


## Перепутывание сверхпроводящих зарядовых кубитов при наличии среды Керра

Е.К. Башкиров 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
443086, Россия, г. Самара,  
Московское шоссе, 34

**Аннотация – Обоснование.** Необходимость реализации контролируемой связи между кубитами, являющимися логическими элементами квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети, требует наряду с использованием традиционных методов разработки новых, более эффективных способов организации взаимодействия кубитов с микроволновыми полями резонаторов, используемых для генерации и управления перепутыванием кубитов. В качестве одного из таких методов предложен метод, основанный на воздействии частотно-регулируемых радиочастотных сигналов на сверхпроводящий джозефсоновский кубит, соединенный большим джозефсоновским переходом со свободным кубитом. **Цель.** Рассмотрено влияние керровской среды резонатора, в который помещен один из двух кубитов, на их перепутывание, индуцированное когерентным или тепловым частотно-регулируемым радиочастотным полем резонатора. **Методы.** Для анализа динамики рассматриваемой системы исследовано решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности. Найдено точное решение указанного уравнения в случае начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов. Точное решение уравнения эволюции использовано для вычисления критерия перепутывания кубитов – согласованности. Проведено численное моделирование согласованности для различных состояний кубитов, когерентного и теплового полей резонатора, а также различных значений интенсивности поля резонатора и параметра керровской нелинейности. **Результаты.** Показано, что для сепарабельных начальных состояний кубитов включение керровской нелинейности уменьшает максимальную степень перепутывания кубитов. Для перепутанного начального состояния кубитов показана возможность создания долгоживущих перепутанных состояний при наличии керровской нелинейности. **Заключение.** Установлены тип начальных состояний кубитов и область значений интенсивностей полей резонатора и параметра керровской нелинейности, для которых возможен наиболее эффективный контроль и управление эволюцией кубитов, а также степенью их перепутывания в рассматриваемой физической системе.

**Ключевые слова** – сверхпроводящие зарядовые кубиты; квантовое микроволновое поле; когерентное состояние; керровская нелинейность; согласованность; долгоживущие перепутанные состояния.

### Введение

В настоящее время сверхпроводящие кубиты с джозефсоновскими переходами являются наиболее востребованными элементами при создании устройств квантовой обработки информации [1–7]. Для создания таких квантовых устройств необходимо реализовать контролируемую связь между любыми парами кубитов системы. Практически для реализации переключаемых связей в цепях сверхпроводящих кубитов можно использовать различные способы, в частности частотно-регулируемые радиочастотные сигналы. Частотно-регулируемая связь для пары потоковых сверхпроводящих кубитов впервые была реализована в работе [8]. В схеме два кубита соединяются и разъединяются путем модуляции частот прикладываемых внешних магнитных полей переменной частоты так, чтобы частота переменного магнитного поля соответствовала или не соответствовала комбинации частот переходов в двух кубитах. Методика связи потоковых кубитов, развитая в работе [8], была распространена впоследствии и на зарядовые кубиты [9].

В случае зарядовых кубитов предложенный метод организации связи кубитов имеет важное преимущество. Используемые для связи зарядовые кубиты работают в своих оптимальных точках и таким образом оказываются весьма слабо невосприимчивы к зарядовому шуму, вызванному неконтролируемыми колебаниями заряда. В рассматриваемой работе [9] предложена новая реализация связи двух зарядовых кубитов посредством внешнего магнитного поля переменной частоты. Для этого изучена система, состоящая из двух связанных посредством большого джозефсоновского перехода сверхпроводящих зарядовых кубитов, подвержена воздействию не только постоянного магнитного поля, но и микроволнового электромагнитного поля. При этом микроволновое поле действует только на ту часть контура, которая содержит один кубит и большой джозефсоновский переход. При выполнении условия  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , где  $\omega$  – частота микроволнового поля, а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – резонансные частоты переходов в кубитах (в этом случае оба кубита могут одно-

временно совершать «перевороты», т. е. одновременно переходить из основного состояния в первое возбужденное и обратно), с рассматриваемой системой можно сопоставить достаточно простую модель, допускающую аналитическое решение как в случае классического, так и квантового микроволнового поля. Исследование динамики перепутывания модели, предложенной в работе [9], в случае квантового когерентного микроволнового поля выполнено в работе [10]. При этом авторы показали, что начальное состояние пары зарядовых кубитов и среднее число фотонов в моде микроволнового поля оказывают существенное влияние на особенности перепутывания кубитов.

Теоретические исследования динамики сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с микроволновыми полями, основаны на модели Джейнса – Каммингса и ее обобщениях [11]. Многоатомные обобщения модели Джейнса – Каммингса часто в квантовой оптике и квантовой информатике называют моделями Тависа – Каммингса. Хорошо известно, что обобщения модели Тависа – Каммингса, которые описывают взаимодействие естественных или искусственных двухуровневых (кубитов) или многоуровневых атомов (кутриды, кудиты и т. д.) с выделенными модами электромагнитных полей различных резонаторов, позволяют описать все известные квантовые эффекты взаимодействия атомов с веществом [12–16]. В последнее время особое внимание уделялось изучению моделей с различными типами нелинейности, в частности с керровской нелинейностью [17–32]. Как известно, материал, показатель преломления которого пропорционален квадрату напряженности светового поля, называется средой Керра. Световой пучок, проходящий через такой материал, приобретает фазовый сдвиг  $\varphi = X\tau I$ , где  $X$  – постоянная Керра,  $\tau$  – время взаимодействия светового поля с материалом,  $I$  – интенсивность луча. Эффект Керра широко используется в нелинейной квантовой оптике для генерации квадратурных и амплитудных сжатых состояний электромагнитного поля, параметрического преобразования частот, создания сверхбыстрых импульсов и т. д. Однако в оптическом диапазоне керровские нелинейности  $X$  малы по сравнению со скоростью потерь фотонов  $\kappa$  из резонатора, что затрудняет использование данного эффекта для управления неклассическими состояниями света и атомов, в частности перепутыванием кубитов. Однако ситуация принципиально меняется для искусственных атомов в микровол-

новых резонаторах. В частности, для сверхпроводящих джозефсоновских кубитов прямой аналог оптического эффекта Керра естественным образом создается за счет нелинейной индуктивности джозефсоновских контактов. Недавно такой эффект был использован для создания джозефсоновского параметрического усилителя [33]. В работе [34] удалось экспериментально реализовать режим однофотонного взаимодействия кубита с полем резонатора в среде Керра, соединив сверхпроводящий кубит (транзмон) в сапфировой среде с двумя трехмерными высокодобротными сверхпроводящими микроволновыми резонаторами. При этом удалось достичь значения постоянной Керра, которая по порядку величины совпадает со значением параметра кубит-фотонного взаимодействия в таких системах.

Представляет интерес рассмотреть особенности перепутывания кубитов в рамках модели, предложенной в работах [9; 10], учитывая керровскую нелинейность.

В настоящей статье исследована динамика перепутывания двух идентичных сверхпроводящих зарядовых кубитов, связанных большим джозефсоновским переходом, в предположении, что магнитный поток, пронизывающий контур, включающий первый кубит и большой джозефсоновский переход, состоит из постоянного магнитного потока и магнитного потока, индуцируемого квантовым когерентным микроволновым полем с варьируемой частотой. При этом область, содержащая первый кубит и большой джозефсоновский переход, включает керровскую среду.

## 1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим два идентичных сверхпроводящих зарядовых кубита  $J_1$  и  $J_2$ , связанных между собой большим джозефсоновским переходом. Предположим, что магнитный поток, пронизывающий контур, включающий первый кубит и большой джозефсоновский переход, состоит из двух частей: статического постоянного магнитного потока и магнитного потока, создаваемого квантовым микроволновым полем с варьируемой частотой. Положим также, что частота одномодового микроволнового квантованного поля подобрана так, что оба кубита могут одновременно совершать переход из основного в возбужденное состояние и обратно, т. е. выполняется условие  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . Будем также полагать наличие керровской среды в контуре. В этом случае эффективный гамильтониан

взаимодействия квантового магнитного потока с зарядовыми кубитами можно представить в виде

$$H = \hbar\gamma_{12}(a^+\sigma_1^-\sigma_2^- + \sigma_1^+\sigma_2^+a) + \hbar X a^{+2} a^2, \quad (1)$$

где  $a^+$  ( $a$ ) – оператор рождения (уничтожения) фотонов моды микроволнового поля;  $\sigma_i^+$  и  $\sigma_i^-$  – повышающий и понижающий операторы в  $i$ -м кубите ( $i = 1, 2$ ),  $\gamma_{12}$  – эффективная константа взаимодействия кубитов с полем и  $X$  – керровская нелинейность.

Обозначим через  $|e\rangle_i$  и  $|g\rangle_i$  возбужденное и основное состояние  $i$ -го кубита. Выберем в качестве начальных состояний кубитов сепарабельные состояния

$$|\Psi(0)\rangle_{J_1 J_2} = |e, e\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{J_1 J_2} = |g, g\rangle, \quad (3)$$

а также перепутанное состояние Белловского вида

$$|\Psi(0)\rangle_{J_1 J_2} = \cos\alpha |g, g\rangle + \sin\alpha |e, e\rangle, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – параметр, определяющий начальную степень перепутывания кубитов.

В качестве начального состояния микроволнового поля будем выбирать когерентное состояние с волновой функцией

$$|\Psi(0)\rangle_F = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle,$$

где  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – фокковские состояния микроволнового одномодового поля. Весовые коэффициенты  $P_n$  для когерентного состояния есть

$$P_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Решение временного уравнения Шредингера для волновой функции рассматриваемой модели в произвольный момент времени  $t$  в случае начального состояния кубитов (4) имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n(t) |e, e, n\rangle + \quad (5)$$

$$+ B_n |g, g, n+1\rangle + C_0(t) |g, g, 0\rangle),$$

где

$$A_n(t) = \frac{e^{-in^2\chi t}}{\omega_n} [-iP_{n+1}\sqrt{1+n}\cos\alpha\sin(\omega_n t) +$$

$$+ P_n \sin\alpha e^{i\phi} (\omega_n \cos(\omega_n t) + in\chi \sin(\omega_n t))],$$

$$B_n(t) = \frac{e^{-in^2\chi t}}{\omega_n} [-iP_n\sqrt{1+n}\sin\alpha e^{i\phi} \sin(\omega_n t) +$$

$$+ P_{n+1}\cos\alpha(\omega_n \cos(\omega_n t) - in\chi \sin(\omega_n t))],$$

$$C_0 = P_0 \cos\alpha$$

и

$$\omega_n = \sqrt{n(n\chi^2 + 1) + 1} \gamma_{12}, \quad \chi = X / \gamma_{12}.$$

Для начального состояния кубитов (2) временная волновая функция имеет вид (5) при условии  $\alpha = 0$ , а для состояния (3) – при условии  $\alpha = \pi/2$ .

Имея явный вид временной волновой функции (5), мы можем представить временную матрицу плотности полной системы «два кубита – поле» как  $\rho(t)_{J_1 J_2 F} = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ . (6)

Мы можем также найти редуцированную двухкубитную матрицу плотности, усредняя выражение (6) по переменным поля:

$$\rho(t)_{J_1 J_2} = \text{Sp}_F \rho(t)_{J_1 J_2 F}. \quad (7)$$

В базисе двухкубитных состояний

$$|e, e\rangle, |e, g\rangle, |g, e\rangle, |g, g\rangle$$

двухкубитная матрица плотности (7) имеет вид

$$\rho(t)_{J_1 J_2} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$\rho_{11}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n(t)|^2, \quad \rho_{44}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |B_n(t)|^2 + |C_0|^2,$$

$$\rho_{14}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}(t) B_n^*(t) + A_0(t) C_0^*.$$

Для двухкубитной системы, описываемой редуцированной матрицей плотности  $\rho(t)_{J_1 J_2}$ , в качестве меры перепутывания кубитов может быть выбран параметр Вуутерса или согласованность [35]. Аналитический метод Вуутерса для вычисления количественной меры перепутывания кубитов основан на применении так называемого spin-flip преобразования, или матрицы «перевернутых спинов», которая определяется следующим образом:

$$\tilde{\rho}(t)_{J_1 J_2} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho(t)_{J_1 J_2}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y),$$

где  $\rho(t)_{J_1 J_2}^*$  – матрица, комплексно сопряженная исходной редуцированной двухкубитной матрице плотности  $\rho(t)_{J_1 J_2}$  и  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  – стандартная матрица Паули ( $y$ -составляющая).

После того как найдена матрица  $\tilde{\rho}(t)_{J_1 J_2}$ , в подходе Вуутерса необходимо найти произведение матриц  $\rho(t)_{J_1 J_2} \tilde{\rho}(t)_{J_1 J_2}$ . Полученная в итоге матрица является неэрмитовой, но имеет веществен-

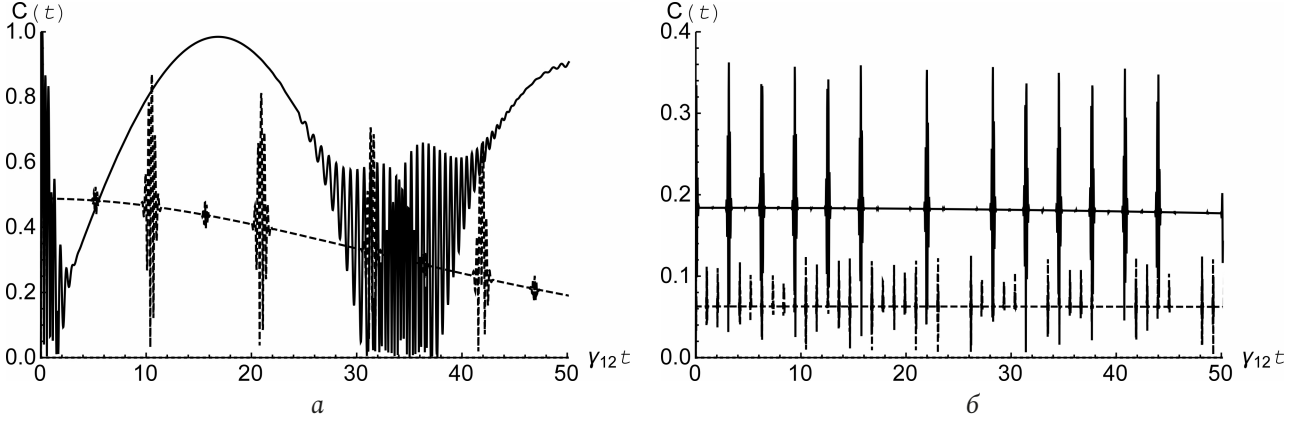


Рис. 1. Зависимость согласованности  $C(t)$  от приведенного времени  $\gamma_{12}t$  для сепарабельного начального состояния кубитов  $|e, e\rangle$  (или  $|g, g\rangle$ ). Среднее число фотонов  $\bar{n}=30$ . Случай (а) соответствует  $\chi=0$  (сплошная линия) и  $\chi=0,3$  (штриховая линия). Случай (б) соответствует  $\chi=1$  (сплошная линия) и  $\chi=3$  (штриховая линия)

Fig. 1. Dependence of consistency  $C(t)$  on reduced time  $\gamma_{12}t$  for the separable initial state of qubits  $|e, e\rangle$  (or  $|g, g\rangle$ ). Average number of photons  $\bar{n}=30$ . Case (a) corresponds to  $\chi=0$  (solid line) and  $\chi=0,3$  (dashed line). Case (b) corresponds to  $\chi=1$  (solid line) and  $\chi=3$  (dashed line)

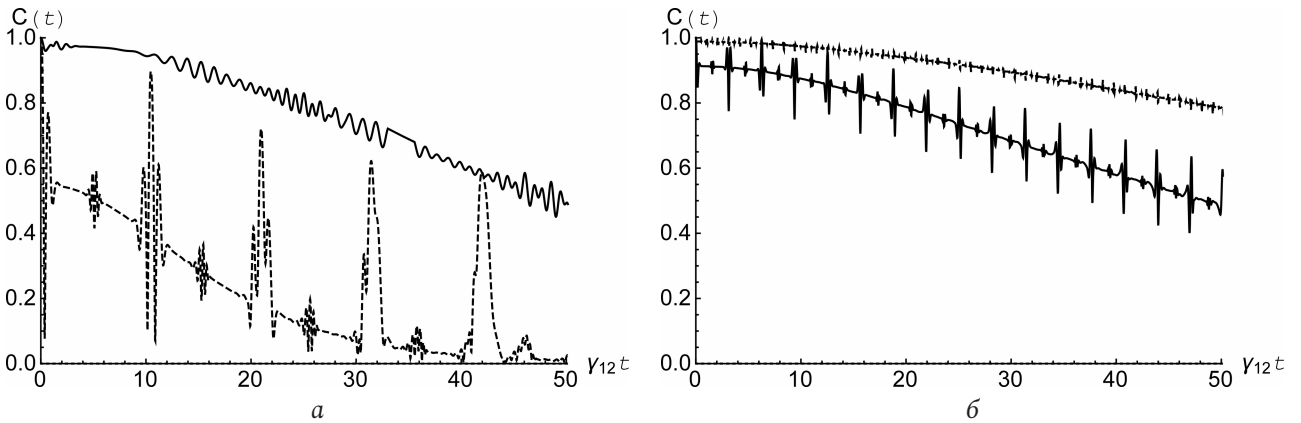


Рис. 2. Зависимость согласованности  $C(t)$  от приведенного времени  $\gamma_{12}t$  для перепутанного начального состояния кубитов  $1/\sqrt{2}(|g, g\rangle+|e, e\rangle)$ . Среднее число фотонов  $\bar{n}=10$ . Случай (а) соответствует  $\chi=0$  (сплошная линия) и  $\chi=0,3$  (штриховая линия). Случай (б) соответствует  $\chi=1$  (сплошная линия) и  $\chi=3$  (штриховая линия)

Fig. 2. Dependence of consistency  $C(t)$  on reduced time  $\gamma_{12}t$  for the entangled initial state of qubits  $1/\sqrt{2}(|g, g\rangle+|e, e\rangle)$ . Average number of photons  $\bar{n}=10$ . Case (a) corresponds to  $\chi=0$  (solid line) and  $\chi=0,3$  (dashed line). Case (b) corresponds to  $\chi=1$  (solid line) and  $\chi=3$  (dashed line)

ные и неотрицательные собственные значения. Тогда согласованность  $C$  может быть найдена из выражения

$$C(t) = \max \left\{ \sqrt{\lambda_1(t)} - \sqrt{\lambda_2(t)} - \sqrt{\lambda_3(t)} - \sqrt{\lambda_4(t)}, 0 \right\},$$

где  $\lambda_i(t)$  – собственные значения матрицы  $\rho(t)_{J_1 J_2} \tilde{\rho}(t)_{J_1 J_2}$ , расположенные в убывающем порядке.

В результате несложных вычислений формула для согласованности кубитов в случае их начальных состояний вида (2)–(4) может быть записана как

$$C(t) = 2 |\rho_{14}|. \quad (8)$$

Результаты численного моделирования временной зависимости согласованности (8) для различных начальных состояний кубитов и параметров модели представлены на рис. 1 и 2.

## 2. Численное моделирование согласованности и обсуждение результатов

Рис. 1 представляет зависимость согласованности для начального сепарабельного состояния кубитов  $|e, e\rangle$  (или  $|g, g\rangle$ ) от приведенного времени  $\gamma_{12}t$  для фиксированного среднего числа фотонов в когерентной моде  $\bar{n}=30$  и различных значений керровской нелинейности. Из рис. 1 видно, что в рассматриваемой модели для всех значений керровской нелинейности имеет место сильная корреляция состояний двух кубитов в процессе их эволюции. Из рис. 1 видно также, что учет керровской нелинейности для сепарабельных начальных состояний приводит к уменьшению максимальной степени перепутывания кубитов в процессе

их эволюции. Такая зависимость параметра перепутывания от нелинейности принципиально отличается от аналогичной зависимости в случае двух кубитов, взаимодействующих с общим микроволновым полем [17–21]. В последнем случае включение керровской нелинейности существенно увеличивает максимальную степень перепутывания кубитов. Поведение согласованности, отражающее поведение перепутывания кубитов, для сепарабельных состояний носит осцилляторный характер, что соответствует процессам поглощения и испускания фотонов. Кроме того, согласованность обращается в нуль для некоторых времен. В эти моменты времени состояния двух зарядовых кубитов оказываются распутанными. При увеличении среднего числа фотонов в моде времени, на которых происходит распутывание состояний кубитов, уменьшаются. При учете керровской среды такой эффект отсутствует. На рис. 2 представлена зависимость согласованности от приведенного времени  $\gamma_{12}t$  для начального перепутанного состояния кубитов  $1/\sqrt{2}(|g, g\rangle + |e, e\rangle)$  и различных значений керровской нелинейности. В рассматриваемом случае зависимость максимальной степени перепутывания кубитов от параметра керровской нелинейности носит немонотонный характер. В интервале значений безразмерной керровской нелинейности  $0 < \chi < 0,3$  перепутывание кубитов уменьшается с ростом керровской нелинейности. Для значений  $\chi > 0,3$  имеет место противоположная зависимость. Наиболее интересным представляется результат, заключающийся в том, что для достаточно больших значений безразмерной керровской нелинейности  $\chi > 3$  значение согласованности процесса эволюции остается близким к начальному значению, равному единице. Таким образом, используя керров-

скую среду с достаточно большими значениями нелинейности, мы можем получить долгоживущие, максимально перепутанные состояния кубитов. Такой результат показывает возможность использования керровской нелинейности для контроля и управления степенью перепутывания кубитов.

## Заключение

Таким образом, в данной работе нами была найдена точная динамика системы, состоящей из двух идентичных зарядовых кубитов, соединенных большим джозефсоновским переходом. Рассмотрен случай, когда на контур, в котором находится один из кубитов и большой джозефсоновский переход, действует одномодовое микроволновое поле в когерентном состоянии. На основе точного решения уравнения эволюции найдена временная волновая функция системы. Полученное явное выражение для временной волновой функции использовано для вычисления критерия перепутывания кубитов для начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов. В качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбрана согласованность. Результаты численного моделирования временного поведения согласованности показали, что для сепарабельных начальных состояний кубитов включение керровской нелинейности уменьшает максимальную степень перепутывания кубитов. Для перепутанного начального состояния кубитов получена возможность создания долгоживущих перепутанных состояний кубитов при наличии керровской нелинейности. В результате показано, что при определенном выборе начальных состояний кубитов и значений параметра керровской нелинейности мы можем контролировать и управлять эволюцией кубитов, а также степенью их перепутывания.

## Список литературы

1. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems / Z.-L. Xiang [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85, no. 2. P. 623–653. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>
2. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.* 2014. Vol. 88, no. 1. P. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
3. Microwave photonics with superconducting quantum circuits / X. Gu [et al.] // *Phys. Repts.* 2017. Vol. 718-719. P. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>
4. Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: A review // *Rep. Prog. Phys.* 2017. Vol. 80. P. 106001. DOI: <https://doi.org/1088/1361-6633/aa7e1a>
5. Superconducting qubits: Current state of play / M. Kjaergaard [et al.] // *Annual Reviews of Condensed Matter Physics.* 2020. Vol. 11. P. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>
6. Superconducting quantum computing: A review / H.-L. Huang [et al.] // *Science China Information Sciences.* 2020. Vol. 63. P. 180501. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>
7. Shi J. Entanglement research for the coupled superconducting phase qubit and a two-level system // *Advances in Condensed Matter Physics.* 2020. Vol. 2020. P. 3838106. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>

8. Controllable coupling between flux qubits / Y.-X. Liu [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. P. 067003. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.067003>
9. Variable-frequency-controlled coupling in charge qubit circuits: Effects of microwave field on qubit-state readout / X.-L. He [et al.] // *Phys. Rev.* 2007. Vol. A76. P. 22317. DOI: <http://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022317>
10. Control of the entanglement between two Josephson charge qubits / Q.-H. Liao [et al.] // *Chin. Phys. Lett.* 2011. Vol. 28. P. 060307. DOI: <http://doi.org/10.1088/0256-307X/28/6/060307>
11. Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes–Cummings model // *J. Mod. Opt.* 1992. Vol. 40, no. 7. P. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>
12. Larson J. Dynamics of the Jaynes–Cummings and Rabi models: Old wine in new bottles // *Physica Scr.* 2007. Vol. 76, no. 2. P. 146–160. DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/76/2/007>
13. Башкиров Е.К. Тепловое перепутывание в двухатомной модели Тависа – Каммингса с учетом диполь-дипольного взаимодействия // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2023. Т. 26, № 2. С. 9–17. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17>
14. Башкиров Е.К. Перепутывание в многофотонной модели Тависа – Каммингса, индуцированное тепловым шумом // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2018. Т. 21, № 2. С. 14–20. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7030>
15. Башкиров Е.К., Воробьев А.М. Влияние диполь-дипольного взаимодействия и расстройки на перепутывание двух кубитов, индуцированное теплом полей // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2017. Т. 20, № 4. С. 4–10. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7067>
16. Башкиров Е.К. Динамика перепутывания двух дипольно-связанных сверхпроводящих джозефсоновских кубитов, взаимодействующих с двумя резонаторами // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2016. Т. 19, № 2. С. 34–38. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7147>
17. Афанасьев В.В., Данилаев М.П., Польский Ю.Е. Обобщенная многомодовая модель процессов формирования диссипативных структур // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2008. Т. 11, № 4. С. 60–63. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12835177>
18. Акимов А.А., Воробьева Е.В., Ивахник В.В. Четырехволновое взаимодействие на резонансной и тепловой нелинейностях при больших коэффициентах отражения // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2012. Т. 15, № 1. С. 46–51. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17782070>
19. Ивахник В.В., Никонов В.И., Савельев М.В. Удвоенное обращение волнового фронта при шестиволновом взаимодействии на тепловой нелинейности // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2015. Т. 18, № 1. С. 13–17. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7205>
20. Puri S., Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving // *Quan. Inform.* 2017. Vol. 3, no. 1. P. 18. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1>
21. Бурдин В.А., Бурдин А.В., Кубанов В.П. Исследование дисперсионных характеристик фундаментальной моды ступенчатого оптического волокна с керровской нелинейностью // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2017. Т. 20, № 3-2. С. 47–51. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32453901>
22. Параметры моды LP<sub>11</sub> ступенчатого волоконного световода с керровской нелинейностью / В.А. Андреев [и др.] // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2017. Т. 20, № 3-2. С. 4–9. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32453892>
23. Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer / A.F. Al Naim [et al.] // *J. Nonlin. Opt. Phys. Mater.* 2018. Vol. 27, no. 3. P. 1850035. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218863518500352>
24. Бурдин В.А., Бурдин А.В. Синтез профиля показателя преломления волоконного световода с учетом керровской нелинейности // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2018. Т. 21, № 3. С. 50–58. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7018>
25. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation / A.F. Al Naim [et al.] // *J. Rus. Las. Res.* 2019. Vol. 40, no. 1. P. 20–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>
26. Anwar S.J., Ramzan M., Khan M.K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems // *Quant. Inform. Proc.* 2019. Vol. 18. P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7>
27. Бурдин В.А., Волков К.А., Дашков М.В. Исследование характеристик вынужденного рассеяния Мандельштама – Бриллюэна в одномодовых оптических волокнах // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2019. Т. 22, № 2. С. 8–12. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.2.8-12>
28. Aldaghfag S.A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities // *Results in Phys.* 2020. Vol. 16. P. 102978. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>
29. Волобуев А.Н., Антипова Т.А., Адыширин-Заде К.А. Особенности расчета киральной среды в зависимости от концентрации киральных элементов // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2021. Т. 24, № 2. С. 22–31. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.2.22-31>
30. Ивахник В.В., Капизов Д.Р., Никонов В.И. Четырехволновое взаимодействие в многомодовом волноводе с керровской нелинейностью в схеме с попутными волнами накачки // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2019. Т. 22, № 2. С. 13–18. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.2.13-18>
31. Акимов А.А., Гузаиров С.А., Ивахник В.В. Четырехволновое взаимодействие на тепловой нелинейности при наличии обратной связи на сигнальную или объектную волны // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2022. Т. 25, № 3. С. 9–15. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.3.9-15>

32. Акимов А.А., Ивахник В.В., Казакова К.Г. Четырехволновое взаимодействие на тепловой и резонансной нелинейностях при наличии обратной связи на объектную и сигнальную волны // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2023. Т. 26, № 2. С. 18–26. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.18-26>
33. Phase-preserving amplification near the quantum limit with a Josephson ring modulator / N. Bergeal [et al.] // *Nature*. 2010. Vol. 465. P. 64–68. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature09035>
34. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect / G. Kirchmair [et al.] // *Nature*. 2013. Vol. 495. P. 205–209. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11902>
35. Wootters W.K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 2245–2248. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>

## Информация об авторе

**Башкиров Евгений Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 1978г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 360 научных работ.

*Область научных интересов:* квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

*E-mail:* bashkirov.ek@ssau.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2024, vol. 27, no. 1, pp. 26–34

DOI [10.18469/1810-3189.2024.27.1.26-34](https://doi.org/10.18469/1810-3189.2024.27.1.26-34)

UDC 537.86:530.145

Original Research

Received 24 December 2023

Accepted 26 January 2024

Published 29 March 2024

## Entanglement between two charge qubits taking account the Kerr media

*Eugene K. Bashkirov* 

Samara National Research University  
34, Moskovskoye shosse,  
Samara, 443086, Russia

**Abstract – Background.** The need to implement controlled coupling between qubits, which are the logical elements of quantum devices such as quantum computers and quantum networks, requires, along with the use of traditional methods, the development of new, more effective ways to organize the interaction of qubits with the microwave fields of resonators used to generate and control the entanglement of qubits. As one of these methods, a method based on the influence of frequency-regulated radio frequency signals on a superconducting Josephson qubit connected by a large Josephson junction to a free qubit has been proposed. **Aim.** The influence of the Kerr medium of the resonator, in which one of the two qubits is placed, on their entanglement induced by the coherent or thermal frequency-regulated radio frequency field of the resonator is considered. **Methods.** To analyze the dynamics of the system under consideration, the solution of the quantum Liouville equation for the full density matrix is studied. An exact solution of this equation is found in the case of initial separable and entangled states of qubits. The exact solution of the evolution equation is used to calculate the criterion of qubit-qubit entanglement – concurrence. Numerical modeling of the concurrence was carried out for various states of qubits, coherent and thermal fields of the resonator, as well as various values of the intensity of the resonator field and the Kerr nonlinearity parameter. **Results.** It is shown that for separable initial states of qubits, the inclusion of Kerr nonlinearity reduces the maximum degree of entanglement of qubits. For an entangled initial state of qubits, the possibility of creating long-lived entangled states in the presence of Kerr nonlinearity is shown. **Conclusion.** The type of initial states of qubits and the range of values of the intensities of the resonator fields and the Kerr nonlinearity parameters have been established, for which the most effective control and operation of the evolution of qubits, as well as the degree of their entanglement, in the physical system under consideration, is possible.

**Keywords –** superconducting charge qubits; microwave quantum field; coherent state; Kerr nonlinearity; concurrence; long-lived entangled states.

✉ [bashkirov.ek@ssau.ru](mailto:bashkirov.ek@ssau.ru) (*Eugene K. Bashkirov*)

 © Eugene K. Bashkirov, 2024

## References

1. Z.-L. Xiang et al., “Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 85, no. 2, pp. 623–653, 2013, doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
2. I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, “Quantum simulation,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 88, no. 1, pp. 153–185, 2014, doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.

3. X. Gu et al., “Microwave photonics with superconducting quantum circuits,” *Phys. Repts.*, vol. 718-719, pp. 1–102, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
4. G. Wendin, “Quantum information processing with super-conducting circuits: A review,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 80, p. 106001, 2017, doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
5. M. Kjaergaard et al., “Superconducting qubits: Current state of play,” *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, vol. 11, pp. 369–395, 2020, doi: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
6. H.-L. Huang et al., “Superconducting quantum computing: A review,” *Science China Information Sciences*, vol. 63, p. 180501, 2020, doi: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
7. J. Shi, “Entanglement research for the coupled superconducting phase qubit and a two-level system,” *Advances in Condensed Matter Physics*, vol. 2020, p. 3838106, 2020, doi: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>.
8. Y.-X. Liu et al., “Controllable coupling between flux qubits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 067003, 2006, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.067003>.
9. X.-L. He et al., “Variable-frequency-controlled coupling in charge qubit circuits: Effects of microwave field on qubit-state readout,” *Phys. Rev.*, vol. A76, p. 22317, 2007, doi: <http://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022317>.
10. Q.-H. Liao et al., “Control of the entanglement between two Josephson charge qubits,” *Chin. Phys. Lett.*, vol. 28, p. 060307, 2011, doi: <http://doi.org/10.1088/0256-307X/28/6/060307>.
11. B. W. Shore and P. L. Knight, “The Jaynes–Cummings model,” *J. Mod. Opt.*, vol. 40, no. 7, pp. 1195–1238, 1992, doi: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
12. J. Larson, “Dynamics of the Jaynes–Cummings and Rabi models: Old wine in new bottles,” *Physica Scr.*, vol. 76, no. 2, pp. 146–160, 2007, doi: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/76/2/007>.
13. E. K. Bashkirov, “Thermal entanglement in two-atom Tavis–Cummings model with taking into account the dipole-dipole interaction,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 9–17, 2023, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17>. (In Russ.)
14. E. K. Bashkirov, “Entanglement in multi-photon Tavis–Cummings model induced by a thermal noise,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 21, no. 2, pp. 14–20, 2018, url: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7030>. (In Russ.)
15. E. K. Bashkirov and A. M. Vorob’ev, “Influence of dipole-dipole interaction and detuning on the entanglement of two qubits induced by a thermal field,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 20, no. 4, pp. 4–10, 2017, url: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7067>. (In Russ.)
16. E. K. Bashkirov, “Dynamics of entanglement of two dipole-coupled Josephson qubits interacting with two lossless resonators,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 19, no. 2, pp. 34–38, 2016, url: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7147>. (In Russ.)
17. V. V. Afanas’ev, M. P. Danilaev, and Yu. E. Pol’skiy, “Generalized multimode model of dissipative structures formation processes,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 60–63, 2008, url: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12835177>. (In Russ.)
18. A. A. Akimov, E. V. Vorob’eva, and V. V. Ivakhnik, “Four-wave interaction with allowance for thermal and resonant nonlinearities at large reflectance,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 46–51, 2012, url: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17782070>. (In Russ.)
19. V. V. Ivakhnik, V. I. Nikonov, and M. V. Savel’ev, “Double wavefront reversal at six-wave interaction on the thermal nonlinearity,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 18, no. 1, pp. 13–17, 2015, url: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7205>. (In Russ.)
20. S. Puri, S. Boutin, and A. Blais, “Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving,” *Quan. Inform.*, vol. 3, no. 1, p. 18, 2017, doi: <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1>.
21. V. A. Burdin, A. V. Burdin, and V. P. Kubanov, “Study of the dispersion characteristics of the fundamental mode of a stepped optical fiber with Kerr nonlinearity,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 20, no. 3-2, pp. 47–51, 2017, url: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32453901>. (In Russ.)
22. V. A. Andreev et al., “Parameters of the LP<sub>11</sub> mode of a stepped fiber light guide with Kerr nonlinearity,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 20, no. 3-2, pp. 4–9, 2017, url: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32453892>. (In Russ.)
23. A. F. Al Naim et al., “Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer,” *J. Nonlin. Opt. Phys. Mater.*, vol. 27, no. 3, p. 1850035, 2018, doi: <https://doi.org/10.1142/S0218863518500352>.
24. V. A. Burdin and A. V. Burdin, “Synthesis of the refractive index profile of the optical fiber with the account of Kerr nonlinearity,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 50–58, 2018, url: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7018>. (In Russ.)
25. A. F. Al Naim et al., “Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation,” *J. Rus. Las. Res.*, vol. 40, no. 1, pp. 20–29, 2019, doi: <https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>.
26. S. J. Anwar, M. Ramzan, and M. K. Khan, “Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems,” *Quant. Inform. Proc.*, vol. 18, pp. 1–14, 2019, doi: <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7>.
27. V. A. Burdin, K. A. Volkov, and M. V. Dashkov, “Study of the characteristics of stimulated Mandelstam–Brillouin scattering in single-mode optical fibers,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 22, no. 2, pp. 8–12, 2019, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.2.8-12>. (In Russ.)
28. S. A. Aldaghfag, K. Berrada, and S. Abdel-Khalek, “Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities,” *Results in Phys.*, vol. 16, p. 102978, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>.
29. A. N. Volobuev, T. A. Antipova, and K. A. Adyshirin-Zade, “Interaction of electromagnetic wave and metamaterial with inductive type chiral inclusions,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 22–31, 2021, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.2.22-31>. (In Russ.)



30. V. V. Ivakhnik, D. R. Kapizov, and V. I. Nikonov, "Four-wave interaction in a multimode waveguide with Kerr nonlinearity in a scheme with associated pump waves," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 22, no. 2, pp. 13–18, 2019, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.2.13-18>. (In Russ.)
31. A. A. Akimov, S. A. Guzaurov, and V. V. Ivakhnik, "Four-wave mixing on thermal nonlinearity with feedback for signal or object waves," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 9–15, 2022, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.3.9-15>. (In Russ.)
32. A. A. Akimov, V. V. Ivakhnik, and K. G. Kazakova, "Four-wave interaction on thermal and resonant nonlinearities in the presence of feedback to the object and signal waves," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 18–26, 2023, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.18-26>. (In Russ.)
33. N. Bergeal et al., "Phase-preserving amplification near the quantum limit with a Josephson ring modulator," *Nature*, vol. 465, pp. 64–68, 2010, doi: <https://doi.org/10.1038/nature09035>.
34. G. Kirchmair et al., "Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect," *Nature*, vol. 495, pp. 205–209, 2013, doi: <https://doi.org/10.1038/nature11902>.
35. W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 2245–2248, 1998, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.

### Information about the Author

**Eugene K. Bashkirov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978, he graduated from the Faculty of Physics of the Kuibyshev State University and in 1984 – postgraduate studies at the Moscow State University. Author of more than 360 scientific papers.

*Research interests:* quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

*E-mail:* bashkirov.ek@ssau.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

#### РЕКЛАМА

**Неганов, В.А.**

**Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова.** – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.



ISBN 5-256-01812-4

УДК 621.396.67

ББК 32.840

Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

*Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.*