

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 338

А.Ю. Трусова, А.И. Ильина\*

## АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ ЭКСПЕРТНЫХ ДАННЫХ МЕТОДОМ ГЛАВНЫХ ФАКТОРОВ

В статье представлены результаты изучения рынка товаров и услуг в сфере автомобильной отрасли. Данная работа посвящена представлению и визуализации изучаемых экспертных данных средствами факторного анализа.

**Ключевые слова:** факторный анализ, многомерные методы корреляции, варимаксное вращение.

Экономический анализ маркетинговых данных предполагает использование и комплексное сочетание методов финансового, экономического, математического и маркетингового анализов. Особое место занимают многомерные методы в группе математических методов. Многомерные методы обеспечивают снижение размерности изучаемых многомерных данных, выделение главных компонент и латентных факторов. Среди многомерных методов особое место занимают методы факторного анализа. В этой связи научный и практический интерес представляет использование методов факторного анализа при изучении рынка автомобилей зарубежных компаний.

Факторный анализ – это совокупность методов на основе реально существующих связей признаков, позволяющих выявлять неявные обобщающие характеристики организационной структуры и механизма развития изучаемых явлений и процессов [4].

В факторном анализе латентный фактор обеспечивает с определенной степенью точности объединение коррелирующих между собой переменных, и, как следствие, происходит перераспределение дисперсии между компонентами. На выходе получается максимально простая и наглядная структура факторов. После объединения коррелированность компонент внутри каждого фактора между собой будет выше, чем их коррелированность с компонентами из других факторов. Поиск латентных факторов

теоретически возможен как по признаковым, так и по объектным данным.

Набор методов факторного анализа в настоящее время достаточно велик. Методы факторного анализа позволяют определять состояние и прогнозировать развитие социально-экономического явления. Данные факторного анализа дают основания для идентификации объекта, то есть решения задачи распознавания образа.

Алгоритм разных методов факторного анализа детально представлен в современной научной литературе [1]

Симметрическая матрица корреляций  $R$  имеет собственную систему координат в пространстве  $R^m$ , где  $m$  – число анализируемых признаков. Допуская преобразования координатной системы в систему пространства латентных факторов, записывается  $Z_{ij}$  в виде линейной комбинации новых координат:

$$Z_{ij} = a_{j1}f_{1i} + a_{j2}f_{2i} + \dots + a_{jn}f_{ni}, \quad (1)$$

или в матричной форме:

$$Z = AF. \quad (2)$$

Л.Л. Тэрстоуном установлены равенства, из которых следует, что пространство латентных факторов достаточно хорошо воспроизводит связи между изучаемыми показателями:

$$R = ACA', R = AA'. \quad (3)$$

По степени расхождения восстановленной матрицы корреляции  $R^+$  и исходной  $R$  судят о доста-

\* © Трусова А.Ю., Ильина А.И., 2016

Трусова Алла Юрьевна (a\_yu\_ssu@mail.ru), Ильина Алла Ивановна (iai.62@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

точности числа выделенных латентных факторов и адекватности аналитических выводов.

Согласно классической модели факторного анализа, уравнение для определения коэффициентов при общих факторах  $F_r$  записывается в виде

$$Z_j = a_{j1}F_1 + a_{j2}F_2 + a_{jm}F_m + a_jD_i. \quad (4)$$

Или в матричной форме:

$$Z_j = AF + a_jD_j, \quad (5)$$

где  $D_j$  – характерный фактор.

Решение уравнений при условии максимизации сумм:

$$\sum_{j=1}^m a_{j1}^2 = \lambda_1 \quad (6)$$

– первый максимум в части описанной дисперсии элементарных признаков ( $D(Z_{ij})$ );

$$\sum_{j=1}^m a_{j2}^2 = \lambda_2 \quad (7)$$

– второй максимум относительно оставшейся после  $\lambda_1$  дисперсии и так далее, сводится к определению собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы  $R$  из равенства

$$(R - \lambda E)U = 0. \quad (8)$$

Как известно из метода главных компонент, при известных значениях  $\lambda_j$  и  $U_j$  коэффициенты  $a_{jr}$  можно рассчитать по формуле

$$A = V \times \Lambda^{1/2}, \quad (9)$$

где  $V$  – матрица нормированных векторов  $U_j$ :

$$U_j : V_j = \frac{U_j}{|U_j|}. \quad (10)$$

С учетом этого для вычислений  $a_{jr}$  выводится общая формула

$$a_{jr} = \frac{U_{jr} \sqrt{\lambda_r}}{\sqrt{U_{1r}^2 + U_{2r}^2 + \dots + U_{mr}^2}}. \quad (11)$$

В работе изучены экспертные данные автомобильной продукции методом главных факторов. Экспертный анализ позволяет представить первичные данные в виде таблицы 1. Как видно из таблицы, популярными представляются марки Toyota, Ford, BMW, Chevrolet, Volkswagen, Nissan. Показатели, по которым они были ото-

браны – востребованность на вторичном рынке ( $x_1$ ), мощность двигателя ( $x_2$ ), безопасность ( $x_3$ ), комфорт ( $x_4$ ), престижность ( $x_5$ ), расход топлива ( $x_6$ ), экономичность ( $x_7$ ), надежность ( $x_8$ ) и практичность ( $x_9$ ). На пересечении строк и столбцов находятся соответствующие индексы удовлетворенности качеством продукции.

Исходные данные размерности 6x9 средствами факторного анализа сжаты до размерности 6x2. Рассчитаны собственные значения и собственные векторы редуцированных матриц корреляций. В анализе были оставлены первые четыре максимальных собственных значения.

В таблице 2 представлена матрица факторного отображения для двух первых латентных факторов, соответствующих собственным значениям  $\lambda$ , до и после варимаксного вращения. Для первого фактора  $\lambda = 6,8021$ , а для второго  $\lambda = 0,6212$ , для третьего  $\lambda = 0,47503$ , для четвертого  $\lambda = 0,27156$ .

Для улучшения визуализации применялось варимаксное вращение. При вращении были использованы вращения по часовой стрелке и против часовой стрелки на  $70^\circ$ .

На рис. 1 в пространстве латентных факторов  $F_1$  и  $F_2$  представлены данные экономические показатели.

В таблице 3 представлены координаты изучаемых объектов в пространстве латентных факторов.

В таблице 4 представлены параметры изучаемых автомобильных компаний в пространстве латентных факторов  $F_2$  с учетом вращения.

Проверка значимости матрицы парных корреляций осуществляется при помощи критерия Уилкса –  $\chi^2$ , его наблюдаемое значение оценивается по формуле

$$x_H^2 = -\left(n - \frac{1}{6}(2m + 5)\right) \ln|R|, \quad (12)$$

где  $R$  – матрица парных корреляций, а  $n, m$  – соответственно число наблюдаемых объектов и число элементарных признаков в анализе.

Таблица 1

**Экспертные данные**

Марки	Показатели								
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
Toyota	0,8	0,1	0,9	0,5	0,3	0,5	0,1	1,3	1,3
Ford	0,9	0,5	1,3	0,7	0,6	1,7	0,3	1,9	1,9
BMW	2,3	0,5	0,9	0,9	0,3	2,5	0,4	4,3	3,1
Chevrolet	1,9	0,5	1,5	1,2	0,8	3,3	0,3	6	4,1
Volkswagen	1,8	0,4	2	0,8	0,4	3,2	0,4	3,1	2,5
Nissan	2,9	1,2	2,3	2,9	0,8	8,1	0,5	4,8	6,3

Таблица 2

**Матрица факторного отображения**

Показатели	До вращения		После вращения	
	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>
x <sub>1</sub>	0,3412	<b>0,433</b>	-0,29	<b>0,469</b>
x <sub>2</sub>	<b>0,366</b>	-0,201	<b>0,314</b>	0,2755
x <sub>3</sub>	0,3012	<b>-0,49</b>	<b>0,563</b>	0,1156
x <sub>4</sub>	<b>0,363</b>	-0,209	<b>0,32</b>	0,2692
x <sub>5</sub>	0,2699	<b>-0,272</b>	<b>0,348</b>	0,1606
x <sub>6</sub>	<b>0,378</b>	-0,188	<b>0,306</b>	0,2911
x <sub>7</sub>	<b>0,321</b>	0,1382	-0,02	<b>0,349</b>
x <sub>8</sub>	0,2779	<b>0,552</b>	-0,423	<b>0,45</b>
x <sub>9</sub>	<b>0,362</b>	0,2379	-0,1	<b>0,422</b>

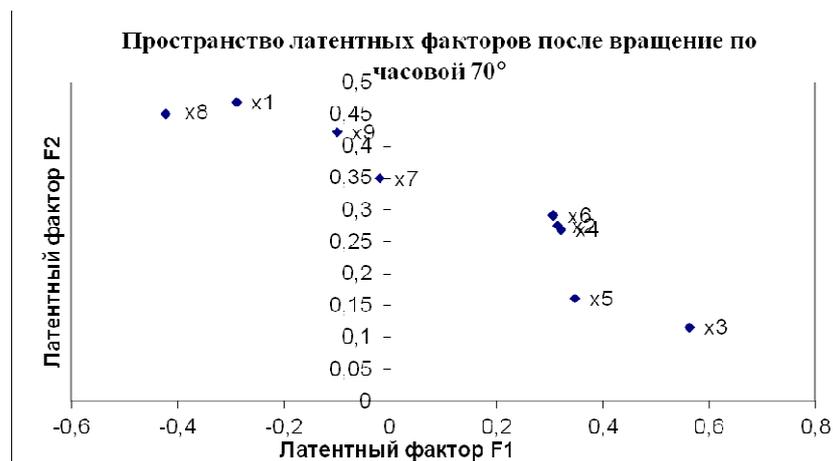


Рис. 1. Варимаксное вращение по часовой стрелке на 70°

Таблица 3

**Координаты объектов в пространстве латентных факторов (без вращения)**

Компании	Toyota	Ford	BMW	Chevrolet	Volkswagen	Nissan
F <sub>1</sub>	-3,37	-1,44	-0,33	0,85	-0,22	4,51
F <sub>2</sub>	-0,37	-0,88	1,46	0,59	-0,28	-0,53

Таблица 4

**Координаты объектов в пространстве латентных факторов (после вращения)**

Компании	Toyota	Ford	BMW	Chevrolet	Volkswagen	Nissan
F <sub>1</sub>	2,82	1,67	-0,69	-1,03	0,34	-3,11
F <sub>2</sub>	-1,89	-0,25	-1,34	0,09	0,07	3,31

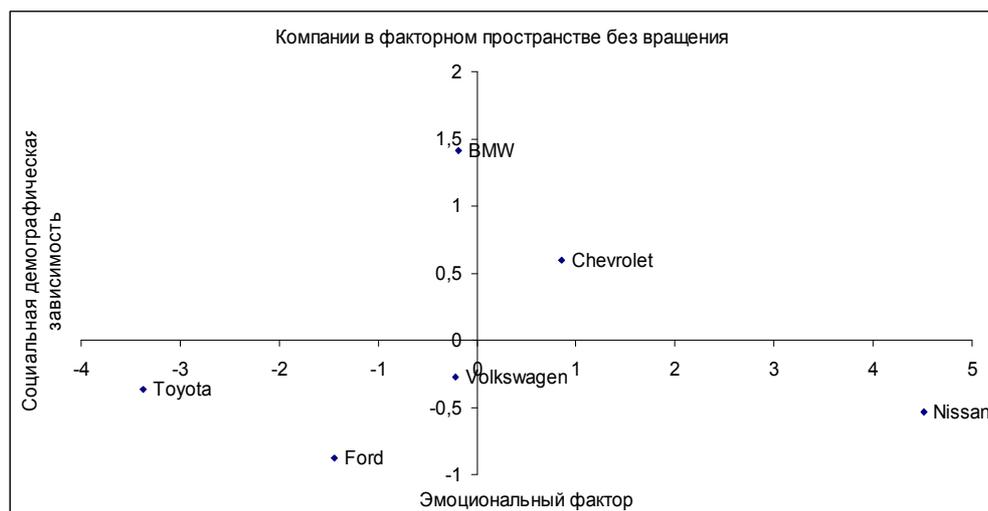


Рис. 2. Компании в факторном пространстве без вращения

Как видно, вращение усиливает отдельные характеристики изучаемых компаний. На рис. 2 представлены изучаемые объекты в пространстве латентных факторов.

Статистическая проверка гипотез подтверждает достаточность выделенных оставленных в анализе факторов, а также надежность статистических решений.

Латентные факторы описывают социально-экономические параметры, поэтому первый латентный фактор получил название «социальная удовлетворенность техническими характеристиками автомобилей», второй – «удовлетворенность техническим обслуживанием».

#### Библиографический список

1. Дубров А.М., Мхитарян В.С. Многомерные статистические методы. М.: Финансы и статистика, 1998. 338 с.
2. Наследов А.Д. SPSS 15: профессиональный статистический анализ данных. СПб.: Питер, 2008. 320 с.
3. Сошникова Л.А., Тамашевич П.А. Многомерный статистический анализ в экономике. М.: Юнити, 1999. 320 с.

4. Трусова А.Ю., Сизова, Орлова И.С. Факторный анализ как средство визуализации многомерных данных // Вычислительные системы и информационные технологии: межвуз. сб. ст. Самара. 2009, С. 60–65.

#### References

1. Dubrov A.M., Mkhitaryan V.S. *Mnogomernye statisticheskie metody* [Multidimensional statistical methods]. M.: Finansy i statistika, 1998, 338 p. [in Russian].
2. Nasledov A.D. *SPSS 15: professional'nyi statisticheskii analiz dannykh* [SPSS 15: professional statistical analysis of data]. Spb.: Piter, 2008, 320 p. [in Russian].
3. Soshnikova L.A., Tamashevich P.A. *Mnogomernyi statisticheskii analiz v ekonomike* [Multidimensional statistical analysis in economics]. M.: Iuniti, 1999, 320 p. [in Russian].
4. Trusova A.Yu., Sizova, Orlova I.S. *Faktornyi analiz kak sredstvo vizualizatsii mnogomernykh dannykh* [Factor analysis as a means of visualization of multivariable data]. In: *Mezhvuzovskii sbornik «Vychislitel'nye sistemy i informatsionnye tekhnologii»* [Interacademic collection «Computer systems and information technologies»], Samara, 2009, pp. 60–65 [in Russian].

*A.Yu. Trusova, A.I. Ilyina\**

#### ANALYSIS OF MULTIDIMENSIONAL EXPERT DATA BY THE METHOD OF MAIN FACTORS

The article presents the results of studying the market of goods and services in the automotive industry. This paper is devoted to the representation and visualization of the expert data under study by means of factor analysis.

**Key words:** factor analysis, multidimensional correlation methods, varimax rotation.

\* Trusova Alla Yurievna (a\_yu\_ssu@mail.ru), Ilyina Alla Ivanovna (iai.62@mail.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.