

## Влияние быстрых релеевских замираний и частотного рассогласования частот субканалов приема и передачи на характеристики OFDM-сигналов

С.Н. Елисеев<sup>1</sup>, Л.Н. Филимонова<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Московский технический университет связи и информатики  
111024, Россия, г. Москва,  
ул. Авиамоторная, 8а

<sup>2</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – В данной работе рассматривается негативный одновременный эффект быстрых релеевских замираний в канале и взаимных частотных сдвигов поднесущих между передающей и приемной сторонами канала, вызывающих нарушение ортогональности между сигналами отдельных подканалов системы OFDM. Нарушение ортогональности проявляется в возникновении на приемной стороне канала взаимного интерференционного сигнала в каждом подканале OFDM. В статье оценивается совместное влияние быстрых замираний и частотных сдвигов на величину переходной помехи между подканалами, а также достаточно подробно исследовано проявление переходных помех между отдельными субканалами, вызываемых нарушениями ортогональности каждым из двух приведенных факторов по отдельности. В данной работе рассмотрено одновременное воздействие обоих факторов и их влияние на величину межканальной переходной помехи.

*Ключевые слова* – системы беспроводной связи; частотные сдвиги поднесущих OFDM; быстрые релеевские замирания, межканальная переходная помеха.

### Введение

Хорошо известно, что отдельные субканалы системы OFDM теряют взаимную ортогональность, когда канал изменяется в течение длительности символа OFDM, т. е. когда доплеровское рассеивание в частотной области составляет значительную часть расстояния между поднесущими субканалов. Кроме того, в силу высокой степени спектральной эффективности OFDM обратной стороной этой эффективности выступает сильная чувствительность характеристик OFDM к взаимным «сдвигам частот поднесущих» между передающей и приемной сторонами канала. В публикациях достаточно подробно исследовано проявление переходных помех между отдельными субканалами (МКП), вызываемых нарушениями ортогональности каждым из двух приведенных факторов по отдельности. В данной работе рассмотрены одновременное воздействие обоих факторов и их влияние на величину МКП.

### 1. Постановка задачи

В непрерывном случае, без учета дискретизации по времени, OFDM-сигнал имеет вид

$$S(t) = \sum_{k=1}^N S_k e^{j2\pi f_k t}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где

$$f_k = f_0 + k\Delta f = f_0 + \frac{k}{T};$$
$$S_k = \sqrt{2E_S d_m}, \quad d_m = d_{mr} + j d_{mj};$$

$S_k$  – передаваемый на  $k$ -й поднесущей комплексный сигнал;  $d_m$  – символ передаваемых данных с нулевым математическим ожиданием дисперсией  $D(d_m) = 1$ ;  $d_{k,r}$ ,  $d_{k,i}$  – статистически независимы, идентично распределены и имеют математические ожидания, равные нулю.

Рассмотрим характеристики МКП, возникающие в канале с частотно-селективными, быстрыми релеевскими замираниями [1]. Полагаем канал стационарным в широком смысле с некоррелированными рассеивателями на интервале локальной стационарности и факторизуемой двумерной корреляционной функцией:

$$R(\tau, f) = R_1(\tau) R_2(k-l), \quad (2)$$

где  $R_1(\tau)$  – корреляционная функция во времени;  $R_2(k-l)$  – корреляционная функция по частоте между поднесущими  $k$ -го и  $l$ -го субканалов.

Импульсная характеристика (ИХ) субканала  $k$ -й поднесущей:

$$h_k(t, \tau) = \beta_k(t) \delta(\tau), \quad (3)$$

где  $\delta(\tau)$  – дельта-функция.

## 2. Ухудшение качества каналов для OFDM-сигналов

Далее используем возможность представления  $\beta_k(t)$  рядом Тейлора, введенного Bello и учитывая сравнительно небольшую скорость изменения канала на интервале длительности OFDM-символа ограничимся линейной аппроксимацией:

$$\beta_k(t) = \beta_0(t_0) + \beta_k'(t_0)(t - t_0), \quad (4)$$

где  $t_0 = T/2$ .

Присутствующий в канале аддитивный белый гауссовский шум  $n(t)$  имеет одностороннюю спектральную плотность мощности  $N_0$  [Вт/Гц].

Для  $k = 1, \dots, N$   $\beta_k(t)$  обладают идентичными статистическими характеристиками гауссова вида с нулевым средним и комплексными значениями.

Принимаемый сигнал OFDM имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=1}^N \beta_k(t) S(t), \quad (5)$$

и сигнал на выходе  $m$ -го субканала с учетом (1), (5):

$$Y_m = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N \left\{ \int_0^T \beta_k(t) e^{-j2\pi(f_m - f_k)t} dt \right\} S_k =$$

$$= g_0 S_m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N g_{m-k} S_k; \quad (6)$$

где

$$g_l \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T \beta_k(t) e^{-j2\pi l \Delta f t} dt, \quad (6a)$$

$g_l = |g_0| e^{i\varphi_0}$ ,  $l = 0$  – коэффициент передачи субканала для полезного сигнала;  $|g_l| e^{i\varphi_l}$ ,  $l \neq 0$  – комплексный коэффициент взаимного влияния субканалов.

Если в канале присутствует «частотный сдвиг», то в (6) добавляется фазовый множитель

$$u(t) = e^{j2\pi \alpha \Delta f t} = e^{\theta t}, \quad (7)$$

где  $\alpha = \delta f / \Delta f$ ,  $\delta f$  – «сдвиг частот», вызванный расхождением частот передачи и приема.

Суммарный эффект, вызываемый совместным влиянием доплеровского рассеивания и частотным сдвигом поднесущих, может быть оценен по величине  $\alpha_{kl}$ , коэффициента влияния  $k$ -го субканала на  $m$ -й субканал:

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{T} \int_0^T \beta_k(t) u(t) e^{-j2\pi l \Delta f t} dt, \quad (8)$$

здесь и далее  $l = m - k$ ;  $k = 1 - N$ ;  $m = 1 - N$ .

Получаем для (8) с учетом (4):

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{T} \int_0^T \beta_k(t_0) \int_0^T e^{j\theta t} e^{-j2\pi l \Delta f t} dt +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T \beta_k'(t_0) \int_0^T (t - t_0) e^{j\theta t} e^{-j2\pi l \Delta f t} dt. \quad (9)$$

Для первого слагаемого в (9) можно видеть из [2], что оно равняется

$$\beta_k(t_0) \frac{\sin \pi(l - \alpha)}{\pi(l - \alpha)} e^{-j\pi(l - \alpha)} \quad (10a)$$

или эквивалентно

$$\beta_k(t_0) \left( -\frac{\sin(\pi l)}{\pi(l - \alpha)} e^{j\pi \alpha} \right). \quad (10b)$$

Представим второе слагаемое (9) в виде суммы двух интегралов. В результате получим, используя свойства ряда Фурье [10]:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \beta_k'(t_0) \int_0^T t e^{j\theta t} e^{-j2\pi l \Delta f t} dt = j \beta_k'(t_0) \frac{dS(w_l)}{dw_l}, \quad (11)$$

где  $S(w_l)$  – спектральная плотность [2] функции, определяемой в (7), где  $w_l = 2\pi l \Delta f$ .

Второе слагаемое из суммы интегралов равно  $-\beta_k(t_0) t_0 S(w_l)$ . (12)

## 3. Оценка мощности МКП с моделируемым влиянием доплеровского распространения и смещения частоты

Введем следующие обозначения с учетом  $t_0 = \frac{1}{2\Delta f}$ :

$$F_l = -\frac{\sin(\pi l)}{\pi(l - \alpha)} e^{j\pi \alpha}; \quad F_0 = \frac{\sin(\pi \alpha)}{(\pi \alpha)} e^{j\pi \alpha};$$

$$F_l' = j \frac{dS(w_l)}{dw_l} =$$

$$= j e^{j\pi \alpha} \frac{\alpha}{2l(\Delta f) \pi(l - \alpha)} \left[ e^{j\pi \alpha} + \frac{\sin(\pi l)}{\pi(l - \alpha)} \right]; \quad (13)$$

$$F_0' = \frac{e^{j\pi \alpha}}{j\alpha(2\Delta f)} \left[ 1 - \frac{\sin(\pi \alpha)}{(\pi \alpha)} \right].$$

Теперь выразим составляющую переданного символа  $\hat{d}_m$ :

$$\hat{d}_m =$$

$$= d_m \left[ \beta_m(t_0) F_0 + \beta_m'(t_0) F_l' - \beta_k(t_0) \frac{1}{(2\Delta f)} F_l \right], \quad (14)$$

и составляющую межканальной помехи (МКП) $_m$ :

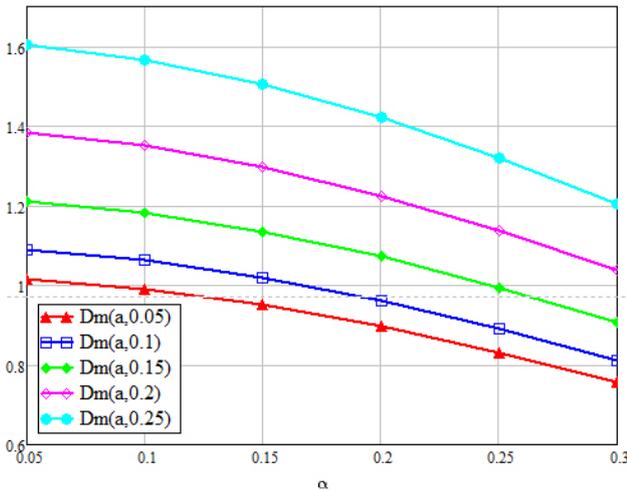


Рис. 1. Графики, иллюстрирующие (17) от  $\beta$   
 Fig. 1. Graphs illustrating (17) from  $\beta$

$$\begin{aligned}
 (MKП)_m &= \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N d_k \left[ \beta_k(t_0) F_l + \beta'_k(t_0) F'_l - \beta'_k(t_0) \frac{1}{(2\Delta f)} F_l \right]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Для вычисления мощностей (14) и (15) согласно [1] используем следующие статистические свойства случайных величин  $\beta_k$ ,  $\beta'_k$ ,  $d_k$ : все суммируемые слагаемые в (14) и (15) являются взаимно независимыми, так как:

а) гауссовские случайные величины  $\beta_k$ ,  $\beta'_k$ :

$$M[\beta_k(t_0), \beta'_k(t_0)] = 0 \text{ для всех } [k, m] \in \overline{1, N};$$

б) произведения  $\beta_m(t_0)\beta_k(t_0)$  – это произведения взаимно независимых от  $d_m d_k$ , для которых математическое ожидание  $M(d_k) = 0$ .

Если спектр доплеровского рассеивания имеет вид рассеивания Джейкса [1; 2], то дисперсия  $\beta'_k(t)$  равняется

$$M\left[|\beta'_k(t)|^2\right] = 2\pi^2 F_d^2, \quad (16)$$

где  $F_d$  – максимальное значение рассеивания Доплера.

Выполнив алгебраические преобразования и приведения подобных членов и обозначив нормированную величину максимального значения доплеровского рассеивания  $\beta = \frac{F_d}{\Delta f}$ , получаем [9]:

$$\begin{aligned}
 M\left[|d_m|^2\right] &= \left[\frac{\sin(\pi\alpha)}{(\pi\alpha)}\right]^2 + \\
 &+ (\pi\beta)^2 \left[ \left(\frac{\sin(\pi\alpha)}{(\pi\alpha)}\right)^2 + \frac{1}{(\pi\alpha)^2} \left(1 - \frac{\sin(\pi\alpha)}{(\pi\alpha)}\right)^2 \right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

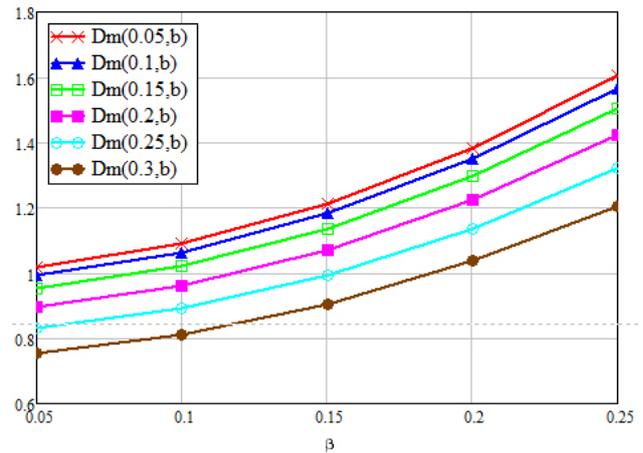


Рис. 2. Графики, иллюстрирующие (17) от  $\alpha$   
 Fig. 2. Graphs illustrating (17) from  $\alpha$

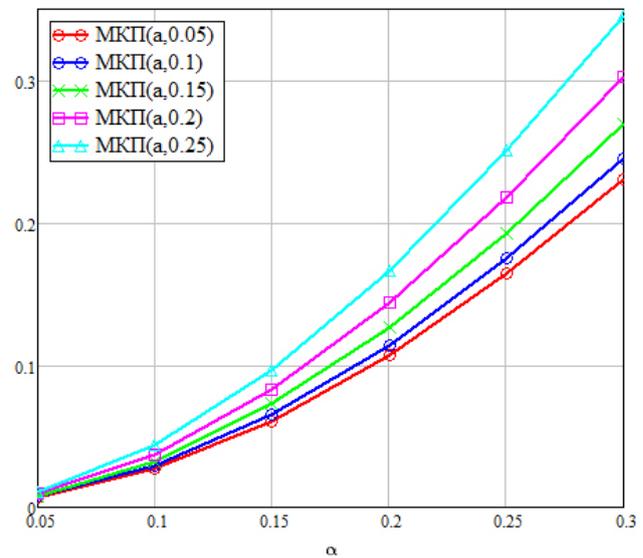


Рис. 3. Графики, иллюстрирующие (18) от  $\alpha$   
 Fig. 3. Graphs illustrating (18) from  $\alpha$

и для средней мощности МКП:

$$\begin{aligned}
 P_{MKП} &= |MKП|^2 = \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N \frac{1}{\pi^2 (k-m-\alpha)^2} \left\{ \sin^2(\pi\alpha) + (\pi\beta)^2 \times \right. \quad (18) \\
 &\times \left\langle \sin^2(\pi\alpha) \left(1 - \frac{(\pi\alpha)}{\pi(k-m)}\right)^2 + \right. \\
 &\left. \left. + \frac{(\pi\alpha)^2}{(\pi(k-m))^2} \left[ \cos(\pi\alpha) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi(k-m)} \right]^2 \right\rangle \right\}.
 \end{aligned}$$

Графики, иллюстрирующие зависимости (17) и (18), приводятся на рис. 1–3 соответственно для  $N = 64$ .

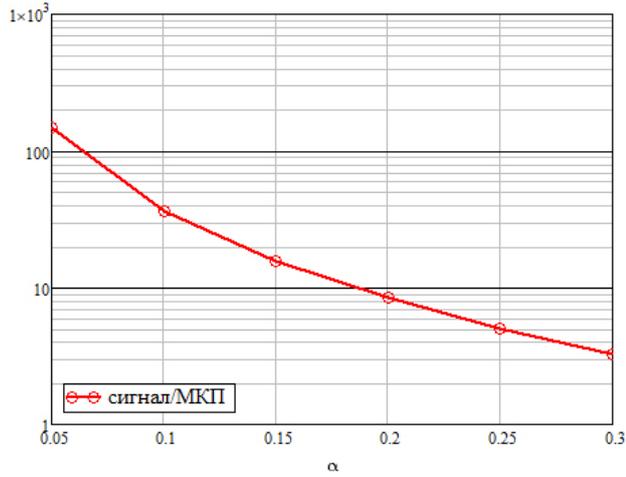


Рис. 4. Зависимость отношения мощностей сигнал/МКП и  $P_{dm} / P_{МКП}$   
 Fig. 4. Dependence of the signal/MCP power ratio and  $P_{dm} / P_{МКП}$

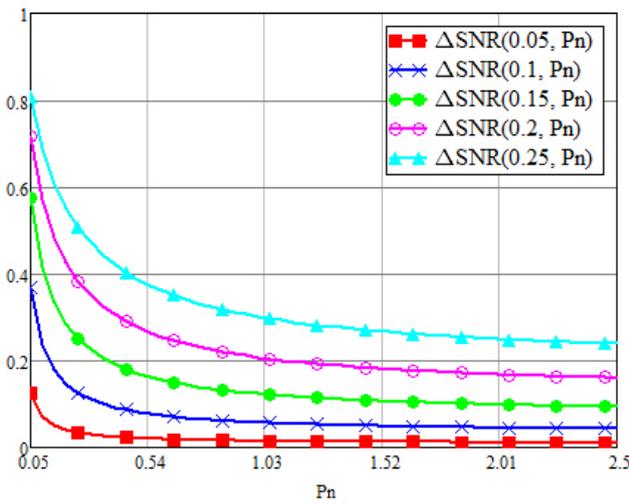


Рис. 5.  $\Delta SNR$  в отсутствие доплеровского рассеивания,  $\beta = 0$   
 Fig. 5.  $\Delta SNR$  in the absence of Doppler scattering,  $\beta = 0$

Величина отношения мощностей сигнал/МКП, рассчитанная делением (17) на (18) и обозначенная  $P_{dm} / P_{МКП}$ , иллюстрируется графиком рис. 4.

#### 4. Результаты ухудшения производительности OFDM-систем

Помехоустойчивость цифровых систем связи, в частности систем OFDM, – это функция аргумента – величины SNR, определяемой отношением  $P_c$  мощности сигнала к  $P_n$  мощности аддитивного шума в канале. Появление МКП, величина мощности которой не зависит от  $P_n$ , учитывается введением показателя SINR-отношения мощностей сигнала к  $P_n + P_{МКП}$  [7; 8]:

$$SINR = \frac{P_c}{P_n + P_{МКП}}, \quad (19)$$

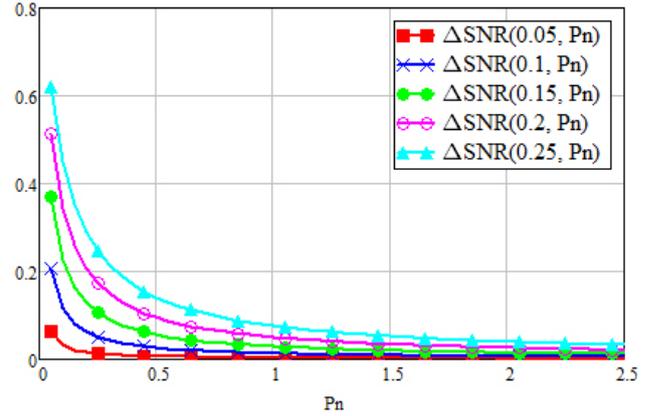


Рис. 6.  $\Delta SNR$  для канала с быстрыми замираниями и с нулевым частотным рассогласованием  
 Fig. 6.  $\Delta SNR$  for a channel with fast fading and zero frequency mismatch

Легко видеть меру уменьшения величины SINR относительно величины SNR в системе OFDM, не подверженной воздействию доплеровского воздействия и сдвигу частот субканалов:

$$\Delta SNR = SNR - SINR = SNR \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{P_{МКП}}{P_N}} \right). \quad (20)$$

В формуле (20) учтено, что в данной работе предполагались величина мощности передаваемого символа, равная 1, и неизменной величина мощности шума. Ниже на графиках рис. 4 приведены результаты расчетов по формулам (20) и (18). Расчеты  $\Delta SNR$  для канала в отсутствие доплеровского рассеивания ( $\beta = 0$ ), выполненные по (20) с учетом  $\beta = 0$  в (17) и (18), проиллюстрированы графиком рис. 5. А расчеты  $\Delta SNR$  для канала с быстрыми замираниями и с нулевым частотным рассогласованием получены при  $P_{МКП}$ , позаимствованной из [3–6], график рис. 6.

#### Заключение

Сравнивая полученные результаты, можно оценить, насколько сочетанное влияние обоих рассмотренных источников нарушения ортогональности субканалов в системе OFDM увеличивает МКП и уменьшает отношение сигнал/шум по сравнению со случаями парциального воздействия каждого источника по отдельности. Что, в свою очередь, открывает возможность определения, насколько должны быть ужесточены требования к точности согласования частот при работе систем OFDM в каналах с быстрыми замираниями, т. е. при высокоскоростной мобильности пользователей.

## Список литературы

1. Performance degradation of OFDM systems due to Doppler spreading / T. Wang [et al.] // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. 2006. Vol. 5, no. 6. P. 1422–1430.
2. Li Y., Stuber G. *Orthogonal Frequency Division Multiplexing for Wireless Communications (Signals and Communication Technology)*. Berlin: Springer, 2006. P. 19–46.
3. Robertson P., Kaiser S. The effects of Doppler spreads in OFDM(A) mobile radio systems // *Gateway to 21st Century Communications Village. VTC 1999-Fall. IEEE VTS 50th Vehicular Technology Conference*. 1999. Vol. 1. P. 329–333. DOI: <https://doi.org/10.1109/VETECF.1999.797150>
4. Li Y., Cimini L.J. Interchannel interference of OFDM in mobile radio channels // *Globecom '00 – IEEE. Global Telecommunications Conference. Conference Record*. 2000. Vol. 2. P. 706–710. DOI: <https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2000.891231>
5. Kumar S. BER analysis of OFDM digital communication systems with improved ICI cancellation technique // *International Journal of Intelligent Systems and Applications*. 2014. Vol. 6, no. 4. P. 56–62. DOI: <https://doi.org/10.5815/ijisa.2014.04.06>
6. Martin-Vega F., Gomez G. Low-complexity pilot-based frequency-domain channel estimation for ICI mitigation in OFDM systems // *Electronics*. 2021. Vol. 10, no. 12. P. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics10121404>
7. Adaptive windowing for ICI mitigation in vehicular communications / E. Vlachos [et al.] // *IEEE Wireless Communications Letters*. 2018. Vol. 7, no. 6. P. 974–977. DOI: <https://doi.org/10.1109/LWC.2018.2842226>
8. Елисеев С.Н. Оценка величины мощности межканальной помехи OFDM-сигнала в канале с быстрыми замираниями // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2017. Т. 11, № 4. С. 59–63.
9. Lin K.-Y., Lin H.-P., Tseng M.-C. An equivalent channel time variation mitigation scheme for ICI reduction in high-mobility OFDM systems // *IEEE Transactions on Broadcasting*. 2012. Vol. 58, no. 3. P. 472–479. DOI: <https://doi.org/10.1109/TBC.2012.2197450>
10. Rehman N., Lei Z., Hammad M. ICI cancellation in OFDM systems by frequency offset reduction // *Journal of Information Engineering and Applications*. 2014. Vol. 4, no. 9. P. 1–10. URL: <https://www.iiste.org/Journals/index.php/JIEA/article/view/15501>

## References

1. Wang T. et al. Performance degradation of OFDM systems due to Doppler spreading. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2006, vol. 5, no. 6, pp. 1422–1430.
2. Li Y., Stuber G. *Orthogonal Frequency Division Multiplexing for Wireless Communications (Signals and Communication Technology)*. Berlin: Springer, 2006, pp. 19–46.
3. Robertson P., Kaiser S. The effects of Doppler spreads in OFDM(A) mobile radio systems. *Gateway to 21st Century Communications Village. VTC 1999-Fall. IEEE VTS 50th Vehicular Technology Conference*, 1999, vol. 1, pp. 329–333. DOI: <https://doi.org/10.1109/VETECF.1999.797150>
4. Li Y., Cimini L.J. Interchannel interference of OFDM in mobile radio channels. *Globecom '00 – IEEE. Global Telecommunications Conference. Conference Record*, 2000, vol. 2, pp. 706–710. DOI: <https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2000.891231>
5. Kumar S. BER analysis of OFDM digital communication systems with improved ICI cancellation technique. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 56–62. DOI: <https://doi.org/10.5815/ijisa.2014.04.06>
6. Martin-Vega F., Gomez G. Low-complexity pilot-based frequency-domain channel estimation for ICI mitigation in OFDM systems. *Electronics*, 2021, vol. 10, no. 12, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics10121404>
7. Vlachos E. et al. Adaptive windowing for ICI mitigation in vehicular communications. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2018, vol. 7, no. 6, pp. 974–977. DOI: <https://doi.org/10.1109/LWC.2018.2842226>
8. Eliseev S.N. Estimation of the power of interchannel interference of an OFDM signal in a channel with fast fading. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 59–63. (In Russ.)
9. Lin K.-Y., Lin H.-P., Tseng M.-C. An equivalent channel time variation mitigation scheme for ICI reduction in high-mobility OFDM systems. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2012, vol. 58, no. 3, pp. 472–479. DOI: <https://doi.org/10.1109/TBC.2012.2197450>
10. Rehman N., Lei Z., Hammad M. ICI cancellation in OFDM systems by frequency offset reduction. *Journal of Information Engineering and Applications*, 2014, vol. 4, no. 9, pp. 1–10. URL: <https://www.iiste.org/Journals/index.php/JIEA/article/view/15501>

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2022, vol. 25, no. 2, pp. 67–72

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.2.67-72

Received 22 January 2022  
Accepted 24 February 2022

### The effect of fast relay fading and frequency mismatch of the frequencies of the receiving and transmitting channels on the characteristics of the OFDM signal

Sergiy N. Eliseev<sup>1</sup>, Lyudmila N. Filimonova<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Moscow Technical University of Communications and Informatics  
8a, Aviamotornaya Street,  
Moscow, 111024, Russia

<sup>2</sup> Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – In this paper, we consider the negative simultaneous effect of fast relay fading in the channel and mutual frequency shifts of subcarriers between the transmitting and receiving sides of the channel, causing violation of orthogonality between the signals of individual subchannels of OFDM system. Violation of orthogonality is manifested in the appearance of mutual interference signal at the receiving end of the channel in each OFDM subchannel. The paper evaluates the joint effect of fast fading and frequency shifts on the magnitude of the transient interference between subchannels and investigates in sufficient detail the manifestation of transient interference between individual subchannels caused by orthogonality violations each of the two factors cited separately. In this paper, we consider the simultaneous effect of both factors and their influence on the value of the interchannel transient interference.

*Keywords* – wireless communication systems; carrier frequency offset; fast Rayleigh fading; Doppler spreading; inter-channel interference.

---

## Информация об авторах

**Елисеев Сергей Николаевич**, доктор технических наук, профессор кафедры теории электрических цепей Московского технического университета связи и информатики, г. Москва, Россия.

*Область научных интересов:* цифровая обработка сигналов, мобильная связь, телерадиовещание.

*E-mail:* fgupnrsnr@yandex.ru

**Филимонова Людмила Николаевна**, аспирант, инженер кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. В 2019 г. окончила магистратуру Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики с отличием по направлению подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

*Область научных интересов:* нанотехнологии, методы и средства цифровой обработки сигналов и их применение в системах радиосвязи и радиовещания и телевидения.

*E-mail:* lyudmila.trifonova.2012@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-6761-8292>

## Information about the Authors

**Sergey N. Eliseev**, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Theory of Electrical Circuits, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia.

*Research interests:* digital signal processing, mobile communications, television and audio broadcasting.

*E-mail:* fgupnrsnr@yandex.ru

**Lyudmila N. Filimonova**, postgraduate student, engineer of the Department of Radio Electronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. In 2019, she graduated from the Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics magistracy with honors in the field of training «Infocommunication technologies and communication systems».

*Research interests:* nanotechnology, methods and means of digital signal processing and their application in radio communication and radio broadcasting and television systems.

*E-mail:* lyudmila.trifonova.2012@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-6761-8292>