

## Квазигармонические автоколебания в дискретном времени: анализ и синтез динамических систем

В.В. Зайцев<sup>1</sup>, А.В. Карлов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
443086, Россия, г. Самара,  
Московское шоссе, 34

<sup>2</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – Для дискретизации времени в дифференциальном уравнении движения осциллятора (генератора) томсоновского типа предложено использовать сочетание численного метода конечных разностей и асимптотического метода медленно меняющихся амплитуд. Разностные аппроксимации временных производных выбираются таким образом, чтобы, во-первых, сохранить в дискретном времени консервативность и собственную частоту линейного контура автоколебательной системы. Во-вторых, требуется совпадение разностного укороченного уравнения для комплексной амплитуды автоколебаний в дискретном времени с аппроксимацией Эйлера укороченного уравнения для амплитуды автоколебаний в аналоговой системе-прототипе. Показано, что реализация такого подхода позволяет сформировать дискретные отображения осцилляторов томсоновского типа, в частности, осциллятора ван дер Поля. Адекватность дискретных моделей аналоговым прототипам подтверждена также численным экспериментом.

*Ключевые слова* – автоколебательная система; уравнение движения; дискретное время; конечные разности; медленно меняющиеся амплитуды; укороченные уравнения; дискретные отображения томсоновских автогенераторов.

### Введение

Автоколебания – фундаментальный процесс, наблюдаемый в природе [1–3]. Среди множества разнообразных временных форм можно выделить квазигармонические (узкополосные) автоколебания. Порождающие их динамические системы – автоколебательные системы в большинстве случаев содержат резонатор, нелинейный активный элемент и положительную обратную связь. Автоколебательная система на основе высокодобротного резонатора и активного элемента с кубической нелинейностью – генератор (осциллятор) ван дер Поля служит универсальной моделью систем различной физической природы [4; 5]. Нелинейности более общего вида образуют класс так называемых систем томсоновского типа [6]. С учетом того, что современная теория колебаний рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ) представляет интерес временная дискретизация в дифференциальной модели осциллятора, результатом которой является разностное уравнение движения.

Переход к дискретному времени в дифференциальных моделях линейных аналоговых фильтров широко применяется в практике проектирования цифровых фильтров [7]. Помимо решения прикладных задач, такой подход позволяет ввести

в рассмотрение колебательные ДВ-системы как объекты исследования теории колебаний. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики в дискретном времени. Это утверждение, справедливое для линейных систем, тем более относится к автоколебательным системам.

Один из способов временной дискретизации использует введение нелинейных дельта-воздействий в гамильтониан или уравнение движения НВ-системы. Например, в монографии [8] этим способом построено универсальное и стандартное отображение. В статье [9] анализ дельта-импульсной синхронизации применяется для вывода дискретных отображений неавтономного осциллятора ван дер Поля – Дюффинга. В работе [10] для проектирования ДВ-осциллятора ван дер Поля было предложено использовать условие инвариантности импульсной характеристики линейного резонатора автоколебательной системы относительно дискретизации времени. Принцип импульсной инвариантности можно сформулировать также как замену ядра интегрального уравнения движения нелинейного осциллятора дискретизирующей последовательностью дельта-функций с весовыми коэффициентами из отсчетов

импульсной характеристики линейного аналогового контура.

Более традиционные способы основаны на конечно-разностных аппроксимациях временных производных в дифференциальных моделях динамических систем. Например, в статье [11] и монографии [12] дискретизация проведена методом Эйлера. Отмечено, что полученные таким образом дискретные отображения наследуют основные черты аналоговых прототипов, но и приобретают новые свойства. Возможности метода конечных разностей для проектирования ДВ-осцилляторов томсоновского типа проанализированы в работе [13].

В настоящем сообщении дискретизацию времени в дифференциальной модели генератора томсоновского типа предлагается провести на основе совместного использования методов конечных разностей и медленно меняющихся амплитуд.

## 1. Осциллятор в непрерывном времени

Осциллятор томсоновского типа – базовая модель теории нелинейных колебаний – задается уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0}{Q} (pS(x) - 1) \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Здесь  $\omega_0$  и  $Q$  – собственная частота и добротность линейного резонатора;  $S(x)$  – дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики активного элемента;  $p$  – параметр превышения порога генерации (порог:  $p = 1$ ). Предполагая в дальнейшем дискретизацию времени с интервалом  $\Delta$ , введем в уравнение (1) безразмерную временную переменную  $\tau = t / \Delta$ :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 4\pi^2 \Omega_0^2 x = 2\pi\nu (pS(x) - 1) \frac{dx}{d\tau}. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_d$  – собственная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации  $\omega_d = 2\pi / \Delta$ ;  $\nu = \Omega_0 / Q$  – полоса резонатора.

Считая, что  $\nu \ll 1$ , анализ уравнения (2) проведем в приближении метода медленно меняющихся амплитуд (метода ММА), широко используемого при решении прикладных задач теории нелинейных колебаний [14]. В рамках метода осцилляции  $x(t)$  представляются в виде

$$x(\tau) = \frac{1}{2} A(\tau) \exp(j2\pi\Omega_0 \tau) + \frac{1}{2} A^*(\tau) \exp(-j2\pi\Omega_0 \tau) \quad (3)$$

с комплексной амплитудой  $A(\tau)$  – медленной по сравнению с  $\exp(j2\pi\Omega_0 \tau)$  функцией времени. Медленность комплексной амплитуды позволяет пренебречь второй производной  $A''(\tau)$  в левой части

уравнения (2) и первой производной  $A'(\tau)$  в его правой части.

Дифференциальную крутизну  $S(x)$  с осциллирующим аргументом (3) представим ограниченным рядом Фурье, содержащим постоянную составляющую и две первые гармоники:

$$S(x) = S_0(a) + \frac{1}{2} S_1(a) \exp(j2\pi\Omega_0 \tau) + \frac{1}{2} S_2(a) \exp(j4\pi\Omega_0 \tau).$$

где  $a = |A|$  – амплитуда осцилляций. После выделения первой гармоники осцилляций (3) из правой части уравнения (2) и приравнивания амплитудных коэффициентов при  $\exp(j2\pi\Omega_0 \tau)$  в его правой и левой частях получим так называемое укороченное уравнение вида

$$\frac{dA}{d\tau} = -\pi\nu \left( 1 - p \left( S_0(a) - \frac{1}{2} S_2(a) \right) \right) A. \quad (4)$$

На дискретной временной сетке  $\tau_n = n\Delta t$  с шагом  $\Delta t = 1$  явный метод Эйлера дает разностную форму укороченного уравнения (4):

$$A_n = A_{n-1} - \pi\nu \left( 1 - p \left( S_0(a_{n-1}) - \frac{1}{2} S_2(a_{n-1}) \right) \right) A_{n-1}. \quad (5)$$

Здесь  $A_n = A(\tau_n)$  – функция дискретного времени.

## 2. Осциллятор в дискретном времени

При переходе к дискретному времени в уравнении (2) будем стремиться выполнить два условия. Во-первых, разностный оператор второго порядка, соответствующий левой части уравнения (2), должен быть консервативным и порождать собственные колебания с частотой  $\Omega_0$ . Это условие приводит к уравнению собственных колебаний в дискретном времени

$$x_n - 2k_1 x_{n-1} + k_2 x_{n-2} = 0, \quad (6)$$

в котором действительные коэффициенты разностной аппроксимации  $k_1$  и  $k_2$  таковы, что

$$x_n = A_0 \exp(j2\pi\Omega_0 n) = A_0 Z_0^n.$$

Записав для однородного разностного уравнения (6) характеристическое уравнение

$$Z_0^2 - 2k_1 Z_0 + k_2 = 0,$$

нетрудно получить  $|Z_0|^2 = 1 = k_2$  и  $\text{Re}(Z_0) = \cos(2\pi\Omega_0) = k_1$ .

Теперь полное уравнение движения ДВ-осциллятора представим в виде

$$x_n - 2 \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\nu (pS(x_{n-1}) - 1) (k_3 x_{n-1} - x_{n-2}). \quad (7)$$

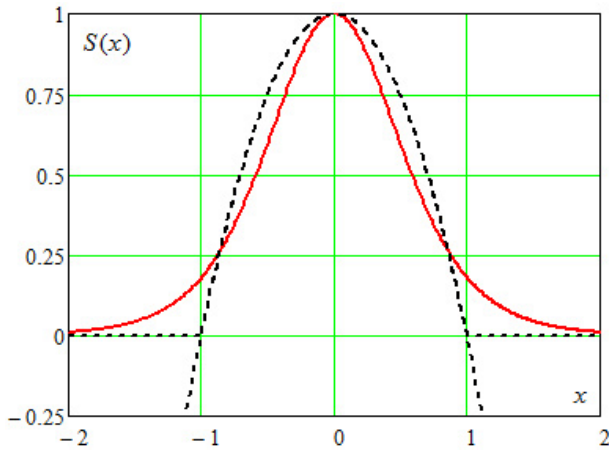


Рис.1. Дифференциальная крутизна активного элемента  
 Fig. 1. Active element differential slope

При этом для определения коэффициента  $k_3$  разностной аппроксимации производной в правой части (2) потребуем, чтобы укороченное уравнение для комплексной амплитуды автоколебаний в ДВ-генераторе (7) совпадало эйлеровым приближением (5) укороченного уравнения (4) для комплексной амплитуды автоколебаний в НВ-генераторе (2).

Метод ММА на автоколебания в дискретном времени распространен в статье [15]. Следуя этой работе, автоколебания в (7) запишем в виде

$$x_n = \frac{1}{2} A_n Z_0^n + \frac{1}{2} A_n^* Z_0^{-n}.$$

Теперь медленность комплексной амплитуды  $A_n$  позволяет проводить преобразования левой части уравнения (7) с учетом приближенного равенства  $A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2}$ , а в его правой части – считать комплексную амплитуду постоянной. Все остальные шаги ДВ-метода ММА совпадают с аналогичными шагами НВ-метода. В результате приходим к следующему укороченному уравнению для ДВ-осциллятора (7):

$$A_n = A_{n-1} - \nu \frac{(k_3 - Z_0^{-1})}{j \operatorname{Im}(Z_0)} \times \left( 1 - p \left( S_0(a_{n-1}) - \frac{1}{2} S_2(a_{n-1}) \right) \right) A_{n-1}. \quad (8)$$

Нетрудно увидеть, что уравнение (8) совпадает с уравнением (5), если положить  $k_3 = \operatorname{Re}(Z_0) = \cos(2\pi\Omega_0)$ . Таким образом, искомое дискретное отображение (разностное уравнение движения), определяющее ДВ-осциллятор ван дер Поля имеет вид

$$x_n - 2 \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + x_{n-2} = 2\nu \left( p S(x_{n-1}) - 1 \right) \left( \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} - x_{n-2} \right). \quad (9)$$

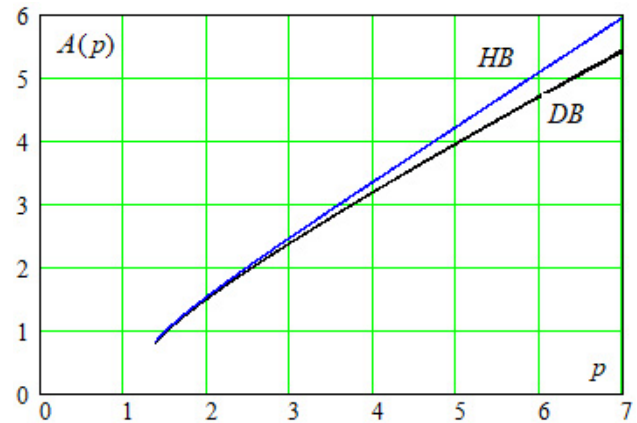


Рис. 2. Огибающие автоколебаний НВ- и ДВ-осцилляторов  
 Fig. 2. Amplitudes of self-oscillations in continuous and discrete time

При умеренных превышениях порога генерации ( $p \leq 10$ ), когда автоколебания еще можно считать квазигармоническими, отображение (9) воспроизводит в дискретном времени основные характеристики НВ-осциллятора (1). Этот вывод непосредственно следует из способа его формирования. Тем не менее, приведем также ряд результатов цифрового анализа временных рядов, генерируемых по алгоритму (9).

### 3. Численный эксперимент с томсоновским ДВ-осциллятором

В качестве примера рассмотрим автоколебания в ДВ-осцилляторе (9) с нелинейностью дифференциальной крутизны вида

$$S(x) = 1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{3}{2}x\right).$$

График функции (10) приведен на рис. 1. Для сравнения пунктирной линией показаны графики квадратичной нелинейности дифференциальной крутизны

$$S(x) = 1 - x^2,$$

соответствующей осциллятору ван дер Поля, и ограниченной квадратичной нелинейности.

Энергетические характеристики НВ- и ДВ-осцилляторов можно сопоставить путем сравнения зависимостей амплитуд  $A_c$  и  $A_d$  первой гармоники установившихся автоколебаний от величины параметра превышения порога генерации. Соотношение этих зависимостей иллюстрируют графики, приведенные на рис. 2.

Для дискретного осциллятора (9) с параметрами  $\Omega_0 = 0,18$ ,  $Q = 20$ ,  $\nu = 9 \cdot 10^{-3}$  график зависимости  $A_d(p)$  получен путем оценки амплитуды автоколебаний по формуле

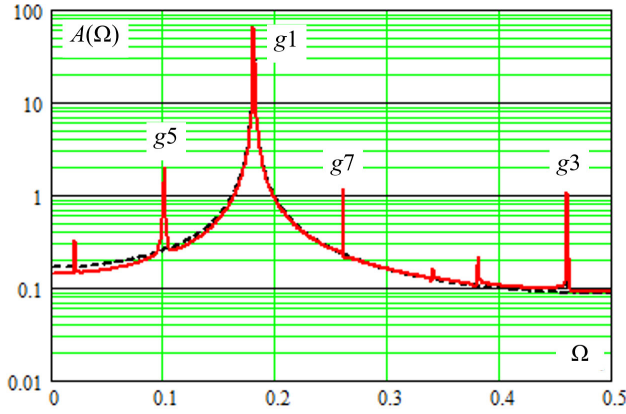


Рис. 3. Амплитудные спектры НВ- и ДВ-осцилляторов  
Fig. 3. Amplitude spectrum of CT- and DT-oscillators

$$A_d(p) = \sqrt{x_N^2(p) + \left( \frac{\cos(2\pi\Omega_0)x_N(p) - x_{N-1}(p)}{\sin(2\pi\Omega_0)} \right)^2} \quad (10)$$

на основе отсчетов  $x_{N-1}$  и  $x_N$  временного ряда. Отметим, что при записи (10) использована аппроксимация производной  $y = dy/dt$  вида [15]

$$\text{sinc}(2\pi\Omega_0)y_n = (\cos(2\pi\Omega_0)x_n - x_{n-1}),$$

где  $\text{sinc}(2\pi\Omega_0) = \sin(2\pi\Omega_0)/2\pi\Omega_0$  - кардинальный синус.

Оценка амплитуды  $A_c(p)$  установившихся автоколебаний томсоновского осциллятора (1) проведена на основе результатов численного интегрирования задачи Коши для уравнения движения (2) методом Рунге-Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом  $\Delta\tau = 0,125$ . Временные ряды для оценки  $A_c(p)$  сформированы путем выборки из численного решения  $X_n = x_{nM}$ ,  $Y_n = y_{nM} = x'_\tau(\tau_{nM})$  при  $M = 8$ , а затем использована формула

$$A_c(p) = \sqrt{X_N^2(p) + \left( \frac{Y_N(p)}{2\pi\Omega_0} \right)^2}.$$

В целом, как это следует из рис. 2, зависимости  $A_c(p)$  и  $A_d(p)$  близки как качественно, так и количественно - максимальное расхождение их значений в представленном примере составляет 8,4 %. Причем причина замедленного роста  $A_d(p)$  по сравнению с  $A_c(p)$  при увеличении параметра  $p$  заключается в повышенном уровне гармоник у ДВ-осциллятора (9). Это подтверждается рис. 3, на котором для  $p = 3$  сплошной линией показан амплитудный спектр автоколебаний ДВ-осциллятора (9), а пунктирной - НВ-осциллятора (1). Символами  $gK$  отмечены гармоники с номерами  $K$ . Здесь следует обратить внимание на неустраняемый эффект подмены частот (наложения спектров) гармоник автоколебаний в дискретном времени [16]. Что ка-

сается основных частот автоколебаний, то они в представленном примере у осцилляторов (1) и (9) весьма близки.

#### 4. Разновидности ДВ-осцилляторов томсоновского типа

Основываясь на дискретном отображении (уравнении движения) осциллятора ван дер Поля, можно предложить еще ряд ДВ-автогенераторов томсоновского типа.

Вариант уравнения движения (9) нетрудно получить, если ввести в рассмотрение параметр консервативности резонатора ДВ-автогенератора:

$$\delta = 1 - p\nu \rightarrow \exp(-p\nu).$$

Тогда (9) принимает вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = 2\pi\nu p S(x_{n-1})(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}), \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что при  $\delta = 1$  и  $S(x) = 1 - x^2$  разностное уравнение

$$\begin{aligned} x_n - 2 \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = \\ = 2\pi\nu p (1 - x_{n-1}^2)(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}), \end{aligned}$$

представляет собой результат дискретизации времени в уравнении ван дер Поля в его стандартной форме записи [4]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0 \gamma (1 - x^2) \frac{dx}{dt},$$

где  $\gamma = pQ$  - константа глубины обратной связи.

Вариант ДВ-автогенератора с перестройкой частоты задается уравнением

$$\begin{aligned} x_n - 2 \cos(2\pi\Omega_0(1 + m_n))x_{n-1} + x_{n-2} = \\ = 2\pi\nu (pS(x_{n-1}) - 1)(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}), \end{aligned}$$

где  $m_n = \Delta\Omega_n / \Omega_0$  - текущее значение индекса частотной модуляции;  $\Delta\Omega_n$  - девиация частоты.

#### Заключение

Предложенный метод дискретизации времени в дифференциальном уравнении квазигармонической автоколебательной системы (системы томсоновского типа) позволяет перейти к рассмотрению дискретных отображений, гарантированно обладающих динамическими характеристиками аналоговых систем-прототипов. Такие отображения можно использовать в качестве нелинейных функциональных узлов в численных моделях сложных радиоэлектронных устройств. Кроме того, они могут служить основой алгоритмов об-

работки дискретных (цифровых) сигналов, таких, например, как синхронное и частотное детектирование [17].

При значительных превышениях порога генерации, когда перестает выполняться условие квази-

линейности исходной автоколебательной системы, дискретные отображения приобретают новые свойства, позволяющие рассматривать их как самостоятельные объекты нелинейной динамики в дискретном времени.

## Список литературы

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория автоколебаний. М.: Наука, 1981. 508 с.
2. Мюррей Дж. Математическая биология: Том I. Введение. М.; Ижевск: НИЦ РХД, Институт компьютерных исследований, 2009. 776 с.
3. Jenkins A. Self-oscillations // *Physics Reports*. 2013. Vol. 525, no. 2. P. 167–222. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.10.007>
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
5. Феномен уравнения ван дер Поля / А.П. Кузнецов [и др.] // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т. 22, № 4. С. 3–42. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42>
6. Основы теории колебаний. Изд. 2-е / В.В. Мигулин [и др.]. М.: Наука, 1988. 392 с.
7. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
8. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ РХД; Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
9. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Синхронизация автоколебательной системы Ван дер Поля – Дuffинга короткими импульсами // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2004. Т. 12, № 5. С. 16–31.
10. Зайцев В.В., Давыденко С.В., Зайцев О.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора ван дер Поля // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2000. Т. 3, № 2. С. 64–67.
11. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В. Бифуркация Богданова – Такенса: от непрерывной к дискретной модели // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17, № 6. С. 139–158.
12. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.; Ижевск: НИЦ РХД; Ижевский институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
13. Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю., Шилин А.Н. Конечные разности в задаче синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2017. Т. 20, № 2. С. 35–41. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7095>
14. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
15. Зайцев В.В. О дискретных отображениях осциллятора ван дер Поля // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2014. Т. 17, № 1. С. 35–40. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7287>
16. Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2015. Т. 23, № 6. С. 40–46. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-6-40-46>
17. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Мир, 1972. 600 с.

## References

1. Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.E. *Self-Oscillation Theory*. Moscow: Nauka, 1981, 508 p. (In Russ.)
2. Murrey J. *Mathematical Biology: Vol. I. Introduction Tom I. Introduction*. Moscow; Izhevsk: NITs RHD, Institut komp'juternyh issledovaniy, 2009, 776 p. (In Russ.)
3. Jenkins A. Self-oscillations. *Physics Reports*, 2013, vol. 525, no. 2, pp. 167–222. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.10.007>
4. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. *Non-Linear Oscillations*. Moscow: Fizmatlit, 2005, 292 p. (In Russ.)
5. Kuznetsov A.P. et al. The van der Pol equation phenomenon. *Izvestija vuzov. Prikladnaja nelinejnaja dinamika*, 2014, vol. 22, no. 4, pp. 3–42. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42> (In Russ.)
6. Migulin et al. *Fundamentals of Oscillation Theory*. 2nd ed. Moscow: Nauka, 1988, 392 p. (In Russ.)
7. Oppengejm A., Shafer R. *Digital Signal Processing*. Moscow: Tehnosfera, 2006, 856 p. (In Russ.)
8. Zaslavsky G.M. *Hamiltonian Chaos and Fractal Dynamics*. Moscow; Izhevsk: SRC RHD; Izhevsk Institute for Computer Research, 2010, 472 p. (In Russ.)
9. Kuznetsov A.P., Tjurjukina L.V. Synchronization of the van der Pol – Duffing self-oscillating system by short pulses. *Izvestija vuzov. Prikladnaja nelinejnaja dinamika*, 2004, vol. 12, no. 5, pp. 16–31. (In Russ.)
10. Zaitsev V.V., Zaitsev O.V. The dynamics of self-oscillations of a discrete van der Pol oscillator. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2000, vol. 3, no. 2, pp. 64–67. (In Russ.)
11. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Yu.V. Bogdanov – Takens bifurcation: from continuous to discrete model. *Izvestija vuzov. Prikladnaja nelinejnaja dinamika*, 2009, vol. 17, no. 6, pp. 139–158. (In Russ.)
12. Morozov A.D. *Resonances, Cycles and Chaos in Quasi-Conservative Systems*. Moscow; Izhevsk: SRC RHD; Izhevsk Institute for Computer Research, 2005. 424 p. (In Russ.)
13. Zaitsev V.V., Fedjunin E.Yu., Shilin A.N. Finite differences in the problem of synthesizing nonlinear DT oscillators. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 35–41. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7095> (In Russ.)

14. Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. *Oscillation Theory in Radio Engineering*. Moscow: Nauka, 1984, 320 p. (In Russ.)
15. Zaitsev V.V. On discrete mappings of the van der Pol oscillator. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2014, vol. 17, no. 1, pp.35–40. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7287> (In Russ.)
16. Zaitsev V.V., Stulov I.V. On the influence of substituted harmonics on the dynamics of self-oscillations in discrete time. *Izvestija vuzov. Prikladnaja nelinejnaja dinamika*, 2015, vol. 23, no. 6, pp. 40–46. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-6-40-46> (In Russ.)
17. Lindsey V. *Synchronization Systems in Communication and Control*. Moscow: Mir, 1972, 600 p. (In Russ.)

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

### 2021, vol. 24, no. 4, pp. 19–24

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.4.19-24

Received 5 November 2021  
Accepted 7 December 2021

## Quasi-harmonic self-oscillations in discrete time: analysis and synthesis of dynamic systems

Valery V. Zaitsev<sup>1</sup>, Alexander V. Karlov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Samara National Research University  
34, Moskovskoye shosse,  
Samara, 443086, Russia

<sup>2</sup> Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – For sampling of time in a differential equation of movement of Thomson type oscillator (generator) it is offered to use a combination of the numerical method of finite differences and an asymptotic method of the slow-changing amplitudes. The difference approximations of temporal derivatives are selected so that, first, to save conservatism and natural frequency of the linear circuit of self-oscillatory system in the discrete time. Secondly, coincidence of the difference shortened equation for the complex amplitude of self-oscillations in the discrete time with Euler's approximation of the shortened equation for amplitude of self-oscillations in analog system prototype is required. It is shown that realization of such approach allows to create discrete mapping of the van der Pol oscillator and a number of mappings of Thomson type oscillators. The adequacy of discrete models to analog prototypes is confirmed with also numerical experiment.

*Keywords* – self-oscillatory system; motion equation; the discrete time; finite differences; slowly changing amplitudes; the shortened equations; the discrete mapping of Thomson self-oscillators.

### Информация об авторах

**Зайцев Валерий Васильевич**, 1952 г. р. (с. Борское Куйбышевской области), кандидат физико-математических наук, профессор кафедры оптики и спектроскопии Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. Окончил Куйбышевский государственный университет (1975 г.) и аспирантуру при Горьковском государственном университете (1980 г., кафедра А.Н. Малахова). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1980 г.). Автор более 300 научных работ.

*Область научных интересов:* нелинейные колебания, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование в радиофизике.

*E-mail:* zaitsev@samsu.ru

**Карлов Александр Владимирович**, 1987 г. р. (с. Монастырище-2 Приморского края), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретических основ радиотехники и связи Поволжского государственного университета телекоммуникация и информатики. Окончил Самарский государственный университет (2009 г.), а также аспирантуру при кафедре радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СамГУ (2012 г.).

*Область научных интересов:* компьютерное моделирование в радиофизике, цифровая обработка сигналов, антенные системы.

*E-mail:* a.v.karlov@gmail.com

### Information about the Authors

**Valery V. Zaitsev**, b. 1952 (v. Borsкое, Kuibyshev region), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara National Research University, Samara, Russia. Graduated from Kuibyshev State University (1975) and postgraduate studies at Gorky State University (1980, department of A.N. Malakhov). He defended his thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences at Gorky State University (1980). Author of over 300 scientific papers.

*Research interests:* nonlinear oscillations, statistical radiophysics, computer modeling in radiophysics.

*E-mail:* zaitsev@samsu.ru

**Alexander V. Karlov**, b. 1987 (Monastyrshche-2 village of Primorsky Kray), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Theoretical Foundations of Radio Engineering and Communication, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. He graduated from Samara State University in 2009 and post-graduated from Samara State University in 2012 (Department of Radiophysics and Computer Modeling of Radio Systems). He received the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in Samara State University in 2012.

*Research interests:* computer modeling in radio physics, digital signal processing, antenna systems.

*E-mail:* a.v.karlov@gmail.com