УДК 539

DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-55-74

Дата поступления статьи: 19/II/2019

Дата принятия статьи: 28/II/2019

В.С. Долгих, А.В. Пулькин, Е.А. Миронова, А.А. Пекшева, Л.В. Степанова

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ РОСТА ТРЕЩИНЫ. ЧАСТЬ II¹

© *Долгих Вадим Сергеевич* — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: dolgikhvs2015@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-1355-4286>

Пулькин Александр Владимирович — магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: pulkinavmag@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6728-1017>

Миронова Екатерина Александровна — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: mironovaea2017@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-7473-2245>

Пекшева Анастасия Алексеевна — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: peksheva2015@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0003-2748-9232>

Степанова Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: stepanova2015@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена оценке направления роста трещины в случае наклонной трещины в многофункциональном комплексе Simulia Abaqus, реализующем метод конечного элемента, и экспериментальному изучению направления роста трещины на примере пластины с центральной наклонной трещиной, изготовленной из различных материалов, таких как текстолит, алюминий и два типа стали. Результаты теоретического анализа, выполненного в первой части работы, сопоставлены с результатами численного моделирования в конечно-элементном пакете и экспериментальных наблюдений. Сравнение показало, что наиболее близки к экспериментальным значениям угла направления роста трещины оказались углы, вычисленные с помощью обобщенных критериев разрушения.

Ключевые слова: линейно-упругое тело, хрупкое разрушение, критерии роста трещины, критерий максимального тангенциального напряжения, критерий минимума плотности энергии деформаций, критерий максимальной окружной деформации, вычислительный эксперимент.

Цитирование. Долгих В.С., Пулькин А.В., Миронова Е.А., Пекшева А.А., Степанова Л.В. Теоретико-экспериментальное исследование направления роста трещины. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 2. С. 55–74. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-55-74>.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

¹ Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку работы (проект 19-01-00631).

UDC 539

DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-55-74

Submitted: 19/II/2019

Accepted: 28/II/2019

V.S. Dolgikh, A.V. Pulkin, E.A. Mironova, A.A. Peksheva, L.V. Stepanova

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CRACK PROPAGATION DIRECTION. PART II²

© Dolgikh Vadim Sergeevich — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: dolgichvs2015@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-1355-4286>

Pulkin Alexandr Vladimirovich — Master's Degree Student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: pulkinavmag@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6728-1017>

Mironova Ekaterina Alexandrovna — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: mironovaea2017@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-7473-2245>

Peksheva Anastasiya Alexseevna — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: pekshevaa2015@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0003-2748-9232>

Stepanova Larisa Valentinovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: stepanovaLv@samsu.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ABSTRACT

The paper is devoted to experimental study of the crack propagation direction angles under mixed mode loading in the plate with the central crack inclined at different angles. Fracture mechanics criteria are discussed and compared. In the present paper the crack propagation direction angles on the basis of three different fracture criteria are found. The maximum tangential stress criterion, the minimum strain energy density criterion and the deformation criterion are used and analysed. The generalized forms of these criteria have been used. It implies that the crack propagation direction angles are obtained with the Williams series expansion in which the higher order terms are kept. The calculations are performed in Waterloo Maple computer algebra software. The analysis of the crack propagation direction angles show that the influence of the higher order terms can't be ignored. The angles differ considerably when the higher order terms are taken into account.

Key words: isotropic linear elastic material, brittle fracture, criteria of crack growth, maximum tangential stress criterion, minimum strain energy density criterion, maximum tangential strain criterion.

Citation. Dolgikh V.S., Pulkin A.V., Mironova E.A., Peksheva A.A., Stepanova L.V. *Teoretiko-eksperimental'noe issledovanie napravleniya rosta treshchiny. Chast' 2* [Theoretical and experimental investigation of crack propagation direction. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 2, pp. 55–74. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-2-55-74> [in Russian].

Введение

Оценка направления роста трещины является предметом интенсивного изучения в настоящее время [1–5]. В данной статье будут приведены результаты численного и экспериментального исследований направления роста трещины в линейно-упругих средах. В следующем параграфе изложены результаты численного моделирования нагружения образцов с наклонными трещинами в многофункциональном комплексе Simulia Abaqus.

²The authors express gratitude to the Russian Foundation of Fundamental Research for the support of the work (project 19-01-00631).

1. Исследование разрушения хрупких образцов в программном комплексе Simulia Abaqus

Хорошо известно, что Simulia Abaqus является многофункциональным программным комплексом, позволяющим получать решения сложных различных линейных и нелинейных инженерных задач при помощи метода конечных элементов. С помощью данного пакета возможно реальное моделирование конструкций с заданием геометрии и свойств деталей ответственных элементов конструкций, построения сетки, необходимых граничных условий, условий контакта и нагружения, а также предоставления полученных результатов. Данный пакет конечно-элементных расчетов работает по модульному принципу. Он состоит из двух основных модулей – решателей Abaqus/Standard и Abaqus/Explicit, пре-постпроцессора Abaqus/CAE и большого количества дополнительных модулей, учитывающих особенности специфических проблем каждого моделирования. Каждый из применяемых в процессе моделирования модулей содержит некоторый набор действий, необходимых для построения конечно-элементной модели и дальнейших операций с ней.

В настоящей статье моделирование разрушения хрупких образцов с центральной трещиной будет проходить в пакете Simulia Abaqus для различных углов наклона сквозной трещины к оси образца, при реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния, а также для различных значений коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ или $\nu = 0.5$, что позволит получить угол распространения трещины для каждого типа образцов с трещинами и вида нагружения.

1.1. Моделирование образцов с центральной трещиной

Для определения угла направления распространения трещины в настоящей статье было проведено моделирование хрупкого разрушения образцов с центральной сквозной трещиной для различного вида смешанного нагружения. Вид смешанного нагружения определяется углом расположения сквозной трещины в образце. Угол наклона трещины в конечно-элементном пакете принимал значения, равные: 15° , 30° , 45° , 60° , 75° . Таким образом, при моделировании реализовывается смешанное нагружение. Расчеты проводились для различных значений коэффициента Пуассона, который принимал значение $\nu = 0.3$ или $\nu = 0.5$. В конечно-элементной модели расчет угла осуществляется на основе критерия максимального тангенциального напряжения при удержании только главного члена в асимптотическом разложении М. Уильямса (т. е. на основе значений коэффициентов интенсивности напряжения K_I и K_{II}). Типичное разбиение пластины с наклонной трещиной на конечные элементы представлено на рис. 1, где показаны сингулярные элементы, окружающие вершину наклонной под углом 45° трещины.

Рис. 1. Типичная сетка: разбиение пластины с центральной наклонной под углом 45° сквозной трещины

Результаты расчетов в конечно-элементном комплексе моделей образцов с трещиной, расположенной под углом 45° и 60° к горизонтальной оси образца, представлены на рис. 2, 3, на которых изображены распределения интенсивности касательных напряжений.

Распределения нормальных напряжений в пластине с наклонной под углом 45° трещиной представлены на рис. 4, 5.

Рис. 2. Распределение интенсивности напряжений в пластине с наклонной под углом 45° трещиной Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений в пластине с наклонной под углом 60° трещиной Рис. 4. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} , полученное в результате расчета конечно-элементной модели образца с трещиной, расположенной под углом 45°

1.2. Анализ результатов, полученных в пакете программного комплекса Simulia Abaqus

Результаты расчета углов направления распространения трещины, полученные при помощи программного комплекса Simulia Abaqus, сведены в таблицы, представленных на рис. 6–10. В таблицах

Рис. 5. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} , полученное в результате расчета конечно-элементной модели образца с трещиной, расположенной под углом 45°

приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений и полученные значения углов направления распространения трещины для образцов с расположением сквозной трещины под углами 15° , 30° , 45° , 60° , 75° . Исходя из соотношения, связывающего параметр смешанности нагружения и угол наклона трещины в образце, можно найти параметр смешанности нагружения, отвечающий рассматриваемому углу наклона трещины, и сравнить полученные значения углов с результатами, приведенными и представленными в табл. 1–9 первой части статьи.

H-OUTPUT-1_CRACK-1					
-2-					
K1:	3991.	4144.	4159.	4163.	4162.
K2:	992.4	1032.	1036.	1037.	1038.
MERR DIRECTION (DEG):	-25.74	-25.78	-25.78	-25.78	-25.81
J from Ks:	8.4575E-03	9.1166E-03	9.1852E-03	9.2027E-03	9.2011E-03
K1:	4159.	4164.	4166.	4167.	4169.
K2:	1035.	1035.	1037.	1038.	1039.
MERR DIRECTION (DEG):	-25.78	-25.74	-25.78	-25.78	-25.78
J from Ks:	9.1857E-03	9.2062E-03	9.2152E-03	9.2194E-03	9.2282E-03

Рис. 6. Скрипт результатов, полученных в Simulia Abaqus значений коэффициентов интенсивности напряжений и угла направления распространения трещины в образце с расположением сквозной трещины под углом 15°

На рис. 6 изображены результаты вычисления коэффициентов интенсивности и угла направления распространения трещины, полученные при помощи моделирования в программном комплексе Simulia Abaqus образцов с расположением сквозной трещины под углом 15° , что соответствует значению вида нагружения, представленного в табл. 1–9 первой части статьи, равного $M^e = 0.83$. Сравним результат получения угла направления распространения трещины с расчетными значениями, представленными в табл. 1–9 первой части статьи. В таблице, представленной на рис. 7, угол распространения трещины составляет $\approx -25.8^\circ$. Сравним это значение с расчетными значениями угла направления распространения трещины, полученными с применением критерия максимального тангенциального напряжения в пакете символьной математики Waterloo Maple табл. 1. При удержании одного главного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла составляет -30.81° (второй столбец табл. 1). Однако при удержании высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса значение угла направления распространения трещины значительно меняется и становится равным -18.55° . Затем при увеличении расстояния от вершины трещины значение угла меняется незначительно. Сравним получившееся значение угла направления распространения трещины $\approx -25.8^\circ$ со значениями угла критерия минимума плотности энергии упругой деформации и деформационного критерия.

При моделировании растяжения образца с наклонной трещиной в программном комплексе Simulia Abaqus использовалось только одно значение коэффициента Пуассона, равное $\nu = 0.3$. Поэтому получившиеся значения угла распространения трещины будем сравнивать только со значениями плоского напряженного и плоского деформированного состояния табл. 2, 4. В табл. 1 при соответствующем виде нагружения $M^e = 0.83$ значение угла направления распространения трещины при удержании одного главного слагаемого в асимптотическом разложении составляет -27.82° (второй столбец табл. 2). При удержании высших приближений значение угла составляет -27.43° . Разница между значениями, полу-

ченными при моделировании образца с наклонной трещиной и расчетным значением, представленным в табл. 2 составляет 3.87° . При увеличении расстояния от конца вершины трещины в полученных значениях угла направления распространения трещины происходят изменения, которые наглядно отражены в табл. 2.

В табл. 4 представлены результаты угла направления распространения трещины, полученные при реализации плоского деформированного состояния. При параметре смешанности нагружения, равном $M^e = 0.7$, и удержании только одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла составляет -38.02° , а при удержании высших приближений значение угла равно -30.70° . Разница между значениями, полученными при моделировании образца с наклонной трещиной и расчетным значением, представленным в табл. 4, составляет 4.9° . С увеличением расстояния от конца вершины трещины значение угла уменьшается по модулю и приближается к постоянному значению.

В табл. 6 и 8 представлены значения угла направления распространения трещины, полученные при помощи деформационного критерия разрушения (критерия максимальной окружной деформации) для плоского напряженного и плоского деформированного состояний и значения коэффициента Пуассона, равного $\nu = 0.3$. При виде нагружения $M^e = 0.7$ и удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла составляет -39.05° (второй столбец табл. 6), а при удержании высших приближений угол равен -24.96° (третий столбец табл. 6). При сравнении значений, полученных при моделировании образца с наклонной трещиной и расчетным методом, разница составляет менее 1° . При реализации плоского напряженного состояния и удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла направления роста трещины составляет -38.50° (второй столбец табл. 8), а при удержании высших приближений равно -24.44° , что также практически совпадает со значением угла, полученным в программном пакете Simulia Abaqus.

Из трех рассмотренных критериев разрушения значение угла направления распространения трещины, полученное при помощи моделирования в пакете Simulia Abaqus, наиболее точно совпадает со значением деформационного критерия разрушения.

H-OUTPUT-1_CRACK-1					
-3-					
	K1:	2921.	3032.	3043.	3046.
	K2:	1601.	1662.	1668.	1669.
MERR	DIRECTION (DEG):	-44.21	-44.21	-44.21	-44.21
	J from Ks:	5.5472E-03	5.9774E-03	6.0208E-03	6.0309E-03
					6.0341E-03
	K1:	3046.	3021.	3026.	3033.
	K2:	1671.	1656.	1660.	1666.
MERR	DIRECTION (DEG):	-44.21	-44.21	-44.21	-44.24
	J from Ks:	6.0346E-03	5.9353E-03	5.9555E-03	5.9884E-03
					6.0013E-03

Рис. 7. Полученные значения коэффициентов интенсивности напряжений и угла направления распространения трещины в образце с расположением сквозной трещины под углом 30°

На рис. 9 отображены значения коэффициентов интенсивности угла направления распространения трещины в образце с наклонной трещиной под углом 30° , полученные при моделировании в программном пакете Simulia Abaqus. Угол распространения трещины составляет $\approx -44.2^\circ$. Сравним это значение со значениями угла направления роста трещины, представленными в табл. 1–9. Угол расположения наклонной трещины 30° соответствует виду нагружения $M^e = 0.6$. В табл. 1 при удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла составляет -47.72° (второй столбец табл. 1), а при удержании высших приближений значение угла равно -33.46° (третий столбец табл. 1). Расчетное значение угла роста трещины критерия максимального тангенциального напряжения явно не соответствует значению угла, полученному при моделировании образца с трещиной. Перейдем к сравнению со значениями угла, полученными при помощи критерия минимума плотности энергии упругой деформации и деформационного критерия разрушения.

При реализации плоского напряженного состояния критерия минимума плотности энергии упругой деформации значение угла направления роста трещины при удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении составляет -42.83° (второй столбец табл. 2), а при удержании высших приближений -38.16° (третий столбец табл. 2). При реализации плоского деформированного состояния значение угла составило -45.41° (второй столбец табл. 4) и с удержанием высших приближений -39.49° (третий столбец табл. 4).

При использовании деформационного критерия разрушения и реализации плоского напряженного состояния при удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла роста трещины составляет -45.32° (второй столбец табл. 6), при удержании высших приближений угол равен -31.37° (третий столбец табл. 6). При реализации состояния плоской деформации и удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла распространения трещины равно -44.51° (второй столбец табл. 8), а при удержании высших приближений угол принимает значение -30.69° (третий столбец табл. 8).

Значения угла направления роста трещины, полученные расчетным методом при помощи критерия минимума плотности энергии упругой деформации и деформационного критерия разрушения, не соответствуют результатам, полученным при моделировании образца с наклонной трещиной под углом -30° , так как значение угла роста трещины, полученное в программном пакете Simulia Abaqus, равно $\approx -44.2^\circ$.

H-OUTPUT-1_CRACK-2 -9-						
	K1:	2797.	2904.	2914.	2917.	2918.
	K2:	2498.	2594.	2604.	2606.	2607.
MTS	DIRECTION (DEG):	-51.33	-51.34	-51.34	-51.34	-51.34
	J from Ks:	7.0330E-03	7.5801E-03	7.6361E-03	7.6494E-03	7.6537E-03
MTS						
	K1:	2918.	2918.	2918.	2918.	2918.
	K2:	2607.	2607.	2607.	2607.	2606.
	DIRECTION (DEG):	-51.34	-51.34	-51.34	-51.34	-51.34
	J from Ks:	7.6549E-03	7.6550E-03	7.6546E-03	7.6541E-03	7.6535E-03

Рис. 8. Результаты полученных значений коэффициентов интенсивности напряжений и угла направления распространения трещины в образце с расположением сквозной трещины под углом 45°

Рисунок 8 отображает результаты угла направления распространения трещины, полученные при помощи моделирования в программном пакете Simulia Abaqus образца с наклонной трещиной, расположенной под углом 45° , что соответствует параметру смешанности нагружения $M^e = 0.5$. Значение угла составило $\approx 51.3^\circ$. При использовании критерия максимального тангенциального напряжения и многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса с удержанием одного главного члена разложения значение угла распространения трещины для данного вида нагружения равно -53.13° (второй столбец табл. 1), с удержанием высших приближений значение угла становится равным -39.50° (третий столбец табл. 1). Сравним значения, полученные расчетным методом при использовании двух других критериев разрушения.

При использовании критерия минимума плотности энергии упругой деформации и реализации плоского напряженного состояния с удержанием одного главного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла направления роста трещины составило -49.09° (второй столбец табл. 2), при удержании высших приближений значение угла становится равным -46.03° (третий столбец табл. 2). При реализации состояния плоской деформации и удержании одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла направления распространения трещины вблизи ее вершины равно -51.92° (второй столбец табл. 4), с удержанием высших приближений значение угла становится равным -47.65° (третий столбец табл. 4). Применяя деформационный критерий разрушения для определения угла направления роста трещины с реализацией плоского напряженного состояния и удержания одного члена в асимптотическом разложении, получаем значение -49.96° (второй столбец табл. 6). С удержанием высших приближений значение угла меняется и становится равным -36.89° (третий столбец табл. 6). Если рассматривать состояние плоской деформации деформационного критерия, то значение угла роста трещины при удержании одного слагаемого равно -48.91° (второй столбец табл. 8), а с удержанием высших приближений в асимптотическом разложении угол равен -36.05° (третий столбец табл. 8).

Таким образом, расчетные значения, вычисленные с применением критериев разрушения, далеки по своим значениям от значений угла направления роста трещины, полученных при моделировании образца с наклонной трещиной, расположенной под углом 45° к главной оси.

H-OUTPUT-1_CRACK-1 -4-						
	K1:	1214.	1260.	1265.	1266.	1267.
	K2:	1945.	2019.	2027.	2028.	2029.
MERR	DIRECTION (DEG):	-63.40	-63.40	-63.40	-63.40	-63.40
	J from Ks:	2.6281E-03	2.8330E-03	2.8539E-03	2.8590E-03	2.8605E-03
MERR						
	K1:	1267.	1264.	1268.	1267.	1267.
	K2:	2029.	2024.	2029.	2028.	2029.
	DIRECTION (DEG):	-63.40	-63.40	-63.40	-63.40	-63.40
	J from Ks:	2.8611E-03	2.8479E-03	2.8627E-03	2.8585E-03	2.8610E-03

Рис. 9. Полученные значения коэффициентов интенсивности напряжений и угла направления распространения трещины в образце с расположением сквозной трещины под углом 60°

На рис. 9 представлены значения угла направления роста трещины, полученные моделированием в программном комплексе Simulia Abaqus образца с наклонной трещиной, расположенной под углом 60° к главной оси, что соответствует виду нагружения $M^e = 0.4$. Угол направления распространения трещины получился равным $\approx -63.4^\circ$. При использовании критерия максимального тангенциального напряжения с удержанием одного главного члена в асимптотическом разложении значение угла при данном параметре смешанности нагружения равно -57.48° (второй столбец табл. 1), а с удержанием высших приближений угол равен 44.83° (третий столбец табл. 1).

Критерий минимума плотности энергии упругой деформации при реализации плоского напряженного состояния и удержания одного слагаемого в асимптотическом разложении дает значение угла направ-

ления роста трещины, равное -55.14° (табл. 2), с удержанием высших приближений угол становится равным -53.41° (табл. 2). При реализации состояния плоской деформации значение угла при соответствующем параметре смешанности нагружения без удержания высших приближений равно $-58,12^\circ$ (табл. 4), с удержанием высших приближений угол равен -55.19° (табл. 4).

При применении деформационного критерия разрушения и плоского напряженного состояния без удержания высших приближений значение угла равно -53.61° (табл. 6), с удержанием высших приближений угол равен -41.71° (табл. 8). При реализации состояния плоской деформации при том же параметре смешанности нагружения с удержанием одного слагаемого в асимптотическом разложении значение угла равно -52.35° (табл. 8), с удержанием высших приближений значение угла равно -40.72° .

После сравнения значений углов направления распространения трещины, вычисленных в пакете символьной математики Wapenloo Maple, со значением угла $\approx -63.4^\circ$, полученным при помощи моделирования образца с наклонной трещиной в программном комплексе Simulia Abaqus, наиболее близким оказалось расчетное значение, вычисленное при помощи критерия минимума плотности энергии упругой деформации при реализации состояния плоской деформации с удержанием высших приближений в асимптотическом разложении, равное $-58,12^\circ$ (табл. 4).

H-OUTPUT-1_CRACK-1					
-2-					
	K1:	296.7	308.0	309.2	309.5
	K2:	1041.	1081.	1085.	1086.
MERR	DIRECTION (DEG):	-70.02	-70.02	-70.02	-70.02
	J from Ks:	5.8545E-04	6.3156E-04	6.3639E-04	6.3761E-04
	K1:	309.8	308.2	304.1	301.8
	K2:	1086.	1083.	1084.	1076.
MERR	DIRECTION (DEG):	-70.02	-70.06	-70.13	-70.16
	J from Ks:	6.3818E-04	6.3352E-04	6.3338E-04	6.2431E-04
					6.3299E-04

Рис. 10. Результаты полученных значений коэффициентов интенсивности напряжений и угла направления распространения трещины в образце с расположением сквозной трещины под углом 75°

Результаты значения угла направления роста трещины, полученные с помощью моделирования образца с наклонной трещиной под углом 75° , представлены на рис. 10. Значение угла получилось равным $\approx -71^\circ$. Значение угла расположения наклонной трещины в образце соответствует виду нагружения $M^e = 0.2$. Сравним получившиеся значение угла роста трещины в программном комплексе Simulia Abaqus с расчетными значениями, полученными с применением критерия максимального тангенциального напряжения (табл. 1). Угол распространения трещины при виде нагружения $M^e = 0.2$ и удержании одного главного слагаемого в асимптотическом разложении равен -64.47° (табл. 1). С удержанием высших приближений в асимптотическом разложении значение угла меняется и становится равным -54.11° (табл. 1). Это расчетное значение угла на $\approx 6^\circ$ меньше значения, полученного при моделировании образца с наклонной трещиной.

Расчетные значения угла направления роста трещины, полученные с применением критерия минимума плотности энергии упругой деформации, представлены в табл. 2. Значение угла при виде нагружения $M^e = 0.2$ и реализации плоского напряженного состояния с удержанием одного главного слагаемого в асимптотическом разложении равно -67.19° (табл. 2). С удержанием высших приближений значение угла равно -67.20° (табл. 2). При реализации состояния плоской деформации и удержании одного главного члена в асимптотическом разложении значение угла равно -70.14° (табл. 4), а с удержанием высших приближений угол равен -69.23° (табл. 4). Ближайшее расчетное значение, полученное с удержанием высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса, составляет -69.23° (табл. 4).

В табл. 6 и 7 представлены значения угла направления роста трещины, полученные с применением деформационного критерия разрушения. В табл. 6 сведены значения угла направления распространения трещины при реализации плоского напряженного состояния с удержанием одного слагаемого в асимптотическом разложении -59.33° (табл. 6) и с удержанием высших приближений -49.98° (табл. 6). В табл. 7 представлены результаты значений угла направления распространения трещины при реализации состояния плоской деформации с удержанием одного слагаемого в асимптотическом разложении -57.70° (табл. 7) и с удержанием высших приближений -48.70° (табл. 7). Делаем вывод о том, что ближайшее расчетное значение, полученное с удержанием высших приближений, составляет -49.98° (табл. 7), что на 21° меньше значения угла направления распространения трещины, полученного при помощи моделирования образца с наклонной трещиной в программном пакете Simulia Abaqus.

Таким образом, при сравнении расчетных значений угла направления распространения трещины при применении критерия максимального тангенциального напряжения, критерия минимума плотности энергии упругой деформации и деформационного критерия разрушения наиболее близким по значению угла направления роста трещины к модели образца с наклонной трещиной является критерий минимума плотности энергии упругой деформации.

Проведем оценку направления распространения трещины в образцах при помощи натурального эксперимента и получим значения углов направления распространения трещины, затем соотнесем их с вычисленными в пакете компьютерной алгебры и программного комплекса Simulia Abaqus данными и сделаем соответствующие выводы.

2. Экспериментальное исследование разрушения в хрупких образцах

В настоящей статье для решения проблемы о разрушении хрупких материалов был проведен не только численный расчет угла направления роста трещины в пакете символьной математики Waterloo Maple и моделирование в программном комплексе Simulia Abaqus, но и экспериментальное исследование реальных образцов с дефектом на растяжение и разрыв при достижении максимальной нагрузки. Как и в численных расчетах, при проведении эксперимента исследовалось разрушение образцов, содержащих наклонную трещину в условиях их осевого растяжения. В каждом из образцов были выполнены сквозные надрезы, имитирующие начальную трещину. Эти надрезы изготовлены под разными углами к главным осям образцов, чтобы таким образом смоделировать различные параметры смешанности нагружения при проведении испытаний на растяжение.

Задаче об определении угла направления роста трещины в хрупких образцах посвящено значительное количество экспериментальных исследований, и в настоящее время эта задача является актуальной для изучения разрушения различных видов материалов, подверженных нагрузкам при реализации различных параметров смешанного нагружения плоского напряженного состояния и плоского деформированного состояний [15; 16]. В рассматриваемом случае для проведения испытаний был выбран не один, а несколько видов разных материалов, из которых были изготовлены образцы в виде нескольких пластин с одинаковыми геометрическими характеристиками и сквозными надрезами, выполненными под разными углами к главным осям образца, которые имитировали начальную трещину, необходимую для проведения натурального эксперимента.

Учет коэффициентов интенсивности K_I и K_{II} и Т-напряжений позволил многим авторам описать распределение энергии S в образцах при различных видах параметра смешанности нагружения [17]. Этот подход использовался в настоящей статье при проведении экспериментальных исследований при одноосном растяжении образцов, изготовленных из разных материалов, содержащих начальную трещину [18; 19].

2.1. Типы образцов: конфигурация и материалы

Образцы, содержащие начальную трещину, изготавливались из следующих материалов: текстолит, сплав Д16Т, сталь 30ХГСА, сталь 30ХГСА в закаленном состоянии. Образцы представляют собой прямоугольные пластины с размерами $3 \times 30 \times 100$ мм с центральной сквозной прорезью длиной 10 мм, имитирующей начальную трещину. Примеры образцов, сделанных из материала — текстолит до разрушения, представлены на рис. 11, 12.

Сквозная трещина в образцах изготавливалась ортогонально большой и малой граням, имеющим размеры 30×100 мм, и ориентировалась под углами 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , а также 0° к малой оси в образцах из материала — текстолит. В образцах из сплава Д16Т и стали 30ХГСА щель, имитирующая сквозную трещину, была выполнена под углом 45° . Создание сквозной трещины в образцах из сплава Д16Т и стали 30ХГСА происходило в два этапа. Сначала в образцах сверлилось сквозное отверстие диаметром ≈ 1 мм, затем на станке электро-эрозионной обработки «Opticut» через просверленное сквозное отверстие проходила нихромовая проволока толщиной 0.3 мм, и происходил прожиг сквозной щели материала длиной, равной $1/3$ ширины образца, а именно 10 мм. В образцах из текстолита трещину создавали на фрезерном станке с применением дисковой фрезы толщиной ≈ 1 мм, затем следовала слесарная припиловка проделанной щели до требуемых размеров.

Для изготовления образцов из текстолита использовался листовой материал толщиной 3 мм. Для изготовления образцов из сплава Д16Т и стали 30ХГСА использовался листовой прокат толщиной 3 мм с последующей термообработкой и шлифовкой двух взаимно параллельных плоскостей до ≈ 10 класса чистоты. Фотографии образцов до нагружения и разрыва представлены на рис. 11–13.

Создание сквозной щели, имитирующей начальную трещину, для образцов из сплава Д16Т и стали более трудоемко, по сравнению с образцами из текстолита. Для изготовления образцов из сплава и стали требуется значительно большее количество технологических операций, так как необходимо подготовить образцы к испытаниям с особой точностью, потому как любые дефекты, расположенные на кромках

Рис. 11. Образцы с трещиной под углом 0° , выполненные из материала – текстолит

Рис. 12. Образцы с трещинами под углами 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , выполненные из материала – текстолит

Рис. 13. Образцы с трещиной под углом 45° , выполненные из сплава Д16Т (слева), стали 30ХГСА (посередине), стали 30ХГСА в закаленном состоянии (справа)

по периметру образцов, могут повлечь за собой неправильно полученные данные эксперимента, а следовательно, неверное сравнение с полученными расчетным методом результатами. Требуется уделять особое внимание механической обработке образцов. Конечно, это касается и образцов, изготавливаемых из текстолита, но при их выполнении требуется меньшее количество технологических операций, так

как эти образцы не подвергаются термической обработке и шлифовальным операциям для получения нужного класса чистоты. Образцы из текстолита изготавливаются в основном на слесарном участке, за исключением фрезеровки дисковой фрезой необходимой щели, имитирующей сквозную трещину в образце.

Таким образом, после проведения испытаний на растяжение образцов из текстолита, сплава Д16Т и стали со сквозной трещиной под углом 45° к оси образца происходило сравнение полученных результатов. Так как изменения при разрушении образцов были незначительными, было решено создание трещин под углами 15° , 30° , 45° , 60° , 75° для дальнейших испытаний на растяжение и разрыв только в образцах, изготовленных из текстолита.

2.2. Экспериментальное определение угла направления распространения трещины

В настоящей статье был проведен натурный эксперимент с применением образцов с центральными сквозными надрезами, имитирующими трещину. Задачей данного эксперимента являлось осуществить нагружение образцов с дефектами, расположенными под разными углами к главным осям образцов, что соответствовало различному параметру смешанности нагружения и реализации при этом явления как нормального отрыва, так и поперечного сдвига. Ввиду того что явление чистого сдвига реализовать в лабораторных условиях довольно трудно, было принято решение выполнить надрезы в образцах под различными углами к главным осям, тем самым получить возможность при испытании на растяжение исследовать различные параметры смешанности нагружения M^e от условий, приближенных к условиям нормального отрыва $M^e = 0.1$, до условий нагружения, приближенных к условиям поперечного сдвига $M^e = 0.9$. Таким образом, появляется возможность проведения эксперимента максимально приблизить к тем граничным условиям, которые применялись при математических расчетах угла направления распространения трещины. Соблюдение граничных условий при проведении натурального эксперимента очень важно, так как от этого зависят результаты эксперимента, которые необходимо в дальнейшем сравнить с табличными расчетными данными. Параметр смешанности нагружения определяется выражением

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{22}(r, \theta = 0)}{\sigma_{12}(r, \theta = 0)} \right|. \quad (1)$$

Если учесть только первые слагаемые в асимптотических выражениях для напряжений в разложениях М. Уильямса, то справедливо соотношение

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \frac{K_I f_{\theta\theta}^{(1)}}{K_{II} f_{r\theta}^{(1)}} \right|. \quad (2)$$

Для наклонной трещины хорошо известны равенства [14; 20]

$$K_I = \sigma_{22}^\infty \sqrt{2\pi a} \sin^2 \alpha, \quad K_{II} = \sigma_{22}^\infty \sqrt{2\pi a} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3)$$

Угол α , представленный в соотношениях (3), является углом, образованным вертикальной осью образца и изготовленной сквозной трещиной, как показано на рис. 14.

Таким образом, после преобразований выражение (2) примет вид:

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right|. \quad (4)$$

Параметр смешанности нагружения изменяется от нуля до единицы:

$$0 \leq M^e \leq 1. \quad (5)$$

Следовательно, после преобразований получаем соотношение, связывающее угол наклона трещины в образце и значение параметра смешанности нагружения:

$$M^e = 2\alpha/\pi. \quad (6)$$

При определении значений углов направления распространения трещины, представленных в табл. 1–9, в пакете символьной математики Waterloo Maple расчеты выполнялись для различных значений коэффициента Пуассона. Вследствие этого при проведении натурального эксперимента для наглядности и сопоставления результатов было решено применить различные материалы для исследования, а именно сплав Д16Т, сталь 30ХГСА, сталь 30ХГСА в закаленном состоянии и текстолит. Схема нагружения образцов представлена на рис. 15.

Испытание на растяжение образцов из текстолита, сплава и стали проходило на разных испытательных машинах, ввиду значительной разности силы нагружения для осуществления разрыва образцов.

Рис. 14. Геометрия образца с наклонной трещиной и угол α

Рис. 15. Схема одноосного нагружения

Испытания образцов из тестолита проходили на испытательной машине DVT GP DNN Tensile, так как для их разрыва потребовалось сравнительно небольшое усилие, близкое к 400 кг/см^2 , а образцы из сплава Д16Т и стали 30ХГСА испытывали машиной на растяжение ЦДМУ-30, так как при испытании образцов на растяжение из закаленной стали 30ХГСА потребовалось максимальное усилие перед разрушением образца 3200 кг/см^2 . Фотографии экспериментальных образцов до проведения испытаний из текстолита представлены на рис. 16, 17, образцов из сплава Д16Т и стали 30ХГСА на рис. 24.

Рис. 16. Испытание на растяжение образца из текстолита на установке DVT GP DNN Tensile

Рис. 17. Испытание на растяжение образца из стали 30ХГСА на испытательной машине ЦДМУ-30

Фотографии после нагружения и разрыва образцов из текстолита представлены на рис. 18–23, образцов из сплава Д16Т и стали 30ХГСА на рис. 21–23. По представленным фотографиям отчетливо виден угол дальнейшего распространения трещины в образцах, изготовленных из разных материалов.

Во время проведения эксперимента образцы надежно зажимались в губках испытательных машин и нагружение как образцов из текстолита, так и из сплава Д16Т и стали происходило со скоростью, равной 5 мм/мин. Это позволило наглядно увидеть поведение образцов, изготовленных из разных материалов, во время нагружения и разрушения. Разрыв образцов наступал при достижении критического

Рис. 18. Фотография образца из текстолита с прорезью, имитирующей сквозную трещину, под углом 45° после проведения испытаний

Рис. 19. Образец, выполненный из текстолита с прорезью, имитирующей сквозную трещину, под углом 45° после проведения испытаний

Рис. 20. Фотография образцов из текстолита с прорезью, имитирующей сквозную трещину, под углами 15° , 30° , 45° , 60° , 75° после проведения испытаний на растяжение и разрыв

Рис. 21. Образцы после разрушения, изготовленные из сплава Д16Т

Рис. 22. Образцы после проведения эксперимента и разрушения, выполненные из стали 30ХГСА

Рис. 23. Образец после нагружения и разрыва, выполненный из закаленной стали 30ХГСА

значения деформации ε_c для каждого из образцов. Проведенные испытания позволили сравнить численные расчеты, приведенные ранее в табл. 1–9, и сопоставить результаты проведенного эксперимента с выбором критериев разрушения, на которых основывалось определение угла распространения трещины.

3. Анализ полученных результатов

При проведении испытаний на растяжение параметр смешанности нагружения M^e реализовывался в образцах посредством расположения сквозной трещины под заданным углом к центральным осям образцов. Например, параметр смешанности, равный $M^e = 0.5$, соответствовал углу расположения сквозной трещины 45° . В соответствии с этим дальнейшее значение параметра смешанности нагружения M^e соответствовало расположению сквозной щели в образцах, имитирующей трещину под углами 15° , 30° , 45° , 60° , 75° .

После проведения испытаний на растяжение образцов из текстолита, сплава Д16Т и стали можно сделать сравнение результатов вычислений, проведенных в пакете символьной математики Waterloo Maple на программном комплексе Simulia Abaqus, с экспериментальными оценками угла направления распространения трещины. Из трех рассмотренных в настоящей статье критериев разрушения наиболее близким к экспериментальным данным значения угла направления распространения трещины является критерий минимума плотности энергии упругой деформации, так как расчетные значения при использовании этого критерия наиболее точно отображают сходство с реально проведенным экспериментом. Сравнивая результаты математических расчетов, приведенных в табл. 2, с полученными экспериментальными данными, можно заметить ярко выраженное сходство при различных параметрах смешанности нагружения.

На основе результатов экспериментального исследования для образцов из текстолита при всех углах расположения сквозной трещины в образце были обработаны в Adobe Illustrator и построены графики с зависимостью усилия нагружения от относительного удлинения, которые представлены на рис. 24. Графики результатов вычислений были самостоятельно построены и выведены на экран компьютера испытательной машиной DVT GP DNN Tensile.

Рис. 24. Результаты проведения испытания на растяжение для образцов, выполненных из текстолита, с разными углами расположения сквозной трещины

Анализируя результаты полученных вычислений и экспериментальных исследований, можно сделать вывод о том, что наиболее заметны значительные возрастания усилия нагружения при растяжении образца из текстолита с углом расположения трещины, равным 75° . Затем при уменьшении угла расположения трещины к главным осям образца максимальная нагрузка принимала меньшее значение с каждым новым испытанием. Если угол расположения сквозной трещины в образце принимал значение, близкое к 0° , то образец разрушался при значительно меньшем усилии нагружения, чем при значении угла наклона сквозной трещины в образце 75° . Графики проведенных испытаний (рис. 24) наглядно отображают зависимость относительного удлинения образца от приложенного к нему усилия. Расположение сквозной трещины в образце оказывает существенное влияние на значение максимальной нагрузки,

которое может выдержать образец перед разрушением. Кривые зависимостей 2–4 схожи по протеканию нагружения в испытуемых образцах. Кривая 6 соответствует растяжению и разрушению образца, выполненного из текстолита с углом расположения сквозной трещины 75° , при этом образец имеет наибольшее относительное удлинение и максимальное усилие перед разрушением. Разрыв образца произошел при достижении нагрузки, равной ≈ 390 кг/см². Кривая 5 соответствует образцу, выполненному из текстолита с расположением сквозной трещины 60° к оси образца. Его относительное удлинение заметно меньше предыдущего, максимальное нагружение образца перед разрушением составило ≈ 320 кг/см². Кривая 4 соответствует образцу, изготовленному из текстолита с расположением сквозной трещины под углом 45° . Разрушение этого образца произошло при достижении нагрузки ≈ 305 кг/см². Относительное удлинение заметно меньше, чем у образца с трещиной, выполненной под углом 60° . Затем следует кривая 3, которая отображает растяжение и разрыв образца, изготовленного из текстолита с расположением сквозной трещины под углом 30° . Разрушение образца наступило при достижении максимальной нагрузки ≈ 280 кг/см². Кривая 2 отображает поведение образца, выполненного из текстолита с углом наклона сквозной трещины 15° к оси образца. Нагружение отображает кривая зависимости, схожая с кривыми 3, 4 и 5. Разрушение этого образца произошло при достижении максимальной нагрузки на растяжение ≈ 260 кг/см². Кривая 1 отображает нагружение и дальнейшее разрушение образца, изготовленного из текстолита с расположением сквозной трещины с углом 0° , то есть выполненной в оси образца. Это условие повлекло за собой разрушение образца при достижении максимального усилия нагружения ≈ 210 кг/см².

Таким образом, расположение сквозной трещины в образце, а именно параметр смешанности нагружения M^e , заметно влияет на максимальную нагрузку, которую может выдержать образец перед разрушением. При измерении получившихся экспериментальным методом углов, под которыми наступило разрушение образцов, и сравнении их с вычисленными в пакете символьной математики и смоделированными в программном комплексе значениями, представленными в таблицах выше, можно сказать о необходимости учета в асимптотическом разложении высших приближений, так как в случае удержания необходимого количества слагаемых критерий минимума плотности энергии упругой деформации наиболее точно и корректно отображает экспериментальные данные, представленные в табл. 1. На рис. 18 хорошо виден угол распространения трещины 45° , образовавшейся в образце после проведения эксперимента, что примерно соответствует значению табл. 2 — $46,03^\circ$ (третий столбец табл. 2) с удержанием высших приближений для расчета данного угла и расстоянию от конца вершины трещины $\hat{r} = 0.1$. На рис. 18 изображены результаты экспериментального нагружения и разрыва образцов, выполненных из текстолита с разным расположением сквозной трещины, то есть с различным параметром смешанности нагружения M^e . Сравнения углов разрушения на этих образцах также сопоставимы с результатами вычислений, представленными в табл. 2. Они практически полностью соответствуют данным, получившимся в результате проведения эксперимента на растяжение и разрушение образца. Сравнивая результаты экспериментального разрушения образцов, выполненных из сплава Д16Т, стали 30ХГСА и стали 30ХГСА в закаленном состоянии, можно также сравнить с результатами расчетных вычислений табл. 2 и заметить, что присутствует некоторое сходство табличных значений с углом разрыва, полученным при проведении эксперимента. Угол, под которым произошло дальнейшее распространение трещины в образцах, изображенных на рис. 21–23, примерно соответствует табличному значению, равному $46,03^\circ$. Соответственно выбор материала, из которого выполняется образец для проведения эксперимента, мало отражает изменение угла реального распространения трещины. Об этом свидетельствуют и расчетные значения, выполненные с помощью пакета математической алгебры и программного комплекса Simulia Abaqus, которые отражают преимущественно небольшую зависимость полученного результата угла распространения трещины от выбранного значения коэффициента Пуассона. Разница табличных данных, как указывается выше в анализах проведенных расчетов, составляет примерно $\approx 2^\circ - 3^\circ$ в зависимости от выбора значения коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ или $\nu = 0.5$. Что касается реализации плоского напряженного состояния или плоской деформации, то тут изменения в значениях углов распространения трещины очевидны как при математических расчетах, так и при проведении реального эксперимента.

Выводы

В настоящей статье были найдены углы направления распространения трещины при использовании трех критериев разрушения: критерия максимального тангенциального напряжения, критерия минимума плотности энергии упругой деформации и деформационного критерия разрушения. Определено, что из трех рассмотренных критериев механики разрушения наиболее подходящим является критерий минимума плотности упругой деформации. При помощи пакета символьной математики Waterloo Maple и программного комплекса Simulia Abaqus, а также многопараметрического асимптотического разложе-

ния М. Уильямса была установлена разница в расчетах между реализацией плоского напряженного и плоского деформированного состояний. Результаты вычислений прямо зависели от выбранного значения коэффициента Пуассона и параметра смешанности нагружения. В статье было выведено определяющее соотношение между параметром смешанности нагружения и расположением угла наклона трещины в образцах, что дало наиболее полное представление о зависимости результатов эксперимента от расположения дефекта в образце. Проведенные в пакете компьютерной алгебры расчеты показали необходимость удержания высших приближений в многопараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса, так как значение угла распространения трещины существенно меняется при удержании высших приближений. Проведенный натурный эксперимент на растяжение и разрушение образцов под приложением нагрузки дал результаты, которые нас полностью убедили в том, что учет необходимого количества слагаемых в многопараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса очень важен, благодаря этому результаты проведенного эксперимента можно соотнести с расчетными значениями и убедиться их в сходстве.

Литература

- [1] Floros D., Ekberg A., Larsson F. Evaluation of crack growth direction criteria on mixed-mode fatigue crack growth experiments // International Journal of Fatigue. 2019. 105075. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.04.013>.
- [2] Sajith S., Murthy K.S.R.K., Robi P.S. Experimental and numerical Investigation of mixed mode fatigue crack growth models in aluminium 6061-T6 // International Journal of Fatigue. 2020. V. 130. P. 105285.
- [3] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 63–79.
- [4] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 80–96.
- [5] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // International Journal of Fatigue. 2016. V. 89. P. 99–107. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010.
- [6] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. 2018. V. 144–145. P. 265–275. DOI: 10.1016/j.jisols.2018.05.012.
- [7] Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I. Handbook of Elasticity Solutions. Dordrecht: Springer-Science+Business Media. 2003. 329 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0169-3.
- [8] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. V. 49. P. 556–566.
- [9] Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. № 3. С. 345–361.
- [10] Stepanova L., Roslyakov P. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1785. 030029.
- [11] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [12] Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с. URL: <http://en.bookfi.net/book/438624>.
- [13] Партон В.З. Механика разрушения: От теории к практике. М.: Наука, 1990. 240 с. URL: <http://www.zodchii.ws/books/info-1206.html>.
- [14] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/438640/07ed20>.
- [15] Экспериментальная оценка долговечности образцов при стандартных испытаниях на растяжение / А.В. Анцупов [и др.] // Механическое оборудование металлургических заводов. 2013. Вып. 2. С. 27–34.
- [16] Shlyannikov V., Tumanov A. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters // International Journal of Fracture. 2014. V. 185. P. 49–76. DOI: 10.1007/s10704-013-9898-0
- [17] Матвиенко Ю.Г. Несингулярные Т-напряжения в критериях механики разрушения тел с вырезами // Вестник Нижегородского университета. 2011. № 4(5). С. 12–22. URL: http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778_2011_-_4-5_unicode/273.pdf.
- [18] Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

- [19] Матвиенко Ю.Г. Подходы механики разрушения в анализе деформирования и разрушения тел с вырезами и надрезами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 5. С. 64–72. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11157733>.
- [20] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 2012. 640 с. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/438682/d295ae> [in Russian].

References

- [1] Floros D., Ekberg A., Larsson F. Evaluation of crack growth direction criteria on mixed-mode fatigue crack growth experiments. *International Journal of Fatigue*, 2019, 105075. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.04.013> [in English].
- [2] Sajith S., Murthy K.S.R.K., Robi P.S. Experimental and numerical Investigation of mixed mode fatigue crack growth models in aluminium 6061-T6. *International Journal of Fatigue*, 2020, V. 130, pp. 105285.
- [3] Stepanova L.V. Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Uil'yamsa polya napryazhenii na opisanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny. Chast' I [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part I]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, V. 25, no. 1, pp. 63–79. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79> [in Russian].
- [4] Stepanova L.V. Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Uil'yamsa polya napryazhenii na opisanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny. Chast' II [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, V. 25, no. 1, pp. 80–96. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96> [in Russian].
- [5] Malikova L., Vesely V., Seidl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, 2016, V. 89, pp. 99–107. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010 [in English].
- [6] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. V. 144–145. P. 265–275. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012 [in English].
- [7] Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I. Handbook of Elasticity Solutions. Dordrecht: Springer-Science+Business Media. 2003. 329 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0169-3 [in English].
- [8] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. V. 49. P. 556–566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024
- [9] Stepanova L.V. Asimptoticheskiy analiz polya napryazhenii u vershiny treshchiny (uchet vysshikh priblizhenii) [Asymptotic analysis of the crack tip stress field (consideration of higher order terms)]. *[Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki]* [Siberian Journal of Numerical Mathematics], 2019, № 3, pp. 345–361. DOI: 10.15372/SJNM20190307 [in Russian].
- [10] Stepanova L., Roslyakov P. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments. *AIP Conference Proceedings*, 2016, V. 1785, 030029. DOI: 10.1063/1.4967050 [in Russian].
- [11] Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. M.: Nauka, 1974, 312 p. Available at: https://www.studmed.ru/kachanov-lm-osnovy-mekhaniki-razrusheniya_b7befb002cc.html [in Russian].
- [12] Morozov N.F. *Matematicheskie voprosy teorii treshchin* [Mathematical Questions of Crack Theory]. M.: Nauka, 1984. 255 p. Available at: <http://en.bookfi.net/book/438624> [in Russian].
- [13] Parton V.Z. *Mekhanika razrusheniya: Ot teorii k praktike* [Fracture Mechanics: From theory to practice]. M.: Nauka, 1990. 240 p. Available at: <http://www.zodchii.ws/books/info-1206.html> [in Russian].
- [14] Parton V.Z., Morozov E.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya* [Mechanics of elastoplastic fracture]. M.: Nauka, 1985, 504 p. URL: <https://ru.b-ok.cc/book/438640/07ed20> [in Russian].
- [15] Anchupov A.B., Slobodyaskij M.G., Anchupov V.P., Rusanov V.A. *Ekspperimental'naya otsenka dolgovechnosti obraztsov pri standartnykh ispytaniyakh na rastyazhenie* [Experimental evaluation of specimen durability at standard testing on tension]. In: *Mekhanicheskoe oborudovanie metallurgicheskikh zavodov* [Mechanical equipment of metallurgical factories], 2013, Vol. 2, pp. 27–34 [in Russian].
- [16] Shlyannikov V., Tumanov A. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters. *International Journal of Fracture*, 2014, Vol. 185, pp. 49–76. DOI: 10.1007/s10704-013-9898-0 [in English].

- [17] Matvienko Yu.G. *Nesingulyarnye T-apryazheniya v kriteriyakh mekhaniki razrusheniya tel s vyrezami* [The non-singular T-stresses in fracture mechanics criteria of solids with notches]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo* [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod], 2011, № 4(5), pp. 12–22. Available at: http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778_2011_-_4-5_unicode/273.pdf [in Russian].
- [18] Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Models and criteria of fracture mechanics]. M.: Fizmatlit, 2006. 328 p. Available at: <http://en.bookfi.net/book/635351> [in Russian].
- [19] Matvienko Y.G. *Podkhody mekhaniki razrusheniya v analize deformirovaniya i razrusheniya tel s vyrezami i nadrezami* [Fracture mechanics approaches in the analysis of deformation and fracture of bodies with cuts and notches]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability], 2008, № 5, pp. 64–72. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11157733> [in Russian].
- [20] Cherepanov G.P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [Mechanics of Brittle Fracture]. M.: Nauka, 2012, 640 p. Available at: <https://ru.b-ok.cc/book/438682/d295ae> [in Russian].