

Спектральное разложение для модели задержки на основе СМО с эрланговским и гиперэкспоненциальным распределениями

В.Н. Тарасов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Настоящая статья посвящена исследованию и получению решения в замкнутой форме для средней задержки требований в очереди для СМО, образованной двумя потоками с эрланговским и гиперэкспоненциальным законами распределений второго порядка для временных интервалов. Как известно, распределение Эрланга обеспечивает коэффициент вариации интервалов поступлений меньше единицы, а гиперэкспоненциальное распределение – больше единицы. Также известно, что главная характеристика СМО – средняя задержка – связана с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью. Исследования систем G/G/1 в теории массового обслуживания актуальны в связи с тем, что они используются при моделировании систем передачи данных для анализа телетрафика. Для решения поставленной задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Спектральное разложение для рассматриваемой системы позволило получить решение для средней задержки требований в очереди в замкнутой форме. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов.

Ключевые слова – эрланговское и гиперэкспоненциальное распределения; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

Введение

В данной статье использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем массового обслуживания типа G/G/1 для нахождения среднего времени ожидания требований в очереди. Наиболее доступно для исследователей этот метод продемонстрирован в [1]. Важным моментом данного метода является конструирование спектрального разложения для рассматриваемой системы, а затем – нахождение нулей и полюсов этого разложения.

В русскоязычной научной литературе его аналогом является метод факторизации с использованием характеристических функций [2].

Настоящая статья посвящена анализу СМО $E_2/H_2/1$ по символике Кендалла с эрланговским и гиперэкспоненциальным входными распределениями второго порядка и является продолжением исследований [3–6]. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика при моделировании систем передачи данных различного назначения, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая.

Также использованы приемы и способы аппроксимации законов распределений методом моментов теории вероятностей [7–12]. Схожие

результаты современных исследований по системам массового обслуживания приведены в работах [13–15].

Постановка и решение задачи

В исследовании ставится задача вывода решения по средней задержке требований в очереди в системе $E_2/H_2/1$ с эрланговским и гиперэкспоненциальным входными распределениями второго порядка как основной характеристики любой СМО.

Для системы $E_2/H_2/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}, \quad (1)$$

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t}. \quad (2)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (1) и (2):

$$A^*(s) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2,$$

$$B^*(s) = q \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s + \mu_2}.$$

Выражение для спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы $E_2/H_2/1$ примет вид

$$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 \times \quad (3)$$

$$\times \left[q \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \right] - 1 =$$

$$= \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)}{(2\lambda-s)^2(s+\mu_1)(s+\mu_2)},$$

т. к. многочлен четвертой степени в числителе выражения (3) можно представить в виде разложения $-s(s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0)$ с коэффициентами $c_2 = 4\lambda - \mu_1 - \mu_2$, $c_1 = 4\lambda(\mu_1 + \mu_2 - \lambda) - \mu_1\mu_2$, $c_0 = 4\lambda^2q(\mu_1 - \mu_2) + 4\lambda\mu_1(\mu_2 - \lambda)$.

В свою очередь кубический многочлен

$$s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0 \quad (4)$$

с такими коэффициентами имеет два действительных отрицательных корня $-s_1$, $-s_2$ и один положительный корень s_3 в случае стационарного режима, т. е. когда $0 < \rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$, где ρ , $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$ коэффициент загрузки, средний интервал поступлений и среднее время обслуживания в системе соответственно.

Исходя из правил построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$, из выражения (3) за функцию $\psi_+(s)$ примем

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)},$$

т. к. нули многочлена (4) $s=0$, $-s_1$, $-s_2$ и полюсы $s=-\mu_1$, $s=-\mu_2$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$. За функцию $\psi_-(s)$ из выражения (3) примем

$$\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda-s)^2}{(s-s_3)},$$

т. к. ее нуль $s=2\lambda$ и полюс $s=s_3$ лежат в области $\text{Re}(s) \geq D$.

На рис. отображены нули и полюсы отношения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ на комплексной s -плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения. На рис. полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Необходимая для получения решения константа равна

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \frac{s_1s_2}{\mu_1\mu_2}.$$

Далее строим преобразование Лапласа функции распределения вероятностей времени ожидания

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1s_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{s(s+s_1)(s+s_2)\mu_1\mu_2}.$$

Откуда следует, что преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания в системе $E_2/H_2/1$:

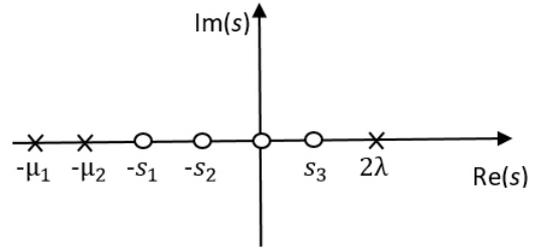


Рис. Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы $E_2/H_2/1$
 Fig. Zeros and poles $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ function for the $E_2/H_2/1$ system

$$W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{s_1s_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{(s+s_1)(s+s_2)\mu_1\mu_2}. \quad (5)$$

Производная от функции $W^*(s)$ со знаком минус в т. $s=0$ даст среднее время ожидания:

$$-\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = -\frac{s_1s_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{(s+s_1)(s+s_2)\mu_1\mu_2} \Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно среднее время ожидания в системе $E_2/H_2/1$ может быть определено из выражения

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}, \quad (6)$$

где s_1 , s_2 – абсолютные значения отрицательных корней $-s_1$, $-s_2$ кубического многочлена (4) с приведенными выше коэффициентами, а μ_1 , μ_2 – параметры распределения (2). Таким образом, для среднего времени ожидания в СМО $E_2/H_2/1$ получено решение в замкнутой форме (6). Для того чтобы им воспользоваться в практических расчетах, необходимо определить неизвестные параметры распределений (1) и (2) через их числовые характеристики.

Для распределения (1) запишем выражения для моментов: среднего интервала поступлений, второго начального момента, а через него для коэффициента вариации

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2\lambda^2}, \quad c_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для распределения (2) воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем два начальных момента для распределения (2):

$$\bar{\tau}_\mu = \frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2}, \quad \bar{\tau}_\mu^2 = \frac{2q}{\mu_1^2} + \frac{2(1-q)}{\mu_2^2}. \quad (7)$$

При аппроксимации с использованием первых двух моментов неизвестные параметры распреде-

Таблица. Результаты экспериментов для СМО $E_2/H_2/1$
Table. Experimental results for QS $E_2/H_2/1$

Входные параметры ρ, c_μ	Среднее время ожидания для системы $E_2/H_2/1$			
	$c_\mu = 1$	$c_\mu = 2$	$c_\mu = 4$	$c_\mu = 8$
ρ				
0,1	0,030	0,160	0,795	3,448
0,5	0,618	2,094	8,082	32,079
0,9	6,588	20,072	74,065	290,063

ления (2) μ_1, μ_2, q определяются с помощью следующих выражений [3]:

$$\mu_1 = \frac{2q}{\bar{\tau}_\mu}, \quad \mu_2 = \frac{2(1-q)}{\bar{\tau}_\mu}, \quad (8)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{c_\mu^2 - 1}{c_\mu^2 + 1}} \right),$$

причем в качестве вероятности q можно использовать любое из двух значений. Отсюда квадрат коэффициента вариации времени обслуживания

$$c_\mu^2 = \frac{(1-q^2)\mu_1^2 - 2q(1-q)\mu_1\mu_2 + q(2-q)\mu_2^2}{[(1-q)\mu_1 + q\mu_2]^2}. \quad (9)$$

Из выражения для вероятности q следует, что коэффициент вариации $c_\mu \geq 1$. При аппроксимации закона распределения с использованием первых трех моментов для нахождения параметров распределения (2) необходимо в пакете Mathcad решить систему трех уравнений, полученных методом моментов. При этом необходимым и достаточным условием существования решения является выполнение условия $\bar{\tau}_\mu^3 \cdot \bar{\tau}_\mu \geq 1,5\bar{\tau}_\mu^2$ [8].

Такой подход к использованию метода спектрального разложения позволяет определить не только среднюю задержку в очереди из (5), но и моменты высших порядков времени ожидания. Вторая производная от функции (5) при $s = 0$ дает второй начальный момент времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброса времени ожидания от его среднего значения получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Таким образом, гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации $[1, \infty)$. Величины $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda = 1/\sqrt{2}$, c_μ будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы $E_2/H_2/1$ с использованием выражения (6).

Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (2) из выражений (8) и к нахождению нужных корней многочлена $s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0$ с приведенными выше коэффициентами, а затем к использованию расчетной формулы (6).

Результаты вычислительных экспериментов

Ниже в таблице приведены данные расчетов для системы $E_2/H_2/1$ для различных случаев нагрузки (малой, средней и высокой) $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ при $c_\mu = 1, 2, 4, 8$. Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в таблице проведены для удобства для случая нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что построено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и с его помощью выведена расчетная формула для среднего времени ожидания требований в очереди для этой системы в замкнутой форме. Остальные временные характеристики СМО являются производными от среднего времени ожидания. Данные численных экспериментов подтверждают полную адекватность полученных теоретических результатов,

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика при моделировании систем передачи данных различного назначения, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого достаточно знать средние значения интервалов между пакетами входящего трафика и времени обслуживания, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика.

Список литературы

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995. 529 с.
3. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay // *Automation and Remote Control*. 2018. Vol. 79, no. 12. P. 2147–2158. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
4. Тарасов В.Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // *Радиоэлектроника, информатика, управление*. 2018. № 4. С. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6>
5. Тарасов В.Н. Исследование и сравнение двойственных систем $E_2/M/1$ и $M/E_2/1$ // *Инфокоммуникационные технологии*. 2019. Т. 17, № 2. С. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03>
6. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // *Информационные технологии*. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf
7. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
8. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
9. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2013. № 2 (84). С. 88–93. URL: https://ntv.ifmo.ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyzhivaniya.htm
10. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress*. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
11. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // *Operation Research*. 1982. Vol. 30, no. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
12. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. Оренбург: ОГУ, 2005. 183 с.
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // *Queueing Systems*. 2016. Vol. 84, no. 1–2. P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // *Queueing Systems*. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // *Queueing Systems*. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>

References

1. Klejnrok L. *Queueing Theory* / trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Queueing Theory*. Moscow: RUDN, 1995, 529 p. (In Russ.)
3. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2158. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
4. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hyper-Erlang input distributions. *Radioelektronika, informatika, upravlinnja*, 2018, no. 4, pp. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6> (In Russ.)
5. Tarasov V.N. Study and comparison of dual systems $E_2/M/1$ and $M/E_2/1$. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03> (In Russ.)
6. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queueing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informacionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf (In Russ.)
7. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004, 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
8. Aliev T.I. *Discrete Modeling Basics*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russ.)
9. Aliev T.I. Approximation of probability distributions in queueing models. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologii, mehaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. URL: https://ntv.ifmo.ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyzhivaniya.htm (In Russ.)
10. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress*, Copenhagen, Denmark, 19–26 June 1991, pp. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
11. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
12. Tarasov V.N., Bahareva N.F. *Computer Modeling of Computing Systems. Theory, Algorithms, Programs*. Orenburg: OGU, 2005, 183 p. (In Russ.)
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>

14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2022, vol. 25, no. 3, pp. 24–28

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.3.24-28

Received 9 March 2022
Accepted 11 April 2022

Spectral decomposition for a QS based delay model with Erlang and hyperexponential distributions

Veniamin N. Tarasov

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – This article is devoted to the study and obtaining a closed-form solution for the average delay of claims in a queue for a QS formed by two flows with Erlang and hyperexponential distributions of the second order for time intervals. As is known, the Erlang distribution ensures the coefficient of variation of the arrival intervals is less than one, and the hyperexponential distribution is greater than one. It is also known that the main characteristic of the QS, the average delay, is related to these coefficients of variations by a quadratic dependence. Studies of G/G/1 systems in queuing theory are topical due to the fact that they are used in modeling data transmission systems for teletraffic analysis. To solve the problem, the method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation was used. The spectral decomposition for the system under consideration made it possible to obtain a closed-form solution for the average delay of requests in the queue. For the practical application of the results obtained, the method of moments is used.

Keywords – Erlang and hyperexponential distributions; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

Информация об авторе

Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Information about the Author

Veniamin N. Tarasov, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru