

## Модель задержки на основе сдвинутых гиперэкспоненциального и эрланговского распределений

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

**Аннотация** – Настоящая статья посвящена выводу результатов для средней задержки требований в очереди для системы массового обслуживания, образованной двумя потоками с законами распределения интервалов в виде сдвинутых вправо гиперэкспоненциального и эрланговского распределений второго порядка. В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  актуальны в связи с тем, что не существует решения в конечном виде для общего случая. Поэтому в качестве произвольного закона распределения  $G$  при исследовании таких систем используют различные частные законы распределений. В данном случае использование гиперэкспоненциального закона распределения обеспечивает коэффициент вариации интервалов входного потока больше единицы, а распределения Эрланга – меньше единицы. Для решения поставленной задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, который играет важную роль в теории массового обслуживания. Данный метод позволил получить решение для средней задержки требований в очереди для рассматриваемой системы в замкнутой форме. Как известно, остальные характеристики системы массового обслуживания являются производными от средней задержки требований.

**Ключевые слова** – сдвинутые гиперэкспоненциальное и эрланговское распределения; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

### Введение

В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телекоммуникации, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая.

Настоящая статья посвящена анализу СМО  $H_2/E_2/1$  со сдвинутыми вправо от нулевой точки гиперэкспоненциальными ( $H_2$ ) и эрланговскими ( $E_2$ ) входными распределениями второго порядка и является логическим продолжением исследований [1–3]. В результате этого будем иметь новую СМО с запаздыванием во времени, которую обозначим через  $H_2^-/E_2^-/1$  в отличие от обычной системы  $H_2/E_2/1$ . Рассматриваемая СМО относится к типу  $G/G/1$ . Всего систем со сдвинутыми законами распределений в теории массового обслуживания можно составить шестнадцать ( $4 \times 4 = 16$ ), если рассматривать четыре основных закона распределения: экспоненциальный, Эрланга, гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский.

В работе [1] показано, что средняя задержка требований в очереди в системе  $M/M/1$  с запаздыванием во времени меньше, чем в классической системе  $M/M/1$  при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления  $c_\lambda$  и обслуживания  $c_\mu$  становятся меньше единицы при параметре запаздывания

$t_0 > 0$ . Это связано с квадратичной зависимостью средней задержки от указанных коэффициентов вариаций. В авторских работах [2; 3] и других этот факт также полностью подтвердился. Убедимся также в этом в случае рассматриваемой СМО, используя метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, одна из форм которого дается в виде [4]:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Другой подход к решению интегрального уравнения Линдли использован в [5]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – компоненты факторизации  $\omega_+(z,t)$  и  $\omega_-(z,t)$  функции  $1 - z\chi(t)$ .

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [4] и проиллюстрированный многочисленными примерами для лучшего понимания. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли занимает важное место при исследовании систем  $G/G/1$ , и он широко используется.

Кроме этого метода в работе использован опыт аппроксимации законов распределений [6–9].

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований [10–12]. Результаты современных исследований по системам массового обслуживания приведены в работах [13–16].

## 1. Постановка задачи

В работе ставится задача нахождения решения для задержки требований в очереди в СМО  $N_2^-/E_2^-/1$ . При кратком изложении метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [4]. Суть решения методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1$  представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от  $s$ . Здесь  $F_\lambda^*(s)$  и  $F_\mu^*(s)$  – преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов входного потока  $f_\lambda(t)$  и времени обслуживания  $f_\mu(t)$  соответственно. Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – некоторые рациональные функции от  $s$ , которые можно разложить на множители. Функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям согласно [4]:

– для  $\text{Re}(s) > 0$  функция  $\psi_+(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости;

– для  $\text{Re}(s) < D$  функция  $\psi_-(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где  $D$  – некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty.$$

Кроме того, функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad (2)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1.$$

Для решения поставленной задачи необходимо вначале построить для рассматриваемой системы спектральное разложение вида  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  с учетом условий (1), (2). Так, для системы  $N_2^-/E_2^-/1$  законы распределения интер-

валов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + \\ + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_\mu(t) = \begin{cases} 4\mu^2(t-t_0)e^{-2\mu(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $t_0 \geq 0$  – параметр сдвига закона распределения. Заметим также, что функция (4) – функция плотности нормированного распределения Эрланга второго порядка.

Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут, соответственно:

$$F_\lambda^*(s) = \left[ p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \right] e^{-t_0 s};$$

$$F_\mu^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s}.$$

Тогда спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы  $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  примет вид:

$$\begin{aligned} F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s)-1 &= \\ &= \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] e^{t_0 s} \times \\ &\times \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) получено на основании теоремы о запаздывании в теории преобразования Лапласа. Здесь показатели степени у экспонент в спектральном разложении обнуляются, и операция сдвига во времени нивелируется. Таким образом, спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы со сдвинутыми распределениями  $N_2^-/E_2^-/1$  и для обычной системы  $N_2/E_2/1$  будут идентичными. Это позволяет утверждать, что спектральное разложение будет инвариантным к операции сдвига в законах распределения.

Дальнейшее разложение выражения (5) даст окончательное спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)}{(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)(2\mu+s)^2}, \quad (6)$$

т. к. многочлен 4-й степени в числителе выражения (5) можно представить в виде разложения  $-s(s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)$  с коэффициентами  $c_2=4\mu-\lambda_1-\lambda_2$ ,  $c_1=4\mu(\mu-\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2$ ,  $c_0=4\mu[\lambda_1\lambda_2+\mu(\lambda_1p-\lambda_1-\lambda_2p)]$ . В свою очередь кубический многочлен  $s^3+c_2s^2+c_1s+c_0$  с такими коэффициентами в стационарном режиме функционирования СМО при  $\rho=\bar{\tau}_\mu/\bar{\tau}_\lambda < 1$  имеет два действительных отрицательных корня  $-s_1$ ,  $-s_2$  и один положительный корень  $s_3$ . Здесь  $\bar{\tau}_\lambda$  и  $\bar{\tau}_\mu$  – среднее значение интервалов поступления требований и среднее время обслуживания соответственно, а коэффициенты многочлена сформированы с помощью символьных операций Mathcad.

С учетом условий (1), (2) за функцию  $\psi_+(s)$  примем

$$\psi_+(s) = s(s+s_1)(s+s_2)/(s+2\mu)^2,$$

т. к. нули кубического многочлена  $s=0$ ,  $s=-s_1$ ,  $s=-s_2$  и полюс  $s=-2\mu$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ , а за функцию

$$\psi_-(s) = -(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)/(s-s_3).$$

Теперь выполнение условий (1) и (2) для построенных функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  очевидно. Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s+s_1)(s+s_2)}{(s+2\mu)^2} = \frac{s_1s_2}{4\mu^2}.$$

Построим функцию  $\Phi_+(s) = K/\psi_+(s)$ , через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания  $W^*(s) = s\Phi_+(s)$ .

Окончательно

$$W^*(s) = \frac{s_1s_2(s+2\mu)^2}{4\mu^2(s+s_1)(s+s_2)}. \quad (7)$$

Производная от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s=0$  и даст среднюю задержку требований в очереди:

$$\begin{aligned} -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= -\frac{d}{ds} \left[ \frac{s_1s_2(s+2\mu)^2}{4\mu^2(s+s_1)(s+s_2)} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Тогда средняя задержка для системы  $N_2^-/E_2^-/1$  будет равна:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (8)$$

где  $s_1$ ,  $s_2$  абсолютные значения отрицательных корней  $-s_1$  и  $-s_2$  кубического многочлена  $s^3+c_2s^2+c_1s+c_0$  с приведенными выше коэффициентами. Таким образом, среднее время для системы  $N_2^-/E_2^-/1$  однозначно определено в виде замкнутой формы (8).

## 2. Методика использования расчетной формулы (8)

Теперь предстоит найти все параметры формулы (8). Для этого определяем числовые характеристики сдвинутых распределений  $N_2^-$  (3) и  $E_2^-$  (4). Воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты:

$$\begin{aligned} -\frac{dF_\lambda^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= \\ &= -\frac{d}{ds} \left\{ \left[ p \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2} \right] e^{-t_0s} \right\} \Big|_{s=0} = \\ &= p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \end{aligned}$$

Отсюда среднее значение интервала между поступлениями требований:

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0. \quad (9)$$

Найдя вторую производную от преобразования  $F_\lambda^*(s)$  при  $s=0$ , определим 2-й начальный момент интервала между поступлениями:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\lambda^2 &= 2[p\lambda_1^{-2} + (1-p)\lambda_2^{-2}] + t_0^2 + \\ &+ 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда квадрат коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}. \quad (11)$$

Положив

$$\lambda_1 = 2p/(\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p)/(\bar{\tau}_\lambda - t_0) \quad (12)$$

и подставив (12) в (11), получим уравнение четвертой степени относительно параметра  $p$ . Решив его с учетом условия  $0 < p < 1$ , определяем параметр  $p$ :

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}. \quad (13)$$

Подставив выражение (13) в (12), находим неизвестные параметры распределения (3)  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . При этом в качестве  $p$  можно выбрать любое из двух значений.

Остается определить числовые характеристики распределения (4). Среднее время обслуживания в системе  $N_2^-/E_2^-/1$  равно

Таблица. Результаты экспериментов для СМО  $H_2^-/E_2^-/1$   
Table. Experimental results for QS  $H_2^-/E_2^-/1$

Входные параметры			Средняя задержка	
$\rho$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $H_2^-/E_2^-/1$	для системы $H_2/E_2/1$
0,1	0,071	0,9	0,001	0,141
	0,354	0,5	0,035	
	0,636	0,1	0,114	
	0,700	<b>0,01</b>	<b>0,138</b>	
0,5	0,071	0,9	0,015	1,764
	0,354	0,5	0,472	
	0,636	0,1	1,480	
	0,700	<b>0,01</b>	<b>1,735</b>	
0,9	0,071	0,9	0,748	20,016
	0,354	0,5	14,769	
	0,636	0,1	19,157	
	0,700	<b>0,01</b>	<b>19,931</b>	

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \quad (14)$$

Отсюда параметр  $\mu$  распределения (4) будет равен  $\mu = 1/(\bar{\tau}_\mu - t_0)$ .

А диапазон изменения параметра сдвига определится из условия  $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$ .

Второй начальный момент времени обслуживания равен

$$\bar{\tau}_\mu^2 = t_0^2 + \frac{2t_0}{\mu} + \frac{3}{2\mu^2}.$$

Следовательно, коэффициент вариации времени обслуживания будет равен  $c_\mu = [\sqrt{2}(1 + \mu t_0)]^{-1}$ .

Таким образом, все параметры распределений (3) и (4) при задании значений  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$ ,  $t_0$  в качестве входных данных для системы  $H_2^-/E_2^-/1$  будут определены однозначно методом моментов.

Заметим, что коэффициенты вариации  $c_\lambda > 0$  и  $c_\mu < 1/\sqrt{2}$  при параметре сдвига  $t_0 > 0$ . Таким образом, очевидно, что система  $H_2^-/E_2^-/1$  также относится к типу G/G/1.

### 3. Результаты вычислительных экспериментов

В таблице приведены данные расчетов для системы  $H_2^-/E_2^-/1$  для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$  при  $c_\lambda = 2$ . Заметим, что обычная система  $H_2/E_2/1$  применима при  $c_\lambda \geq 1$  и  $c_\mu = 1/\sqrt{2}$ , а система  $H_2^-/E_2^-/1$  – при  $c_\lambda > 0$  и  $c_\mu < 1/\sqrt{2}$ . Таким образом, система  $H_2^-/E_2^-/1$  применима для широкого диапазона

изменения параметров, чем обычная система  $H_2/E_2/1$  и расширяет ее возможности.

В правой колонке таблицы для сравнения приведены результаты для обычной системы  $H_2/E_2/1$ . Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ . Расчеты в таблице приведены для удобства для нормированного времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$ .

Система  $H_2^-/E_2^-/1$  применима и в случае  $c_\lambda < 1$ , в частности при  $\rho = 0,9$ ,  $c_\lambda = 0,2$ ,  $t_0 = 0,9$ ,  $c_\mu = 0,071$ , среднее время ожидания будет равно  $\bar{W} = 0,072$  единиц времени, снизившись в несколько десятков раз по сравнению с обычной системой.

### Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

Операция сдвига во времени уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. Так как среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы  $H_2^-/E_2^-/1$  при загрузке  $\rho = 0,9$  и параметре сдвига  $t_0 = 0,9$  коэффициент вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  уменьшается с 2 для обычной системы до 1,105, коэффициент вариации времени обслуживания  $c_\mu$  уменьшается с  $1/\sqrt{2}$  до 0,071, а время ожидания уменьшается с 20,016 единицы времени для обычной системы до 0,748 единицы времени для системы с запаздыванием.

С уменьшением значения параметра  $t_0$  среднее время ожидания в системе  $H_2^-/E_2^-/1$  стремится к среднему времени ожидания в обычной системе  $H_2/E_2/1$ . Это полностью подтверждает адекватность построенной математической модели массового обслуживания.

Основным преимуществом системы со сдвинутыми распределениями является расширение диапазона применимости по сравнению с обычной СМО. Так, в данном случае диапазон для коэффициента вариации времени обслуживания  $0 < c_\mu \leq 1/\sqrt{2}$  при параметре сдвига  $t_0 \geq 0$ .

## Список литературы

1. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51–59. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117915110041>
2. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
3. Тарасов В.Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управління. 2018. № 4. С. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6>
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
5. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995. 529 с.
6. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
7. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93. URL: [https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya\\_veroyatnostnyh\\_raspredeleniy\\_v\\_modelyah\\_massovogo\\_obslyzhvaniya.htm](https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyzhvaniya.htm)
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, no. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Малахов С.В., Тарасов В.Н. Экспериментальные исследования производительности сегмента программно-конфигурируемой сети // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 2. С. 81–85.
11. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: [http://novtex.ru/IT/it2016/it1216\\_web-952-957.pdf](http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf)
12. Проектирование и моделирование сетей ЭВМ в системе OPNET MODELER / В.Н. Тарасов [и др.]. Самара: ПГАТИ, 2008. 233 с.
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. 2016. Vol. 84, no. 1–2. P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure // Queueing Systems. 2019. Vol. 93, no. 1–2. P. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>

## References

1. Tarasov V.N., Bahareva N.F., Blatov I.A. Analysis and calculation of queuing system with delay. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 11, pp. 1945–1951. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117915110041>
2. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2158. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
3. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hyper-Erlang input distributions. *Radioelektronika, informatika, upravlinnja*, 2018, no. 4, pp. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6> (In Russ.)
4. Klejnrok L. *Queueing Theory* / trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
5. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Queueing Theory*. Moscow: RUDN, 1995, 529 p. (In Russ.)
6. Aliev T.I. *Discrete Modeling Basics*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russ.)
7. Aliev T.I. Approximation of probability distributions in queuing models. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. URL: [https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya\\_veroyatnostnyh\\_raspredeleniy\\_v\\_modelyah\\_massovogo\\_obslyzhvaniya.htm](https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyzhvaniya.htm) (In Russ.)
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress*, Copenhagen, Denmark, 19–26 June 1991, pp. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Malahov S.V., Tarasov V.N. Experimental studies of the performance of the SDN segment. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii*, 2013, no. 2, pp. 81–85. (In Russ.)
11. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queuing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informatsionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: [http://novtex.ru/IT/it2016/it1216\\_web-952-957.pdf](http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf) (In Russ.)
12. Tarasov V.N. et al. *Design and Modeling of Computer Networks in the Opnet Modeler System*. Samara: PGATI, 2008, 233 p. (In Russ.)

13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1–2, pp. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2022, vol. 25, no. 1, pp. 21–26

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.21-26

Received 16 September 2021

Accepted 18 October 2021

### Delay model based on shifted hyperexponential and Erlang distributions

*Veniamin N. Tarasov, Nadezhda F. Bakhareva*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – This article is devoted to the derivation of results for the average delay of requests in the queue for a queuing system formed by two flows with the laws of interval distributions in the form of second-order hyperexponential and Erlang distributions shifted to the right. In queuing theory, studies of G/G/1 systems are relevant due to the fact that there is no solution in the final form for the general case. Therefore, in the study of such systems, various particular distribution laws are used as an arbitrary distribution law for G. In this case, the use of the hyperexponential distribution law ensures the coefficient of variation of the input flow intervals is large units, and the Erlang distribution is less than one. To solve the problem posed, the method of spectral decomposition of the solution of the integral Lindley equation was used, which plays an important role in the queuing theory. This method made it possible to obtain a solution for the average delay of requests in the queue for the system under consideration in a closed form. As is known, the remaining characteristics of the queuing system are derived from the average delay of requests.

*Keywords* – shifted hyperexponential and Erlang distributions; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

---

#### Сведения об авторах

**Тарасов Вениамин Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

*E-mail:* tarasov-vn@psuti.ru

**Бахарева Надежда Федоровна**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* анализ производительности компьютерных сетей.

*E-mail:* bakhareva-nf@psuti.ru

#### Information about the Authors

**Veniamin N. Tarasov**, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

*E-mail:* tarasov-vn@psuti.ru

**Nadezhda F. Bakhareva**, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Informatics and Computer Engineering, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* analysis of the performance of computer networks.

*E-mail:* bakhareva-nf@psuti.ru