УДК 519.8

*Е.В. Михайлова, В.Н. Никишов, Л.А. Сараев**

ЦЕНОВАЯ ДИНАМИКА ПРИБЫЛИ И ЕЕ ОЦЕНКА МЕТОДАМИ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Статья посвящена анализу ценовой динамики прибыли методами финансового анализа. В частности, используются методы хеджирования риска. Получены параметры и оценки премии опциона «put» и «call». Рассмотрена динамика прибыли в случае, когда опцион выписан на всю продукцию и только на её часть. Как результат получены выражения для прибыли. Получены зависимости прибыли от изменения объема прибыли при различных значениях доли затрат из расчета на единицу продукции.

***Ключевые слова и фразы**: финансовый анализ, методы хеджирования риска, динамика прибыли.*

Рассмотрим предприятие, производящее один продукт в размере $a = Nb$, за один временной период $\tau = \dfrac{1}{n}$, с затратами на выпуск единицы продукции μ_0. Предположим, что продажа осуществляется по цене λ_0 на единицу продукции.

Объем продажи (спрос на товар) за рассматриваемый период X – случайная величина. Тогда прибыль предприятия будет задаваться величиной

$$\Pi(X,a;\lambda_0;\mu_0) = -\mu_0 a + \lambda_0 \min(X,a) = -\mu_0 a + \lambda_0 [x - (x-a)_+]. \quad (1)$$

Пусть функция распределения случайной величины при цене λ_0 дается функцией $F(x;\lambda_0) = P(X < x)$. Тогда математическое среднее прибыли есть:

---

*© Михайлова Е.В., Никишов В.Н., Сараев Л.А, 2008
Михайлова Елена Владимировна, Никишов Виктор Николаевич, Сараев Леонид Александрович, кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$\Pi_0(a,\lambda_0,\mu_0) = E[\Pi_0(X,a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_0(x,a)dF(x,\lambda_0) =$$
$$= \lambda_0 \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \lambda_0 a(1-F(a;\lambda_0)) - \mu_0 a. \quad (2)$$

Для нормального приближения $F(x;\lambda_0)$ имеем:

$$f_N(x;m_0;\sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (3)$$

$$\frac{\Pi_0(a_0,\lambda_0,\mu_0)}{\mu_0 m_0} = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\left\{\left(1-\frac{a_0}{m_0}\right)\cdot F\left(\frac{a_0/m_0-1}{\sigma_0/m_0}\right) - \left(\frac{\sigma_0}{m_0}\right) f_N\left(\frac{a_0/m_0-1}{\sigma_0/m_0}\right)\right\} +$$
$$+\left(\frac{a_0}{m_0}\right)\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}-1\right), \quad (4)$$

где $m_0 = E[X]$, $\sigma_0^2 = D[X]$.

На рис. 1 приведены графики $\dfrac{\Pi_0(a_0,\lambda_0,\mu_0)}{\mu_0 m_0}$ при различных отношениях $\dfrac{\mu_0}{\lambda_0}$ $\left(\dfrac{\mu_0}{\lambda_0}=1{,}5;1{,}7{,}2{,}0\right)$ в зависимости от отношения $\dfrac{a}{m_0}$ и при фиксированном значении $\dfrac{\sigma_0}{m_0} = 0{,}5$.

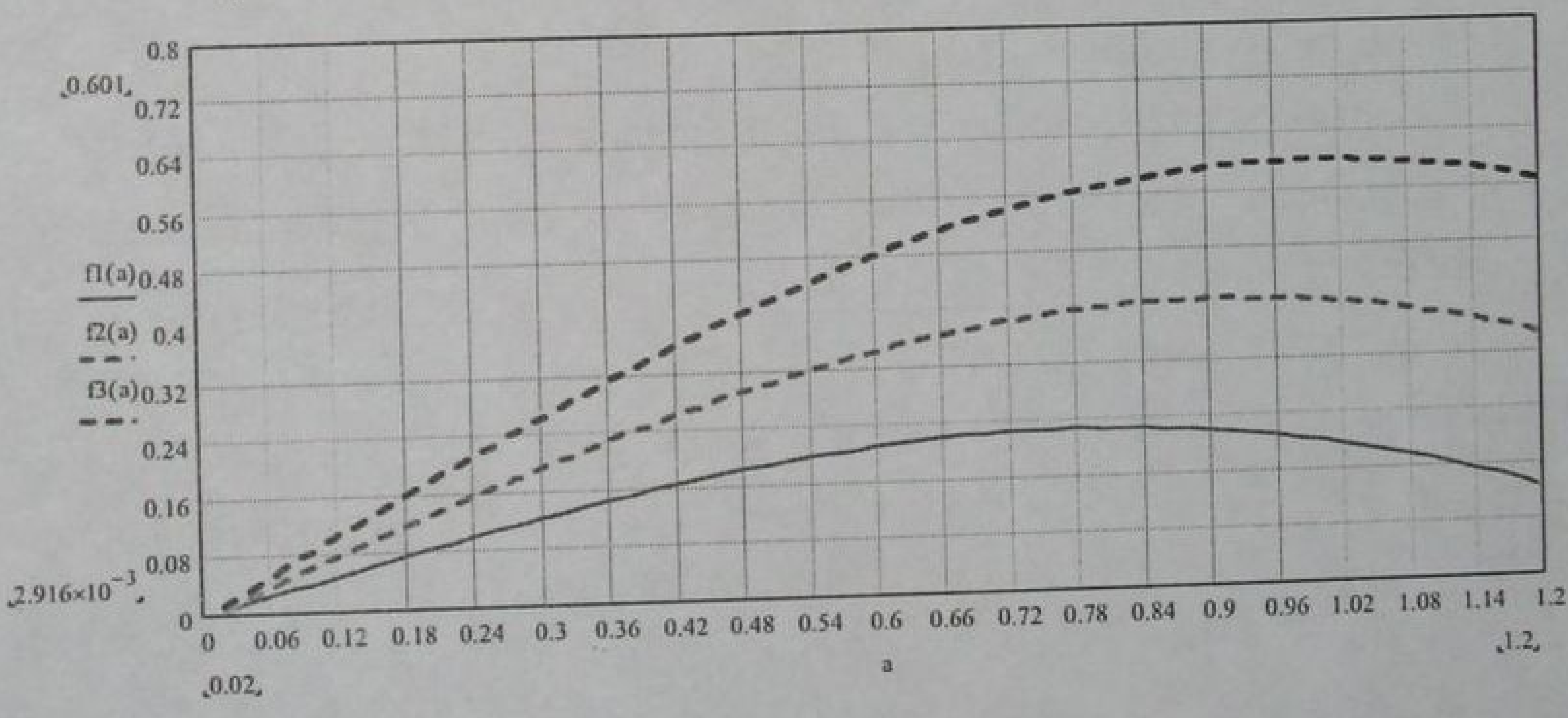

Рис. 1. Графики зависимости нормированной прибыли

Максимумы достигаются при $\frac{a}{m_0} = 0{,}785;\ 0{,}888;\ 1{,}0$ для $f1(a), f2(a), f3(a)$ соответственно. При этом значения нормированной прибыли равны $\frac{\Pi_0(a_0, \lambda_0, \mu_0)}{\mu_0 m_0} = 0{,}23;\ 0{,}41;\ 0{,}60$. Как можно видеть из графиков, начиная с определенного значения $\frac{a}{m_0}$ величина прибыли уменьшается, что обусловлено затовариванием (рост объема невостребованной продукции).

При заданных значениях μ_0, λ_0 функция спроса (при наличии рынка и конкуренции) стабилизирована (устанавливаются определенные значения m_0, σ_0), и оптимизация производства (максимизация прибыли) приведет к стабилизации объема продаж на уровне a_0, определяемом из условия:

$$\frac{\partial E[\Pi(X,a)]}{\partial a} = 0 = \lambda(1 - F(a;\lambda_0)) - \mu .$$

Величина a_0 находится как решение уравнения

$$\Phi\left(\frac{a_0 / m_0 - 1}{\sigma_0 / m_0}\right) = 1 - \mu_0 / \lambda_0 = \gamma .$$

Таким образом $a_0 / m_0 = 1 + (\sigma_0 / m_0) z_\gamma$, где z_γ − есть квантиль уровня γ стандартного нормального распределения.

Зависимость между функцией распределения $F(x;\lambda_0)$ от цены отражает ситуацию, сложившуюся на рынке.

Цену на продукцию можно представить в виде $\lambda_0 = (1+\theta_0)\mu_0$, где θ_0 - величина надбавки над расходами. Очевидно, что θ_0 должно превосходить норму банковского процента i. В противном случае производство невыгодно, так как в этом случае выгоднее банковский депозит: $\theta_0 > i$. Если период производства $\tau = T / n$, где T, например, год, то в этом периоде $\theta_0^{(n)} > i^{(n)} / n \cong \delta / n$, где $\delta = \ln(1+i) \approx n \cdot \ln(1 + \lambda_0 / \mu_0)$ – непрерывная норма доходности. В целях увеличения спроса предприятие может снизить отпускную цену за счет перехода от θ_0 к величине $\theta_1 < \theta_0$.

При этом и расходы, нелинейным образом зависят от объема производства (U-образная кривая). Если считать, что производство оптимально, то есть вблизи a_0, то возможно представление:

$$\mu(a) \cong \mu_0[1+\mu_1(a-a_0)^2].$$

Тогда $\lambda_0 \to \lambda_1 = (1+\theta_1)\mu_0[1+\mu_1(a-a_0)^2]$.

Для оценки нового среднего значения прибыли в связи с изменением цены на продукцию и изменением расходов следует располагать функцией распределения спроса в зависимости от цены: $F(x;\lambda_0) \to F(x,\lambda_1)$.

Данное распределение неизвестно, и ее нахождение требует определенных предположений. Качественно можно предположить, что уменьшение цены ведет к смещению m_0 в сторону больших значений и, возможно, к увеличению дисперсии σ_0. Среднее значение прибыли в случае уменьшения цены будет даваться выражением, аналогичным выражению (1):

$$\Pi(a,\lambda_1,\mu(a)) = E[\Pi(X,a,\lambda_1,\mu(a))] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x,a;\lambda_1;\mu(a))dF(x,\lambda_1) =$$
$$= \lambda_1 \int_{-\infty}^{a} x dF(x;\lambda_1)dx + \lambda_1 a(1-F(a;\lambda_1)) - \mu(a)a. \quad (5)$$

Пусть под активами понимается продукция предприятия. На финансовых рынках существуют различные методы оценки стоимости активов, в частности, методы хеджирования риска. Опцион (option) – один из производных финансовых инструментов, который представляет собой соглашение о том, что потенциальному покупателю (или потенциальному продавцу) предоставляется право приобрести (или продать) данный товар или ценную бумагу в определенный срок и по согласованной цене. Это означает, что, например, в случае повышения в процессе торговли цены на выбранный покупателем товар покупатель может выиграть разницу в цене. На рынке ценных бумаг опционы называют право купить или продать ценные бумаги по установленному курсу, обусловленное уплатой специальной премии. Различают опционы на продажу (put option) и на покупку (call option), а также двусторонние (double option).

Предприятие (по крайней мере, в западной практике) может стать держателем (holder) опциона "put" за плату $W_P = \widehat{W}_P \cdot \lambda_0 a$, который дает право продать актив (продукцию) в определенный момент времени по заранее оговоренной цене. $\widehat{W}_P$ – премия "put" опциона с единицы стоимости продукции – с каждого рубля. Опцион может быть выписан на всю продукцию, планируемую к выпуску $a = a_0 + \Delta a_0$, или только на дополнительную продукцию Δa_0.

При наличии опциона риск случайности, связанный с колебаниями спроса на продукцию, исчезает: предприятие увеличивает производство от a_0 до величины $a = a_0 + \Delta a_0$. Цена опциона (премия) будет зависеть от цены на день заключения контракта на покупку опциона $\lambda(0)=\lambda_0$ и от цены предполагаемой к исполнению $\lambda(t)$ на день его исполнения.

В случае, когда опцион выписан на всю предполагаемую к производству продукцию, прибыль перестает быть случайной величиной и ее значение равно:

$$\frac{\Pi_a(a,\lambda_0,\mu(a))}{\mu_0 m_0}=\left[-\frac{\mu(a)}{\mu_0}+(1-\widehat{W}_P)\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right]\left(\frac{a}{m_0}\right). \qquad (6)$$

В случае, когда опцион выписан только на часть продукции в размере Δa, размер прибыли (случайная величина) будет даваться выражением:

$$\Pi(X,a)=-\mu(a)a+\lambda_0\min(X,a-\Delta a)+(1-\widehat{W}_P)\cdot\lambda_0\Delta a.$$

Усредняя данное выражение (на основе прежнего значения $F(x;\lambda_0)$), получим среднее значение прибыли в этом случае в виде:

$$\frac{\Pi_b(a,\lambda_0,\mu(a))}{\mu_0 m_0}=E[\Pi(X,a)]=-\frac{\mu(a)}{\mu_0}\left(\frac{a}{m_0}\right)+$$
$$+(1-\widehat{W}_P)\cdot\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\left(\frac{\Delta a}{m_0}\right)+\frac{\Pi_0(a-\Delta a,\lambda_0)}{\mu_0 m_0}, \qquad (7)$$

где

$$\frac{\Pi_0(a,\lambda_0)}{\mu_0 m_0}=\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\left\{(1-\frac{a}{m_0})\cdot F\left(\frac{a/m_0-1}{\sigma_0/m_0}\right)-\left(\frac{\sigma_0}{m_0}\right)f_N\left(\frac{a/m_0-1}{\sigma_0/m_0}\right)\right\}+\frac{a}{m_0}\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_0}.$$

Обычное предположение относительно изменения стоимости продукции $S(t)=\lambda(t)\cdot a$ – предположение о логнормальном распределении, то есть $\ln(S(t)/S(0))\in N(mt;\sigma^2 t)$, где N – нормальное распределение. В этом случае изменение стоимости актива будет описываться логнормальным распределением:

$$P\left[\frac{S(t)}{S(0)}<x\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\int_0^x e^{-\frac{(\ln\xi-mt)^2}{2\sigma^2 t}}\cdot dx/x.$$

Пусть цена исполнения (“страйк”) устанавливается в размере D на момент исполнения t. Тогда премия за опцион будет в размере $W_P=E[e^{-\delta t}I_D]$, где $I_D=(D-S(t))_+$, δ – непрерывная норма процентной ставки .

Параметр m определяется из условия:

$$E[e^{-\delta t}S(t)/S(0)]=e^{-\delta t}\int_0^\infty x\cdot f_L(x)dx=1,$$

отсюда $mt = (\delta t - \sigma^2 t/2)$ или $m = (\delta - \sigma^2/2)$, где $f_L(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(\ln x - mt)^2/(2\sigma^2 t)}$ – плотность логнормального распределения.

Вычисляя

$$W_P = S(0) \cdot E\left[\frac{e^{-\delta t} I_D}{S(0)}\right] = S(0) \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_0^d [d - x] \cdot \mathrm{e}^{-(\ln x - mt)^2/(2\sigma^2 t}) dx / x,$$

где $d = D / S(0)$, получим:

$$\widehat{W}_P = \frac{W_P}{S(0)} = d \cdot e^{-\delta t} \cdot \Phi\left[\frac{(\ln d - mt)}{\sigma\sqrt{t}}\right] - \Phi\left[\frac{\ln d - mt}{\sigma\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t}\right].$$

Учитывая, что $m = (\delta - \sigma^2/2)$, для оценки стоимости опциона "put" с единицы актива имеем выражение:

$$\widehat{W}_P = d \cdot e^{-\delta t} \cdot \Phi\left[\frac{(\ln d - \delta t + \sigma^2 t/2)}{\sigma\sqrt{t}}\right] - \Phi\left[\frac{\ln d - \delta t - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}\right].$$

Получим параметры и оценки премии «put» опциона. При $t = 1/n$ - период производства (n - периодов в год); $\delta = \ln(1+i)$; $d = \lambda(t)/\lambda(0) = 1$ - цена исполнения равна цене на момент заключения контракта.

При этом $\ln(d) = 0$ и, следовательно,

$$\widehat{W}_P = \frac{1}{\sqrt[n]{1+i}} \cdot \Phi\left[\frac{(\sigma^2/(2n) - (1/n)\cdot\ln(1+i))}{\sigma/\sqrt{n}}\right] + \Phi\left[\frac{\sigma^2/(2n) + (1/n)\cdot\ln(1+i)}{\sigma/\sqrt{n}}\right] - 1.$$

В том случае, когда есть данные об изменении цены актива (продукции в прошлом), например, известен ряд значений $d_j, (j = 1, 2..M)$, можно оценить дисперсию (ее историческое значение – волатильность) обычными выражениями $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}(\ln d_j - g)^2$, где $g = \dfrac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\ln d_j$. При отсутствии такой информации следует ориентироваться на какие-то предположения (обычно в этом случае чаще всего принимается значение $\widehat{\sigma}^2 = (0,5)^2 = 0,25$). Пусть $i = 10\%$, $n = 1$.

Тогда

$$z_1 = \frac{(\sigma^2/(2n) - (1/n)\cdot\ln(1+i))}{\sigma/\sqrt{n}} = 0{,}05938,$$

$$z_2 = \frac{(\sigma^2/(2n) + (1/n)\cdot\ln(1+i))}{\sigma/\sqrt{n}} = 0{,}44062,$$

$$\Phi(z_1) = 0,523675;\ \Phi(z_2) = 0,6700256;$$

$$\widehat{W}_P = 0,146324.$$

Рассмотрим случай, когда опцион выписан на всю предполагаемую к производству продукцию. Пусть $\mu_1 = 0,1/m_0^2$ (дополнительные расходы в связи с увеличением производства), тогда изменение прибыли при наличии опциона на всю продукцию дается выражением:

$$\frac{\Pi_a(a,\lambda_0,\mu(a))}{\mu_0 m_0} = \left[-\frac{\mu(a)}{\mu_0} + (1-\widehat{W}_P)\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right]\left(\frac{a}{m_0}\right). \quad (8)$$

На рис. 2 приведены графики величины прибыли в зависимости от изменения объема выпуска продукции $\frac{a}{m_0} = 1,5;1,7;2,25$ при различных значениях отношения $\frac{\lambda_0}{\mu_0} = 1,5;1,7;2$. Как видно из графиков, максимумы достигаются при $\frac{a}{m_0} - 1,5;1,7;2,25$, соответственно для $p1(a), p2(a), p3(a)$, при этом значения нормированной прибыли равны 0,35; 0,68; 1,22.

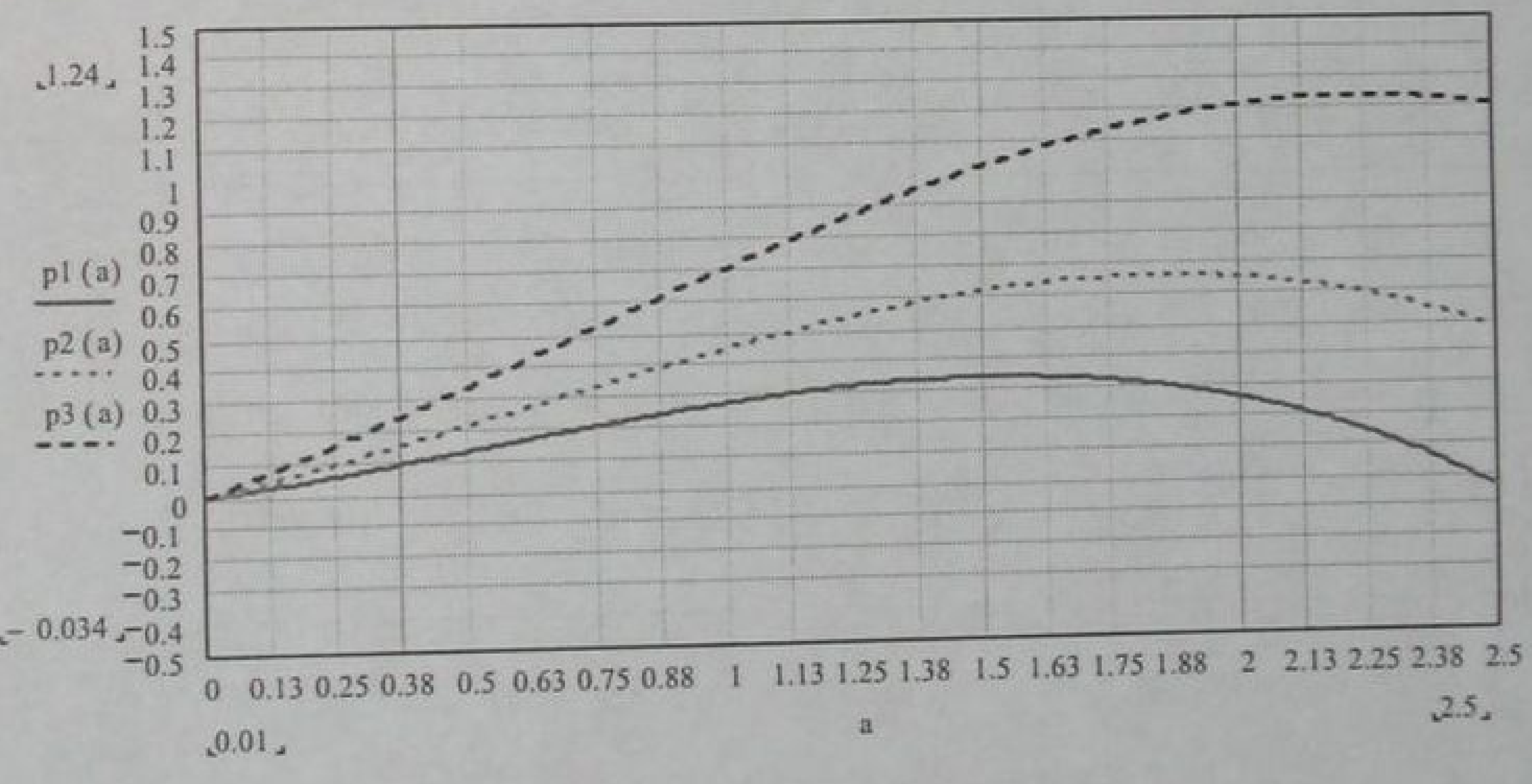

Рис. 2. Динамика прибыли в зависимости от объема выпуска при наличии опциона на всю продукцию

Рассмотрим случай, когда опцион выписан на часть продукции. Тогда предполагается, что предприятие на рынке реализует часть продукции, а дополнительная продукция приобретается гарантированно в силу наличия опциона “put”:

$$\frac{\Pi_b(a,\lambda_0,\mu(a))}{\mu_0 m_0} = E[\Pi(X,a)] = -\frac{\mu(a)}{\mu_0}\left(\frac{a}{m_0}\right) + \\ +(1-\bar{W}_P)\cdot\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\left(\frac{\Delta a}{m_0}\right) + \frac{\Pi_0(a-\Delta a,\lambda_0)}{\mu_0 m_0}, \qquad (9)$$

где

$$\frac{\Pi_0(a,\lambda_0)}{\mu_0 m_0} = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\left\{\left(1-\frac{a}{m_0}\right)\cdot F\left(\frac{a/m_0-1}{\sigma_0/m_0}\right) - \left(\frac{\sigma_0}{m_0}\right) f_N\left(\frac{a/m_0-1}{\sigma_0/m_0}\right)\right\} + \frac{a}{m_0}\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_0}.$$

На рис. 3 приведены графики зависимости прибыли в зависимости от изменения объема выпуска продукции $\frac{a}{m_0}$ при различных значениях отношения $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$, при $\mu_1 = \frac{0,1}{m_0^2}$ (дополнительные расходы в связи с увеличением производства) и $\frac{\Delta a}{m_0} = 0,5\cdot\frac{a_0}{m_0}$ при различных значениях отношения $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$. Максимумы достигаются при $\frac{a}{m_0} = 1,37$; 1,65; 1,87, соответственно для $pb1(a), pb2(a), pb3(a)$, при этом значения нормированной прибыли равны 0,36; 0,64; 1,12.

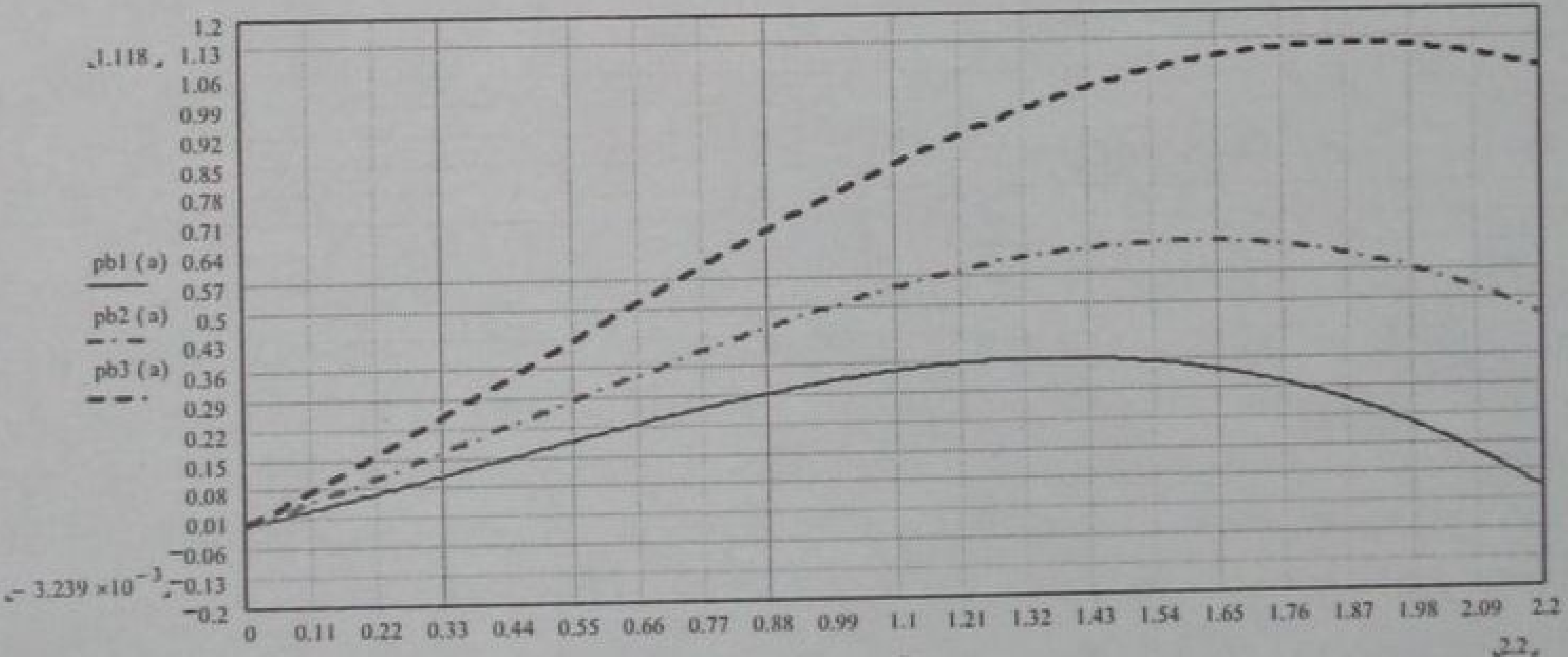

Рис. 3. Динамика прибыли в зависимости от объема выпуска при наличии опциона на дополнительную продукцию.

Рассмотрим случай уменьшения отпускной цены с λ_0 до $\lambda_1 < \lambda_0$. Данное снижение приведет к росту спроса на продукцию с величины a_0, это тот объем выпуска, который возможен для предприятия в условиях отпускной цены λ_0, при этом затраты на производство минимальны: $\mu(a) \cong \mu_0[1+\mu_1(a-a_0)^2]$, до величины $a = a_0 + \Delta a$.

Учитывая условие $\lambda_1 > \mu(a)$, получаем $\beta > \beta_{\min} = \left(\frac{\mu(a)}{\mu_0}\right) / \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)$, где $\mu(a) \cong \mu_0[1+\mu_1(a-a_0)^2]$ и $\mu_1 = 0{,}1/m_0^2$.

На рис. 4. приведены нижние границы $\beta_{\min}$ в зависимости от изменения $\frac{a}{m_0} = 0{,}785;\ 0{,}888;\ 1{,}0.$

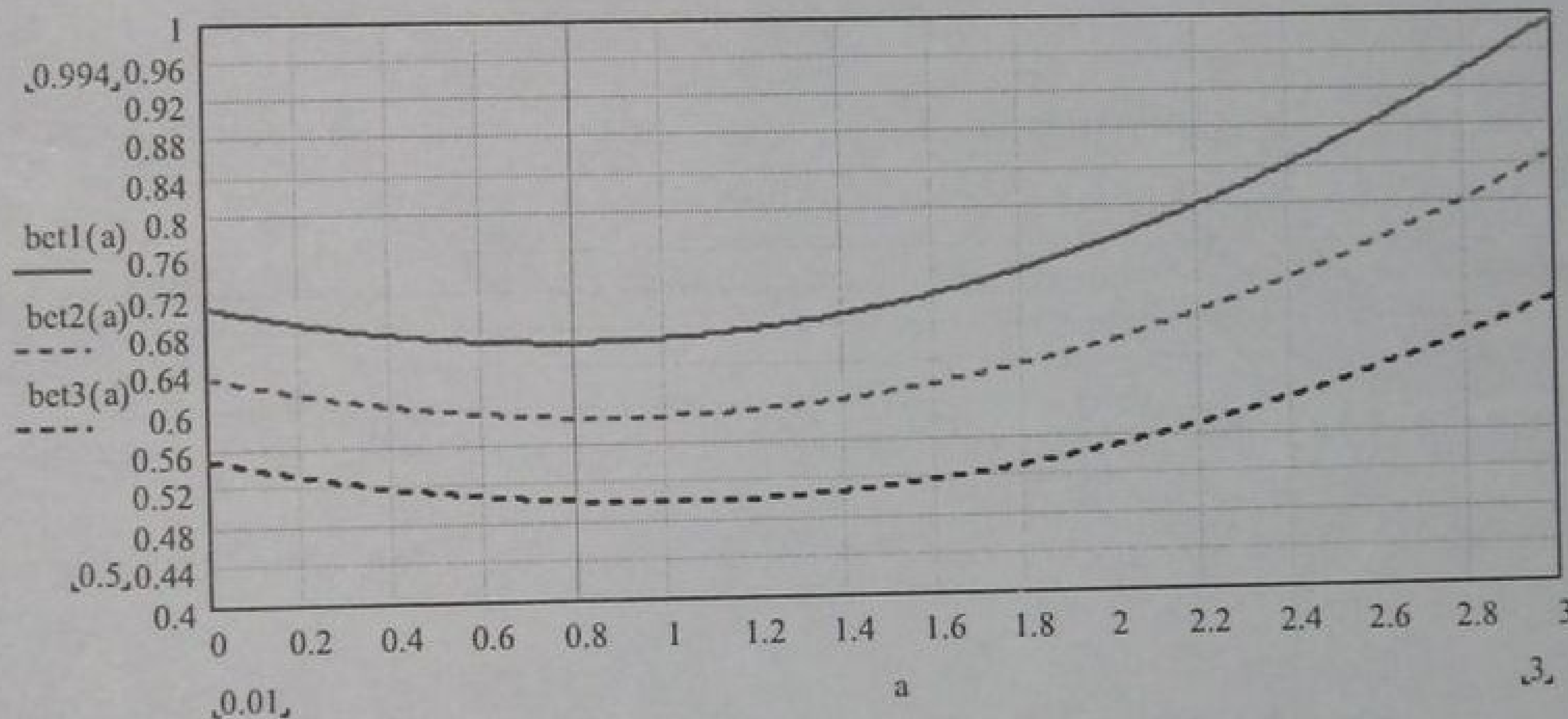

Рис. 4. Графики зависимости нижней границы $\beta_{\min}$ при изменении объема выпуска a/m_0 для $\lambda_0/\mu_0 = 1{,}5;1{,}7;\ 2{,}0$

В условиях идеального рынка, когда покупатели полностью ориентированы на прибыль и обладают полной информацией о происходящих изменениях, данное предположение, на первый взгляд, должно было бы привести к полной реализации любого количества продукции по любой сниженной цене. Тогда и объем выпуска был бы ограничен только увеличением расходов на выпуск в связи с нелинейной зависимостью расходов от объема:

$$\frac{\Pi_C(a,\lambda_1,\mu(a))}{\mu_0 m_0} = \left\{-\left[1+\mu_1\left(\frac{a-a_0}{m_0}\right)^2\right] + \frac{\lambda_1}{\mu_0}\right\}\left(\frac{a}{m_0}\right). \qquad (10)$$

Дифференцируя по a и приравнивая нулю, получим уравнение для определения оптимального значения a:

$$\psi(a) = -\frac{\mu(a)}{\mu_0} + \frac{\lambda_1}{\mu_0} - 2\mu_1 \frac{(a-a_0)}{m_0}\frac{a}{m_0} =$$

$$= \left[1 + \mu_1 \frac{(a-a_0)^2}{m_0^2}\right] + \frac{\lambda_1}{\mu_0} - 2\mu_1 \cdot \frac{(a-a_0)}{m_0} \cdot \frac{a}{m_0} = 0.$$

Поскольку теоретически даже снижение на небольшую величину должно вести к полной реализации, верхняя граница получается при $\lambda_1 = \lambda_0 - \varepsilon \approx \lambda_0$.

Отсюда имеем:

$$\frac{a}{m_0} \cong \frac{a_0}{m_0} + \frac{1}{18}\frac{\lambda_0/\mu_0 - 1}{\mu_1(a_0/m_0)}.$$

Например, для $\lambda_0/\mu_0 = 1{,}5;1{,}7;2{,}0$ имеем значения $a_0/m_0 = 0{,}785$; 0,888; 1,0 отсюда получим: $a/m_0 = 1{,}139;1{,}326;1{,}556$, соответственно. Данные величины являются максимально возможными при заданных издержках на производство и условии полного сбыта продукции и при отсутствии расходов на покупку гарантий со стороны третьих лиц на обеспеченную закупку продукции.

Рассмотрим сбыт продукции в условиях реального рынка. Тогда величина прибыли $\Pi(a, X, \lambda_1, \mu(a))$ есть случайная величина, так как зависит от величины спроса X: $\Pi(a, X, \lambda_1, \mu(a)) = -\mu(a)a + \lambda_1 \min(X, a)$.

Среднее значение равно:

$$\Pi_C(a, \lambda_1, \mu(a)) = E[\Pi(a, X, \lambda_1, \mu(a))] = -\mu(a)a + \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \min(x, a) dF(x; \lambda_1).$$

Функция распределения $F(x;\lambda_1)$ неизвестна в силу того, что m_0, σ_0, входящие в (3), есть функции цены: $m_0 = m_0(\lambda); \sigma_0 = \sigma_0(\lambda)$ и предполагаются известными только для $\lambda = \lambda_0$.

Для получения оценки величины $\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \min(x, a) dF(x;\lambda_1)$ можно поступить последующим образом. Покупатель заключает контракт с предприятием на покупку у него актива по цене исполнения $\lambda_1 = \beta\lambda_0 < \lambda_0$) (дорогой "call" опцион). В этом случае стоимость опциона будет равна $W_C = \widehat{W}_C \cdot S(0) = \widehat{W}_C \cdot (\lambda_0 a)$, где $\widehat{W}_C$ – премия "call" опциона с единицы стоимости продукции – с каждого рубля, вычисленная при цене исполнения λ_1 и при цене на дату заключения λ_0. Тогда предприятие получит премию за опцион в размере $W_C = \widehat{W}_C \cdot S(0) = \widehat{W}_C \cdot (\lambda_0 a)$. Кроме того, продаст актив в размере a по цене λ_1 при условии, что $\lambda(t) > \lambda_1$ и за вычетом издержек на производство в размере $\mu(a)a$.

Таким образом, для прибыли предприятия (математическое ожидание прибыли в случае снижения цены на продукцию) справедливо выражение[2]:

$$\Pi_C(a,\lambda_1,\mu(a)) = E[\Pi(a,X,\lambda_1,\mu(a))] =$$
$$= \widehat{W}_C(\beta)\cdot(\lambda_0 a) - \mu(a)a + (\lambda_1 a)\cdot P[\lambda(t) > \lambda_1]$$

или

$$\frac{\Pi_C(a,\lambda_1,\mu(a))}{\mu_0 m_0} = \widehat{W}_C(\beta)\cdot\beta\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_0}\cdot\frac{a}{m_0} - \frac{\mu(a)}{\mu_0}\frac{a}{m_0} + \\ + P[\lambda(t) > \lambda_0]\frac{\lambda_0}{\mu_0}\cdot\frac{a}{m_0}\cdot\beta, \qquad (11)$$

где $\beta = \lambda_1 / \lambda_0$.

Если предприятие – держатель опциона “call”, то оно является продавцом опциона третьей стороне и получает от нее премию. Предприятие обязуется поставить актив к моменту исполнения по определенной (“страйк”) цене D при любых обстоятельствах, а третья сторона купит актив в случае, если рыночная цена актива $S(t)$ на момент исполнения окажется выше цены исполнения D иначе откажется от покупки.

Премия за опцион “call” будет в размере:

$$W_C = E[e^{-\delta t} I_D],$$

где $I_D = (S(t) - D)_+$, δ – непрерывная норма процентной ставки.

Параметр m также определяется из условия:

$$E[e^{-\delta t} S(t)/S(0)] = 1 = e^{-\delta t}\int_0^\infty x\cdot f_L(x)dx = 1,$$

что также приводит к соотношению $m = (\delta - \sigma^2/2)$.

Вычисляя

$$\widehat{W}_C = \left[\frac{W_C}{S(0)}\right] = E\left[\frac{e^{-\delta t} I_D}{S(0)}\right] = \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\int_d^\infty [x-d]\cdot \mathrm{e}^{-(\ln x - mt)^2/(2\sigma^2 t)}\, dx/x,$$

где $d = D / S(0) = S(t) / S(0)$, при сделанных предположениях $d = \ln(\lambda_1 / \lambda_0) = \ln(\beta)$.

Тогда получаем:

$$\widehat{W}_C = \frac{W_C}{S(0)} = \Phi\left[\sigma\sqrt{t} + \frac{mt - \ln d}{\sigma\sqrt{t}}\right] - d \cdot e^{-\delta t} \cdot \Phi\left[\frac{(mt - \ln d)}{\sigma\sqrt{t}}\right] =$$

$$= \Phi\left[\frac{\delta t - \ln d}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}/2\right] - d \cdot e^{-\delta t} \cdot \Phi\left[\frac{(\delta t - \ln d)}{\sigma\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t}/2\right].$$

При этом для вероятности $P[\lambda(t) > \lambda_0]$ имеем:

$$P[\lambda(t) > \lambda_0] = P\left[\frac{\lambda(t)}{\lambda_0} > \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right] = -\Phi\left(\frac{\ln(\lambda_1 / \lambda_0) - mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(\beta) - mt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Получим параметры и оценки премии "call" опциона. При $t = 1/n$ - период производства (n - периодов в год); $\delta = \ln(1+i)$; пусть $\lambda_1 = \beta\lambda_0$,

Тогда цена на момент заключения $d = \lambda(t)/\lambda(0) = \beta$. При этом λ_1 должно быть больше $\mu(a)$: $\lambda_1 > \mu(a)$. Принимая, как и раньше, $\widehat{\sigma}^2 = (0,5)^2 = 0,25$); $i = 10\%$, $n = 1$.

Получим [2]:

$$\widehat{W}_C = W_C / S(0) = \Phi\left[\sigma\sqrt{t} + \frac{mt - \ln d}{\sigma\sqrt{t}}\right] - d \cdot e^{-\delta t} \cdot \Phi\left[\frac{(mt - \ln d)}{\sigma\sqrt{t}}\right] =$$

$$= \Phi\left[\frac{\sigma^2 t/2 + \delta - \ln\beta}{\sigma\sqrt{t}}\right] - \frac{\beta}{(1+i)} \cdot \Phi\left[\frac{\delta - \sigma^2 t/2 - \ln(\beta)}{\sigma\sqrt{t}}\right] =$$

$$= \Phi(z_1) - 0,9091 \cdot \Phi(z_2) \cdot \beta,$$

где $z_1 = 0,44062 - 2 \cdot \ln(\beta)$; $z_2 = -0,05938 - 2 \cdot \ln(\beta)$.

Для $P[\lambda(t) > \lambda_1]$ имеем:

$$P[\lambda(t) > \lambda_0] = \Phi[0.05938 - 2\ln(\beta)].$$

Таким образом, $\widehat{W}_C$ – функция от β:

$$\widehat{W}_C = \widehat{W}_C(\beta) = \Phi[0,44062 - 2\ln(\beta)] - 0,9091\Phi[-0,05938 - 2\ln(\beta)]\beta,$$

где $\beta > \beta_{\min} = (\frac{\mu(a)}{\mu_0}) / (\frac{\lambda_0}{\mu_0})$.

На рис. 5 приведен график зависимости нормированной стоимости call опциона $\widehat{W}_C = \widehat{W}_C(\beta)$.

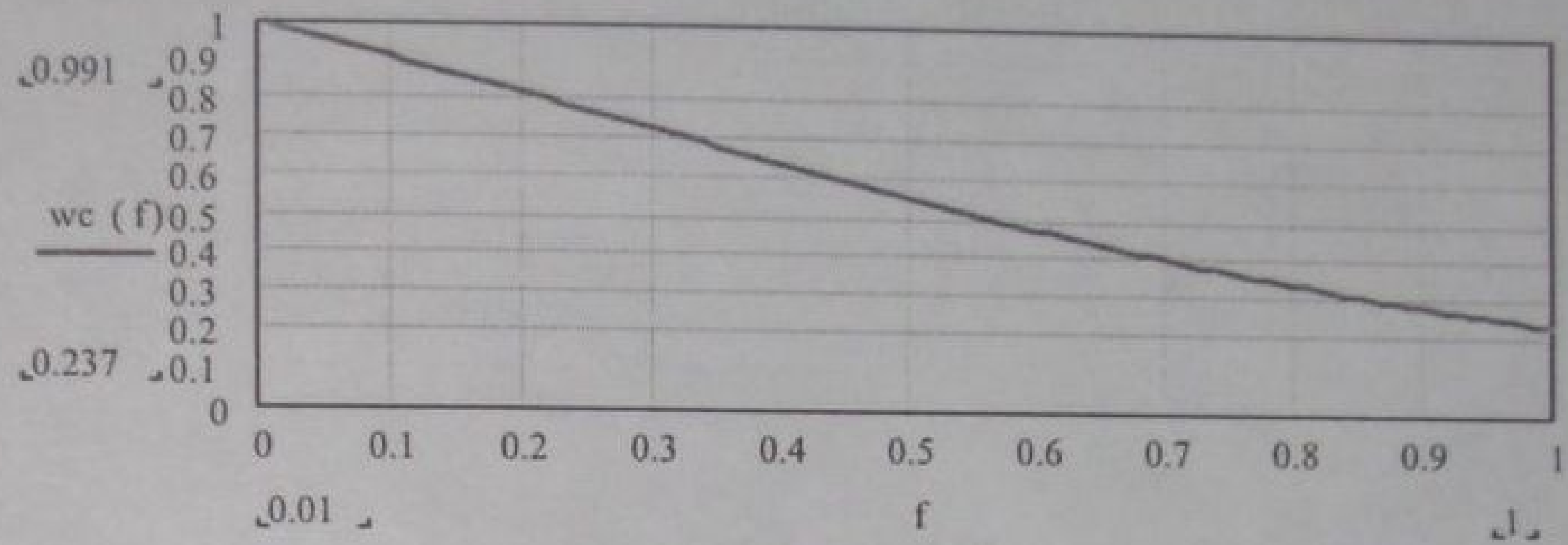

Рис. 5. График зависимости нормированной стоимости опциона "call" $\widehat{W}_C(\beta)$.

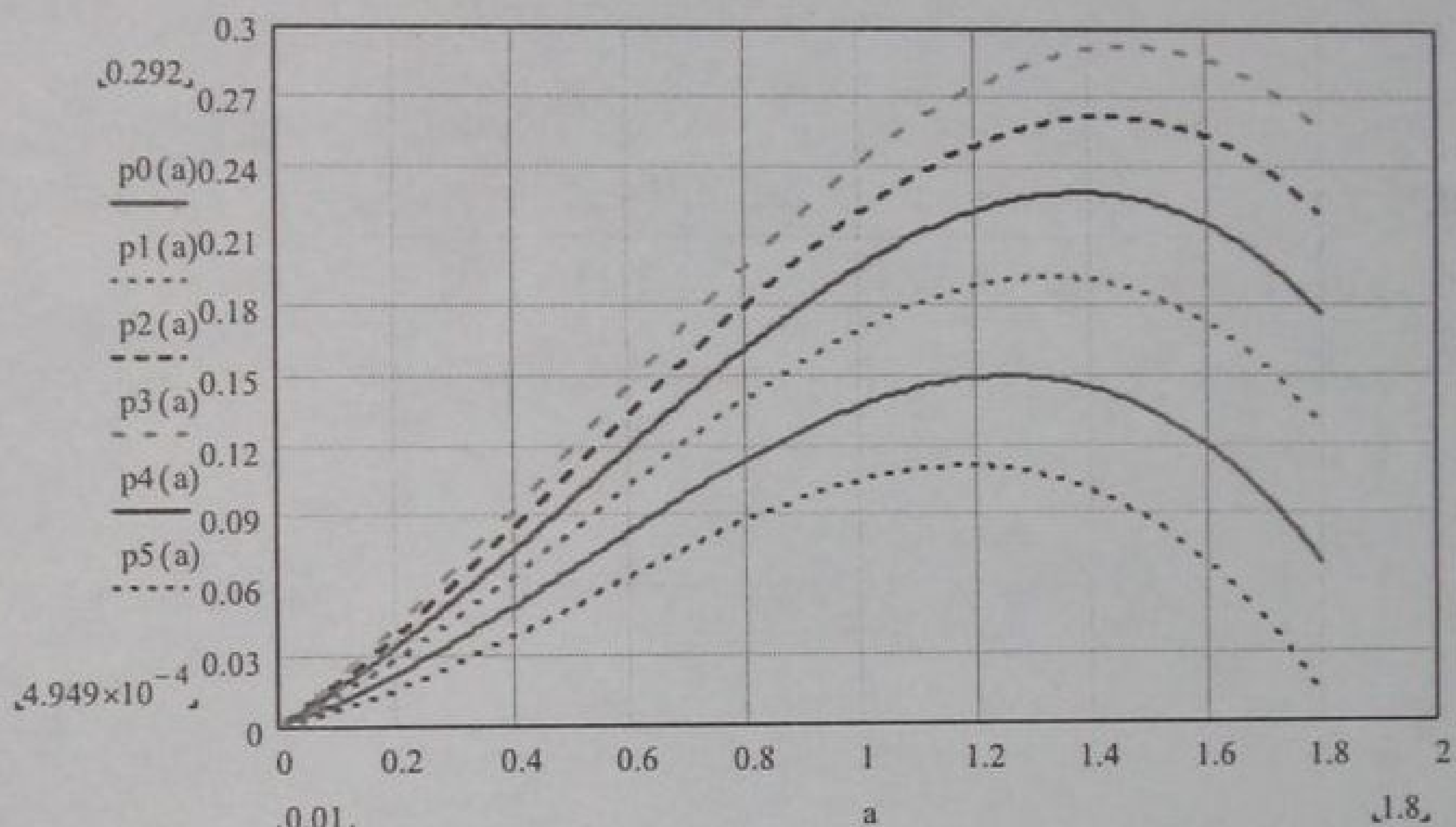

Рис. 6. Графики зависимости прибыли в случае снижения цены для случая $\lambda_0 / \mu_0 = 1,5$

Для величины прибыли имеем в этом случае выражение:

$$\frac{\Pi_C(a, \lambda_1, \mu(a))}{\mu_0 m_0} = \widehat{W}_C(\beta) \cdot \beta \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_0} \cdot \frac{a}{m_0} - \frac{\mu(a)}{\mu_0} \cdot \frac{a}{m_0} + P[\lambda(t) > \lambda_0] \frac{\lambda_0}{\mu_0} \cdot \frac{a}{m_0} \cdot \beta,$$

где $P[\lambda(t) > \lambda_0] = \Phi[0.05938 - 2\ln(\beta)]$.

На рис. 6 приведены графики зависимости прибыли в случае снижения цены для случая $\lambda_0 / \mu_0 = 1,5$; при $a_0 / m_0 = 0,785$; $\mu(a) \cong \mu_0[1 + \mu_1(a - a_0)^2]$, $\mu_1 = 0,1 / m_0^2$ в зависимости от изменения a / m_0 при различных значениях $\beta = 1.0; 0.95; 0.85; 0.75; 0.6; 0.5$. Наибольшая прибыль при снижении цены на 25% ($\beta = 0,75$).

Таким образом, в статье проведен анализ ценовой динамики прибыли с использованием методов хеджирования риска. В частности, анализ проведен на основе опциона «put» и «call». Кроме того, получено выражение для расчета прибыли в случае, когда опцион выписан на всю продукцию и только на её часть. Для каждого рассмотренного случая получены зависимости прибыли от изменения ее объема при различных значениях доли затрат из расчета на единицу продукции.

Библиографический список

1. Панджер, Х. Финансовая экономика с приложениями к инвестированию, страхованию и пенсионному делу / Х. Панджер [и др.]; пер. с англ. А.А. Новоселова, под ред. В.К. Малиновского. – М.: Янус-К, 2005. – 546 с.

E.V. Mihailova, V.N. Nikishov, L.A. Saraev

PRICE DYNAMICS OF PROFIT AND ITS ESTIMATION METHODS OF THE FINANCIAL ANALYSIS

The paper is devoted to the analysis of price dynamics have arrived methods of the financial analysis. In particular, methods of hedging of risk are used. Parameters and estimations of the award of an option «put» and «call» are received. Dynamics is considered have arrived in a case when the option is written out on all production and only on its part. As result expressions for profit are received. Dependences of profit on change of volume of profit are received at various values of a share of expenses at the rate on a unit of production.

Keywords and phrases: *financial analysis, risk hedging method, profit dynamics.*

Статья принята в печать в окончательном варианте 26.12.06 г.