

ДВ-модель автоколебаний с уширенной спектральной линией

В.В. Зайцев¹ , А.В. Карлов², Х.К.-М. Альалван¹

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34

² Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Представлен алгоритм генерации квазигармонических автоколебаний с однородно уширенной спектральной линией. Алгоритм основан на уравнении движения ДВ-осциллятора томсоновского типа, в которое введено случайное воздействие в виде полосового белого шума. Реализовано два типа воздействий: аддитивное и параметрическое. Спектральные характеристики генерируемых автоколебаний проанализированы методом численного эксперимента. Показано, что аддитивный алгоритм формирует автоколебания с амплитудно-частотными флуктуациями. Флуктуации частоты задают лоренцеву (резонансную) форму центральной части спектра мощности автоколебаний, флуктуации амплитуды образуют шумовой пьедестал спектральной линии. На основе анализа статистических характеристик флуктуаций частоты ДВ-осциллятора с аддитивным шумовым воздействием предложен параметрический алгоритм генерации квазигармонических автоколебаний. В нем случайным возмущениям подвержена резонансная частота колебательной системы томсоновского ДВ-осциллятора. Приведены результаты численных экспериментов с генераторами квазигармонических колебаний.

Ключевые слова – автоколебания; спектральная линия; однородное уширение; флуктуации частоты; дискретное время; разностное уравнение автоколебаний; случайные возмущения.

Введение

При математическом моделировании радиоэлектронных устройств и систем часто приходится иметь дело с квазигармоническими случайными процессами, воспроизводящими сигналы физически существующих источников колебаний. Такие сигналы подвержены случайным изменениям – флуктуациям. Различают флуктуации амплитуды и частоты. Амплитудные флуктуации «зашумляют» спектр вдали от средней частоты автоколебаний и формируют пьедестал спектральной линии. Спектральная форма пьедестала во многом зависит от схемы автогенератора.

Флуктуации частоты проявляются в уширении спектральной линии автоколебаний. При этом имеют место два типа уширения – однородное и неоднородное. Эти термины характерны для оптического диапазона излучений. В радиодиапазоне уширения чаще обозначаются, соответственно, как естественное и техническое.

Однородно уширенная спектральная линия имеет лоренцеву форму вне зависимости от конкретной физической реализации автоколебательной системы. В электронных генераторах радиодиапазона механизм однородного уширения связан с тепловыми и дробовыми шумами носителей заряда. В квантовой электронике считается,

что уширенным спектром излучения обладает в равной степени каждый из излучателей (атом или молекула) вследствие конечного времени их когерентного взаимодействия с электромагнитным полем. Ограничение времени взаимодействия обусловлено, в частности, спонтанными переходами между уровнями энергии атомов, упругими соударениями атомов и другими факторами [1].

Основы теории естественной ширины спектральной линии автоколебаний изложены в классических работах по статистической и квантовой радиофизике [2–6]. В рамках феноменологических представлений механизм уширения описывается путем введения в динамическую систему (активный осциллятор) внешнего случайного воздействия. Такой подход реализован в настоящей статье: автоколебания в дискретном времени генерируются с учетом воздействия на активный осциллятор полосового белого шума. Дискретная динамическая система представлена ДВ-осциллятором томсоновского типа [7].

1. Аддитивная ДВ-модель уширения спектральной линии автоколебаний

В соответствии с основными положениями теории численное моделирование эффекта однородного уширения проведем, реализовав внешнее

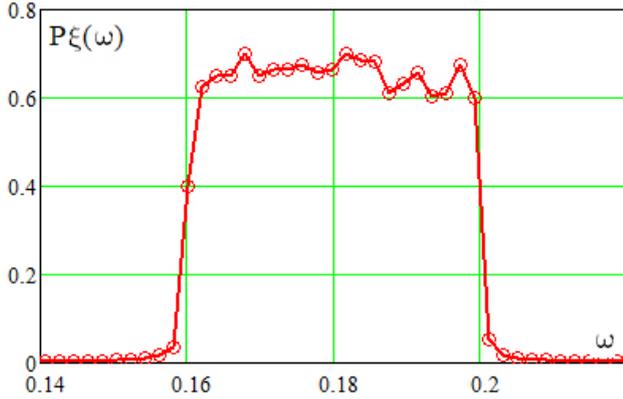


Рис. 1. СПМ белого шума в полосе резонатора
 Fig. 1. PSD of white noise in the resonator band

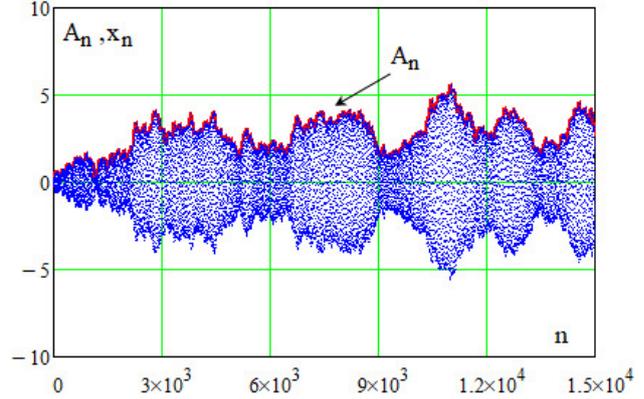


Рис. 2. Осцилляции автоколебаний ДВ-генератора
 Fig. 2. Oscillations of self-oscillations of a DW generator

случайное воздействие на ДВ-осциллятор, введенный в рассмотрение в работе [7] (см. также [8]). В этом случае осциллятор описывается следующим уравнением движения:

$$x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi v(pS(x_{n-1}) - 1)\dot{x}_{n-1} + \varepsilon\xi_{n-1}, \quad (1)$$

$$\dot{x}_{n-1} = \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2},$$

где Ω_0 и $v = \Omega_0/Q$ – собственная частота и полоса осциллятора (Q – добротность), p – параметр превышения порога генерации. Для дифференциальной крутизны $S(x)$ примем модель с насыщением [8]:

$$S(x) = 1 - \tanh^2\left(\frac{3}{2}x\right),$$

где $\tanh(\circ)$ – гиперболический тангенс.

В уравнение (1) введено внешнее воздействие в виде фильтрованного дискретного белого шума ξ_n с амплитудой ε . Полоса фильтрации в окрестности частоты Ω_0 имеет порядок v . Оценка спектральной плотности мощности (СПМ), вычисленная методом периодограмм Бартлетта с 512-точечным преобразованием Фурье по реализации длиной $N = 262144$, показана на рис. 1. Результатом полосовой фильтрации также является то, что первоначальное вероятностное распределение значений шума становится нормальным.

Приведем результаты моделирования автоколебаний в ДВ-осцилляторе с параметрами $\Omega_0 = 0,18$, $Q = 1000$, $p = 2$, $\varepsilon = 0,2$. Осциллограмма фрагмента реализации автоколебаний показана на рис. 2. Случайная модуляция амплитуды видна непосредственно из рис. 2.

Для выявления эффекта уширения спектральной линии проведены оценки СПМ методом усреднения периодограмм Бартлетта. Оценка,

выполненная по реализации длиной $N = 2^{19} = 524388$ с 32768-точечным преобразованием Фурье, показана на рис. 3 точками. Непрерывная линия – это аппроксимация СПМ методом наименьших квадратов с помощью лоренцева форм-фактора:

$$P_L(\omega) = \frac{D}{1 + \left(\frac{\omega - \Omega_a}{\Delta\omega}\right)^2}, \quad (2)$$

где $\Omega_a \equiv \Omega_0$, $\Delta\omega$ и D – параметры аппроксимации.

Рис. 3 демонстрирует хорошее соответствие данных численного эксперимента теоретической модели – лоренцевой (резонансной) форме (2) однородно уширенной спектральной линии. Относительная ширина линии равна $\Delta\omega/\Omega_a = 5,72 \cdot 10^{-4}$, что по порядку величины соответствует значению $1/Q$.

Следует отметить, что при практическом спектральном анализе необходимо учитывать уширение спектральных линий из-за конечности длины обрабатываемой реализации (вклад временного окна). На рис. 4 в логарифмическом масштабе наряду со спектральной линией в анализируемой модели приведена оценка СПМ ДВ-генератора (1) без внешнего шумового воздействия ($\varepsilon = 0$). Как видно из рис. 4, вклад временного окна в уширение спектральной линии при оценивании с 32768-точечным преобразованием Фурье пренебрежимо мал.

Реализация автоколебаний с лоренцевой формой центральной части спектральной линии на рис. 2 отчетливо указывает на наличие флуктуаций амплитуды. Разделить амплитудные и фазовые (частотные) флуктуации позволяет теория аналитического сигнала (см., например, [9]). На рис. 2 непрерывной линией отмечена амплитуда (огни-

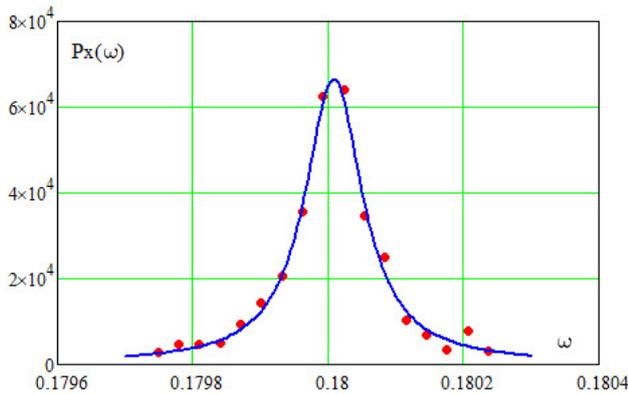


Рис. 3. Форма спектральной линии автоколебаний
 Fig. 3. Shape of the spectral line of self-oscillations

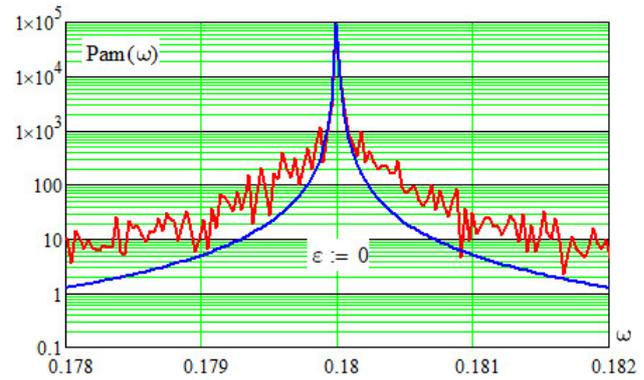


Рис. 5. Оценка СПМ АМ-сигнала (3)
 Fig. 5. Estimation of PSD AM signal (3)

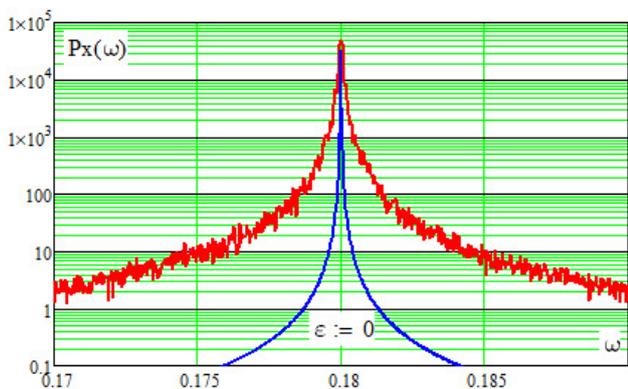


Рис. 4. Уширенная и монохроматическая линии
 Fig. 4. Broadened and monochromatic lines

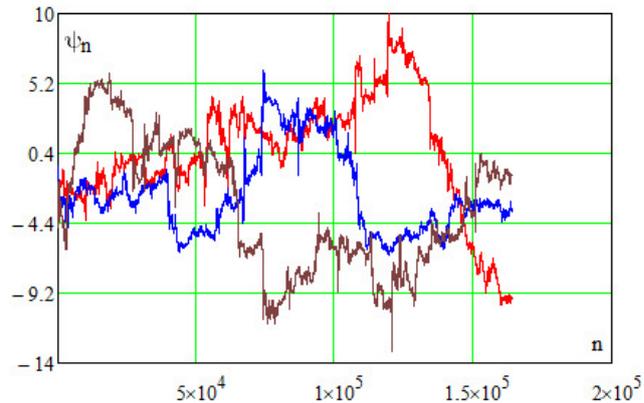


Рис. 6. Диффузия фазы автоколебаний
 Fig. 6. Diffusion of the phase of self-oscillations

ющая) A_n . С использованием выделенной огибающей можно сформировать АМ-сигнал вида

$$X_n^{(am)} = A_n \cos(2\pi\Omega_a n). \quad (3)$$

Оценка СПМ сигнала (3) показана на рис. 5, где она сопоставлена с оценкой СПМ монохроматических автоколебаний ($\varepsilon = 0$). Сопоставление оценок подтверждает известное теоретическое положение о том, что амплитудные флуктуации не приводят к уширению спектральной линии автоколебаний, но формируют ее пьедестал.

Обратимся теперь к анализу фазовых (частотных) флуктуаций. Цифровая обработка осцилляций состоит в выделении в них последовательности значений полной фазы Ψ_n и вычислении фазовых флуктуаций по формуле

$$\psi_n = \Psi_n - 2\pi\Omega_a n.$$

Результаты вычислений для трех численных экспериментов отражает рис. 6.

Случайная последовательность ψ_n – типичный дискретный винеровский процесс (процесс диффузии) [10]. Подтверждением этому может служить представленный на рис. 7 равномерный (в полосе частот) спектр мощности флуктуаций частоты

$$\Omega_n^{(g)} = \frac{\Psi_n - \Psi_{n-1}}{2\pi}.$$

На основе процесса ψ_n можно сформировать сигнал с однородно уширенной (лоренцевой) спектральной линией, свободный от флуктуаций амплитуды:

$$X_n^{(fm)} = A_a \cos(2\pi\Omega_a n + \psi_n), \quad (4)$$

где A_a – среднее значение амплитуды (в анализируемом эксперименте $A_a = 2,62$). Спектральная плотность мощности осцилляций (4) представлена на рис. 8. Факт уширения спектральной линии, как видно из рис. 8, подтверждается. Рис. 9 демонстрирует лоренцеву форму спектральной линии осцилляций (4).

Описанную выше модель однородного уширения назовем аддитивной, т. к. она основана на аддитивном воздействии шума на автоколебательную систему. Как альтернативу можно предложить мультипликативную модель.

2. Параметрическая ДВ-модель уширения спектральной линии

Анализ процессов в аддитивной модели уширения спектральной линии показывает, что часто-

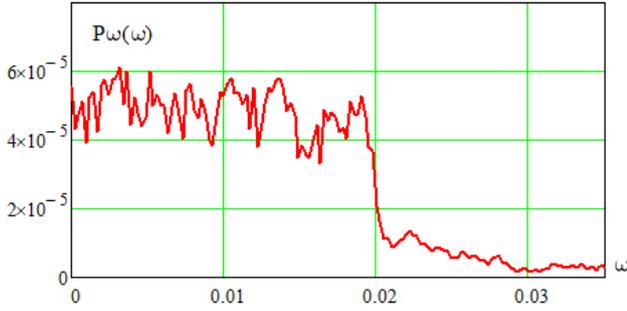


Рис. 7. СПМ флуктуаций частоты автоколебаний
 Fig. 7. PSD of fluctuations in the frequency of self-oscillations

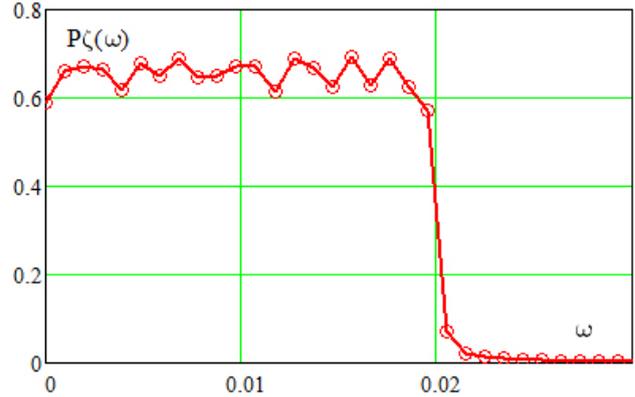


Рис. 10. СПМ полосового шума на низких частотах
 Fig. 10. PSD of bandpass noise at low frequencies

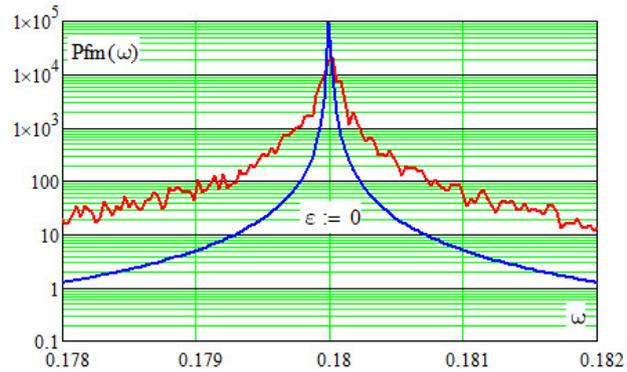


Рис. 8. Оценка СПМ ФМ-сигнала (4)
 Fig. 8. Estimation of the PSD of the PM signal (4)

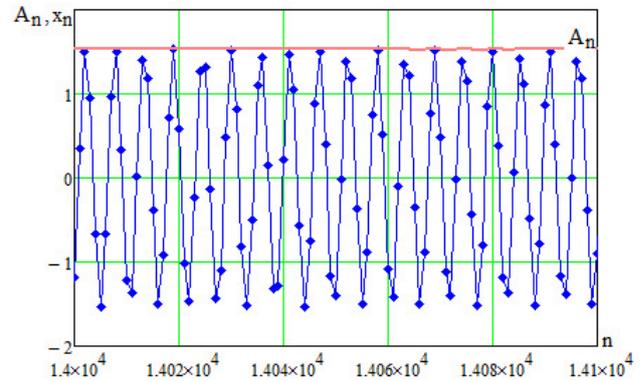


Рис. 11. Автоколебания осциллятора (5)
 Fig. 11. Self-oscillations of the oscillator (5)

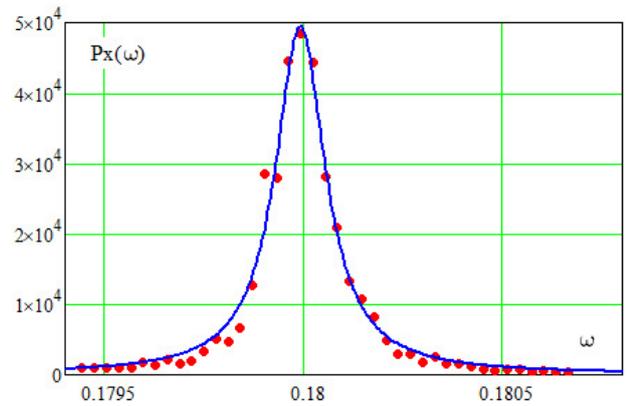


Рис. 9. Центр спектральной линии ФМ-сигнала (4)
 Fig. 9. Center of the spectral line of the FM signal (4)

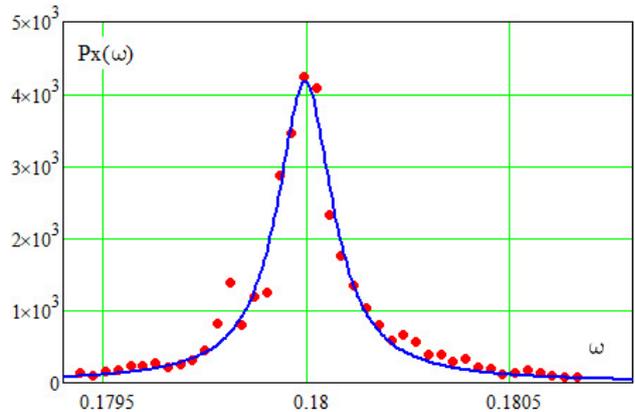


Рис. 12. Форма спектральной линии осциллятора (5)
 Fig. 12. The shape of the spectral line of the oscillator (5)

та автоколебаний испытывает низкочастотные флуктуации с равномерным спектром (см. рис. 7) в полосе частот $0 \leq \omega \leq \Omega_{\max}$, где максимальная частота в спектре Ω_{\max} много меньше частоты генерации. Эти флуктуации введем в уравнение движения в качестве внешнего шумового воздействия ζ_n на частоту Ω_0 (см. также [11]). Получим следующее разностное уравнение:

$$x_n - 2 \cos(2\pi(\Omega_0 + \mu\zeta_{n-1}))x_{n-1} + x_{n-2} = \quad (5)$$

$$= 2\pi\nu(pS(x_{n-1}) - 1)\dot{x}_{n-1},$$

$$\dot{x}_{n-1} = \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2},$$

где μ – амплитуда шума.

Модель (5) назовем параметрической (мультипликативной) моделью однородного уширения спектральной линии автоколебаний. Рассмотрим некоторые результаты моделирования для ДВ-генератора с теми же параметрами, что и ранее: $\Omega_0 = 0,18$, $Q = 1000$, $p = 2$. Для шумового воздействия $\mu\zeta_n$ примем следующие характеристики $\Omega_{\max} = 0,02$, $\mu = 0,01$.

Оценка СПМ случайного процесса ζ_n показана на рис. 10.

Отрезок реализации автоколебаний и их огибающая показаны на рис. 11. Отчетливо видно постоянство амплитуды в параметрической модели (5).

Уширение спектральной линии и его соответствие лоренцеву форм-фактору (2) отражено на рис. 12: точки – спектральная оценка, непрерывная линия – лоренцева функция.

Таким образом, параметрическая модель (5) позволяет генерировать квазимонохроматические автоколебания с флуктуациями частоты, но без флуктуаций амплитуды.

Заключение

Предложенные алгоритмы (аддитивный и мультипликативный) генерации автоколебаний с однородно уширенной спектральной линией позволяют моделировать реальные источники сигналов в численных экспериментах с радиоэлектронными системами. Совокупность N осцилляторов (5) со случайными частотами $(\Omega_0)_n$ (при задании соответствующей статистики частот) позволяет моделировать излучение с неоднородным уширением спектральной линии.

Список литературы

1. Звелто О. Принципы лазеров. Изд. 4-е. СПб.: Лань, 2008. 720 с.
2. Стратанович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 558 с.
3. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968. 660 с.
4. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966. 404 с.
5. Лэмб У. Теория оптических мазеров // Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966. 452 с.
6. Ярив А. Квантовая электроника. Изд. 2-е. М.: Советское радио, 1980. 488 с.
7. Зайцев В.В. Дискретный осциллятор ван дер Поля: конечные разности и медленные амплитуды // Известия вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 6. С. 70–78. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78>
8. Зайцев В.В., Карлов А.В. Томсоновские автогенераторы в дискретном времени: синтез динамических систем // Журнал радиоэлектроники. 2022. № 3. DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.3.1>
9. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
10. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.
11. Зайцев В.В., Нураев Д.Б., Шилин А.Н. Осцилляторы ван дер Поля, Рэля, Дюффинга в динамике с дискретным временем // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). 2016. Т. 15, № 1. С. 187–196. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-7329-2016-15-1-187-196>

References

1. Zvelto O. *Principles of Lasers*. 4th ed. Saint Petersburg: Lan', 2008, 720 p. (In Russ.)
2. Stratanovich R.L. *Selected Questions of the Theory of Fluctuations in Radio Engineering*. Moscow: Sovetskoe radio, 1961, 558 p. (In Russ.)
3. Malakhov A.N. *Fluctuations in Self-Oscillatory Systems*. Moscow: Nauka, 1968, 660 p. (In Russ.)
4. Rytov S.M. *Introduction to Statistical Radiophysics*. Moscow: Nauka, 1966, 404 p. (In Russ.)
5. Lemb U. *Theory of Optical Masers. Quantum Optics and Quantum Radiophysics*. Moscow: Mir, 1966, 452 p. (In Russ.)
6. Yariv A. *Quantum Electronics*. 2nd ed. Moscow: Sovetskoe radio, 1980, 488 p. (In Russ.)
7. Zaytsev V.V. Discrete van der Pol oscillator: finite differences and slow amplitudes. *Izvestiya vuzov. PND*, 2017, vol. 25, no. 6, pp. 70–78. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78> (In Russ.)
8. Zaytsev V.V., Karlov A.V. Thomson oscillators in discrete time: synthesis of dynamical systems. *Zhurnal radioelektroniki*, 2022, no. 3. DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.3.1> (In Russ.)
9. Vaynshteyn L.A., Vakman D.E. *Separation of Frequencies in the Theory of Oscillations and Waves*. Moscow: Nauka, 1983, 288 p. (In Russ.)
10. Gardiner K.V. *Stochastic Methods in the Natural Sciences*. Moscow: Mir, 1986, 528 p. (In Russ.)
11. Zaytsev V.V., Nuraev D.B., Shilin A.N. Van der Pol, Rayleigh, Duffing oscillators in dynamics with discrete time. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika S.P. Koroleva (natsional'nogo issledovatel'skogo universiteta)*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 187–196. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-7329-2016-15-1-187-196> (In Russ.)

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 4, pp. 27–32

Discrete time model of self-oscillations with spectral line widening

Valery V. Zaitsev¹ , Alexander V. Karlov², Husamuldin K.-M. Alalvan¹

¹ Samara National Research University

34, Moskovskoye shosse,
 Samara, 443086, Russia

² Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics

23, L. Tolstoy Street,
 Samara, 443010, Russia

Abstract – An algorithm for generating quasi-harmonic self-oscillations with a uniformly widened spectral line is presented. The algorithm is based on the equation of motion of the Thomson-type DT-oscillator, which introduced a random effect in the form of band-pass white noise. Two types of effects are implemented: additive and parametric. Spectral characteristics of generated self-oscillations were analyzed by numerical experiment. The additive algorithm is shown to generate self-oscillations with amplitude-frequency fluctuations. Frequency fluctuations set the Lorentz (resonant) shape of the central part of the self-oscillation power spectrum, amplitude fluctuations form a noise pedestal of the spectral line. Based on the analysis of statistical characteristics of fluctuations in the frequency of the DT-oscillator with additive noise impact, a parametric algorithm for generating quasi-harmonic self-oscillations is proposed. In it, the resonance frequency of the oscillating system of the Thomson DT-oscillator is subject to random perturbations. The results of numerical experiments with generators of quasi-harmonic oscillations are given.

Keywords – self-oscillation; spectral line; uniform widening; frequency fluctuations; discrete time; difference equation of self-oscillations; random perturbations.

Информация об авторах

Зайцев Валерий Васильевич, 1952 г. р. (с. Борское Куйбышевской области), кандидат физико-математических наук, профессор кафедры оптики и спектроскопии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. Окончил Куйбышевский государственный университет (1975 г.) и аспирантуру при Горьковском государственном университете (1980 г., кафедра А.Н. Малахова). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1980 г.). Автор более 300 научных работ.

Область научных интересов: нелинейные колебания, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование в радиофизике.

E-mail: zaitsev@samsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2544-8197>

Карлов Александр Владимирович, 1987 г. р. (с. Монастырище-2 Приморского края), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретических основ радиотехники и связи Поволжского государственного университета телекоммуникация и информатики. Окончил Самарский государственный университет (2009 г.), а также аспирантуру при кафедре радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СамГУ (2012 г.).

Область научных интересов: компьютерное моделирование в радиофизике, цифровая обработка сигналов, антенные системы.

E-mail: a.v.karlov@gmail.com

Альалван Хусамулдин Касим-Муса, родился 1987 г. р. (г. Багдад, Республика Ирак), магистрант второго курса Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: цифровая обработка сигналов.

E-mail: comphysics@samsu.ru

Information about the Authors

Valery V. Zaitsev, b. 1952 (v. Borskoe, Kuibyshev region), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara National Research University, Samara, Russia. Graduated from Kuibyshev State University (1975) and postgraduate studies at Gorky State University (1980, department of A.N. Malakhov). He defended his thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences at Gorky State University (1980). Author of over 300 scientific papers.

Research interests: nonlinear oscillations, statistical radiophysics, computer modeling in radiophysics.

E-mail: zaitsev@samsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2544-8197>

Alexander V. Karlov, b. 1987 (Monastyrshche-2 village of Primorsky Kray), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Theoretical Foundations of Radio Engineering and Communication, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. He graduated from Samara State University in 2009 and post-graduated from Samara State University in 2012 (Department of Radio-physics and Computer Modeling of Radio Systems). He received the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in Samara State University in 2012.

Research interests: computer modeling in radio physics, digital signal processing, antenna systems.

E-mail: a.v.karlov@gmail.com

Husamuldin K.-M. Alalvan, b. 1987. (Baghdad, Republic of Iraq), second-year master student of the Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: digital signal processing.

E-mail: comphysics@samsu.ru