УДК 296.4

*В.М. Монтлевич, И.А. Бородинова*[*]

# О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ МНОГОПРОДУКТОВЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

Данная статья посвящена проблеме решения многопродуктовых задач, позволяющих оптимизировать транспортные перевозки. В статье рассмотрены математические модели перевозок для различных категорий товаров и приведено доказательство разрешимости двухпродуктовых задач.

***Ключевые слова и фразы:*** *транспортная задача, многопродуктовая транспортная задача, категория товаров, продуктивность, оптимизация перевозок, условие разрешимости, взаимозаменяемость товаров.*

Процессы транспортировки являются одним из обязательных элементов функционирования любой экономической системы, транспорт является неотъемлемой частью всех производственных и торговых процессов. Имеющиеся данные свидетельствуют о том, что доля транспортных затрат в цене товара весьма значительна и может достигать 25-30%. Поэтому снижение расходов на перевозку товаров было и остается важной и актуальной задачей управления экономической системой. Математическими моделями задач оптимального планирования перевозки товаров являются соответствующие задачи линейного программирования транспортного типа. Задачи транспортного типа составляют специальный класс задач линейного программирования, специфичность которого связана с особой структурой матрицы ограничений, что позволяет строить для их решения алгоритмы, более эффективные, чем стандартный симплекс-метод.

Первые работы об оптимизации перевозок относятся к середине 30-х годов XX в. и связаны с именами советских математиков А.С. Толстого и Л.В.Канторовича. Систематическое же изучение транспортных моделей началось десятилетием позднее в работах американских ученых Хичкока, Купманса, Данцига и др.

---


Монтлевич Владимир Михайлович, Бородинова Ирина Александровна, кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Исторически первой и наиболее изученной транспортной моделью является классическая транспортная задача перевозки одного вида товара (однопродуктовая) и некоторые ее варианты. Для этой модели разработана развитая теория и эффективные модификации прямого и двойственного симплекс-метода, известные как метод потенциалов и венгерский метод [1]. Дальнейшее изучение этого класса задач пошло в основном в направлении многоиндексных транспортных моделей, посредством которых могут описываться ситуации перевозки товара различными видами транспорта, перевозка нескольких видов товара, динамические задачи перевозок и ряд других [2-4]. Однако, многоиндексные транспортные модели не отражают особенностей, связанных с перевозкой разнородных товаров. С практической же точки зрения такие задачи более естественны, чем однопродуктовые. Поэтому представляет интерес изучение различных постановок, особенностей и методов решения многопродуктовых транспортных задач.

Приведем некоторые постановки многопродуктовых транспортных задач. Введем обозначения. Пусть имеется m пунктов производства, $n$ пунктов потребления, $k$ видов продукта. Не теряя общности, можем считать, что в каждом пункте производятся (потребляются) все виды продуктов. Тогда объем производства в $i$-м пункте представим в виде вектора $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})$, объем потребления в $j$-ом пункте – в виде $b_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jk})$, стоимость перевозки единицы продуктов из $i$-го пункта производства в $j$-й пункт потребления $c_{ij} = (c_{ij1}, c_{ij2}, \dots, c_{ijk})$, а объем перевозок из $i$-го пункта в $j$-й $x_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijk})$.

Тогда суммарные транспортные затраты будут выражены в виде

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} < c_{ij}, x_{ij} > . \qquad (1)$$

Ограничения задачи будут существенно зависеть от характера перевозимых товаров. Рассмотрим ситуацию с этой точки зрения. Все товары можно разделить на три категории:

– независимые товары, когда спрос на товар не зависит от спроса на остальные и не может быть удовлетворен за счет потребления других товаров;

– дополняющие товары (товары-комплименты), спрос на которые зависит от спроса на другие товары, но не может быть удовлетворен за счет потребления других товаров;

– взаимозаменяемые товары (товары-субституты), спрос на которые может быть удовлетворен за счет потребления других товаров.

Рассмотрим модели перевозок для каждой категории товаров.

**Независимые товары**

В этом случае ограничения задачи можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{, где } i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{, где } j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0. \tag{4}$$

Очевидно, что задача (1)-(4) распадается на $k$ независимых однопродуктовых подзадач.

**Дополняющие товары**

Основная задача, которая возникает в этом случае, – это задача определения полного спроса на товары в пунктах потребления. Пусть $b_j^0$ – начальный планируемый вектор спроса на товары в пункте $j$; $b_j$ – полный спрос; $\alpha_{pq}$ – спрос на товар $q$, порождаемый единицей потребления товара $p$; $\alpha_{pp}= 0$, A – матрица размерности $k \times k$, составленная из элементов $\alpha_{pq}$. Тогда полный спрос в пункте $j$ будет неотрицательным решением системы уравнений вида

$b_j - Ab_j = b_j^0$ или

$(E - A)b_j = b_j^0$, где $E$ – единичная матрица.

Условия существования неотрицательных решений для систем такого типа (условия продуктивности матрицы А) хорошо известны [5, 6].

После того как полный спрос на все виды товаров определен, задача сводится к случаю 1 с независимыми товарами.

**Взаимозаменяемые товары**

В случае взаимозаменяемых товаров потребность в одном товаре может быть удовлетворена некоторым объемом других товаров. Для любой пары товаров $i$ и $j$ обозначим через $\alpha_{ij}$ количество товара $i$, необходимое для замены единицы товара $j$, А – матрица размерности $k \times k$, составленная из элементов $\alpha_{ij}$. Пусть в пункт потребления $j$ завезли набор продуктов $x_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \ldots, x_{ijk})$. Каждый из продуктов может использоваться, во-первых, для удовлетворения спроса в нем самом и, во-вторых, для удовлетворения спроса на другие продукты, которые могут быть заменены им. Таким образом, объем поставки каждого товара в п. $j$ должен быть представлен в виде k слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijl} = y_{jl}^{1} + y_{jl}^{2} + \ldots + y_{jl}^{k}, \qquad (5)$$

где $y_{jl}^{p}$ – часть поставки продукта $l$ в п. $j$, которая используется для замещения продукта $p$.

Условие удовлетворения спроса, с учетом взаимозаменяемости, запишем в виде

$$\sum_{l=1}^{k} \alpha_{lp} y_{jl}^{p} = b_{jp}, \qquad j = \overline{1,n}; \quad \mathrm{p} = \overline{1,\mathrm{k}}. \qquad (6)$$

Таким образом, получаем следующую формулировку задачи оптимизации перевозок взаимозаменяемых товаров: минимизировать (1) при условиях (2), (4), (5), (6). В такой постановке задача существенно отличается от планарной трехиндексной транспортной задачи, которая обычно рассматривается как многопродуктовая модель перевозки.

Исследуем частный случай двух товаров (k=2). Запишем модель для этого случая в следующем виде:

$$L = \sum_{p=1}^{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{p} x_{ij}^{p} \to \min, \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{p} = a_{i}^{p} \qquad p = \overline{1,2}, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (8)$$

$$\sum_{i} x_{ij}^{1} = y_{j}^{1} + y_{j}^{2} \qquad j = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

$$\sum_{i} x_{ij}^{2} = z_{j}^{1} + z_{j}^{2} \qquad j = \overline{1,n}, \qquad (10)$$

$$y_{j}^{1} + \alpha z_{j}^{1} = b_{j}^{1} \qquad j = \overline{1,n} \qquad (11)$$

$$\beta y_{j}^{2} + z_{j}^{2} = b_{j}^{2} \qquad j = \overline{1,n}, \qquad (12)$$

$$x_{ij}^{p}, y_{j}^{p}, z_{j}^{p} \geq 0. \qquad (13)$$

Здесь $y^{1}_{j}$, $y^{2}_{j}$ – части поставки в п.j 1-го товара. $y^{1}_{j}$ – часть на покрытие потребности в самом 1-м товаре, $y^{2}_{j}$ – часть на покрытие потребности во 2-м товаре. Аналогично определяются $z^{1}_{j}$, $z^{2}_{j}$. □ – коэффициент замены 1-го товара вторым, □ – коэффициент замены 2-го товара первым.

Теорема 1. (*Достаточное условие разрешимости*). Для разрешимости задачи (7)–(13) достаточно выполнения условий:

1) $\beta\sum_{i=1}^{m} a_{i}^{1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i}^{2} = \beta\sum_{j=1}^{n} b_{j}^{1} + \sum_{j=1}^{n} b_{j}^{2}$,

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i^1 + \alpha \sum_{i=1}^{m} a_i^2 = \sum_{j=1}^{n} b_j^1 + \alpha \sum_{j=1}^{n} b_j^2$.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную однопродуктовую задачу с n пунктами потребления и 2m пунктами производства. Параметры задачи определим следующим образом.

$$\widetilde{a}_i = \begin{cases} \beta a_i^1, i \le m \\ a_{i-m}^2, i > m \end{cases};$$

$$\widetilde{b}_j = \beta b_j^1 + b_j^2;$$

$$\widetilde{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}^1, i \le m \\ c_{ij}^2, i > m \end{cases}.$$

В силу условия 1) $\sum_{i=1}^{2m} \widetilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_j$ и задача имеет решение $\widetilde{x}_{ij}$. Положим $x_{ij}^1 = \frac{\widetilde{x}_{ij}}{\beta}$ для i≤m, $x_{(i-m)j}^2 = \widetilde{x}_{ij}$ для i>m. Тогда $\sum_{j=1}^{n} \beta x_{ij}^1 = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_{ij} = \beta a_i^1$. Аналогично $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_{(i+m)j} = a_i^2$ для всех $i \le m$, т.е. условия (8) задачи (7)-(13) выполняются.

Далее,

$$\sum_{i=1}^{2m} \tilde{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \beta x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 = \widetilde{b}_j = \beta b_j^1 + b_j^2. \qquad (*)$$

Пусть $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 = b_j^2$, тогда из (*) следует $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^1 = b_j^1$. Положим $y_j^1 = b_j^1, y_j^2 = 0, z_j^1 = 0, z_j^2 = b_j^2$. Очевидно, ограничения (9)-(13) для этих переменных будут выполняться. Пусть теперь $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 < b_j^2$. Тогда из (*) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^1 > b_j^1$.

Положим $z_j^1 = 0, z_j^2 = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2, y_j^1 = b_j^1, y_j^2 = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^1 - b_j^1$. Условия (9)-(11) очевидно выполняются. Проверим выполнимость условия (12). $\beta y_j^2 + z_j^2 = \beta \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^1 - \beta b_j^1 + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{2m} \widetilde{x}_{ij} - \beta b_j^1 = \beta b_j^1 + b_j^2 - \beta b_j^1 = b_j^2$, т.е. (12)

также выполняется. Случай $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 > b_j^2$ рассматривается аналогично с учетом условия 2). Таким образом, теорема полностью доказана.

Свойства задачи (1), (2), (4), (5), (6) зависят не только от числа перевозимых товаров, но и от характера взаимосвязей между ними. Рассмотрим два частных случая.

1. В двухпродуктовой задаче только один из двух товаров может быть заменен другим. Для определенности 1-й заменяет второй, обратная замена недопустима. Тогда $\alpha$=0, $z^1_j$=0. Задача (7)-(13) примет вид

$$L = \sum_{p=1}^{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^p x_{ij}^p \to \min, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^p = a_i^p \qquad p = \overline{1,2}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{15}$$

$$\sum_i x_{ij}^1 = b_j^1 + y_j^2 \qquad j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

$$\sum_i x_{ij}^2 = z_j^2 \qquad j = \overline{1,n}, \tag{17}$$

$$\beta y_j^2 + z_j^2 = b_j^2 \qquad j = \overline{1,n}, \tag{18}$$

$$x_{ij}^p, y_j^p, z_j^p \geq 0. \tag{19}$$

Условие разрешимости в этом случае может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 2. Для разрешимости задачи (14)–(19) необходимо и достаточно выполнения условий:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i^1 \geq \sum_{j=1}^{n} b_j^1$,

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + \beta(\sum_{i=1}^{m} a_i^1 - \sum_{j=1}^{n} b_j^1) = \sum_{j=1}^{n} b_j^2$.

Необходимость вытекает непосредственно из условий задачи (14)-(19), доказательство достаточности подобно доказательству теоремы 1.

2. Распространим рассмотренный выше случай на задачу с $k$ продуктами. Будем считать, что продукты $P_1$, $P_2$, …, $P_k$ упорядочены таким образом, что потребность в продукте Pt может быть удовлетворена только продуктами $P^s$, $s \leq t$. Введем отношение взаимозаменяемости товаров: $P_t 7 P_s \Leftrightarrow$ товар $P_t$ заменяет $P_s$. Отношение 7 рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. является от-

ношением порядка. Будем предполагать, что порядок линейный. Тогда справедлива следующая

Теорема 3. Пусть в задаче (1), (2), (4), (5), (6) отношение взаимозаменяемости товаров является нестрогим линейным порядком. Тогда для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^1 \geq \sum_{j=1}^{m} b_j^1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^s + \sum_{t=1}^{s-1} (\alpha_{ts} \sum_{i=1}^{n} h_{it}) \geq \sum_{j=1}^{n} b_j^s, \qquad s = \overline{2,k},$$

где $h_{it}$ – остаток товара $t$, оставшийся в пункте производства $i$ после удовлетворения потребности в товарах, предшествующих s в отношении 7.

Доказательство проводится индукцией по номеру товара, аналогично доказательству теоремы 2.

***Библиографический список***

1. Гольштейн, Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

2. Раскин, Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.

3. Емеличев, В.А. Многогранники, графы, оптимизация / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 342 с.

4. Верховский, Б.С. Многомерные задачи линейного программирования типа транспортной / Б.С. Верховский // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 515-518.

5. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

6. Колемаев, В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 399 с.

*V.M. Montlevich, I.A. Borodinova*

## ABOUT SOME TASKS OF MULTICOMMODITY TRANSPORTING PROBLEMS

The paper deals with the question of solving of multi-component problems allowing optimizing transportation. The mathematical models of transportations for different categories of goods are considered and the proofs of solvability of two-component problems are given in the article.

***Keywords and phrases:*** *transportation problem, multi-component transportation problem, category of goods, productivity, optimization of transportations, conditions of solvability, interchangeability of goods (trade-off of goods).*

Статья принята в печать в окончательном варианте 04.12.08 г.