

Прохождение электромагнитной волны через прямоугольный волновод с отрезком полупроводниковой пленки

А.А. Вороной, А.А. Солдатов, В.П. Кубанов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Обоснование. В технике СВЧ большой интерес представляет создание усилителей и генераторов на основе тонкослоистых продольных неоднородностей в прямоугольных волноводах, которые являются неотъемлемой частью многих функциональных устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов. **Цель.** Представляет практический интерес расчет одной из таких неоднородностей в прямоугольном волноводе. **Методы.** В качестве одного из методов расчета таких структур рассматривается дифракция электромагнитной волны на отрезке полупроводниковой пленки с отрицательной дифференциальной проводимостью на узкой стенке прямоугольного волновода. На основе граничных условий получено сингулярное интегральное уравнение для электрической составляющей электромагнитного поля. Методом обращения интегрального уравнения и при помощи разложения по полиномам Чебышева интегральное уравнение приведено в системе двух алгебраических уравнений. Коэффициенты системы вычисляются по теории вычетов. Затем получено уравнение для вычисления коэффициента прохождения, который и был рассчитан в среде MathCad. **Результаты.** На основе интегрального уравнения получены значения для расчета коэффициента прохождения для рассматриваемой структуры. **Заключение.** Из полученных графиков для рассчитанного коэффициента прохождения можно сделать вывод, что существуют частотные зоны, где в структуре происходит усиление электромагнитной волны. Значит, на основании рассматриваемой структуры возможно создание усилителей и генераторов СВЧ- и КВЧ-диапазонов.

Ключевые слова – тонкослоистые продольные неоднородности; полупроводниковая пленка с отрицательной дифференциальной проводимостью; сингулярное интегральное уравнение; теория вычетов; коэффициент прохождения.

Введение

В предлагаемой статье рассматривается волноведущая электромагнитная система, представляющая собой прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками. На узкую стенку волновода ($y = a$) в интервале z от $-L$ до L помещается отрезок активной полупроводниковой пленки (например, GaAs) с отрицательной дифференциальной проводимостью, как показано на рис. 1. Будем считать, что в прямоугольном волноводе в отсутствие полупроводниковой пленки распространяется только волна H_{10} , а остальные высшие моды являются запердевыми.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу дифракции основной моды на такой неоднородности. Представим электрическое поле в волноводе в виде суперпозиции поля основной моды и поля, созданного токами на неоднородности [1]:

$$E_x = A_0 \sin r_0(a-y)e^{-i\gamma_0 z} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma) \sin r(a-y)e^{-i\gamma z} d\gamma, \quad (1)$$

где $r = \sqrt{k^2 \epsilon \mu - \gamma^2}$; $r_0 = \sqrt{k^2 \epsilon \mu - \gamma_0^2}$; $k = \omega/c$; ϵ , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей прямоугольный волновод; γ_0 – продольное волновое число для волны H_{10} .

Полагая, что зависимость поля вдоль оси x отсутствует ($\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$), из уравнений Максвелла получаем [2]:

$$H_z = \frac{1}{ik\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Подставляя в последнее соотношение выражение (1), получим:

$$H_z = \frac{1}{ik\mu} \left(-A_0 r_0 \cos r_0(a-y)e^{-i\gamma_0 z} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma) r \cos r(a-y)e^{-i\gamma z} d\gamma \right). \quad (2)$$

Полупроводниковый слой в активных волноведущих структурах с поперечным дрейфом носителей имеет малую толщину: $\delta \ll t$, $k_n \delta \ll 1$, где k_n – волновое число в полупроводниковом слое; t – характерный поперечный размер волноведущей структуры; δ – толщина полупроводниковой пленки. Дифференциальная проводимость полупроводника при приложении сильного статиче-

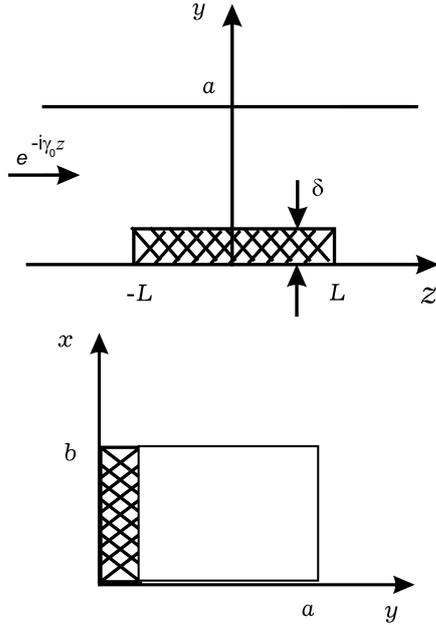


Рис. 1. Прямоугольный волновод с полупроводниковой пленкой конечной длины, расположенной вдоль узкой стенки
 Fig. 1. Rectangular waveguide with a semiconductor film of finite length along a narrow wall

ского электрического поля E_0 вдоль оси x становится отрицательной, и появляется возможность усиления электромагнитных волн.

Полупроводниковую пленку в линейном приближении будем описывать с помощью двухсторонних граничных условий (1) при $y=0$. Учитывая, что $E_x^{(1)}=0$ (касательное поле на металле) и отсутствует вариация поля вдоль оси x , из них следует ($\mu_n=1$):

$$E_x^{(2)} - \frac{ik\delta}{2} [H_z^{(1)} + H_z^{(2)}] = 0, \quad (3)$$

$$H_z^{(2)} - H_z^{(1)} - \frac{i\delta}{2k} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \epsilon_{\Pi} \right] E_x^{(2)} = 0, \quad (4)$$

где ϵ_{Π} – комплексная диэлектрическая проницаемость пленки, верхние индексы «1» и «2» указывают на принадлежность составляющих поля к той или иной области вне пленки (индекс «1» соответствует металлу, индекс «2» – волноводу).

При выводе граничных условий (3), (4) были использованы соотношения ($k=1,2$):

$$\mu^{(k)} H_y^{(k)} = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_x^{(k)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(k)}}{\partial x} \right), \quad (5)$$

$$\epsilon^{(k)} E_y^{(k)} = -\frac{i}{k} \left(\frac{\partial H_x^{(k)}}{\partial z} - \frac{\partial H_z^{(k)}}{\partial x} \right),$$

которые следуют непосредственно из уравнений Максвелла.

Из уравнения (3) получаем, что

$$H_z^{(1)} = -H_z^{(2)} + \frac{2}{ik\delta} E_x^{(2)}.$$

Подставим последнее выражение для $H_z^{(1)}$ в уравнение (4):

$$2H_z^{(2)} - \frac{2}{ik\delta} E_x^{(2)} - \frac{i\delta}{2k} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \epsilon_{\Pi} \right] E_x^{(2)} = 0,$$

которое после несложных преобразований приводит к следующему приближенному граничному условию для полупроводниковой пленки, лежащей на металле ($z \in [-L, L]$):

$$E_x^{(2)} - ik\delta H_z^{(2)} - \frac{\delta^2}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \epsilon_{\Pi} \right] E_x^{(2)} = 0. \quad (6)$$

Вводя обозначения:

$$E_x \equiv E_x^{(2)}, \quad H_z \equiv H_z^{(2)},$$

перепишем граничное условие (6) в более удобном для нас виде:

$$E_x - ik\delta H_z - \frac{\delta^2}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \epsilon_{\Pi} \right] E_x = 0. \quad (7)$$

Будем считать, что в силу малости толщины полупроводниковой пленки δ ($k_n \delta \ll 1$):

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = -\gamma_0^2 U_i,$$

где U_i – какая-либо составляющая электромагнитного поля в структуре с отрезком полупроводниковой пленки. Тогда граничное условие (7) можно переписать в виде

$$E_x - ik\delta H_z - \frac{\delta^2}{4} r_{\Pi 0}^2 E_x = 0,$$

где

$$r_{\Pi 0}^2 = k^2 \epsilon_{\Pi} - \gamma_0^2.$$

Группируя члены с E_x в последнем соотношении и проведя элементарные преобразования, получаем:

$$E_x = i\eta H_z, \quad (8)$$

где

$$\eta = \frac{k\delta}{1 - \frac{\delta^2}{4} r_{\Pi 0}^2}. \quad (9)$$

Формула (8) является приближенным эквивалентным граничным условием для полупроводниковой пленки толщины δ с диэлектрической проницаемостью ϵ_{Π} , лежащей на металле.

Что касается волноведущей структуры с отрезком активной пленки (см. рис. 1), то для нее это граничное условие справедливо для плоскости $y = 0$ при $z \in [-L, L]$.

Таким образом, задачу дифракции волны прямоугольного волновода на отрезке полупроводниковой пленки малой толщины δ мы свели к задаче дифракции волны H_{10} на отрезке прямоугольного волновода, для одной из узких стенок которого справедливо импедансное граничное условие (8). Поэтому развиваемый ниже метод расчета тонкослойных полупроводниковых неоднородностей справедлив для всех тех неоднородностей в прямоугольном волноводе, для которых можно записать соответствующие эквивалентные граничные условия типа (8).

2. Аналитический метод расчета продольных тонкослойных неоднородностей в волноводных структурах

Определим функцию $A(\gamma)$, которая фигурирует в интегральном представлении (1). Для этого подставим выражения (1) и (2) в уравнение (8) при $y = 0$; тогда мы можно записать следующее равенство ($z \in [-L, L]$):

$$A_0 \left(\sin r_0 a + \frac{\eta r_0}{k\mu} \cos r_0 a \right) e^{-i\gamma_0 z} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma) \left(\sin r a + \frac{\eta r}{k\mu} \cos r a \right) e^{-i\gamma z} d\gamma = 0. \quad (10)$$

Введем обозначения при $y = 0$, $z \in [-L, L]$:

$$e_x = E_x, \quad e_x = \begin{cases} E_x, & z \in [-L, L], \\ 0, & z \notin [-L, L], \end{cases}$$

и перепишем соотношение (10) в виде

$$e_x + e_{x0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma) \sin r a e^{-i\gamma z} d\gamma + A_0 \sin r_0 a e^{-i\gamma_0 z}. \quad (11)$$

Умножим обе части равенства (11) на $e^{i\gamma z}$ и проинтегрируем по переменной z от $-L$ до $+L$; в результате можно записать следующее выражение:

$$\int_{-L}^L e_x(z) e^{i\gamma z} dz + \int_{-L}^L e_{x0}(z) e^{i\gamma z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L A(\gamma) \sin r a d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\gamma-\gamma')z} dz + \dots \quad (12)$$

$$+ A_0 \sin r_0 a \int_{-L}^L e^{i(\gamma-\gamma_0)z} dz.$$

С учетом известного соотношения для дельта-функции $\delta(\alpha)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\gamma-\gamma')z} dz = 2\pi \delta(\gamma-\gamma'),$$

из (12) нетрудно получить выражение для коэффициента $A(\gamma)$:

$$A(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sin r a} \int_{-L}^L e_x(z) e^{i\gamma z} dz.$$

Для улучшения сходимости интеграла в последней формуле перейдем от функции $e_x(z)$ к ее производной по координате z $e'_x(z) \equiv \frac{\partial e_x}{\partial z}$. Для этого воспользуемся формулой интегрирования по частям, считая, что $e_x(z = -L) = e_x(z = L) = 0$:

$$\int_{-L}^L e_x(z) e^{i\gamma z} dz = -\frac{1}{i\gamma} \int_{-L}^L e'_x(z) e^{i\gamma z} dz. \quad (13)$$

Тогда окончательно имеем:

$$A(\gamma) = \frac{i}{\sqrt{2\pi} \gamma \sin r a} \int_{-L}^L e'_x(z) e^{i\gamma z} dz.$$

Подставим выражение (13) для $A(\gamma)$ в уравнение (10) и произведем элементарные преобразования. Тогда его можно записать следующим образом:

$$\int_{-L}^L e'_x(z') T(z', z) dz' + A_0 \alpha_0 e^{-i\gamma_0 z} = 0, \quad (14)$$

где

$$\alpha_0 = \sin r_0 a + \frac{\eta r_0}{k\mu} \cos r_0 a,$$

$$T(z', z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{\eta r}{k\mu} \operatorname{ctg} r a \right] \frac{e^{i\gamma(z'-z)}}{\gamma} d\gamma.$$

Нетрудно показать, что:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[\frac{\eta r}{k\mu} \operatorname{ctg} \frac{r a}{\gamma} \right] = \frac{\eta}{k\mu} \operatorname{sgn}(\gamma),$$

где

$$\operatorname{sgn}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma > 0, \\ -1, & \gamma < 0. \end{cases}$$

Прибавляя и отнимая в квадратных скобках формулы для ядра $T(z, z')$ (14) выражение $\frac{\eta}{k\mu} \operatorname{sgn}(\gamma)$, произведя перегруппировку и воспользовавшись известным соотношением:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\gamma) e^{i\gamma(z'-z)} d\gamma = \frac{2i}{z'-z},$$

из (14) окончательно получим следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\eta}{k\mu} \int_{-L}^L \frac{e_x'(z') dz'}{z'-z} = \frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L dz' e_x'(z') \times \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\gamma) e^{i\gamma(z'-z)} d\gamma + A_0 \alpha_0 e^{-i\gamma_0 z}, \quad (15)$$

где

$$\alpha(\gamma) = \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\eta}{k\mu} \Delta(\gamma) \right], \quad \Delta(\gamma) = \frac{\operatorname{rctgr} a}{\gamma} - \operatorname{sgn}(\gamma). \quad (16)$$

Упростим уравнение (16) путем введения новых переменных

$$z = Lt, \quad z' = Lt'.$$

В этих переменных интегральное уравнение (15) принимает вид

$$\frac{\eta}{k\mu} \int_{-1}^1 \frac{e_x'(t') dt'}{t'-t} = \frac{iL}{2} \int_{-1}^1 dt' e_x'(t') \times \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\gamma) e^{i\gamma L(t'-t)} d\gamma + A_0 \alpha_0 \pi e^{-i\gamma_0 Lt}.$$

Ядро интегрального уравнения (16) является сингулярным с особенностью типа Коши. Для его решения воспользуемся формулой обращения интеграла Коши [3]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e_x'(t') dt'}{t'-t} = f(t), \quad (17)$$

$$e'(t) = -\frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t'^2} f(t')}{t'-t} dt' + \frac{a_0}{\sqrt{1-t^2}},$$

где a_0 – неизвестная постоянная, определяемая из дополнительных условий. Считая функцией $f(t)$ правую часть уравнения (16), нетрудно записать:

$$\frac{\eta}{k\mu} e_x'(t) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-t^2}} \times \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-v^2}}{v-t} \left\{ \frac{iL}{2} \int_{-1}^1 e_x'(t') dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) e^{i\gamma L(t'-v)} d\gamma + A_0 \alpha_0 \pi e^{-i\gamma_0 Lv} \right\} dv + \frac{D_0}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (18)$$

где D_0 – некоторая неизвестная постоянная.

Преобразуем уравнение (18) к более простому виду:

$$\frac{\eta}{k\mu} e_x'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \frac{iL}{2} \int_{-1}^1 e_x'(t) S(t',t) dt + A_0 \alpha_0 \pi I(\gamma_0 t) + D_0 \right\}, \quad (19)$$

где введены обозначения

$$I(\gamma, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-v^2}}{(v-t)} e^{-i\gamma Lv} dv,$$

$$S(t', t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\gamma) I(\gamma, t) e^{i\gamma Lt'} d\gamma.$$

Функция $I(\gamma_0, t)$ получается заменой в выражении для $I(\gamma, t)$ переменной γ на γ_0 .

В дальнейшем нам потребуется следующее разложение показательной функции [4]:

$$e^{i\gamma t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n J_n(\gamma) T_n(t)}{1 + \delta_{n0}}, \quad (20)$$

где $T_n(t)$ – полиномы Чебышева первого рода, $J_n(\alpha)$ – функции Бесселя первого рода.

Полиномы Чебышева 1-го рода связаны с полиномами Чебышева 2-го рода $U_n(t)$ следующими соотношениями для $n > 1$ [4]:

$$T_n(t) = \frac{1}{2} [U_n(t) - U_{n-2}(t)], \quad (21)$$

$$U_0 = T_0 = 1,$$

$$T_1(t) = t, \quad T_1(t) = \frac{U_1(t)}{2}.$$

С учетом формул (20) перепишем разложение (21) в удобном для нас виде:

$$e^{i\gamma t} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n [J_n(\gamma) - J_{n+2}(\gamma)] U_n(t). \quad (22)$$

С учетом того, что

$$2J_{k+1} = J_k - J_{k+2}$$

бесконечный ряд (22) можно записать в более простом виде [5]:

$$e^{i\gamma t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(\gamma) U_n(t). \quad (23)$$

Так как

$$U_n(-t) = (-1)^n U_n(t),$$

то

$$e^{-i\gamma t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(\gamma) U_n(-t) = \quad (24)$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n J_{n+1}(\gamma) U_n(t).$$

Используя равенство (23) и интегральные представления для полиномов Чебышева [6]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{y-x} U_{n-1}(y) dy = -\pi T_n(x), \quad (25)$$

нетрудно получить следующее выражение для $I(\gamma, t)$:

$$I(\gamma, t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n J_{n+1}(\gamma L) T_{n+1}(t). \quad (26)$$

С учетом выражения (25) интегральное уравнение (19) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{k\mu} e'_x(t) = & \quad (27) \\ = & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left[\frac{iL}{2} \int_{-1}^1 e'_x(t') L_{n+1}(t') dt' + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\pi A_0 \alpha_0 J_{n+1}(\gamma_0 L) \right] T_{n+1}(t) + D_0 \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись известным выражением для интеграла [4]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{n+1}(x)}{x} e^{ixt} dx = \frac{2i(-1)^n}{(n+1)} (-i)^{n+1} \sqrt{1-t^2} U_n(t), \quad (28)$$

Откуда можно получить:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{n+1}(\gamma L)}{\gamma L} e^{it\gamma L} d(\gamma L) = \frac{2}{(n+1)} (i)^n \sqrt{1-t^2} U_n(t). \quad (29)$$

Запишем уравнение (27) в более удобном для нас виде:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{k\mu} e'_x(t) = & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left[\frac{L(i)^{n+1}}{n+1} \times \right. \right. \\ & \times \int_{-1}^1 e'_x(t') \sqrt{1-t'^2} U_n(t') dt' + \\ & \left. \left. + \frac{iL}{2} \int_{-1}^1 e'_x(t') N_{n+1}(t') dt' + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\pi A_0 \alpha_0 J_{n+1}(\gamma_0 L) \right] T_{n+1}(t) + D_0 \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$N_{n+1}(t') = \frac{\eta}{k\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\gamma) J_{n+1}(\gamma L) e^{i\gamma L t'} d\gamma.$$

Будем искать решение интегрального уравнения (30) в виде разложения по полиномам Чебышева:

$$e'_x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^N a_n T_n(t), \quad (31)$$

где a_n – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Получим решение уравнения (30) при учете в разложении (31) для первых трех слагаемых:

$$e'_x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (a_0 T_0(t) + a_1 T_1(t) + a_2 T_2(t)). \quad (32)$$

С учетом первых трех слагаемых в сумме в интегральном уравнении оно принимает более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{k\mu} e'_x(t) = & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \left[iL \int_{-1}^1 e'_x(t') \sqrt{1-t'^2} U_0(t') dt' + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{iL}{2} \int_{-1}^1 e'_x(t') M_1(t') dt' + 2\pi A_0 \alpha_0 J_1(\gamma_0 L) \right] T_1(t) + \right. \\ & \left. \left[\frac{iL}{2} \int_{-1}^1 e'_x(t') \sqrt{1-t'^2} U_1(t') dt' + \frac{L}{2} \int_{-1}^1 e'_x(t') M_2(t') dt' + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\pi A_0 \alpha_0 J_2(\gamma_0 L) \right] T_2(t) + D_0 \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$M_{n+1} = \frac{2\eta}{k\mu} \sum_{m=0}^{\infty} (i)^m U_m(t') \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\gamma L) J_{n+1}(\gamma L) J_m(\gamma L) d\gamma$$

($n = 0, 1$).

В дальнейшем нам потребуются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 U_0(t) T_0(t) dt &= 2, \\ \int_{-1}^1 U_0(t) T_1(t) dt &= \int_{-1}^1 U_1(t) T_0(t) dt = \int_{-1}^1 U_1(t) T_1(t) dt = 0, \\ \int_{-1}^1 U_0(t) T_2(t) dt &= -\frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^1 U_1(t) T_1(t) dt = \frac{4}{3}, \\ \int_{-1}^1 \frac{T_m(t) M_{n+1}(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{m0}) \frac{2\eta}{k\mu} (i)^m \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\gamma) J_{n+1}(\gamma L) J_m(\gamma L) d\gamma. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая, что на границах ступеньки при $z = \pm L e_x(z) = 0$, запишем следующее граничное условие:

$$\int_{-1}^1 e'_x(t) dt = 0. \quad (35)$$

Подставим решение (33) в граничное условие (35):

$$a_0 \int_{-1}^1 \frac{dt'}{\sqrt{1-t'^2}} + a_1 \int_{-1}^1 \frac{T_1(t')dt'}{\sqrt{1-t'^2}} + a_2 \int_{-1}^1 \frac{T_2(t')dt'}{\sqrt{1-t'^2}} = 0. \quad (36)$$

Так как второй и третий интегралы в равенстве (36) равны нулю, то отсюда следует, что $a_0 = 0$, поэтому из соотношения (33) нетрудно записать следующую систему алгебраических уравнений относительно a_1 и a_2 :

$$\frac{\eta}{k\mu} \left(1 + \frac{L\pi}{2} K_{11}\right) a_1 + iL \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi\eta}{2k\mu} K_{12}\right) a_2 = \quad (37)$$

$$= 2\pi A_0 \alpha_0 J_1(\gamma_0 L),$$

$$-iL \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi\eta}{2k\mu} K_{21}\right) a_1 + \frac{\eta}{k\mu} \left(1 + \frac{L\pi}{2} K_{22}\right) a_2 =$$

$$= 2\pi A_0 \alpha_0 J_2(\gamma_0 L),$$

где

$$K_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\gamma) J_{i+1}(\gamma L) J_j(\gamma L) d\gamma. \quad (38)$$

Заметим, что при выводе системы (37) мы воспользовались свойством ортогональности системы функций $\{T_n(t)\}$ на отрезке $[-1, 1]$. Используя метод Крамера, выражения для коэффициентов a_1 и a_2 имеют следующий вид:

$$a_1 = \frac{1}{\Delta} 2\pi A_0 \alpha_0 \left\{ \left(\frac{\eta}{k\mu} \left(1 + \frac{L\pi}{2} K_{22}\right) J_1(\gamma_0 L) - \right. \right.$$

$$\left. - iL \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi\eta}{2k\mu} K_{21}\right) J_2(\gamma_0 L) \right\},$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta} 2\pi A_0 \alpha_0 \left\{ \left(iL \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi\eta}{2k\mu} K_{21}\right) J_1(\gamma_0 L) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\eta}{k\mu} \left(1 + \frac{L\pi}{2} K_{11}\right) J_2(\gamma_0 L) \right\},$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\eta}{k\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{L\pi}{2} K_{11}\right) \left(1 + \frac{L\pi}{2} K_{22}\right) -$$

$$- L^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi\eta}{2k\mu} K_{12}\right)^2.$$

3. Вычисление вспомогательных интегралов K_{ij} с помощью теории вычетов

Вычислим интегралы K_{ij} ($ij = 1, 2$), входящие в формулы (37) для нахождения коэффициентов a_1 и a_2 :

$$K_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\gamma) J_{i+1}(\gamma L) J_j(\gamma L) d\gamma, \quad (39)$$

где

$$\Delta(\gamma) = \frac{r \operatorname{ctg} r a}{\gamma} - \operatorname{sgn} \gamma.$$

Запишем множитель $\Delta(\gamma)$ в несколько другой форме:

$$\Delta(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{r \cos r a - |\gamma| \sin r a}{\sin r a} \right].$$

Полюса подынтегрального выражения определяются нулями знаменателя множителя $\Delta(\gamma)$:

$$r_m = \frac{\pi m}{a}, \quad m = \overline{1, \infty}.$$

В этих особых точках

$$\gamma_m = \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}.$$

Для больших m ($m \rightarrow \infty$) можно положить, что

$$\gamma_m \approx i \frac{m\pi}{a}.$$

Если ввести обозначение

$$f = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{r \cos r a - |\gamma| \sin r a}{\sin r a} \right] J_{i+1}(\gamma L) J_j(\gamma L),$$

то по теореме о вычетах имеем:

$$K_{ij} = -2\pi i \left\{ \operatorname{Res} f + \sum_{\substack{\gamma=0 \\ \pm\gamma_m \\ \gamma_m}} \operatorname{Res} f \right\},$$

$$\operatorname{Res} f_{\gamma=0} = \frac{k \cos k a}{\sin k a} J_i(0) J_j(0) = k \operatorname{ctg} k a \delta_{i0} \delta_{j0},$$

$$\operatorname{Res} f_{\gamma_m} = \frac{r_m^2 J_i(\gamma_m L) J_j(\gamma_m L)}{-\gamma_m^2 a} =$$

$$= -\frac{1}{a} \left(\frac{r_m}{\gamma_m}\right)^2 J_i(\gamma_m L) J_j(\gamma_m L).$$

Выше мы воспользовались следующими формулами [4]:

$$\operatorname{Res} = \frac{f(a)}{g'(a)}, \quad (\sin r a)' = -\frac{a \gamma \cos r a}{r}. \quad (40)$$

Тогда, учитывая, что $r_m = \frac{\pi m}{a}$, формулу для нахождения K_{ij} можно переписать в виде

$$K_{ij} = -2i\pi \left\{ k \operatorname{ctg} k a \delta_{i0} \delta_{j0} - \right. \quad (41)$$

$$\left. - \frac{\pi^2}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{\gamma_m^2}\right) J_i(\gamma_m L) J_j(\gamma_m L) \right\} =$$

$$= 2\pi \left\{ -ik \operatorname{ctg} k a \delta_{i0} \delta_{j0} + \frac{i\pi^2}{a^3} \frac{1}{\gamma_1^2} J_i(\gamma_1 L) J_j(\gamma_1 L) + \right.$$

$$+ \frac{1}{a} \sum_{m=2}^{\infty} J_i \left(i \frac{\pi}{a} L m \right) J_j \left(i \frac{\pi}{a} L m \right) \left. \right\}.$$

Так как в нашем случае $i, j \neq 0$ (для K_{ij} в формулах (38) $i, j = 1, 2$), то первый член в равенстве (41) равен нулю. Ограничиваясь в выражении (41) вторым членом, в первом приближении интегралы K_{ij} можно вычислять по формулам ($i, j = 1, 2$):

$$K_{ij} = \frac{2i\pi^3}{\gamma_1^2 a^3} J_i(\gamma_1 L) J_j(\gamma_1 L). \quad (42)$$

4. Дифракция основной волны прямоугольного волновода на отрезке активной полупроводниковой пленки с отрицательной дифференциальной проводимостью, расположенной на узкой стенке

Из выражения (13) с учетом соотношения (32) для функции $e'_x(t)$ найдем коэффициент $A(\gamma)$:

$$A(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \frac{iL}{\sin ra} \times \left\{ \int_{-1}^1 \frac{a_1 T_1(t) e^{i\gamma L t}}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^1 \frac{a_2 T_2(t) e^{i\gamma L t}}{\sqrt{1-t^2}} dt \right\}. \quad (43)$$

Учитывая, что $T_1(t) = t$, а $T_2(t) = 2t^2 - 1$, вычислим интегралы в формуле (43):

$$\int_{-1}^1 \frac{T_1(t) e^{i\gamma L t}}{\sqrt{1-t^2}} dt = i\pi J_1(\gamma L),$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_2(t) e^{i\gamma L t}}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2\pi \left\{ \frac{J_1(\gamma L)}{\gamma L} - J_2(\gamma L) \right\} - \pi J_0(\gamma L).$$

Подставляя значения вычисленных выше интегралов в соотношение (43), получим, что

$$A(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\pi L}{\gamma \sin ra} \times \left\{ ia_1 J_1(\gamma L) + a_2 \left(\frac{2J_1(\gamma L)}{\gamma L} - 2J_2(\gamma L) - J_0(\gamma L) \right) \right\}. \quad (44)$$

С учетом выражения (44) для $A(\gamma)$, электрическое поле в волноводе определяется следующим образом:

$$E_x = A_0 \sin(r_1(a-y)) e^{-i\gamma_1 z} + \frac{iL}{2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma \sin ra} \left\{ ia_1 J_1(\gamma L) + a_2 \left(\frac{2J_1(\gamma L)}{\gamma L} - 2J_2(\gamma L) - J_0(\gamma L) \right) \right\} \sin r(a-y) e^{-i\gamma z} d\gamma. \quad (45)$$

Интеграл в (45) будем вычислять по формуле вычетов. Используя соотношения (40) и равенство:

$$(\sin ra\gamma)' = -\gamma^2 a \frac{\cos ra}{r},$$

а также тот факт, что в волноводе распространяется только основная мода, то есть

$$\gamma_1 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}, \quad r_1 = \frac{\pi}{a},$$

получаем выражение для составляющей электрического поля в прямоугольном волноводе с отрезком полупроводниковой пленки:

$$E_x = A_0 + \frac{L\pi^2}{\gamma_1^2 a^2} \left\{ ia_1 J_1(\gamma_1 L) + a_2 \left(\frac{2J_1(\gamma_1 L)}{\gamma_1 L} - 2J_2(\gamma_1 L) - J_0(\gamma_1 L) \right) \right\} \times \sin r_1(a-y) e^{-i\gamma_1 z}.$$

Так как по определению коэффициент прохождения основной волны в прямоугольном волноводе определяется следующим образом:

$$T = \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \frac{E_x(\gamma_1, z)}{\sin r_1(a-y) e^{-i\gamma_1 z}} \right\},$$

то окончательно для него получаем простую формулу

$$T = 1 + \frac{L\pi^2}{\gamma_1^2 a^2} \left\{ ia_1 J_1(\gamma_1 L) + a_2 \left(\frac{2J_1(\gamma_1 L)}{\gamma_1 L} - 2J_2(\gamma_1 L) - J_0(\gamma_1 L) \right) \right\}. \quad (46)$$

Для вычисления модуля коэффициента прохождения $T(\alpha)$, в дальнейшем обозначаемого $|T(\alpha)|$, где $\alpha = \gamma_1 L$, и фазы коэффициента прохождения $\arg T(\alpha)$ необходимо вычислить коэффициенты a_1 и a_2 . Вспомним, что

$$\eta = \frac{k\delta}{1 - \frac{\delta^2}{4} r_{\text{ПО}}^2},$$

где $r_{\text{ПО}}^2 = k^2 \varepsilon_{\text{П}} - \gamma_1^2$, а комплексная проницаемость пленки $\varepsilon_{\text{П}} = \varepsilon - i4\pi\sigma/\omega$. Тогда для коэффициента η получим следующее выражение:

$$\eta = \eta_1 - i\eta_2, \quad (47)$$

$$\eta_1 = \frac{k\delta c}{\left(c^2 - \left(\pi k^2 \delta^2 \frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right)}, \quad (48)$$

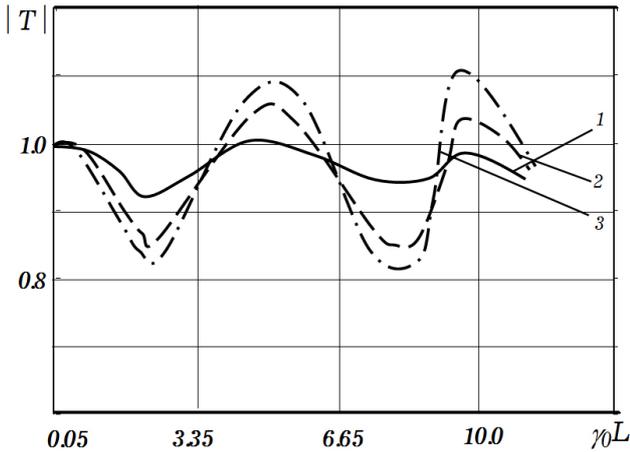


Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента прохождения T от длины полупроводниковой пленки $\gamma_1 L$: $\epsilon = 10$; $\sigma/\omega = 1$; $f = 40$ ГГц, 1 - $k\delta = 0,01$; 2 - $k\delta = 0,1$; 3 - $k\delta = 0,3$
Fig. 2. Dependence of the modulus of the transmission coefficient T on the length of the semiconductor film $\gamma_1 L$: $\epsilon = 10$; $\sigma/\omega = 1$; $f = 40$ GHz, 1 - $k\delta = 0,01$; 2 - $k\delta = 0,1$; 3 - $k\delta = 0,3$

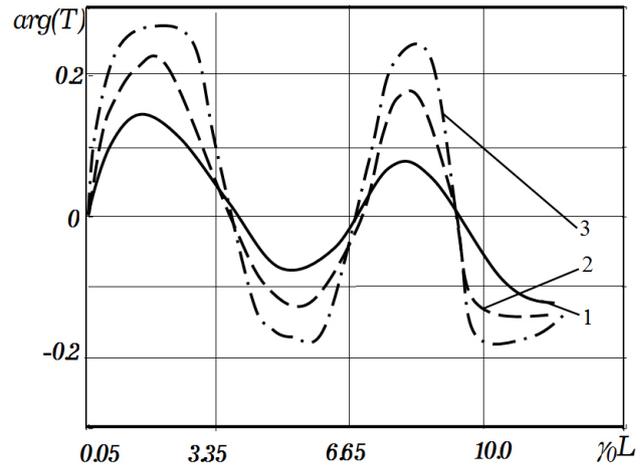


Рис. 3. Зависимость аргумента коэффициента прохождения T от длины полупроводниковой пленки $\gamma_1 L$: $\epsilon = 10$; $\sigma/\omega = 1$; $f = 40$ ГГц, 1 - $k\delta = 0,01$; 2 - $k\delta = 0,1$; 3 - $k\delta = 0,3$
Fig. 3. Dependence of the transmission coefficient argument T on the length of the semiconductor film $\gamma_1 L$: $\epsilon = 10$; $\sigma/\omega = 1$; $f = 40$ GHz, 1 - $k\delta = 0,01$; 2 - $k\delta = 0,1$; 3 - $k\delta = 0,3$

$$\eta_2 = \frac{\pi(k\delta)^3 \frac{\sigma}{\omega}}{\left(c^2 - \left(\pi k^2 \delta^2 \frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right)},$$

$$c = 1 + \gamma_1 \delta^2 + \delta^2 k^2 \epsilon.$$

Оценим значения коэффициентов η_1 и η_2 при $\epsilon = 10$, $\sigma/\omega = 1$, частоте $f = 40$ ГГц. Нетрудно показать, что при $k\delta = 0,01$ - $\eta_1 = 0,02$, $\eta_2 = 0,00002$; при $k\delta = 0,1$ - $\eta_1 = 0,24$, $\eta_2 = 0,03$; при $k\delta = 0,3$ - $\eta_1 = 0,8$, $\eta_2 = 1,5$.

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчета $|T|$ и $\arg(T)$ для разных значений $\gamma_1 L$ и разных значений параметров пленки. Штриховые линии на этих рисунках соответствуют случаю $\sigma = 0$.

Из анализа кривых, изображенных на рис. 2 и 3 следует, что функции $|T|$ и $\arg(T)$ имеют резонансный характер, причем минимальному $|T|$ соответствует максимальное значение $\arg(T)$. Можно сделать вывод, что при малых значениях $k\delta$ ($k\delta = 0,01$) $|T|$ и $\arg(T)$ изменяются мало и кривая 1 (соответствующая случаю $k\delta = 0,01$) близка к штриховой линии (случай $\sigma = 0$). При увеличении $k\delta$ увеличиваются пределы изменения $|T|$ и $\arg(T)$. Из рисунка следует, что существуют такие интервалы $\gamma_1 L$ (при $k\delta \geq 0,1$), где коэффициент $|T|$ становится больше 1, что соответствует случаю усиления электромагнитной волны в активной полупроводниковой пленке с отрицательной дифференциальной проводимостью.

Список литературы

1. Аналитический метод расчета тонких продольных неоднородностей в волноведущих структурах СВЧ / В.А. Неганов [и др.] // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ: тез. докл. V Межд. науч.-техн. конф. 1995. С. 37-38.
2. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространения радиоволн. М.: Наука, 1989. 544 с.
3. Мухшвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1986. 512 с.
4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров: справочник. М.: Наука, 1967. 780 с.
5. Табаков Д.П., Морозов С.В., Ключев Д.С. Применение тонкопроволочного интегрального представления электромагнитного поля к решению задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих телах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 2. С. 7-14. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14>
6. Возникновение флуктуаций амплитуды и фазы радиосигнала в турбулентной атмосфере / Д.С. Ключев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. Т. 26, № 1. С. 28-37. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.1.28-37>

Информация об авторах

Вороной Андрей Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.
Область научных интересов: устойчивость распределенных систем электропитания, электробезопасность.
E-mail: arminvanburn@yandex.ru

Солдатов Александр Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: ферритовые устройства и антенны СВЧ.

E-mail: solger259145@yandex.ru

Кубанов Виктор Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. Специалист в области антенн, СВЧ-устройств и их технологий. Его научные работы посвящены теории и практике анализа электромагнитной обстановки вблизи излучающих систем радиосвязи и радиовещания. Электродинамические модели, разработанные автором, вошли в состав государственных нормативных документов и сертифицированного программного продукта, которые решают задачи анализа электромагнитной обстановки вблизи излучающих объектов телекоммуникаций и оптимизации топологии технических средств, входящих в состав излучающих комплексов, позволяют быстро и эффективно осуществлять паспортизацию излучающих объектов радиочастотного диапазона по критерию электромагнитной безопасности. Результаты исследований нашли отражение в 90 публикациях, среди которых: научные монографии и статьи в журналах, доклады на международных и всероссийских конференциях, учебники и учебные пособия для использования в учебном процессе. За высокие достижения в отрасли связи награжден нагрудными знаками «Почетный радист», «Мастер связи», «За отличные успехи в работе высшей школы СССР», памятной медалью «Патриот России», имеет государственную награду «Заслуженный связист Российской Федерации».

Область научных интересов: устройства СВЧ, антенны и распространение радиоволн.

E-mail: kubanov@psati.ru

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2023, vol. 26, no. 3, pp. 79–88

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.3.79-88
UDC 621.315.592
Original Research

Received 27 April 2023
Accepted 29 May 2023
Published 27 September 2023

Passage of an electromagnetic wave through a rectangular waveguide with a section of a semiconductor film

Andrey A. Voronoi, Alexander A. Soldatov, Victor P. Kubanov

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – Background. In microwave technology, of great interest is the creation of amplifiers and generators based on thin-layered longitudinal inhomogeneities in rectangular waveguides, which are an integral part of many functional devices in the microwave and EHF ranges. **Aim.** Therefore, it is of practical interest to calculate one of these inhomogeneities in a rectangular waveguide. **Methods.** One of the methods for calculating such structures is the diffraction of an electromagnetic wave by a segment of a semiconductor film with negative differential conductivity on a narrow wall of a rectangular waveguide. Based on the boundary conditions, a singular integral equation for the electric component of the electromagnetic field was obtained. By the method of inversion of the integral equation and by means of expansion in terms of Chebyshev polynomials, the integral equation is given in a system of two algebraic equations. The coefficients of the system are calculated according to the theory of residues. Then an equation was obtained for calculating the transmission coefficient, which was calculated in the Matcad environment. **Results.** Based on the integral equation, the values for calculating the transmission coefficient for the structure under consideration are obtained. **Conclusion.** From the graphs obtained for the calculated transmission coefficient, it can be concluded that there are frequency zones where an electromagnetic wave is amplified in the structure. So, on the basis of the structure under consideration, it is possible to create amplifiers and generators of the microwave and EHF ranges.

Keywords – thin-layered longitudinal inhomogeneities; semiconductor film with negative differential conductivity; singular integral equation; residue theory; transmission coefficient.

✉ arminvanburn@yandex.ru (Andrey A. Voronoi)

 © Andrey A. Voronoi et al., 2023

References

1. V. A. Neganov et al., “An Analytical Method for Calculating Thin Longitudinal Inhomogeneities in Waveguide Microwave Structures,” in *Elektrodinamika i tekhnika SVCh i KVCh: tez. dokl. V Mezhd. nauch.-tekhn. konf.*, 1995, pp. 37–38. (In Russ.)
2. V. V. Nikol'skiy and T. I. Nikol'skaya, *Electrodynamics and Radio Wave Propagation*. Moscow: Nauka, 1989. (In Russ.)
3. N. I. Muskheshvili, *Singular Integral Equations*. Moscow: Nauka, 1986. (In Russ.)
4. A. Ango, *Mathematics for Electrical and Radio Engineers: A Handbook*. Moscow: Nauka, 1967. (In Russ.)
5. D. P. Tabakov, S. V. Morozov, and D. S. Klyuev, “Application of the thin-wire integral representation of the electromagnetic field to the solution of the problem of diffraction of electromagnetic waves by conducting bodies,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 2, pp. 7–14, 2022, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14>. (In Russ.)

6. D. S. Klyuev et al., "The occurrence of fluctuations in the amplitude and phase of a radio signal in a turbulent atmosphere," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 26, no. 1, pp. 28–37, 2023, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.1.28-37>. (In Russ.)

Information about the Authors

Andrey A. Voronoi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, deputy head of the Department of Radio Electronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: stability of distributed power supply systems, electrical safety.

E-mail: arminvanburn@yandex.ru

Alexander A. Soldatov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Radio Electronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: ferrite devices and microwave antennas.

E-mail: solger259145@yandex.ru

Victor P. Kubanov, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Radio Electronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. Specialist in the field of antennas, microwave devices and their technologies. His scientific works are devoted to the theory and practice of analyzing the electromagnetic environment near radiating radio communication and broadcasting systems. The electrodynamic models developed by the author are included in the state regulatory documents and a certified software product that solve the problems of analyzing the electromagnetic environment near radiating telecommunications objects and optimizing the topology of technical facilities that are part of radiating complexes, allow you to quickly and efficiently carry out certification of radiating objects in the radio frequency range according to criterion of electromagnetic safety. The results of the research were reflected in 90 publications, including: scientific monographs and articles in journals, reports at international and all-Russian conferences, textbooks and teaching aids for use in the educational process. For high achievements in the communications industry, he was awarded the badges «Honorary Radio Operator», «Master of Communications», «For excellent success in the work of higher education in the USSR», a commemorative medal «Patriot of Russia», has a state award «Honored Signalman of the Russian Federation».

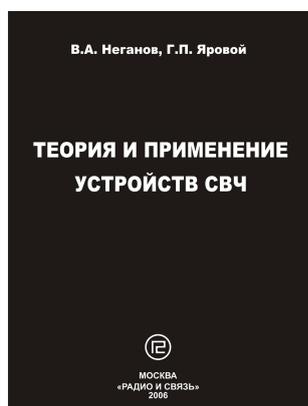
Research interests: microwave devices, antennas and radio wave propagation.

E-mail: kubanov@psati.ru

РЕКЛАМА

Неганов, В.А.

Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.



ISBN 5-256-01812-4

УДК 621.396.67

ББК 32.840

Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.