1. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ. М.: Связь, 1971. 388 с.
2. Конструирование экранов и СВЧ-устройств/ А.М. Чернушенко [и др.]; под ред. А.М. Чернушенко. М.: Радио и связь, 1990. 352 с.

Uniqueness of solution of problem of synthesis of wave impedance two-link stepped transformer with Chebyshev frequency characteristic

A.S. Aref'ev

Uniqueness of solution of problem of synthesis of wave impedance two–link stepped transformer with Chebyshev frequency characteristic is proved.

Keywords: two-link stepped transformer of wave impedance; wave impedance transformer with Chebyshev frequency characteristic.