

Сравнение геометрикооптического и «апертурного» подходов для расчета излучения зарядов, пролетающих вблизи диэлектрических объектов

Е.С. Белоногая¹ , Д.С. Ключев² 

¹ Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург,
Университетская наб., 7–9

² Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Нахождение электромагнитного поля, возбуждаемого зарядом, пролетающим вблизи диэлектрического объекта, является одной из важных задач теории излучения заряженных частиц. Нередко необходимо знать главным образом поле излучения в геометрикооптической области. В настоящей статье на примере диэлектрической призмы большого (в масштабе рассматриваемой длины волны) размера сравниваются два подхода к решению подобной задачи. Один из них основан на применении геометрической оптики, а другой – на асимптотическом расчете «апертурных интегралов». Показано, что в геометрикооптической области первый способ обладает рядом преимуществ. Например, выражение для сечения лучевой трубки, получаемое при использовании геометрической оптики, позволяет вычислять каустики или показывать их отсутствие, что и продемонстрировано в статье на примере трех объектов различной формы.

Ключевые слова – излучение Вавилова – Черенкова; геометрическая оптика; метод стационарной фазы; лучевая трубка; каустики.

Введение

Одной из задач физики волновых процессов является нахождение электромагнитного поля, возбуждаемого заряженной частицей или сгустком частиц, пролетающих мимо некоторого диэлектрического объекта либо сквозь него. Точных решений подобных задач, как правило, построить не удастся, или же они являются громоздкими, плохо интерпретируемыми и требующими трудоемкого расчета. При этом численные расчеты предполагают наличие больших компьютерных ресурсов. По этой причине большинство задач решается в некотором приближении.

В статье подробно рассматривается применение метода стационарной фазы к апертурным интегралам, дающим решение в случае больших (в масштабе длины волны) объектов, в том числе и в геометрикооптической области. У этого подхода есть сложности: системы уравнений для нахождения точки перевала нередко возможно решить только численно, вторые производные подынтегральных функций для вычисления определителя оказываются слишком громоздкими и т. д. Однако, когда точка перевала находится для однократного интеграла, метод стационарной фазы, напротив, позволяет сильно упростить задачи [1].

Альтернативой данному подходу является геометрикооптический расчет [2] на основе метода,

описанного, в частности, В.А. Фоком для отраженных лучей [3]. Суть метода можно обозначить несколькими шагами: сначала вычисляется поле, возбужденное внутри объекта без внешних границ, затем с помощью коэффициентов Френеля определяется поле на внешней границе объекта, на последнем шаге учитываются ход лучей и расширение лучевых трубок в области вне объекта.

Встречаются и обратные задачи: свойства среды определяются на основе изменения поля после отражения или прохождения [4–6].

В этой работе проведено сравнение двух подходов для нахождения поля в геометрикооптической области на примере задачи с диэлектрической призмой, описание которой приведено в разделе 1, а также произведен расчет каустик в разделе 2 для некоторых наиболее распространенных диэлектрических объектов на основе использования выражений для расширения лучевой трубки. Все исследования проводятся для Фурье-образа электрического поля (вычисление самого поля, сводящееся к расчету соответствующего обратного интеграла Фурье, выходит за рамки данной работы).

1. Преимущество геометрооптического метода

Рассмотрим преимущества геометрикооптического метода на примере следующей задачи. Вдоль

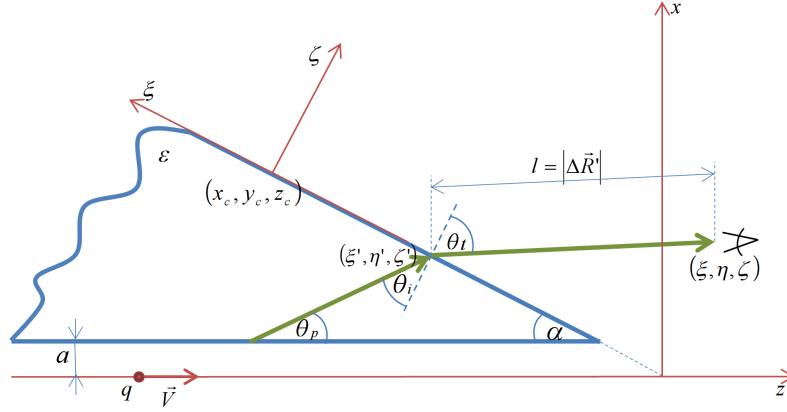


Рис. 1. Центральное сечение призмы с основными обозначениями
Fig. 1. Central cross-section of the prism with main notations

границы диэлектрической призмы с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью $\mu = 1$ пролетает заряженная частица с зарядом q и скоростью $\vec{V} = \beta \vec{c}$ (где c – скорость света) на расстоянии a от ее нижней границы. Размер призмы считается большим по сравнению с рассматриваемой длиной волны. Призма находится в среде, отличия которой от вакуума несущественны (рис. 1). Считаем, что излучение выходит только из прямоугольной области с центром в точке (x_c, y_c, z_c) со сторонами d и b , параллельными осям ξ и η соответственно, остальная часть призмы закрыта для излучения.

Для этой задачи известно геометрическое решение [7]. Рассмотрим далее особенности решения данной задачи «апертурным» методом (т. е. методом, основанным на формулах Стрэттона – Чу). Данное решение является значительно более общим, так как позволяет находить поле в тех областях, в которых геометрическая оптика несправедлива. Однако этот метод имеет и определенные недостатки, если задача заключается в анализе поля только в той области, где геометрическая оптика справедлива.

Компоненты поля, полученные апертурным методом, можно найти в статье [8]. Они имеют вид

$$\begin{cases} E_{\xi}^{(h)}(R) \\ E_{\eta}^{(h)}(R) \\ E_{\zeta}^{(h)}(R) \end{cases} = \frac{ik}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} d\xi' \int_{-b/2}^{b/2} d\eta' \frac{G(|\Delta\vec{R}'|)}{(|\Delta\vec{R}'|)^2} \times \begin{cases} -\left[(\Delta\eta')^2 + \zeta^2\right] H_{\eta}(\vec{R}') - \Delta\xi' \Delta\eta' H_{\xi}(\vec{R}') \\ \left[(\Delta\xi')^2 + \zeta^2\right] H_{\xi}(\vec{R}') + \Delta\xi' \Delta\eta' H_{\eta}(\vec{R}') \\ -\zeta \Delta\eta' H_{\xi}(\vec{R}') + \zeta \Delta\xi' H_{\eta}(\vec{R}') \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} E_{\xi}^{(e)}(R) \\ E_{\eta}^{(e)}(R) \\ E_{\zeta}^{(e)}(R) \end{cases} = \frac{ik}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} d\xi' \int_{-b/2}^{b/2} d\eta' \frac{G(|\Delta\vec{R}'|)}{|\Delta\vec{R}'|} \times \begin{cases} -\zeta E_{\xi}(\vec{R}') \\ -\zeta E_{\eta}(\vec{R}') \\ \Delta\xi' E_{\xi}(\vec{R}') + \Delta\eta' E_{\eta}(\vec{R}') \end{cases}. \quad (2)$$

Штрихом здесь отмечены координаты поверхности призмы (переменные интегрирования). Для наглядности напряженность электрического поля разделена на две составляющие, на что указывают верхние индексы (e) и (h) : подынтегральные функции зависят от напряженности электрического и магнитного поля на поверхности призмы соответственно. Проекции \vec{E} и \vec{H} электромагнитного поля в подынтегральных функциях обозначают поле на верхней внешней поверхности призмы (они приведены в [8]). В (1) и (2) использованы обозначения: $k = \omega/c$ – волновое число, i – мнимая единица, $\Delta\xi' = \xi - \xi'$, $\Delta\eta' = \eta - \eta'$, $\vec{R}' = (\xi', \eta', 0)$, а $G(|\Delta\vec{R}'|)$ – функция Грина:

$$G(|\Delta\vec{R}'|) = \frac{e^{ik|\Delta\vec{R}'|}}{|\Delta\vec{R}'|} = \frac{e^{ik\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + \zeta^2}}. \quad (3)$$

Для расчета интегралов (1), (2) можно применить метод стационарной фазы. Известно [9; 10], что n -кратные интегралы с большим положительным параметром Ω вида

$$\hat{I}_n(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\Omega q(x)} dx_1 \dots dx_n, \quad \Omega > 0 \quad (4)$$

равны

$$\hat{I}_n(\Omega) = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{n/2} \times \quad (5)$$

$$\times \exp \left[i\Omega q(x_s) + \frac{i\pi}{4} \sigma \right] \frac{f(x_s) + O(\Omega^{-1})}{\left| \det \frac{\partial^2 q}{\partial x_{is} \partial x_{js}} \right|^{1/2}}.$$

Здесь

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(d_i),$$

где d_i – собственные значения матрицы

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_{is} \partial x_{js}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

а x_{js} – координаты стационарной точки. Для нахождения этих координат нужно найти точки одновременного обнуления производных фазы подынтегральной функции по ξ' , η' .

В формулах (1), (2) с учетом поля на поверхности призмы, выражения для которого можно найти в [8], выделяется одинаковая для всех компонент фазы, которую можно разделить на шесть компонент:

$$\begin{cases} \Phi_1 = ik\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + \zeta^2}, \\ \Phi_2 = -a\sqrt{\kappa^2 + k_y^2}, \\ \Phi_3 = i(x - a)g_m, \\ \Phi_4 = ik_y y, \\ \Phi_5 = ik\beta^{-1}z, \\ \Phi_6 = -i\pi/4, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\kappa = \frac{k}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad k_y = \frac{k\sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1}\eta'}{\beta\sqrt{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2}},$$

$$g_m = \sqrt{\frac{k^2(\varepsilon\beta^2 - 1)}{\beta^2} - k_y^2}, \quad x = x_c + \xi' \sin \alpha,$$

$$y = \eta', \quad z = z_c - \xi' \cos \alpha.$$

Ниже приведены результаты дифференцирования мнимой части фазы Φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} &= g_m \sin \alpha \left[1 + \frac{k_y^2}{g_m^2} \frac{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} \right] - \\ &- \frac{k_y \eta' (x_c + \xi' \sin \alpha - a) \sin \alpha}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} - \frac{k \cos \alpha}{\beta} - \\ &- \frac{k(\xi - \xi')}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + \zeta^2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} &= k_y \left[1 + \frac{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} \right] - \\ &- \frac{k_y^2}{g_m \eta'} \frac{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^3}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} \end{aligned}$$

Стационарная точка есть решение следующей системы уравнений относительно (ξ', η') :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} = f_1 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} = f_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решить подобную нелинейную систему уравнений можно численно. Для рассматриваемой задачи был выбран метод Ньютона как наиболее удобный.

Метод Ньютона заключается в поиске решения за некоторое количество итераций до тех пор, пока абсолютная разница между новым и предыдущим значением не окажется менее некоторого заранее заданного значения.

Для решения системы $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0$ используем следующую рекурсию:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \xi'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \xi'_n + \frac{\partial f_1}{\partial \eta'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \eta'_n = -f_1(\xi'_n, \eta'_n), \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \xi'_n + \frac{\partial f_2}{\partial \eta'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \eta'_n = -f_2(\xi'_n, \eta'_n), \end{cases} \quad (9)$$

где $\delta \xi'_n = \xi'_{n+1} - \xi'_n$ и $\delta \eta'_n = \eta'_{n+1} - \eta'_n$ – приращения значений искомых точек на n -м шаге. Их легко вычислить методом Крамера, а затем сравнить результат с заранее заданным значением. Для остановки рекурсии оба приращения в абсолютном значении должны быть меньше заранее заданного числа. Необходимо также задать начальную точку отсчета (ξ'_0, η'_0) , например, в начале координат с небольшим смещением.

Результат дифференцирования f_1 , f_2 приведен ниже

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi'} &= \frac{\partial g_m}{\partial \xi'} \sin \alpha \left[1 - \frac{\Xi^2}{\Sigma^2} \right] + \frac{\partial k_y}{\partial \xi'} \sin \alpha \frac{X}{\Sigma^2} [2\Xi - \eta'] + \\ &+ \frac{k_y \sin^2 \alpha}{\Sigma^4} [2\Xi \eta'^2 - \eta'(\eta'^2 - X^2)] + \\ &+ \frac{k(\eta - \eta')^2 + k\zeta^2}{|\Delta \bar{R}|^3}, \end{aligned} \quad (10)$$

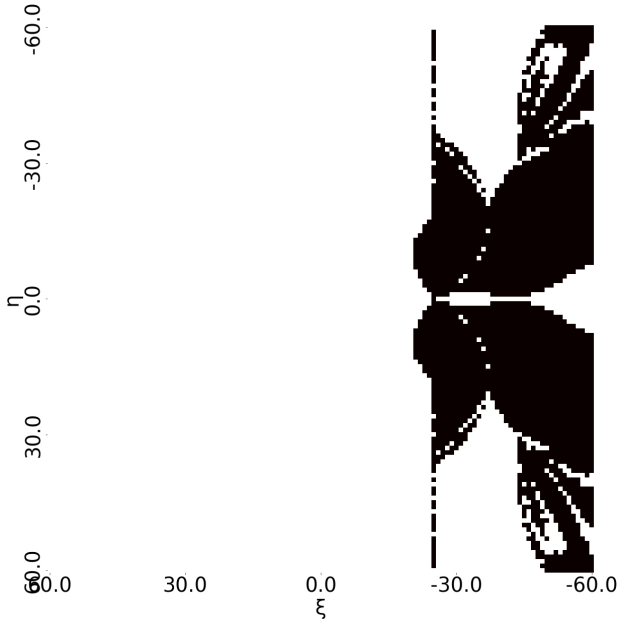


Рис. 2. Пример «слепой зоны» точек для вычисления стационарной фазы. Черным обозначены области, в которых не вычисляется точка стационарной фазы. Для наглядности расстояния измеряются в единицах c/ω . При этом использованы следующие параметры: $\varepsilon=2$, $a=1$, $\alpha=\pi/6$, $\beta=0,9$, $\zeta=30$, $b=d=50$

Fig. 2. Example of «blind spot» for stationary phase points calculations. Areas of undefined stationary points are shown in black. All the distances are in c/ω . Parameters for calculations: $\varepsilon=2$, $a=1$, $\alpha=\pi/6$, $\beta=0,9$, $\zeta=30$, $b=d=50$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \eta'} &= \frac{\partial g_m}{\partial \eta'} \sin \alpha \left[1 - \frac{\Xi^2}{\Sigma^2} \right] + \frac{\partial k_y}{\partial \eta'} \sin \alpha \frac{X}{\Sigma^2} [2\Xi - \eta'] + \\ &+ \frac{k_y \sin \alpha X}{\Sigma^2} \left[\frac{2\eta'^2 - 2\Xi\eta'}{\Sigma^2} - 1 \right] - \frac{k(\xi - \xi')(\eta - \eta')}{|\Delta \bar{R}|^3}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \eta'} &= \frac{\partial g_m}{\partial \eta'} \frac{1}{\eta'} \frac{\Xi^2 X}{\Sigma^2} + \frac{\partial k_y}{\partial \eta'} \left[1 + \frac{X^2}{\Sigma^2} - \frac{2\Xi X^2}{\eta' \Sigma^2} \right] + \\ &+ \frac{k_y X^2}{\Sigma^2} \left[\frac{\Xi}{\eta'^2} - \frac{2\eta'}{\Sigma^2} + \frac{2\Xi}{\Sigma^2} \right] + \frac{k(\xi - \xi')^2 + k\zeta^2}{|\Delta \bar{R}|^3}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi'} &= \frac{\partial f_1}{\partial \eta'}. \end{aligned}$$

Здесь:

$$X = x_c + \xi' \sin \alpha - a,$$

$$\Sigma = \sqrt{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2},$$

$$\Xi = \frac{k_y}{g_m} (x_c + \xi' \sin \alpha - a).$$

Все полученные результаты были запрограммированы и сравнены с описанными в [7]. Однако, во-первых, стационарная точка в рамках данной задачи не может быть вычислена аналитически,

что приводит к тому, что точность вычислений снижается. Во-вторых, при поиске стационарных точек появляются «слепые зоны» для вычислений, т. е. те точки наблюдения, для которых, используя описанные методы, невозможно найти точку стационарной фазы. Например, в плоскости $\zeta_{obs} = \text{const}$, где ζ_{obs} – расстояние от верхней поверхности призмы (рис. 1), можно наблюдать области (с пиковым значением поля), в которых стационарная точка не находится. Чем дальше плоскость расположена от поверхности призмы, тем больше эта область. Такая слепая зона изображена на рис. 2.

Приведем сравнение электрического поля, полученного при помощи метода стационарной фазы и при помощи учета лучевой трубки, для линий $\zeta = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$. Рисунок распределения амплитуды поля в пространстве совпадает, величина поля имеет одинаковый порядок, но при увеличении расстояния от призмы в рамках приближения геометрической оптики и увеличении диэлектрической проницаемости в пиковых значениях расхождение величины поля может составлять до 15 %.

Оба подхода верно отражают структуру и направленность поля, но метод стационарной фазы дает более сглаженное решение.

На рис. 3 приведено сравнение поля при различных скоростях заряженной частицы и расстояниях от поверхности призмы.

2. Вычисление каустик

Согласно [11], каустики можно вычислить (либо показать их отсутствие), используя выражения для сечения лучевой трубки $D(l)$. Для этого нужно решить уравнение $D(l) = 0$ совместно с системой уравнений хода лучей. Рассмотрим три диэлектрических объекта: конус, призму и шар (рис. 4). Источником излучения, как и ранее, является точечный движущийся заряд. Геометрооптические решения этих задач, а также формулы для сечения лучевой трубки приведены, соответственно, в работах [2; 7; 12].

Вычисление каустик для конуса с каналом (рис.4, слева) не представляет сложностей. Так как $D(l) = \frac{\rho}{\rho'} \cos \theta_t$ [2], то решение выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \theta_t = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \rho = 0. \end{cases} \quad (11)$$

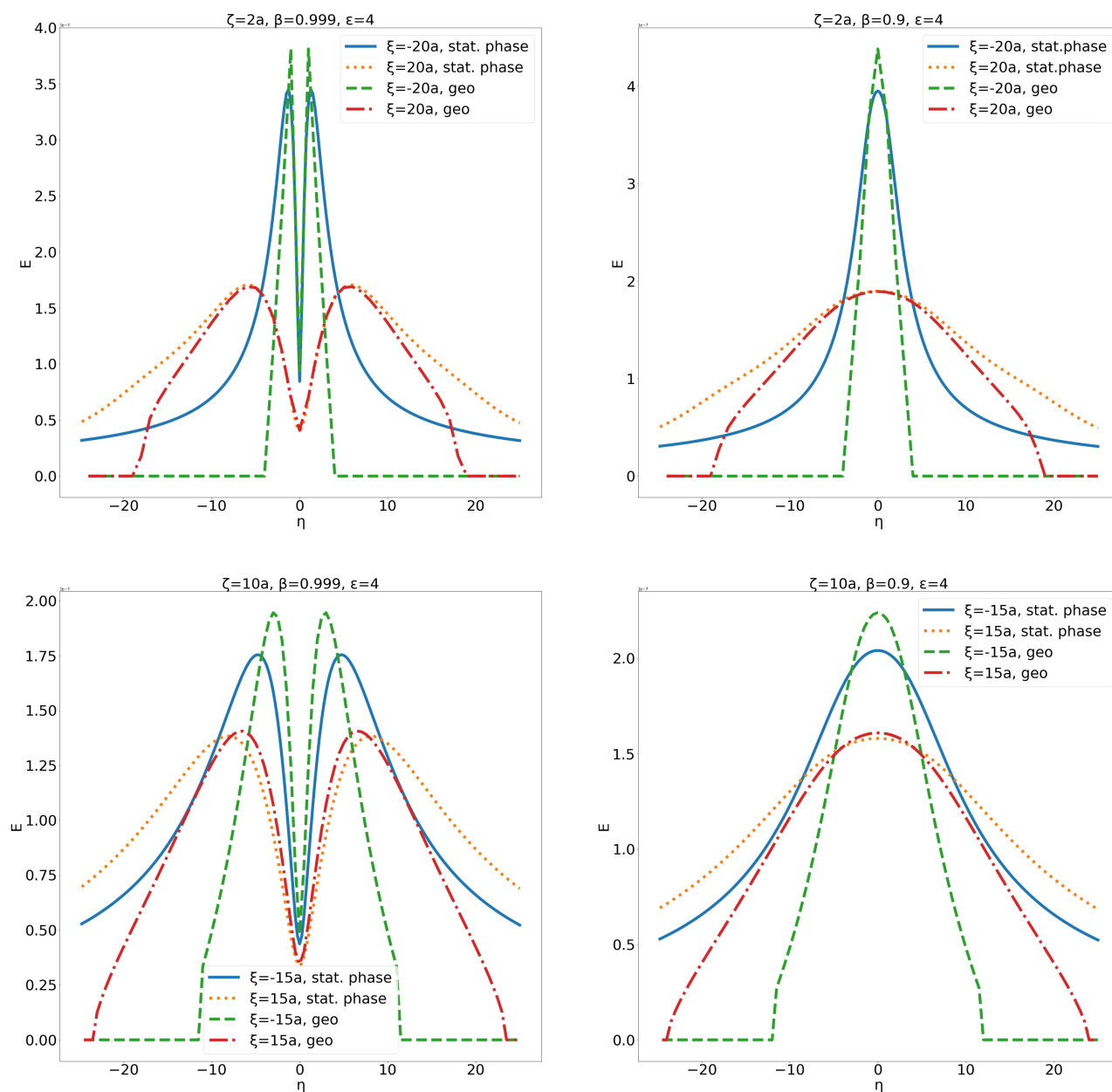


Рис. 3. Сравнение результатов, полученных методом стационарной фазы и методом геометрической оптики, для Фурье-образа электрического поля в В·с/м для призмы с параметрами: $q=1$ нКл, $\epsilon=4$, $a=c/\omega$, $\alpha=\pi/6$, $b=d=50a$
 Fig. 3. Comparison of two methods for Fourier transform electric field magnitude measured in V·s/m for prism where: $q=1$ nC, $\epsilon=4$, $a=c/\omega$, $\alpha=\pi/6$, $b=d=50a$

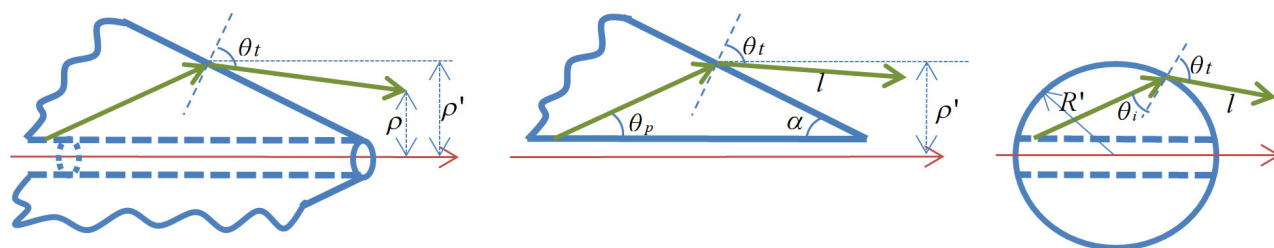


Рис. 4. Центральное сечение рассматриваемых диэлектрических объектов
 Fig. 4. Considered dielectric objects in central plane cross section with main notations

То есть каустики могут образовываться либо на поверхности конуса при предельном угле полного внутреннего отражения, либо на оси конуса. Обе ситуации не представляют практического интереса.

Для призмы (рис. 4, в центре) ситуация также довольно простая. Выражение для сечения лучевой трубки выглядит следующим образом [7]:

$$D(l) = \cos\theta_t + \frac{l}{\rho'} \sqrt{\varepsilon} \sin\theta_p \left[\cos\theta_t + \frac{\cos^2\alpha \sin^2\varphi' (\varepsilon - 1)}{\cos\theta_t} \right]. \quad (12)$$

Уравнение $D(l) = 0$ можно привести к виду

$$\cos^2\theta_t \left(1 + \frac{l}{\rho'} \sqrt{\varepsilon} \sin\theta_p \right) = -\frac{l}{\rho'} \sqrt{\varepsilon} \cos^2\alpha \sin^2\varphi' \sin\theta_p (\varepsilon - 1). \quad (13)$$

Так как при генерации черенковского излучения $\sin\theta_p$ принимает вещественные положительные значения, то (13) не может быть удовлетворено, что означает отсутствие каустик.

Для шара (рис. 4, справа) выражение для сечения лучевой трубки принимает вид [12]:

$$D(l) = \cos\theta_t + \frac{l}{R'} \left[\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin\theta_i \cos\theta_t} - \frac{\sin(\theta' - \theta_t) \cos\theta_t}{\sin\theta'} \right] + \left(\frac{l}{R'} \right)^2 \frac{\sin(\theta_t - \theta') \sin(\theta_t - \theta_i)}{\cos\theta_t \sin\theta_i \sin\theta'}.$$

Квадратное уравнение $D(l) = 0$ имеет два решения:

$$\left[\begin{aligned} \frac{l}{R'} &= \frac{\sin\theta'}{\sin(\theta_t - \theta')} \\ \frac{l}{R'} &= \frac{\cos^2\theta_t \sin\theta_i}{\sin(\theta_t - \theta_i)} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где (R, θ, φ) и (R', θ', φ') – сферические координаты в точке наблюдения и в точке поверхности шара соответственно.

Для нахождения связи между координатами точек каустик воспользуемся выражением для длины луча:

$$l = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\theta - \theta')}. \quad (16)$$

Благодаря цилиндрической симметрии задачи достаточно рассмотреть одно из сечений через ось канала, при этом можно, не теряя общности, перейти от поверхностей каустик к линиям, которые

они образуют в рассматриваемом сечении. Здесь и далее такие линии будут называться линиями каустик. Определим для начала, есть ли такие линии, расположенные на лучах. Для этого воспользуемся начальным условием: в точке выхода луча из шара имеем $l = 0$, $R = R'$, $\theta = \theta'$. В таком случае получим два решения (15): 1) нефизическое решение $\theta' = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 2) решение, подсказанное геометрией задачи, а именно условием $\theta' = \theta_i + \theta_p$, где знак θ_i определяется положением относительно нормали (слева положительное, а справа отрицательное, если смотреть на шар на рис. 4). С учетом закона Снеллиуса $\sin\theta_t = \sqrt{\varepsilon} \sin\theta_i$ получаем итоговое уравнение для точек выхода луча из шара:

$$\theta' = \theta_p \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17)$$

Лучи, выходящие из полученных точек, отсекают области с пересечениями лучей со стороны шара, что можно увидеть на рис. 5. Теперь необходимо найти кривые линии каустик, которые, очевидно, четко просматриваются на рис. 5 со смоделированными лучами.

В случае если каустики не лежат на лучах, применить начальные условия для их нахождения не удастся, требуется другой подход. Свяжем для начала θ , θ' , R из трех уравнений выше (15)–(16), содержащих l :

$$R = R' \left[\cos(\theta - \theta') \pm \sqrt{\frac{\cos^4\theta_t \sin^2\theta_i}{\sin^2(\theta_t - \theta_i)} - \sin^2(\theta - \theta')} \right],$$

$$R = R' \left[\cos(\theta - \theta') \pm \sqrt{\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2(\theta_t - \theta_i)} - \sin^2(\theta - \theta')} \right]. \quad (18)$$

Однако для построения линий каустик нужна связь R и θ , а углы θ_t , θ_i выражаются через θ' и константы задачи, поэтому в качестве дополнительного уравнения воспользуемся уравнением луча:

$$\frac{x - x'}{\kappa_x^*} = \frac{z - z'}{\kappa_z^*}, \quad (19)$$

где [12]:

$$\vec{\kappa}^* = \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} \vec{\kappa} - \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin\theta_i} \vec{N}, \quad (20)$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi' \sin\theta' \\ \sin\varphi' \sin\theta' \\ \cos\theta' \end{pmatrix}, \quad (21)$$

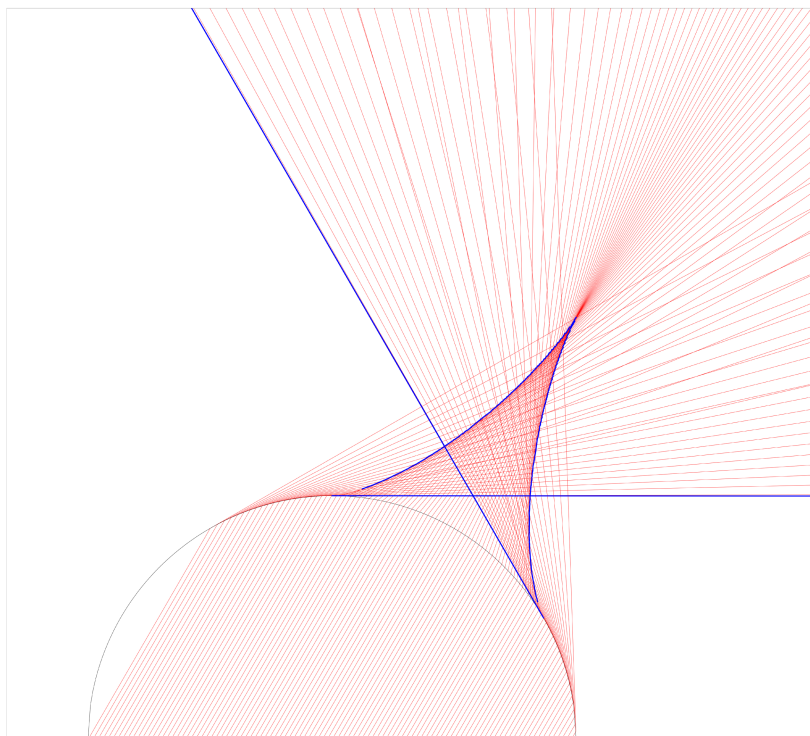


Рис. 5. Каустики шара. Для примера рассмотрен случай с $\epsilon = 4$, $\beta = 0,999$. Тонкими (красными в онлайн-версии статьи) линиями изображены лучи, жирными (синими в онлайн-версии статьи) – вычисленные линии каустик
 Fig. 5. Dielectric ball caustics for case of $\epsilon = 4$, $\beta = 0,999$. Thin (red in online version of the article) lines are rays and thick (blue in online version of the article) lines show caustics

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi' \sin \theta_p \\ \sin \varphi' \sin \theta_p \\ \cos \theta_p \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Здесь $\vec{\kappa}$, $\vec{\kappa}^*$, \vec{N} – это векторы, направленные вдоль падающего и преломленного лучей, а также нормаль, восстановленная в точке падения.

В результате преобразований, а также с учетом цилиндрической симметрии задачи получим уравнение

$$R = \frac{R' \sin \theta_t}{\sin(\theta_t + \theta - \theta')}. \quad (23)$$

Уравнение для связи точек является сложным трансцендентным уравнением, поэтому задача нахождения точек на линии каустик была решена численно: выбирались только те точки, которые подчинялись одновременно уравнениям (18) и (23). На рис. 5 толстыми (синими в онлайн-версии статьи) линиями показаны каустики (как лежащие на лучах, так и кривые), а тонкими (красными в он-

лайн-версии статьи) линиями – лучи, выходящие из шара для наглядности.

Заключение

Использование геометрической оптики, предполагающее определение хода лучей и расширения лучевых трубок, позволяет улучшить визуализацию поля для сложных случаев по сравнению с методом стационарной фазы. Кроме того, после получения сечения лучевой трубки можно дополнительно исследовать волновое поле на наличие каустик, анализ которых позволяет определить слабые места геометрического подхода. Также стоит отметить, что применение геометрической оптики зачастую оказывается менее трудоемкими по сравнению с расчетом апертурных интегралов методом стационарной фазы.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 18-72-10137.

Автор выражает благодарность А.В. Тюхтину за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Tyukhtin A.V., Galyamin S.N., Vorobev V.V. Cherenkov radiation from a dielectric ball with a channel // Journal of the Optical Society of America B. 2021. Vol. 38, no. 3. P. 711–718. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.409461>
2. Belonogaya E.S., Tyukhtin A.V., Galyamin S.N. Approximate method for calculating the radiation from a moving charge in the presence of a complex object // Physical Review E. 2013. Vol. 87, no. 4. P. 043201. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.043201>

3. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970. 520 с.
4. Панин Д.Н., Осипов О.В., Безлюдников К.О. Расчет отражений плоской электромагнитной волны линейной поляризации от границы раздела «воздух – влажная почва» на основе гетерогенных моделей Максвелла Гарнетта и Бруггемана // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 2. С. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.22-27>
5. Янушкевич В.Ф. Особенности распространения радиоимпульсных сигналов в анизотропной среде над углеводородными залежами // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 4. С. 35–39. URL: <https://journals.ssau.ru/rwp/article/view/7071>
6. Численный анализ отражений электромагнитной волны Е-поляризации от неоднородного слоя диэлектрика / Д.Н. Панин [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 1. С. 10–15. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.10-15>
7. Belonogaya E.S., Galyamin S.N., Tyukhtin A.V. Short-wavelength radiation of a charge moving in the presence of a dielectric prism // *Journal of the Optical Society of America B*. 2015. Vol. 32, no. 4. P. 649–654. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000649>
8. Radiation of a charge moving along the boundary of dielectric prism / A.V. Tyukhtin [et al.] // *Physical Review Accelerators and Beams*. 2019. Vol. 22, no. 1. P. 012802. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.22.012802>
9. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1 / пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. М.: Мир, 1978. 547 с.
10. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
11. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
12. Radiation of charge moving through a dielectric spherical target: ray optics and aperture methods / A.V. Tyukhtin [et al.] // *Journal of Instrumentation*. 2020. Vol. 15, no. 5. P. C05043. DOI: <https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/05/C05043>

References

1. Tyukhtin A.V., Galyamin S.N., Vorobev V.V. Cherenkov radiation from a dielectric ball with a channel. *Journal of the Optical Society of America B*, 2021, vol. 38, no. 3, pp. 711–718. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.409461>
2. Belonogaya E.S., Tyukhtin A.V., Galyamin S.N. Approximate method for calculating the radiation from a moving charge in the presence of a complex object. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, no. 4, p. 043201. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.043201>
3. Fok V.A. *Problems of Diffraction and Propagation of Electromagnetic Waves*. Moscow: Sovetskoe radio, 1970, 520 p. (In Russ.)
4. Panin D.N., Osipov O.V., Bezlyudnikov K.O. Calculation of reflections of a plane electromagnetic wave of linear polarization from the «air-moist soil» interface based on heterogeneous models by Maxwell Garnett and Bruggeman. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2022, vol. 25, no. 2, pp. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.22-27> (In Russ.)
5. Yanushkevich V.F. Peculiarities of propagation of radio pulse signals in an anisotropic medium over hydrocarbon deposits. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 35–39. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7071> (In Russ.)
6. Panin D.N. et al. Numerical analysis of e-polarization electromagnetic wave reflections from an inhomogeneous dielectric layer. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 10–15. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.10-15> (In Russ.)
7. Belonogaya E.S., Galyamin S.N., Tyukhtin A.V. Short-wavelength radiation of a charge moving in the presence of a dielectric prism. *Journal of the Optical Society of America B*, 2015, vol. 32, no. 4, pp. 649–654. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000649>
8. Tyukhtin A.V. et al. Radiation of a charge moving along the boundary of dielectric prism. *Physical Review Accelerators and Beams*, 2019, vol. 22, no. 1, p. 012802. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.22.012802>
9. Felsen L., Markuvits N. *Radiation and Scattering of Waves. Vol. 1*. Trans. from English. Ed. by M.L. Levin. Moscow: Mir, 1978, 547 p. (In Russ.)
10. Fedoryuk M.V. *Pass Method*. Moscow: Nauka, 1977, 368 p. (In Russ.)
11. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. *Geometric Optics of Inhomogeneous Media*. Moscow: Nauka, 1980, 304 p. (In Russ.)
12. Tyukhtin A.V. et al. Radiation of charge moving through a dielectric spherical target: ray optics and aperture methods. *Journal of Instrumentation*, 2020, vol. 15, no. 5, p. C05043. DOI: <https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/05/C05043>

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2023, vol. 26, no. 1, pp. 49–57

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.49-57

Received 16 December 2022
Accepted 17 January 2023

Comparison of geometric optics and «aperture» methods for calculation of the electromagnetic radiation caused by charged particles flying by dielectric objects

Ekaterina S. Belonogaya¹ , Dmitriy S. Klyuev² 

¹ Saint Petersburg University
7-9, Universitetskaya Embankment,
Saint Petersburg, 199034, Russia

² Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – Calculation of the electromagnetic field exited by a charged particle flying close to dielectric object is one of the important problems of charged particle radiation theory. In some cases, geometric optics area is preferable for calculations. In the article, two methods of solution of such problem with dielectric prism possessing large size (in comparison with the wavelength under consideration) are considered. One of them is based on geometric optics method, another one is based on asymptotics of «aperture» integrals. It is shown that, in geometric optics area, the first method has a series of advantages. For example, ray tube cross-section expression obtained within geometric optics method allows one to find caustics or to show their absence, which is demonstrated in the article for three objects of various shapes.

Keywords – Cherenkov radiation; geometric optics; stationary phase method; ray tube; caustics.

Информация об авторах

Белоногая Екатерина Сергеевна, магистр физики, инженер-исследователь кафедры радиофизики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург, Россия.

Область научных интересов: излучение Вавилова – Черенкова, геометрическая оптика неоднородных сред, волновые процессы.

E-mail: ekaterinabelonogaya@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0557-1710>

Клюев Дмитрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. Автор более 250 научных работ.

Область научных интересов: электродинамика, устройства СВЧ, антенны, метаматериалы.

E-mail: klyuevd@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>

Information about the Authors

Ekaterina S. Belonogaya, master of physics, research engineer of the Department of Radiophysics of Faculty of Physics, Saint Petersburg University, Saint Petersburg, Russia.

Research interests: Cherenkov radiation, geometric optics of heterogeneous media, wave processes.

E-mail: ekaterinabelonogaya@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0557-1710>

Dmitriy S. Klyuev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Radioelectronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. Author of over 250 scientific papers.

Research interests: electrodynamics, microwave devices, antennas, metamaterials.

E-mail: klyuevd@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>