МЕТОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

УДК 519.816 *Научная статья* DOI:10.18287/2223-9537-2023-13-4-580-596

Метод косвенных предпочтений формирования весов критериев с многоуровневой структурой

© 2023, В.П. Корнеенко

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Аннотация

Представлен метод формирования весов критериев в задачах многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей, представленных в виде иерархического дерева. Значения весов вычисляются на основе косвенного измерения предпочтений смежных пар локальных весов критериев, входящих в вершины более высокого уровня иерархического дерева, в виде экспертных оценок в количественной шкале отношений. Вычисление количественных весов вначале сводится к лексикографическому упорядочению по убыванию важности критериев на каждом уровне иерархии, входящих в вершины более высокого уровня, вследствие чего сокращается число экспертных сравнений смежных пар в шкале отношений. Формирование локальных коэффициентов важности критериев математически обосновано и базируется на матрице, обладающей особыми свойствами. Дан сравнительный анализ предлагаемого метода формирования количественных весов с методом анализа иерархий, методом наименьших квадратов и методом аппроксимационной матрицы, базирующимися на матрице парных сравнений. Приводится пример решения задачи многокритериального оценивания боевых самолётов, принимавших участие в тендере, по тактико-техническим характеристикам, представленным в различных шкалах измерения.

Ключевые слова: *важность критериев, матрица парных сравнений, иерархическое дерево, шкала измерения, упорядочение критериев.*

Цитирование: *Корнеенко В.П.* Метод косвенных предпочтений формирования весов критериев с многоуровневой структурой // Онтология проектирования. 2023. Т.13, №4(50). С.580-596. DOI:10.18287/2223-9537-2023-13-4-580-596.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Введение

Принятие управленческих решений часто сопряжено с решением прикладных задач оценивания и выбора эффективных объектов (вариантов решений, альтернатив, стратегий), которые относятся к классу многокритериальных задач. На практике к этому классу относятся задачи: построения рейтингов компаний, банков; оценки эффективности деятельности коллективов в организационных системах; синтеза сложной технической системы.

Для объектов с многоуровневой структурой характерно представление системы критериев в виде иерархического дерева [1–3]. При этом возникает проблема оценки количественной важности локальных критериев, входящих в вершину более высокого уровня.

Обзору и классификации методов формирования весовых коэффициентов посвящено большое число работ [4–9]. Известно более двадцати различных методов определения весов, часть из которых подробно рассмотрена в статье [8].

Настоящая статья посвящена развитию методов косвенного измерения предпочтений критериев в шкале отношений [10].

1 Определение важности критериев

Одна из первых методик решения многокритериальных задач с многоуровневой структурой была разработана для оценки эффективности вариантов прогнозирования и планирования при разработке сложных научных и научно-технических программ (ПАТТЕРН, *PATTERN*[1], США) [2]. Методика включает построение дерева целей, которое служит для оценки относительной важности критериев, и применение прямого метода экспертного оценивания количественных весов критериев.

Оценки количественной важности локальных критериев, входящих в вершины более высокого уровня, эксперты проставляют на бланке (в долях единицы). Процедура определения коэффициентов проходит в несколько туров, пока не будет согласована со всеми экспертами. Пересчёт их в глобальные веса для концевых (висячих) вершин дерева осуществляется перемножением весов всех вершин, лежащих на пути, ведущем к данной вершине. Для каждой альтернативы (объекта, проекта, варианта) находится агрегированная оценка, равная сумме произведений глобальных весов и оценок критериев в концевых вершинах дерева.

В соответствии с теорией измерений [11] веса важности критериев могут быть измерены в градациях различных шкал, например: в номинальных шкалах с двумя градациями «равноважны» и «неравноважны»; в количественных (разности, отношений) с различными весами важности (предпочтительности) по числу критериев.

Понятие важности критериев с точки зрения теории измерений можно рассмотреть следующим образом. Пусть объекты множества $A = \{a_q : q = \overline{1, n_A}\}$ оцениваются по $f_j \in F = \{f_1, \dots, f_m\}$ критериям.

Определение 1. В количественной шкале отношений критерий $f_i, i = \overline{1, m}$, считается более важным, чем критерий f_j (обозначение $f_i \succ f_j$), если количественный вес $w_i = w(f_i)$ критерия f_i будет превосходить количественный вес $w_j = w(f_j)$ критерия f_j в $\frac{w_i}{w_j} > 1$ раз, т.е.

$$f_i \succ f_j \Leftrightarrow w(f_i) > w(f_j)$$

и наоборот, менее важен, если $\frac{w_i}{w_j} < 1$, а при $\frac{w_i}{w_j} = 1$, т.е. равенстве весов, критерии равноважны

$$f_i \approx f_j \Leftrightarrow w(f_i) = w(f_j).$$

Известно следующее определение однородных критериев по важности [12, 13].

Определение 2. Утверждение «критерий K_i важнее критерия K_j» (обозначение $i \succ j$) означает, что каждая векторная оценка x, в которой $x_i > x_j$, предподчительнее, чем x^{ij}.

Здесь x^{ij} – обозначение векторной оценки, которая получена из векторной $x = (x_1, \dots, x_m)$ оценки, например, если $x = (5, 4, 3, 4)$, то $x^{23} = (5, 3, 4, 4)$.

Замечание 1. Сравнение определений 1 и 2 приводит к выводу о том, что определение 1 не привязано к векторным оценкам, в отличие от определения 2. Можно показать, что утверждение «каждая векторная оценка x, в которой $x_i > x_j$, предподчительнее, чем x^{ij}» следует из предпочтительности критерия f_i относительно f_j и условия $x_i > x_j$.

[1] *PATTERN* (от англ. *Planning Assistance Through Technical Evaluation from Relevans Number*) поддержка планирования посредством относительных показателей технической оценки.

Действительно, пусть критерий f_i важнее критерия f_j, т.е. для количественных весов справедливо неравенство: $w_i > w_j$. Очевидно, векторы x и x^{ij} несравнимы по предпочтительности, однако в силу однородности шкалы измерения в задачах векторной оптимизации они сравнимы по аддитивной свёртке [5]:

$$F(x,w) = \sum_{s=1}^{m} w_s x_s,$$

где $w_s = w(f_s)$ – количественный вес критерия f_s, $s = \overline{1,\, m}$; $x = (x_1, \dots, x_s, \dots, x_m)$.

Агрегированные оценки векторов x и x^{ij} представляются в виде:

$$F(x,w) = w_i x_i + w_j x_j + \sum_{\substack{s=1, \\ s\neq j, s\neq i}}^{m} w_s x_s. \quad F(x^{ij},w) = w_i x_j + w_j x_i + \sum_{\substack{s=1, \\ s\neq j, s\neq i}}^{m} w_s x_s.$$

Разность $F(x,w) - F(x^{ij},w)$ агрегированных оценок x и x^{ij} имеет вид:

$$F(x,w) - F(x^{ij},w) = (w_i x_i + w_j x_j) - (w_i x_j + w_j x_i) = (w_i - w_j)(x_i - x_j) > 0,$$

т.е. векторная оценка x, в которой $x_i > x_j$, предподчительнее, чем x^{ij} в силу предпочтительности критерия f_i над критерием f_j.

В работе [14] в качестве количественных весов предлагается использовать числовую последовательность П. Фишберна [15]:

$$w_i = \frac{2(m+1-i)}{m(m+1)}, \tag{1}$$

где i – номер критерия в порядке убывания его важности, при этом $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$.

В работе [16] предложена формула для вычисления задающих коэффициентов в виде:

$$a_{ns} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \text{ при } s = 1, \\ \frac{C_s + 2n - 1}{n^2(n-1)} \text{ при } 1 < s \leq n, \end{cases} \tag{2}$$

где s - группа важности, a_{ns} – универсальные коэффициенты важности в политике выбора для n критериев, в которой каждая группа важности включает ровно один критерий. Задающий параметр C_s для $n = 2, 3, 4, \dots, 10$ принимает значения 0, 6, 18,…, 216.

В силу того, что нормированные веса частных критериев характеризуют долю вклада в обобщённый критерий и формируются обычно методами экспертного оценивания [8], то вследствие этого формулы (1) и (2) не могут быть применимы в качестве весов критериев, связанных с различными предметными областями решаемых многокритериальных задач.

Таким образом, предпочтительность одного критерия относительно другого, а также их количественные веса не зависят от векторных оценок объектов и определяются экспертами. В дальнейшем для оценки количественной важности критериев используется определение 1.

2 Алгоритм метода

В основе вычисления весов критериев метода косвенных предпочтений (МКП) лежит предварительная процедура упорядочения критериев, представленных в виде иерархического дерева. Процедура базируется на экспертном выявлении косвенной предпочтительности одного критерия относительно другого смежного критерия на каждом уровне иерархии при предположении о неизвестности количественных значений важности. Алгоритм рассматриваемого метода состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Построение иерархического дерева упорядоченных критериев по убыванию предпочтительности. На этом шаге эксперты ранжируют по убыванию важности критерии, входящие в вершины более высокого уровня иерархического дерева. При наличии нескольких экспертов, участвующих в ранжировании, находится результирующее ранжирование (медиана Кемени), метод формирования которого представлен в работе [17].

Для деревьев в основном применяются два способа перечисления: «по ветвям», когда индекс вершины указывает путь к этой вершине; «по уровням», когда по очереди рассматриваются все уровни сверху вниз, а вершины одного уровня нумеруются подряд слева направо. Способом перечисления «по ветвям» дерево задаётся в виде множества упорядоченных вершин [18]:

$$ID = \{\mathfrak{F}, \mathcal{D}\},$$

где $\mathfrak{F} = \{F_0, F_{j_1}, \dots, F_{j_1 \dots j_k} \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n_{\mathfrak{F}}}\}$ – множество вершин (критериев), в которых индекс $j_1 \dots j_k$ вершины $F_{j_1 \dots j_k}$ указывает путь к этой вершине от корневой вершины F_0 ($k = 0$); $\{0, 1, \dots, k, \dots, n_{\mathfrak{F}}\}$ – номера уровней в дереве;

$\mathcal{D} = \{(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}) \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n_{\mathfrak{F}}}\}$ – множество дуг, в которых множество вершин $\{F_{j_1 \dots j_k}\}$, инцидентно вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$;

F_0 – глобальный (обобщённый) критерий верхнего (нулевого) уровня иерархии;

F_{j_1} – групповые критерии 1-го уровня иерархии, являющиеся концевыми вершинами множества дуг $\{(F_0, F_{j_1}) \mid j_1 = \overline{1, n_0}\}$; n_0 – число дуг, инцидентных вершине F_0;

$F_{j_1 \dots j_k}$ – групповые критерии k-го уровня, являющиеся концевыми вершинами дуг $\{(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}) \mid j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}\}$; $n_{j_1 \dots j_{k-1}}$– число дуг, инцидентных вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$.

Концевые вершины $n_{\mathfrak{F}}$-го нижнего уровня условно обозначены строчными ми $f_{j_1 \dots j_n}$. Каждому $Э_s$ эксперту, где $s = \overline{1, n_Э}$, предъявляется множество подкритериев

$$F_\xi \equiv F_{j_1 \dots j_{k-1} \xi},$$

на k-м уровне иерархии упорядоченных по убыванию важности и входящих в вершину $F_{j_{k-1}} \equiv F_{j_1 \dots j_{k-1}}$:

$$F_1 \succ F_2 \succcurlyeq \dots \succ F_\xi \succcurlyeq \dots \succ F_{n_{j_{k-1}}}, \ \xi = \overline{1, n_{j_{k-1}}}, n_{j_{k-1}} \equiv n_{j_1 \dots j_{k-1}}, \tag{3}$$

где $\succcurlyeq$ – обозначение нестрогого предпочтения, которое означает для пары критериев строгого предпочтения (обозначение $\succ$) или отношение равнозначности (обозначение $\approx$).

$\{F_{j_1 \dots j_{k-1} 1}, \dots, F_{j_1 \dots j_{k-1} n_{j_1 \dots j_{k-1}}}\}$ – множество подкритериев $(k-1)$-го уровня, входящих в вершину $F_{j_1 \dots j_k}$ k-го уровня; $j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}$; $k = \overline{1, n_{\mathfrak{F}}}$. Подкритерии, входящие в вершины более высокого уровня, упорядочиваются по важности:

$$F_{j_1 \dots j_{k-1} 1} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq F_{j_1 \dots j_{k-1} n_{j_1 \dots j_{k-1}}} \ \forall \ j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{1, n_{\mathfrak{F}}}.$$

Шаг 2. Экспертное оценивание степеней превосходства смежных критериев на k-м уровне иерархического дерева в шкале отношений. Эксперту предъявляется множество подкритериев $F_\xi \equiv F_{j_1 \dots j_{k-1} \xi}$, на k-м уровне иерархии упорядоченных по убыванию важности и входящих в вершину $F_{j_{k-1}} \equiv F_{j_1 \dots j_{k-1}}$ (см. выражение (3)).

Результаты сравнения $w_{\xi, \xi+1} \approx \frac{wl_\xi}{wl_{\xi+1}}$ смежных пар подкритериев $\{F_\xi, F_{\xi+1}\}$ на k-м уровне иерархии, входящих в вершину $F_{j_{k-1}} \equiv F_{j_1 \dots j_{k-1}}$, локальные веса $wl_\xi = wl(F_\xi)$ которых заранее неизвестны, представляются в виде $(n_{j_{k-1}} - 1)$ наддиагональных элементов

$$(w^*_{12}, w^*_{23}, \dots, w^*_{\xi, \xi+1}, \dots, w^*_{n_{j_{k-1}}-1, n_{j_{k-1}}}) \tag{4}$$

квадратной матрицы попарного сравнения смежных подкритериев $\{F_\xi, F_{\xi+1}\}$ $W_{F_{j_{k-1}}}[w_{\xi, \xi+1}]$:

$$W_{F_{j_{k-1}}} = \begin{pmatrix} & & & \dots & \\ 1 & w_{1,2}^* & 0 & \dots & 0 \\ 1/w_{1,2}^* & 1 & w_{2,3}^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1/w_{n_{j_{k-1}}-1,n_{j_k}}^* & w_{n_{j_{k-1}}-1,n_{j_k}}^* \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

При этом количественная оценка $w_{\xi,\xi+1}$ означает, что эксперт считает критерий F_ξ важнее критерия $F_{\xi+1}$ ($F_\xi \succ F_{\xi+1}$) в $w_{\xi,\xi+1} \approx wl_\xi / wl_{\xi+1}$ раз, если $w_{\xi,\xi+1} > 1$, а при $w_{\xi,\xi+1} = 1$ критерии равноважны ($F_\xi \approx F_{\xi+1}$).

Исходя из свойства обратной симметрии, равенство $w_{\xi+1,\xi} = \frac{1}{w_{\xi,\xi+1}} < 1$, означает, что количественно критерий $F_{\xi+1}$ в $w_{\xi+1,\xi}$ раз менее важен критерия F_ξ.

При таком подходе достаточно всего лишь $(n_{j_{k-1}} - 1)$-го экспертного сравнения вместо $\frac{(n_{j_{k-1}})^2 - n_{j_{k-1}}}{2}$ при попарном сравнении как, например, в методе анализа иерархий (МАИ) Т. Саати [1].

Шаг 3. Формирование элементов столбцов матрицы коэффициентов важности критериев. По экспертным оценкам (4) предпочтительности смежных критериев, входящих в вершину критерия более высокого уровня иерархического дерева, формируются элементы столбцов матрицы $W_{F_{j_{k-1}}}$ (5):

$$w_\xi^\downarrow = \left(w_{1\xi}, w_{2\xi}, \dots, w_{\eta\xi}, \dots, w_{n_{j_{k-1}}\xi}\right) \;\; \forall\, \xi = \overline{1, n_{j_{k-1}}}. \quad (6)$$

Любой элемент произвольного столбца матрицы можно вычислить по экспертным оценкам относительно критерия, принимаемого за базовый, которому соответствует единичный элемент $w_{\xi\xi} = 1$ на главной диагонали матрицы.

Теорема 1. *Пусть даны экспертные оценки $w_{\xi,\xi+1}^*$, $\xi = \overline{1, n_{j_{k-1}} - 1}$, предпочтительности смежных подкритериев F_ξ на k-м уровне, входящие в вершину $F_{j_{k-1}}$ на $(k-1)$-м уровне иерархии. Тогда любой элемент столбца матрицы $W_{F_{j_{k-1}}}$ (4) может быть вычислен по элементам оценок, расположенным над главной диагональю матрицы по формуле:*

$$w_{\eta\xi} = \begin{cases} \prod_{t=\eta}^{\xi-1} w_{t,t+1}^*, \eta < v, \forall\, \eta = \overline{1, \xi - 1}, \\ 1, \qquad \forall\, \eta = \xi, \\ \left(\prod_{t=\xi}^{\eta-1} w_{t,t+1}^*\right)^{-1}, \eta > \xi, \forall\, \eta = \overline{\xi + 1, n_{j_{k-1}}}. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Действительно, для номеров строк $\eta < \xi$ можно записать:

$$w_{\eta\xi} = \prod_{t=\eta}^{\xi-1} w_{t,t+1}^* = \frac{wl_\eta}{wl_{\eta+1}} \times \frac{wl_{\eta+1}}{wl_{\eta+2}} \times \dots \times \frac{wl_{\xi-2}}{wl_{\xi-1}} \times \frac{wl_{\xi-1}}{wl_\xi} = \frac{wl_\eta}{wl_\xi},$$

аналогично для номеров строк $\eta > \xi$ можно записать:

$$w_{\eta\xi} = \left(\prod_{t=\xi}^{\eta-1} w_{t,t+1}^*\right)^{-1} = \left(\frac{wl_\xi}{wl_{\xi+1}} \times \frac{wl_{\xi+1}}{wl_{\xi+2}} \times \dots \times \frac{wl_{\eta-2}}{wl_{\eta-1}} \times \frac{wl_{\eta-1}}{wl_\eta}\right)^{-1} = \left(\frac{wl_\xi}{wl_\eta}\right)^{-1} = \frac{wl_\eta}{wl_\xi},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Пусть для четырёх упорядоченных по важности $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ f_4$ критериев известны количественные веса $wl(f_1) = 4$, $wl(f_2) = 3$, $wl(f_3) = 2$, $wl(f_4) = 1$.

Их нормированные веса имеют значения 0,4; 0,3; 0,2 и 0,1. Пусть локальные веса заранее неизвестны, но эксперт результаты сравнения смежных пар представил в виде:

$$w_{12} \approx \frac{4}{3}; w_{23} \approx \frac{3}{2}; w_{34} \approx \frac{2}{1},$$

которые приняты за наддиагональные элементы матрицы. С учётом обратной симметрии матрицу можно представить в виде

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 4/3^* & 0 & 0 \\ 3/4^* & 1 & 3/2^* & 0 \\ 0 & 2/3^* & 1 & 2^* \\ 0 & 0 & 1/2^* & 1 \end{pmatrix}.$$

Остальные элементы столбцов $w_j^{\downarrow} = (w_{1j,}\ w_{2j}, w_{3j},, w_{4j})^T, j = \overline{1,4}$, матрицы вычисляются по формулам, в которые обязательно входят наддиагональные элементы:

$$w_1^{\downarrow}\colon\ w_{31} = w_{32}w_{21} = \frac{2^*}{3} \cdot \frac{3^*}{4} = \frac{1}{2};$$

$$w_{41} = w_{43}w_{31} = \frac{1^*}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$w_2^{\downarrow}\colon\ w_{42} = w_{43}w_{32} = \frac{1^*}{2} \cdot \frac{2^*}{3} = \frac{1}{3};$$

$$w_3^{\downarrow}\colon\ w_{31} = w_{23}w_{12} = \frac{3^*}{2} \cdot \frac{4^*}{3} = 2;$$

$$w_4^{\downarrow}\colon w_{14} = w_{12}^* w_{23}^* w_{34}^* = \frac{4^*}{3} \cdot \frac{3^*}{2} \cdot 2^* = 4;$$

$$w_{24} = w_{23}^* w_{34}^* = \frac{3^*}{2} \cdot 2^* = 3.$$

В результате получается матрица:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 4/3^* & 2 & 4 \\ 3/4^* & 1 & 3/2^* & 3 \\ 1/2 & 2/3^* & 1 & 2^* \\ 1/4 & 1/3 & 1/2^* & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Замечание 2. Можно убедиться, что ранг матрицы W (8) равен 1, и она является мультипликативной, например, для элемента w_{14} матрицы (8) справедливо $w_{14} = w_{13}w_{34} = w_{12}w_{24}$.

Матрица $W_{F_{j_{k-1}}}$ (4) с вычисленными элементами по формуле $w_{\eta\xi}$ (7) называется полной матрицей.

Шаг 4. Формирование локальных коэффициентов важности критериев. За локальные коэффициенты принимаются нормированные элементы любого столбца матрицы $W_{F_{j_{k-1}}}$, вычисленные по формуле (7). Можно доказать, что нормированные элементы полной матрицы совпадают между собой и равны нормированным локальным весам критериев.

Теорема 2 (о взаимосвязи между нормированными элементами полной матрицы и нормированными весами критериев). *Нормированные элементы столбцов* $w_\xi^{\downarrow}$ (6), $\xi = \overline{1, n_{j_{k-1}}}$, *вычисленные по наддиагональным элементам по формуле* $w_{\eta\xi}$ (6) *матрицы* $W_{F_{j_{k-1}}}$ (4), *совпадают между собой и равны нормированным весам критериев, т.е.*

$$\widetilde{w}_\xi^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \widetilde{w}_{1\xi} \\ \cdots \\ \widetilde{w}_{n_{j_{k-1}}\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{wl}_1 \\ \cdots \\ \widetilde{wl}_{n_{j_{k-1}}} \end{pmatrix} \forall\, \xi = \overline{1, n_{j_{k-1}}},$$

где $\widetilde{w}_{\eta\xi} = \frac{w_{\eta\xi}}{\sum_{\eta=1}^{n} w_{\eta\xi}}$ *– нормированный элемент ξ-го столбца* $w_\xi^{\downarrow}$*;*

$\widetilde{wl}_\eta = \frac{wl_\eta}{\sum_{\eta=1}^{n_{j_{k-1}}} wl_\eta}$ *– нормированный вес* F_η *локального критерия.*

Доказательство. Из формулы (6) следует, что для полной матрицы для любого столбца $w_\xi^\downarrow$ (5), $\xi = \overline{1, n_{j_{k-1}}}$ справедливо $w_{\eta\xi} = \frac{wl_\eta}{wl_\xi}, \eta = \overline{1, n_{j_{k-1}}}$. Откуда

$$\widetilde{w}_{\eta\xi} = \frac{wl_\eta / wl_\xi}{\sum_{\eta=1}^{n} wl_\eta / wl_\xi} = \frac{wl_\eta}{\sum_{\eta=1}^{n} wl_\eta} = \widetilde{wl}_\eta \ \forall \eta, \xi = \overline{1, n_{j_{k-1}}},$$

что и требовалось доказать.

Если в примере 1 пронормировать столбцы матрицы W (8), то они совпадут между собой и будут равны нормированным весам критериев:

$$W = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, за коэффициенты важности критериев можно взять нормированные элементы любого столбца, которые вычисляются по наддиагональным элементам матрицы попарных сравнений смежных критериев.

При решении прикладных задач проще использовать элементы последнего столбца матрицы, которые можно вычислить через произведения $w_{\xi,\xi+1}^*$, $\xi = \overline{1, n_{j_{k-1}} - 1}$ экспертных оценок по формуле:

$$w_{\eta, n_{j_{k-1}}} = \begin{cases} \prod_{t=\eta}^{n_{j_{k-1}}-1} w_{t,t+1}^*, \eta < n_{j_{k-1}}, \\ 1, \qquad \eta = n_{j_{k-1}}, \end{cases}$$

а затем нормировать и принять за коэффициенты важности критериев.

Из примера 1 видно, что по формуле $w_{\eta, n_{j_{k-1}}}$ легко вычисляются элементы столбца $w_4^\downarrow$.

Шаг 5. Формирование глобальных коэффициентов важности критериев. Глобальные коэффициенты формируются путём вычисления произведения локальных коэффициентов вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной концевой вершине.

Пусть веса $wl_{j_1 j_2 \dots j_k}$ нормированы, т.е. их сумма по всем подвершинам произвольной вершины $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$ равна единице:

$$\sum_{j_k=1}^{n_{j_1 \dots j_{k-1}}} wl\left(F_{j_1 j_2 \dots j_k}\right) = 1 \ \forall \ k = \overline{1, n}.$$

Произведение весов вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной концевой вершине $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$, будет представлять собой интегральный (глобальный) вес $wg(f_{j_1 j_2 \dots j_n})$ данной концевой вершины:

$$wg(f_{j_1 j_2 \dots j_n}) = wl(F_{j_1}) \cdot \dots \cdot wl(f_{j_1 j_2 \dots j_n}) = \prod_{k=1}^{n} wl\left(F_{j_1 j_2 \dots j_k}\right),$$

где $j_n = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{n-1}}}; \dots j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; \dots, j_1 = \overline{1, n_0}$.

Тогда постановку многокритериальной задачи оценки объектов с многоуровневой структурой можно представить в виде аддитивной свёртки:

$$r_\Sigma^{(l)} = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{n_{j_1 j_2 \dots j_n}} wg_{j_1 j_2 \dots j_n} r_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(l)}, \qquad (9)$$

где $r_{j_1 j_2 \dots\dots j_n}^{(l)} = f_{j_1 j_2 \dots j_n}(a_l)$ – оценка $a_l \in A$ объекта в концевой вершине $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$ дерева ID в результирующей однородной шкале.

Решение задачи можно представить в виде упорядочения объектов в соответствии с значениями агрегированных оценок:

$$a_{q_1} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{q_{n_A}} \Leftrightarrow r_\Sigma^{(q_1)} \geq \cdots \geq r_\Sigma^{(q_{n_A})}.$$

В качестве примера на рисунке 1 представлено трёхуровневое иерархическое дерево упорядоченных по важности критериев, где веса обозначены в виде:

$$wl_{j_1} = wl(F_{j_1}),\ j_1 = \overline{1,m};$$
$$wl_{j_1 j_2} = wl(f_{j_1 j_2}),\ j_2 = \overline{1,n_{J_1}}.$$

Замечание 3. Глобальные коэффициенты, вычисляемые на шаге 5 данного метода, аналогично вычисляются и в методе ПАТТЕРН [2] и в МАИ [1]. При этом глобальный вес концевого критерия в иерархическом дереве характеризует (относительную) долю, которую он вносит в глобальный критерий верхнего (нулевого) уровня иерархии.

Рисунок 1 – Трёхуровневое иерархическое дерево критериев оценки объектов

3 Анализ эффективности методов, базирующихся на матрицах парных сравнений

Для сравнения методов используются данные из работы [19], в которой оцениваются сравнительные расстояния между городами Каир, Токио, Чикаго, Сан-Франциско, Лондон, Монреаль. Матрица парных сравнений получена методом экспертных оценок [19]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ 1/8 & 1/9 & 1 & 1/6 & 1/5 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 6 & 1 & 1/3 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1/7 & 1/9 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упорядочив города в виде Токио, Каир, Лондон, Сан-Франциско, Чикаго, Монреаль по убыванию расстояния по методу данной работы, можно сравнить расстояния между смежными парами городов Токио-Каир, Каир-Лондон, Лондон-Сан-Франциско, Сан-Франциско-Чикаго, Чикаго-Монреаль, результаты которого можно представить наддиагональными элементами $\{1{,}2; 1{,}6; 1{,}5; 2{,}9; 1{,}2\}$ мультипликативной матрицы $W_{\text{МКП}}$ и вычисленными элементами правого столбца:

$$W_{\text{МКП}} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 & 0 & 0 & 0 & 10{,}02 \\ 0 & 1 & 1{,}6 & 0 & 0 & 8{,}35 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}5 & 0 & 5{,}22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2{,}9 & 3{,}48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

нормированные элементы которого принять за количественные веса расстояний и представить в виде вектора: $w_{\text{МКП}} = (0{,}342; 0{,}285; 0{,}178; 0{,}119; 0{,}041; 0{,}034)$.

Поскольку по нормированным элементам весов критериев восстанавливаются все элементы $w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ мультипликативной матрицы, то за критерий сравнения принимается матричный критерий близости восстановленной мультипликативной матрицы W к исходной матрице A в виде матричной l_1-норма [20]:

$$d(A, W) = \|A - W\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right|. \tag{10}$$

Мультипликативная матрица обладает особым свойством – любой элемент можно представить через произведение пары других

$$w_{ij} = w_{ik} w_{kj}, \forall i, j, k = \overline{1, n}, \tag{11}$$

где $w_{ji} = \frac{1}{w_{ij}}$; $w_{ii} = 1, i, j = \overline{1, n}$.

Можно показать взаимосвязь между нормированными элементами важности критериев и элементами восстановленной мультипликативной матрицы.

Теорема 3. *Между любыми элементами* w_{ij} *мультипликативной матрицы* $W = [w_{ij}]\ \forall\, i, j = \overline{1, n}$ *и любой парой компонент* $(w_i,\ w_j)$ вектора важности критериев $w = (w_1, \dots, w_j \dots, w_n)^T, j = \overline{1, n}$ *справедливо биективное отображение* $\frac{w_i}{w_j} \mapsto w_{ij}$, *ставящее каждому отношению* $\frac{w_i}{w_j}$ *в однозначное соответствие элемент* w_{ij} *матрицы W, и обратно* $w_{ij} \mapsto \frac{w_i}{w_j}$, *при этом справедливо равенство*:

$$w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \forall i, j = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Доказательство. Так как матрица $W = [w_{ij}]$ мультипликативная, то если для любой пары чисел $(w_i,\ w_j)$ из $\{w_1, \dots, w_n\}$, представленных в виде отношения $\frac{w_i}{w_j}, w_j > 0$, выполняется условие мультипликативности (11), то между любыми элементами матрицы $W = [w_{ij}]$, $w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, существует взаимно однозначное отображение между элементами w_{ij} и $\frac{w_i}{w_j}$. Действительно, если $w_{ik} = \frac{w_i}{w_k}$ и $w_{kj} = \frac{w_k}{w_j}$, то согласно (12): $w_{ik} w_{kj} = \frac{w_i}{w_k} \times \frac{w_k}{w_j} = \frac{w_i}{w_j} = w_{ij}$, т.е. для всех $i, j, k = \overline{1, n}$ выполняется условие мультипликативности (11), что и требовалось доказать.

Представленный МКП нахождения весов по парным смежным $(n - 1)$ сравнениям можно сравнить с МАИ [1], методом наименьших квадратов (МНК) [21] и методом аппроксимационной матрицы (МАМ) [22].

По МАИ решением служит нормированный собственной вектор матрицы A, соответствующий максимальному собственному значению. По МНК в качестве искомого вектора w принимается решение оптимизационной задачи [21]:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} w_j - w_i)^2 \longrightarrow \min$$

при ограничениях $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ и $w_i > 0$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Эти методы трудоёмки, и для построения матрицы A необходимо проведение $(n^2 - n)/2$ попарных сравнений. В МАИ для числа объектов не менее пяти процедура нахождения собственных значений матрицы степеней превосходства важностей критериев или предпочтений альтернатив осуществляется с применением численных методов нахождения корней полинома, реализованных в [23]. По МАМ в качестве искомого вектора w принимается решение оптимизационной задачи [22]:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{a}_{ij}-\tilde{w}_i)^2 \longrightarrow \min_{(\tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_n)}, \qquad (13)$$

где $\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$ – нормированные элементы матрицы суждений $A = [a_{ij}]$, $i,j = \overline{1,n}$;

$\tilde{w}_i = \tilde{w}_{i\xi}$ – нормированный элемент ξ-го столбца мультипликативной матрицы, совпадающий с любым элементом нормированного столбца (см. теорему 2).

Исходные данные для сравнения методов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Нормализованные относительные расстояния

Город	1				
	$w_{ИР}$	$w_{МАИ}$	$w_{МНК}$	$w_{МАМ}$	$w_{МКП}$
1	2	3	4	5	6
Токио	0,361	0,397	0,459	0,389	0,342
Каир	0,278	0,263	0,221	0,255	0,285
Лондон	0,177	0,164	0,141	0,167	0,178
Сан-Франциско	0,132	0,116	0,107	0,126	0,119
Чикаго	0,032	0,033	0,036	0,036	0,041
Монреаль	0,019	0,027	0,036	0,028	0,034

В столбцах 2 – 6 таблицы 1 представлены нормализованные относительные расстояния, где в столбце 2 – истинные нормализованные относительные расстояния, $w_{ИР}$; 3 – расстояния по МАИ, $w_{МАИ}$; 4 – расстояния по МНК, $w_{МНК}$; 5 – расстояния по МАМ, $w_{МАМ}$; 6 – расстояния по МКП, $w_{МКП}$. Данные в столбцах 2, 3 и 4 взяты из работы [19, с.188].

Результаты сравнений по критерию $d(A,W)$ (10) близости к исходной матрице парных сравнений представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты сравнений по критерию $d(A,W)$

Метод	ИР	МАИ	МНК	МАМ	МКП
$d(A,W)$	36,41	24,62	29,22	23,10	20,26

Эффективность методов можно оценить по критерию близости между векторами:

$$d(w_i,w_j) = \sum_{k=1}^{n}\left|w_i^{(k)} - w_j^{(k)}\right|.$$

Результаты сравнения представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты сравнений по критерию $d(w_i,w_j)$

Метод	МАИ	МНК	МАМ	МКП
$d(w_{ИР},w_j)$	0,089	0,237	0,080	0,064

Таким образом, методы, базирующиеся на матрице парных сравнений, можно ранжировать по убыванию эффективности: МКП $\succ$ МАМ $\succ$ МАИ $\succ$ МНК.

Замечание 4. Преимущество МКП относительно методов, базирующихся на матрице парных сравнений, в том, что этап построения иерархического дерева упорядоченных критериев по убыванию важности позволяет снизить число экспертных смежных пар сравнений критериев до $(n-1)$ по сравнению с числом при парном сравнении $(n^2-n)/2$.

4 Пример решения задачи многокритериального оценивания

Эффективность МКП можно рассмотреть на примере решения многокритериальной задачи сравнения боевых самолётов по тактико-техническим характеристикам (ТТХ), принимавших участие в индийском тендере MMRCA [24]. Исходные данные по девяти показателям в виде множества $F = \{f_1, ..., f_9\}$ и оценки $x_j^{(l)} = f_j(C_l)$ шести самолётов в виде множества $C = \{C_1, ..., C_6\}$ представлены в таблице 4, где приняты обозначения самолётов: C_1 – *Dassault Rafale*; C_2 – *Eurofighter Typhoon*; C_3 – *F-16IN Super Viper*; C_4 – *F/A-18E/F Super Hornet*; C_5 – *JAS 39 NG (IN)*; C_6 – МиГ-35. Эталонные самолёты обозначены: C_* – наихудший по показателям ТТХ и стоимости (эталон – худший вариант); C^* – наилучший по показателям ТТХ и стоимости (эталон – лучший вариант).

Таблица 4 – ТТХ самолётов, участвовавших в тендере

Показатели ТТХ	Оценки самолётов в исходных шкалах, $x_i^{(l)} = f_i(C_l)$						Эталоны	
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_*	C^*
f_1- боевая нагрузка, т	9,5	7,5	7,8	8,05	5,3	7,0	5,3	9,5
f_2- управляемый вектор тяги	нет	нет	нет	нет	нет	есть	нет	есть
f_3- скороподъёмность, м/с	305	315	254	228	255	330	228	330
f_4- максимальная взлётная масса, т	24,5	23,5	21,8	29,9	14,3	23,5	14,3	29,9
f_5- максимальное число Маха на высоте	1,80	2,25	2,00	1,80	2,00	2,25	1,80	2,25
f_6- практический потолок, км	15,24	19,81	18,00	15,00	15,24	17,50	15,00	19,81
f_7- стоимость, млн. $ (2011 г.)	124	120	50	55	48	45	124	45
f_8- тяговооружённость	1,03	1,18	1,10	0,93	1,18	1,10	0,93	1,18
f_9- масса топлива, т	4,70	5,00	3,37	6,78	3,36	4,80	3,36	6,78

В соответствии с шагом 1 алгоритма представленные в таблице 4 показатели используются как критерии. Пусть эксперты разбили критерии на три группы по предпочтительности: F_1 – целевая эффективность; F_2 – техническая эффективность и F_3 – технико-экономическая эффективность:

$$F_0: F_1 \succ F_2 \succ F_3.$$

В каждой группе подкритерии также упорядочены по убыванию важности:

$$F_1: f_{11} \succ f_{12} \succ f_{13}; F_2: f_{21} \succ f_{22} \succ f_{23}; F_3: f_{31} \succ f_{32} \approx f_{33}.$$

На рисунке 2 представлено трёхуровневое иерархическое дерево.

В соответствии с шагами 2 и 3 представлены матрицы попарных смежных сравнений и вычисленные правые столбцы:

$$F_0: W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_1: W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_2: W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8/7 & 8/6 \\ 0 & 1 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_3: W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9/8 & 9/8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

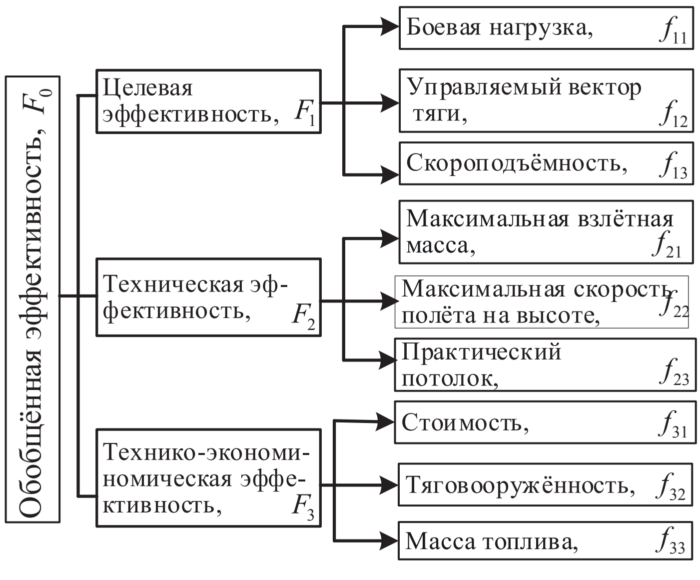


Рисунок 2 – Иерархическое дерево критериев оценки эффективности самолётов

В соответствии с шагом 4 сформированы локальные коэффициенты важности критериев:

$$F_0: wl_1 = 0{,}5;\ wl_2 = 0{,}3;\ wl_3 = 0{,}2;$$
$$F_1: wl_{11} = 0{,}4;\ wl_{12} = 0{,}3;\ wl_{13} = 0{,}3;$$
$$F_2: wl_{21} = 0{,}38;\ wl_{22} = 0{,}33;\ wl_{23} = 0{,}29.$$
$$F_3: wl_{31} = 0{,}36;\ wl_{32} = 0{,}32;\ wl_{33} = 0{,}32.$$

Глобальные коэффициенты важности критериев на шаге 5 формируются путём вычисления произведения локальных коэффициентов вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной концевой вершине.

$$F_1: wg_{11} = 0{,}5 \times 0{,}40 = 0{,}20;\ wg_{12} = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15;\ wg_{13} = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15;$$
$$F_2: wg_{21} = 0{,}3 \times 0{,}38 = 0{,}114;\ wg_{22} = 0{,}3 \times 0{,}33 = 0{,}099;\ wg_{23} = 0{,}3 \times 0{,}29 = 0{,}087.$$
$$F_3: wg_{31} = 0{,}2 \times 0{,}36 = 0{,}072;\ wg_{32} = 0{,}2 \times 0{,}32 = 0{,}064;\ wg_{33} = 0{,}2 \times 0{,}32 = 0{,}064.$$

Поскольку исходные данные представлены в различных шкалах измерения, то для применения аддитивного механизма агрегирования необходимо перейти к результирующей однородной шкале [19]. Правило перехода π_i от исходных оценок $x_i^{(l)}$ самолётов в количественной шкале по f_i критерию к $r_i^{(l)}$ оценкам в результирующей балльной шкале можно представить в виде множественно-точечного отображения:

$$\pi_i: [f_{i*} + (r-1)h_i, f_{i*} + rh_i] \to r,$$

где $h_i(m) = \frac{f_i^* - f_{i*}}{m}$ – шаг дискретизации шкалы f_i критерия, f_{i*} – минимальное значение, f_i^* – максимальное значение критерия;

$X_{i,r} = [x_{r-1}, x_r] = [f_{i*} + (r-1)h_i, f_{i*} + rh_i]$ – отрезки разбиения исходной шкалы;

$r \in R = \{1, 2, \ldots, b\}$ – градации результирующей шкалы;

b – число шкальных градаций в порядковой (балльной) шкале.

При этом каждой оценке, попадающей в класс $X_{i,r}$ разбиения ставится в соответствие оценка $r_i^{(l)}$ в результирующей шкале по правилу: $x_i^{(l)} \xrightarrow{\pi_i} r_i^{(l)}$. В случае попадания оценки объекта на смежные классы ей присваивается связанный ранг, равный среднему арифметическому значению смежных рангов [25]: $x_i^{(l)} \xrightarrow{\pi_i} \bar{r}_i^{(l)} = \frac{r+(r+1)}{2}$, если $x_i^{(l)} \in X_{i,r} \cap X_{i,r+1}$.

В качестве механизма агрегирования оценок самолётов, представленных в результирующей шкале, применён интегральный метод с учётом весов и без учёта в виде аддитивной свёртки оценок $a_q, q = 1 \div 6$, по концевым критериям с весами важности в виде [26]:

$$F(a_l; wg_1, \ldots, wg_m) = \sum_{j=1}^{m} wg(f_i) r_i^{(l)}, \qquad (14)$$

где $r_i^{(l)} = f_i(a_l)$ – оценка самолёта $a_l \in A = \{a_l | l = \overline{1, n_A}\}, n_A = 6$ в результирующей шкале по критерию $f_i, i = \overline{1, m}, m = 9$; $wg_i = wg(f_i)$ – глобальный вес f_i критерия.

В таблице 5 представлены ТТХ самолётов в 100-балльной результирующей шкале, где $\vec{r}_l = (r_1^{(l)}, r_2^{(l)}, \ldots, r_i^{(l)}, \ldots, r_9^{(l)})$ – профиль C_l самолёта, $l = 1 \div 9.$, а также результат агрегирования без учёта весов критериев (в последней строке таблицы).

Ранжирование самолётов по обобщённым оценкам без учёта весов критериев можно представить в виде:

$$\{\text{МиГ} - 35\} \succ \begin{Bmatrix}\text{Eurofighter} \\ \text{Typhoon}\end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix}\text{F} - 16\ \text{IN} \\ \text{Super Viper}\end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix}\text{F/A 18E/F} - \\ \text{Super Hornet}\end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix}\text{Dassault} \\ \text{Rafale}\end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix}\text{JAS 39} \\ \text{NG (IN)}\end{Bmatrix}.$$

Результаты агрегирования с учётом глобальных весов по формуле (14) представлены в таблице 6, а также на рисунке 3.

Таблица 5 - Оценки самолётов в однородной 100-балльной шкале без учёта весов критериев

Показатели	Оценки самолётов в однородной 100-балльной шкале, $r_i^{(l)} = \pi_i(x_i^{(l)})$						Эталоны	
	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	$\vec{r}_3$	$\vec{r}_4$	$\vec{r}_5$	$\vec{r}_6$	$\vec{r}_*$	$\vec{r}^*$
$f_1 \equiv f_{11}$	100	53	60	66	1	41	1	100
$f_2 \equiv f_{12}$	1	1	1	1	1	100	1	100
$f_3 \equiv f_{13}$	76	86	26	1	27	100	1	100
$f_4 \equiv f_{21}$	66	59	49	100	1	59	1	100
$f_5 \equiv f_{22}$	1	100	45	1	45	100	1	100
$f_6 \equiv f_{23}$	5	100	63	1	5	52	1	100
$f_7 \equiv f_{31}$	1	6	94	88	97	100	1	100
$f_8 \equiv f_{32}$	40	100	68,5	1	100	68,5	1	100
$f_9 \equiv f_{33}$	40	48	1,0	100	1	43	1	100
$r_\Sigma^{(l)} = \sum_{i=1}^{9} r_i^{(l)}$	330,0	553,0	407,5	359,0	278,0	663,5	9	900

Таблица 6 - Показатели самолётов в результирующей шкале с учётом весов критериев

Показатели	Глобальные веса критриев	Оценки самолётов в однородной 100-балльной шкале с учётом весов						Эталоны	
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_*	C^*
$f_1 \equiv f_{11}$	0,200	20,00	10,60	12,00	13,20	0,20	8,20	0,20	20,00
$f_2 \equiv f_{12}$	0,150	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	15,00	0,15	15,00
$f_3 \equiv f_{13}$	0,150	11,40	12,90	3,90	0,15	4,05	15,00	0,15	15,00
$f_4 \equiv f_{21}$	0,114	7,52	6,73	5,59	11,40	0,11	6,73	0,11	11,40
$f_5 \equiv f_{22}$	0,099	0,10	9,90	4,46	0,10	4,46	9,90	0,10	9,90
$f_6 \equiv f_{23}$	0,087	0,44	8,70	5,48	0,09	0,44	4,52	0,09	8,70
$f_7 \equiv f_{31}$	0,072	0,07	0,43	6,77	6,34	6,98	7,20	0,07	7,20
$f_8 \equiv f_{32}$	0,064	2,56	6,40	4,38	0,06	6,40	4,38	0,06	6,40
$f_9 \equiv f_{33}$	0,064	2,56	3,07	0,06	6,40	0,06	2,75	0,06	6,40
$\sum_{i=1}^{9} wg_i r_i^{(l)}$		44,80	58,88	42,79	37,89	22,85	73,69	1,00	100,00

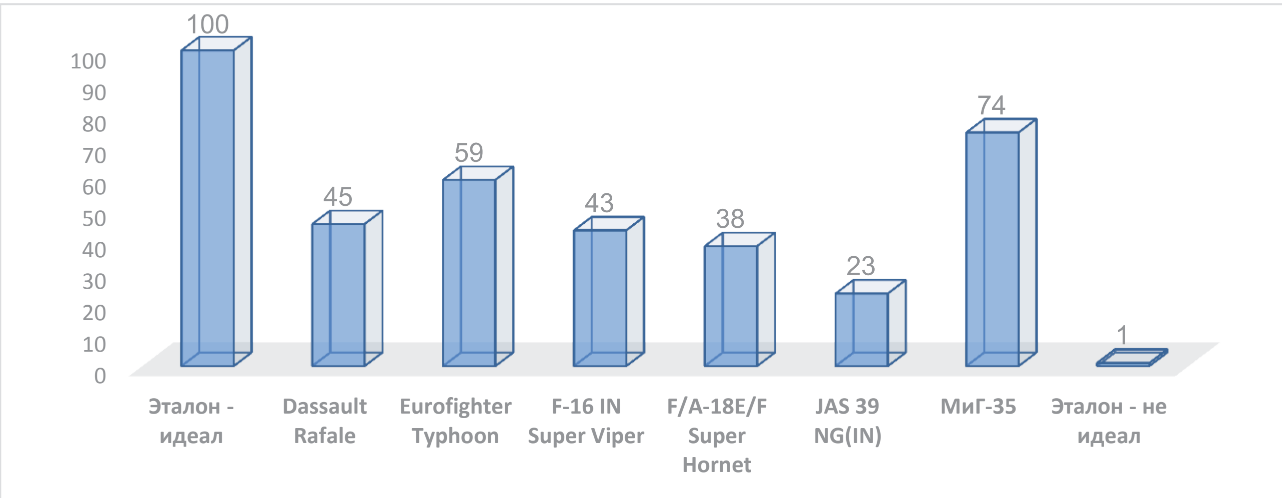


Рисунок 3 – Результат оценивания самолётов в 100-балльной шкале с учётом весов критериев

В этом случае ранжирование самолётов по обобщённым оценкам с учётом весов критериев можно представить в виде:

$$\{\text{МиГ} - 35\} \succ \begin{Bmatrix} \text{Eurofighter} \\ \text{Typhoon} \end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix} \text{Dassault} \\ \text{Rafale} \end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix} \text{F} - 16\ \text{IN} \\ \text{Super Viper} \end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix} \text{F/A 18E/F} - \\ \text{Super Hornet} \end{Bmatrix} \succ \begin{Bmatrix} \text{JAS 39} \\ \text{NG (IN)} \end{Bmatrix}.$$

На первом месте оказался самолёт МиГ-35, так как по трём показателям у него максимальные баллы. Кроме того, преимущество самолёта связано с наличием управляемого вектора тяги, который отсутствует у других самолётов.

По результатам агрегирования рейтинг боевых самолётов по эффективности представлен в таблице 7. Таким образом, самолёт МиГ-35 оказался лучшим по ТТХ и по стоимости.

Таблица 7 - Рейтинг самолётов по эффективности

№	Самолёт	Балльная оценка		Место в рейтинге	
		Без учёта весов	С учётом весов	Без учёта весов	С учётом весов
1	Dassault Rafale	37	45	5	3
2	Eurofighter Typhoon	60	58	2	2
3	F-16 IN Super Viper	45	43	3	4
4	F/A 18E/F − Super Hornet	40	38	4	5
5	JAS 39 NG(IN)	31	23	6	6
6	МиГ-35	63	59	1	1

Заключение

Основное преимущество предложенного МКП - в его простоте относительно МНК и МАИ, в отсутствии выполнения всех попарных сравнений, число которых нелинейно зависит от исходного числа объектов и равно $(n^2\text{-}n)/2$. Снижение числа сравнений смежных пар критериев до значения (n-1) достигнуто за счёт предварительного упорядочения критериев по важности (предпочтительности) и особых свойств матрицы с наддиагональными экспертными оценками критериев, измеренных в шкале отношений.

Предложенный метод формирования весов критериев для многокритериальных задачах с многоуровневой структурой может быть использован для решения задач оценивания, ранжирования и построения рейтингов.

Список источников

[1] ***Саати Т.*** Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. М.: ЛКИ, 2008. 360 с.

[2] ***Лопухин М.М.*** «ПАТТЕРН» – метод планирования и прогнозирования научных работ. М.: Советское радио, 1971. 160 с.

[3] ***Keeney R.L., Raiffa H.*** Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs. New York: Wiley, 1976. 569 p.

[4] ***Belton V., Stewart T.J.*** Multiple criteria decision analysis. An integrated approach. Boston: Cluwer, 2003. 374 p.

[5] ***Бормотов А.Н.*** Обоснование метода формирования весовых коэффициентов критерия практической оптимальности по результатам математического моделирования композитов // Технические науки. 2016. № 8. С.14–18.

[6] ***Полищук Л.И.*** Об обобщённых критериях с коэффициентами важности в задачах векторной оптимизации // Автомат. и телемех. 1982. № 2. С.55–60.

[7] ***Зотьев Д.Б.*** К проблеме определения весовых коэффициентов на основании экспертных оценок // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2011. Т.77. № 1. С.75–78.

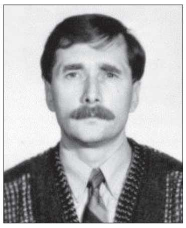
[8] ***Анохин А.М. Глотов В. А., Павельев В. В., Черкашин А.М.*** Методы определения коэффициентов важности критериев // Автомат. и телемех. 1997. №. 8. С.3–35.

[9] ***Дмитриев М.Г., Ломазов В.А.*** Оценка чувствительности линейной свертки частных критериев при экспертном определении весовых коэффициентов // Искусственный интелект и принятие решений. 2014. № 1. С.52–56.

[10] ***Корнеенко В.П.*** Метод косвенных предпочтений // Обозрение прикладной и промышленной математике. 2008. Т.15. №5. С. 890-891.

[11] ***Pfanzsagl J.*** Theory of measurement. Berlin, Heidelberg: Spriger-Verlag, 1971. 235 p.
[12] ***Подиновский В.В.*** Количественная важность критериев // Автомат. и телемех. 2000. № 5. С.110–123.
[13] ***Подиновский В.В.*** Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Наука, 2019. 103 с.
[14] ***Ремесленик Е.С.*** Применение последовательностей Фишберна в моделях с количественными факторами // Теория и практика экономики и предпринимательства / Труды XVI Всероссийской с международным участием научно-практической конференция "Теория и практика экономики и предпринимательства" (Симферополь–Гурзуф, 2019). Симферополь: ИП Зуева Т.В., 2019. С. 210–212.
[15] ***Fishburn P. C.*** Utility Theory for Decision Making. New York: Wiley, 1970. 234 p.
[16] ***Пиявский С.А.*** Формулы для вычисления универсальных коэффициентов при принятии многокритериальных решений // Онтология проектирования. 2019. Т. 9. № 2(32). С.282-298. DOI: 10.18287/2223-9537-2019-9-2-282-298.
[17] ***Корнеенко В.П.*** Оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения // Управление большими системами. 2019. Выпуск 82. С.44–60.
[18] ***Корнеенко В.П.*** Методы многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности. М.: МАКС Пресс, 2018. 292 с.
[19] ***Юшманов С.В.*** Метод нахождения весов, не требующий полной матрицы попарных сравнений // Автомат. и телемех. 1990. № 2. С. 186-189.
[20] ***Horn R., Johnson Ch.*** Matrix analysis. New York: Cambridge University, 1990. 561 p.
[21] ***Chu A., Kalaba RE., Springarn K.*** A Comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets. Journal of Optimization Theory and Applications. 1979. Vol. 27. P.531–538.
[22] ***Корнеенко В.П.*** Метод аппроксимационной матрицы формирования весов объектов в многокритериальных задачах выбора // Вестник кибернетики. 2021. № 1. С. 51–62.
[23] Expert Choice. URL: https://www.expertchoice.com/2021 (дата обращения: 25.04.2023).
[24] Сравнительные ТТХ самолётов, принимавших участие в индийском тендере MMRCA https://ru.wikipedia.org/wiki/Шаблон:Сравнительные_ТТХ_самолётов_принимавших_участие_в_индийском_тендере_MMRCA.
[25] ***Kendall M.G.*** Rank correlation methods. New York: Oxford University, 1990. 260 p.
[26] ***Корнеенко В.П.*** Метод локального агрегирования данных объектов с многоуровневой структурой в порядковых шкалах // Труды 14-й Международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем" (MLSD-2021). М.: ИПУ РАН, 2021. С.485-493. https://mlsd2021.ipu.ru/proceedings/485-493.pdf.

Сведения об авторе



Корнеенко Виктор Павлович, 1953 г. рождения. Окончил факультет радиоэлектроники Ленинградской военной инженерной академии им. А.Ф. Можайского в 1975 году. В 1986 году окончил факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Старший научный сотрудник Института проблем управления им. В.А Трапезникова РАН, доцент кафедры математических методов и информационных технологий Высшей школы промышленной политики и предпринимательства РУДН им. Патриса Лумумбы. К.т.н., доцент. В списке научных трудов более 100 работ в области комбинаторной оптимизации, математических методов в аналитической деятельности и многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой: Researcher ID (WoS): JGD-2807-2023; Author ID (Scopus): 57222359318; Author ID (РИНЦ): 1043413; ORCID: 0000-0002-3643-1609. *vkorn@ipu.ru*.

Поступила в редакцию 24.10.2023, после рецензирования 13.11.2023. Принята к публикации 17.11.2023.

Scientific article DOI: 10.18287/2223-9537-2023-13-4-580-596

Method of indirect preferences for forming criterion weights with a multi-level structure

© 2023, V.P. Korneenko

RUDN University, Moscow, Russia

V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract

The method of forming criterion weights in tasks of multi-criteria evaluation of objects with a multi-level structure of indicators presented in the form of a hierarchical tree, is shown. The weights values are calculated on the basis of indirect measurement of preferences of adjacent pairs of local weights of criteria included in the vertices of a higher level of the hierarchical tree, in the form of expert assessments in the quantitative scale of relations. The calculation of quantitative weights first comes down to lexicographic sorting by descending order of criteria importance at each level of the hierarchy that are included in the vertices of a higher level, as a result of which the number of expert comparisons of adjacent pairs in the scale of relations is reduced. The formation of local coefficients of the criteria importance is mathematically justified and is based on a matrix with special properties. A comparative analysis of the proposed method for forming quantitative weights with the method of hierarchy analysis, the least squares method and the approximation matrix method based on the matrix of paired comparisons, is given. An example is given of solving the problem of multi-criteria evaluation of combat aircraft that participated in the tender, according to the tactical and technical characteristics presented in various measurement scales.

Keywords: *importance of criteria, paired comparison matrix, hierarchical tree, measurement scale, ordering of criteria.*

For citation: *Korneenko VP.* Method of indirect preferences for forming criterion weights with a multi-level structure [In Russian]. *Ontology of designing*. 2023; 13(4): 580-596. DOI: 10.18287/2223-9537-2023-13-4-580-596.

Conflict of Interest: The author declares no conflict of interest.

List of figures and tables

References

[1] ***Saati T.*** Decision-making with dependencies and feedbacks: Analytical networks [In Russian]. M.: LKI, 2008. 360 p.
[2] ***Lopukhin MM.*** "PATTERN", a method of planning and forecasting scientific papers [In Russian]. M.: Soviet radio, 1971. 160 p.
[3] ***Keeney RL., Raiffa H***. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs. New York: Wiley, 1976. 569 p.
[4] ***Belton V., Stewart TJ.*** Multiple criteria decision analysis. An integrated approach. Boston: Cluwer, 2003. 374 p.
[5] ***Bormotov AN.*** Substantiation of the method of forming the weighting coefficients of the criterion of practical opti-

maleness based on the results of mathematical modeling of composites [In Russian]. Technical Sciences. 2016; 8: 14-18.
[6] ***Polishchuk LI.*** On generalized criteria with importance coefficients in vector optimization problems [In Russian]. Automaton. and telemech. 1982; 2: 55-60.
[7] ***Zotyev DB.*** On the problem of determining weight coefficients based on expert assessments [In Russian]. Factory laboratory. Diagnostics of materials. 2011; 77(1): 75-78.
[8] ***Anokhin AM. Glotov VA., Paveliev VV., Cherkashin AM.*** Methods for determining the coefficients of the importance of criteria [In Russian]. Automaton and telemech. 1997; 8: 3-35.
[9] ***Dmitriev MG., Lomazov VA.*** Evaluation of the sensitivity of linear convolution of particular criteria in the expert determination of weighting coefficients [In Russian]. Artificial intelligence and decision-making. 2014; 1: 52-56.
[10] ***Korneenko VP.*** Method of indirect preferences [In Russian]. Review of applied and industrial mathematics. 2008; 15(5): 890-891.
[11] ***Pfanzsagl J.*** Theory of measurement. Berlin, Heidelberg: Spriger-Verlag, 1971. 235 p.
[12] ***Podinovsky VV.*** Quantitative importance of criteria [In Russian]. AiT. 2000; 5: 110-123.
[13] ***Podinovsky VV.*** Ideas and methods of the theory of the importance of criteria in multi-criteria decision-making tasks [In Russian]. Moscow: Nauka, 2019. 103 p.
[14] ***Remesnik E.S.***Application of Fishburne sequences in models with quantitative factors // Theory and Practice of Economics and Entrepreneurship / Proceedings of the XVI All-Russian Scientific and Practical conference with International participation "Theory and Practice of Economics and Entrepreneurship" (Simferopol–Gurzuf, 2019). Simferopol: IP Zueva T.V., 2019. P.210-212.
[15] ***Fishburn PC.*** Utility Theory for Decision Making. New York: Wiley, 1970. 234 p.
[16] ***Piyavsky SA.*** Forms for calculation of universal coefficients when adopting multiple critical decisions [In Russian]. Ontology of designing. 2019; 9(2): 282-298. DOI: 10.18287/2223-9537-2019-9-2-282-298.
[17] ***Korneenko VP.*** Optimization method for selecting the resulting ranking of objects presented in the rank scale of measurement [In Russian]. Management of large systems. 2019; 82: 44-60.
[18] ***Korneenko VP.*** Methods of multi-criteria evaluation of objects with a multi-level structure of performance indicators [In Russian]. Moscow: MAKS Press, 2018. 292 p.
[19] ***Yushmanov SV.*** A method for finding weights that does not require a complete matrix of pairwise comparisons [In Russian]. AiT. 1990; 2: 186-189.
[20] ***Horn R., Johnson Ch.*** Matrix analysis. New York: Cambridge University, 1990. 561 p.
[21] ***Chu A., Kalaba RE., Springarn K.*** A Comparison of two methods for determining the weights of Belonging to fuzzy sets. Journal of Optimization Theory and Applications. 1979; 27: 531–538.
[22] ***Korneenko VP.*** Method of approximation matrix of object weights formation in multi-criteria selection problems [In Russian]. Bulletin of Cybernetics. 2021; 1: 51-62.
[23] Expert Choice. https://www.expertchoice.com/2021 (accessed: 04/25/2023).
[24] Comparative technical characteristics of aircraft participating in the Indian MMRCA tender [In Russian]. https://ru.wikipedia.org/wiki/Шаблон:Сравнительные_ТТХ_самолётов_принимавших_участие_в_индийском_тендере_MMRCA.
[25] ***Kendall MG.*** Rank correlation methods. New York: Oxford University, 1990. 260 p.
[26] ***Korneenko VP.*** Method for local aggregation of data of objects with multi-level structure in sequential scales [In Russian]. Proceedings of the 14th International Conference "Management of Large-scale systems Development" (MLSD-2021). Moscow: IPU RAS, 2021. P.485-493. https://mlsd2021.ipu.ru/proceedings/485-493.pdf.

About the author

Viktor Pavlovich Korneenko (b. 1953) graduated from the Faculty of Radio Electronics of the Leningrad Military Engineering Academy named after A.F. Mozhaisky in 1975. In 1986 he graduated from the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University. Senior Researcher at the V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems of the Russian Academy of Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Methods and Information Technologies of the Higher School of Industrial Policy and Entrepreneurship of the RUDN named after Patrice Lumumba. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. The list of scientific papers includes more than 100 works in the field of combinatorial optimization, mathematical methods in analytical activity, and multi-criteria evaluation of objects with a multi-level structure: Researcher ID (WoS): JGD-2807-2023; Author ID (Scopus): 57222359318; Author ID (RSCI): 1043413; ORCID: 0000-0002-3643-1609. *vkorn@ipu.ru*.

Received on October 24, 2023, after review on November 13, 2023. Accepted for publication on November 17, 2023.