

Математическая модель задержки на основе СМО с гиперэкспоненциальным и эрланговским распределениями

В.Н. Тарасов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Настоящая статья посвящена исследованию и получению решения в замкнутой форме для средней задержки требований в очереди для системы массового обслуживания, образованной двумя потоками с гиперэкспоненциальным и эрланговским законами распределения интервалов. Сочетание этих законов распределений обеспечивает коэффициент вариации интервалов входного потока больше единицы, а для времени обслуживания – меньше единицы. Учет коэффициентов вариации как числовых характеристик в теории массового обслуживания важен, т. к. главная характеристика системы массового обслуживания – средняя задержка связана с этими коэффициентами вариации квадратичной зависимостью. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они могут быть использованы при моделировании систем передачи данных различного назначения. Для решения поставленной задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Данный метод позволил получить спектральное разложение, а через него решение для средней задержки требований в очереди для рассматриваемой системы в замкнутой форме. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов теории вероятностей.

Ключевые слова – гиперэкспоненциальное и эрланговское распределения; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

Введение

Настоящая статья посвящена анализу системы массового обслуживания (СМО) $H_2/E_2/1$ с гиперэкспоненциальным (H_2) и эрланговским (E_2) входными распределениями второго порядка и является продолжением исследований [1–4]. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика при моделировании систем передачи данных различного назначения, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Проблему можно было бы решить с помощью законов распределений Вейбулла или Гамма наиболее общего вида, которые обеспечивают диапазон изменения коэффициентов вариаций от 0 до ∞ в зависимости от величины их параметров. Но, как оказалось, преобразование Лапласа функции плотности распределения Вейбулла не может быть выражено в элементарных функциях. Преобразование Лапласа функции плотности гамма-распределения включает параметр α этого закона в показатели степени

$$F^*(s) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt =$$

$$= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta s + 1} \right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) = \frac{1}{(\beta s + 1)^{\alpha-1}},$$

и этот закон распределения в теории массового обслуживания можно использовать только в частных случаях при целочисленных значениях $\alpha \geq 2$. В конечном итоге это приводит нас к известному распределению Эрланга.

В качестве основного метода решения задачи использован метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли [5; 6], а вспомогательного – приемы аппроксимации законов распределений методом моментов теории вероятностей [7–9]. Вычислительные эксперименты по полученным в работе аналитическим результатам подтверждаются данными имитации [10–12]. Схожие результаты современных исследований по системам массового обслуживания приведены в работах [13–16].

1. Постановка и решение задачи

В работе ставится задача вывода решения по средней задержке требований в очереди в системе $H_2/E_2/1$ с гиперэкспоненциальным и эрланговским входными распределениями второго порядка как основной характеристики любой СМО.

Для системы $H_2/E_2/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (1)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (2)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (1) и (2):

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2},$$

$$B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

Тогда выражение $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$, где $A^*(s)$, $B^*(s)$ – преобразования Лапласа функций плотности (1), (2), а $\varphi_+(s)$, $\varphi_-(s)$ – некоторые дробно-рациональные функции s , для спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы $H_2/E_2/1$ примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \\ &= \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1 = \\ &= \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu + s)^2}, \end{aligned}$$

т. к. многочлен 4-й степени в числителе этого выражения можно представить в виде разложения $-s(s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)$ с коэффициентами $c_2 = 4\mu - \lambda_1 - \lambda_2$, $c_1 = 4\mu(\mu - \lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2$, $c_0 = 4\mu[\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\lambda_1 p - \lambda_1 - \lambda_2 p)]$. В свою очередь кубический многочлен $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ с такими коэффициентами в стационарном режиме функционирования СМО при нагрузке $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$ имеет два действительных отрицательных корня $-s_1$, $-s_2$ и один положительный корень s_3 .

Окончательно

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu + s)^2}. \quad (3)$$

Поэтому с учетом специальных условий [5] за функцию $\psi_+(s)$ примем

$$\psi_+(s) = s(s + s_1)(s + s_2) / (s + 2\mu)^2,$$

т. к. нули кубического многочлена $s = 0$, $s = -s_1$, $s = -s_2$ и полюс $s = -2\mu$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$, а за функцию

$$\psi_-(s) = -(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s) / (s - s_3).$$

На рисунке отображены нули и полюса отношения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ на комплексной s -плоскости для

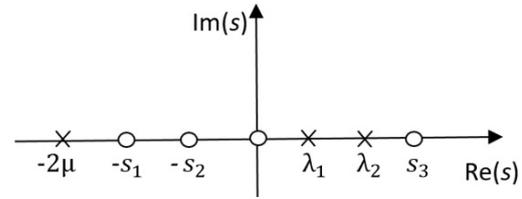


Рис. Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы $H_2/E_2/1$

Fig. Zeros and poles of $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ function for $H_2/E_2/1$ system

исключения ошибок построения спектрального разложения. На рисунке полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(s + 2\mu)^2} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2}.$$

Построим функцию $\Phi_+(s) = K / \psi_+(s)$, через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности задержки:

$$W^*(s) = s\Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}.$$

Окончательно

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (4)$$

Производная от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$ и даст среднюю задержку требований в очереди:

$$\begin{aligned} -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{s_1 s_2 (s + 2\mu)^2}{4\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Тогда средняя задержка в очереди для системы $H_2/E_2/1$ будет равна:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (5)$$

где s_1 , s_2 – абсолютные значения отрицательных корней $-s_1$ и $-s_2$ кубического многочлена $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ с приведенными выше коэффициентами. Таким образом, средняя задержка для системы $H_2/E_2/1$ однозначно определена в виде замкнутой формы (5).

Такой подход к использованию метода спектрального разложения позволяет определить не только среднюю задержку в очереди из (4), но и моменты высших порядков времени ожидания. Вторая производная от функции (4) при $s = 0$

Таблица. Результаты экспериментов для СМО $H_2/E_2/1$ в сравнении с $H_2/M/1$
Table. Results of experiments for QS $H_2/E_2/1$ in comparison with $H_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	для системы $H_2/E_2/1$	для системы $H_2/M/1$
0,1	1	0,083	0,111
	2	0,141	0,187
	4	0,171	0,230
	8	0,182	0,245
0,5	1	0,751	1,000
	2	1,764	2,162
	4	4,082	4,831
	8	8,911	10,402
0,9	1	6,752	9,000
	2	20,016	22,409
	4	73,321	75,786
	8	286,642	289,134

дает второй начальный момент времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [17] тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Для практического применения расчетной формулы (5) необходимо определить числовые характеристики распределений (1) H_2 и (2) E_2 . Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до третьего порядка для распределения (1):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad \overline{\tau_\lambda^2} = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2},$$

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3}.$$
(6)

При аппроксимации с использованием первых двух моментов неизвестные параметры распределения (1) λ_1 , λ_2 , p определяются с помощью следующих выражений [10]:

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda,$$

$$p = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{(c_\lambda^2 - 1) / (c_\lambda^2 + 1)}].$$
(7)

Отсюда следует, что коэффициент вариации $c_\lambda \geq 1$. При аппроксимации с использованием первых трех моментов для нахождения параметров

распределения (3) необходимо в пакете Mathcad решить систему трех уравнений (6), полученных методом моментов. При этом необходимым и достаточным условием существования решения является выполнение условия: $\overline{\tau_\lambda^3} \tau_\lambda \geq 1,5 \overline{\tau_\lambda^2}$ [9].

Для распределения (2) имеем:

$$\bar{\tau}_\mu = \frac{1}{\mu}, \quad \overline{\tau_\mu^2} = \frac{3}{2\mu^2}, \quad c_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации $(1, \infty)$. Величины $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$, c_λ , c_μ будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы $H_2/E_2/1$ с использованием выражения (5). Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (1) из выражений (7) и к нахождению нужных корней многочлена $s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ с приведенными выше коэффициентами, а затем к использованию расчетного выражения (5).

2. Результаты вычислительных экспериментов

В таблице приведены данные расчетов для системы $H_2/E_2/1$ для различных случаев нагрузки (малой, средней и высокой) $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$. Для сравнения в правой колонке приведены данные для близкой системы $H_2/M/1$, образованной гиперэкспоненциальным (H_2) и экспоненциальным (M) законами распределения. Заметим, что коэффициент вариации для распределения M равен единице, т. е. больше, чем у распределения E_2 . Тогда у последней системы средняя задержка будет больше. Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты в таблице приведены для удобства для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и с его помощью выведена расчетная формула для средней

задержки требований в очереди для этой системы в замкнутой форме. Данные численных экспериментов подтверждают полную адекватность полученных теоретических результатов, Предложенный подход к анализу систем также позволяет находить джиттер через преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания, т. к. он в [17] определен как разброс задержки требований в очереди вокруг среднего значения.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого достаточно знать средние значения интервалов между пакетами входящего трафика и времени обслуживания, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика.

Список литературы

1. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
2. Тарасов В.Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоелектроніка, інформатика, управління. 2018. № 4. С. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6>
3. Тарасов В.Н. Исследование и сравнение двойственных систем $E_2/M/1$ и $M/E_2/1$ // Инфокоммуникационные технологии. 2019. Т. 17, № 2. С. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03>
4. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf
5. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
6. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
7. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, no. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Малахов С.В., Тарасов В.Н. Экспериментальные исследования производительности сегмента программно-конфигурируемой сети // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 2. С. 81–85.
11. Проектирование и моделирование сетей ЭВМ в системе OPNET MODELER / В.Н. Тарасов [и др.]. Самара: ПГАТИ, 2008. 233 с.
12. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. Оренбург: ОГУ, 2005. 183 с.
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. 2016. Vol. 84, no. 1–2. P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure // Queueing Systems. 2019. Vol. 93, no. 1–2. P. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
17. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

References

1. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2158. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918120056>
2. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hyper-Erlang input distributions. *Radioelektronika, informatika, upravlinnja*, 2018, no. 4, pp. 61–70. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6> (In Russ.)
3. Tarasov V.N. Study and comparison of dual systems $E_2/M/1$ and $M/E_2/1$. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03> (In Russ.)
4. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queueing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informacionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf (In Russ.)
5. Klejnrok L. *Queueing Theory* / trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
6. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004, 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>

7. Aliev T.I. *Discrete Modeling Basics*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russ.)
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatrafic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress, Copenhagen, Denmark, 19–26 June 1991*, pp. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
10. Malahov S.V., Tarasov V.N. Experimental studies of the performance of the SDN segment. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii*, 2013, no. 2, pp. 81–85. (In Russ.)
11. Tarasov V.N. et al. *Design and Modeling of Computer Networks in the Opnet Modeler System*. Samara: PGATI, 2008, 233 p. (In Russ.)
12. Tarasov V.N., Bahareva N.F. *Computer Modeling of Computing Systems. Theory, Algorithms, Programs*. Orenburg: OGU, 2005, 183 p. (In Russ.)
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
16. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1–2, pp. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
17. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2022, vol. 25, no. 1, pp. 16–20

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.1.16-20

Received 16 September 2021

Accepted 18 October 2021

Mathematical delay model based on QS with hyperexponential and Erlang distributions

Veniamin N. Tarasov

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – This article is devoted to the study and obtaining a closed-form solution for the average delay of claims in the queue for a queuing system formed by two flows with hyperexponential and Erlang distributions of intervals. The combination of these distribution laws provides the coefficient of variation of the input flow intervals large units, and for the service time - less than unity. Considering the coefficients of variation as numerical characteristics in the queuing theory is important, because the main characteristic of the queuing system is that the average delay is related to these coefficients of variation by a quadratic dependence. In queuing theory, studies of G/G/1 systems are relevant due to the fact that they can be used in modeling data transmission systems for various purposes. To solve the problem posed, the method of spectral decomposition of the solution of the integral Lindley equation was used. This method made it possible to obtain a spectral decomposition, and through it a solution for the average delay of requests in the queue for the system under consideration in a closed form. For the practical application of the results obtained, the method of moments of the theory of probability was used.

Keywords – hyperexponential and Erlang distributions; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

Информация об авторе

Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Information about the Author

Veniamin N. Tarasov, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru