



**САМАРСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный  
исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва



# **ВЕСТНИК**

**САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

## **ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

# **VESTNIK**

**OF SAMARA UNIVERSITY**

## **NATURAL SCIENCE SERIES**

ISSN 2541-7525 Print  
ISSN 2712-8954 Online

**ТОМ 30 • №3 • 2024 ГОД**

ISSN 2541-7525 Print  
ISSN 2712-8954 Online  
Подписной индекс 80307

**ВЕСТНИК  
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

**VESTNIK  
OF SAMARA UNIVERSITY  
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Математика*
- *Механика*
- *Математическое моделирование*
- *Математические методы в естественных науках*
- *Физика*

**ТОМ 30 • № 3 • 2024 ГОД**

## УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»  
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru DOAJ zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ  
Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета»,  
с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series»

Выходит 4 раза в год Т. 30, № 3, 2024

### Главный редактор:

**А.Б. Прокофьев**, д-р тех. наук, доц., зав. кафедрой теории двигателей летательных аппаратов имени В.П. Лукачева, первый проректор — проректор по научно-исследовательской работе (Самара, Самарский университет, РФ)

### Заместители главного редактора:

**С.В. Асташкин**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

**Л.В. Степанова**, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

### Ответственный секретарь:

**М.А. Лихобабенко**, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

*Т.И. Кузнецовой*

Компьютерная верстка, макет

*М.А. Лихобабенко*

Выпускающий редактор

*Т.А. Мурзинова*

Информация на английском языке

*М.С. Стрельникова*

**Издатель и учредитель:** Самарский университет

**Адрес издателя и учредителя:**

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

**Центр периодических изданий Самарского университета**

**Адрес редакции:** 443011, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

**E-mail:** [nvestnik@ssau.ru](mailto:nvestnik@ssau.ru)

**www:** <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Периодическое печатное издание, журнал, зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

**Подписной индекс в Объединенном интернет-каталоге «Пресса России» 80307**

**ISSN 2541-7525 Print**

**ISSN 2712-8954 Online**

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 15.10.2024. Дата выхода в свет 25.10.2024  
Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 13.

Тираж 200 экз. (первый завод — 25 экз.). Заказ №

**Отпечатано в типографии Самарского университета**

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

**www:** <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

### Редакционная коллегия:

**В.Н. Аязов**, д-р физ.-мат. наук, директор (Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Самара, РФ), профессор кафедры физики (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, РФ)

**В.Э. Видельман**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

**А.В. Горюхов**, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

**А.М. Зюзин**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

**В.В. Иважник**, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

**А.И. Кожанов**, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

**М.А. Лежан**, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

**С.А. Лычев**, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Механики технологических процессов (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

**Константин Панкрашкин**, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

**А.Н. Панов**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

**Давиде М. Прозертио**, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

**Л.С. Пулькина**, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

**С.Г. Пятков**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

**В.В. Ревин**, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

**В.А. Салеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самарский университет, Самара, РФ)

**В.А. Соболев**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самарский университет, Самара, РФ)

**П.А. Терехин**, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

**К.Б. Устинов**, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Геомеханики (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

**А.И. Хромов**, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2024

ISSN 2541-7525 Print  
ISSN 2712-8954 Online  
Subscription Index 80307

**VESTNIK  
SAMARSKOGO UNIVERSITETA  
ESTESTVENNONAUCHNAYA SERIYA**

**VESTNIK  
OF SAMARA UNIVERSITY  
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mechanics*
- *Mathematical  
Modelling*
- *Mathematical  
Methods  
in Natural  
Sciences*
- *Physics*

**VOL. 30 • № 3 • 2024**

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER  
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education  
«Samara National Research University»  
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru DOAJ zbMATH MathSciNet  
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation  
The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —  
"Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series"  
It is published 4 times a year V. 30, № 3, 2024

**Chief editor:**

**A.B. Prokofiev**, Dr. of Engineering Sci., associate professor, head of the Department of Theory of Aircraft Engines named after V.P. Lukacheva, first vice-rector — vice-rector for research (Samara, Samara National Research University, RF)

**Deputy chief editors:**

**S.V. Astashkin**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

**L.V. Stepanova**, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, RF)

**Executive editor:**

**M.A. Likhobabenko**, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

*T.I. Kuznetsova*

Computer makeup, dummy

*M.A. Likhobabenko*

Executive editor

*T.A. Murzinova*

Information in English

*M.S. Strelnikov*

**Publisher and Founder:** Samara National Research University

**Address publisher and founder:**

34, Moskovskoye shosse,

Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

**Centre of Periodical Publications of Samara University**

**Address of editorial staff:** 1, Akademika Pavlova Street, Samara, 443011, Samara region, Russian Federation.

**E-mail:** [nvestnik@ssau.ru](mailto:nvestnik@ssau.ru)

**www:** <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media **Пи № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

**Subscription Index in the United catalog of Internet «Press of Russia» 80307**

**ISSN 2541-7525 Print**

**ISSN 2712-8954 Online**

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 15.10.2024. Date of publication 25.10.2024

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 13.

Circulation 200 copies (first printing – 25 copies).

Order №

**Printed on the printing house of Samara University**

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian Federation

**www:** <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

**Editorial board:**

**V.N. Azyazov**, Dr. of Phys.-Math. Sci., head (Samara Branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia), prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

**V.E. Videlman**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm National Research Polytechnic University, Perm, RF)

**A.V. Gorokhov**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

**A.M. Zyuzin**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National University, Saransk, RF)

**V.V. Ivakhnik**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara National Research University, Samara, RF)

**A.I. Kozhanov**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

**M.A. Legan**, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF)

**S.A. Lychev**, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Mechanics of Technological Processes (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

**Konstantin Pankrashkin**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay, France)

**A.N. Panov**, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara National Research University, Samara, RF)

**Davide M. Proserpio**, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

**L.S. Pulkina**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National University, Samara, RF)

**S.G. Pyatkov**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

**V.V. Revin**, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia National Research University, Saransk, RF)

**V.A. Saleev**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

**V.A. Sobolev**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Differential Equations and Control Theory, prof. of the Department of Engineering Cybernetics (Samara National Research University, Samara, RF)

**P.A. Terekhin**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov State University, Saratov, RF)

**K.B. Ustinov**, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Geomechanics (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

**A.I. Khromov**, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

© Samara University, 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

- Асташкин С.В., Ершов В.М.** Два замечания о свойствах функций ограниченной вариации ..... 7
- Гасанова Э.Э., Пулькина Л.С.** Решение задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным краевым условием ..... 17

### Механика

- Мехеда В.А.** Моделирование упруго-пластического деформирования приповерхностных слоев материалов ..... 25

### Математическое моделирование

- Карпов Е.А.** Динамика балки Эйлера — Бернулли с учетом распределенных гистерезисных свойств ..... 35
- Семенов М.Е., Толкачев А.В., Канищева О.И.** Механическая модель турбулентности ..... 63

### Математические методы в естественных науках

- Горелов Ю.Н., Курганская Л.В.** К задаче оптимального управления переориентацией оси вращения космического аппарата ..... 76

### Физика

- Багров А.Р., Башкиров Е.К.** Динамика перепутывания атомов в трехкубитной модели Тависа — Каммингса с диполь-дипольным взаимодействием ..... 89

- Требования к оформлению статей* ..... 104

## CONTENTS

### Mathematics

- Astashkin S.V., Ershov V.M.** Two remarks on properties of functions of bounded variation **7**  
**Gasanova E.E., Pulkina L.S.** Solution of certain problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional wave equation ..... **17**

### Mechanics

- Mekheda V.A.** Modeling of elastic plastic deformation of near-surface layers of materials **25**

### Mathematical Modelling

- Karpov E.A.** Dynamics of the Euler — Bernoulli beam with distributed hysteresis properties **35**  
**Semenov M.E., Tolkachev A.V., Kanishcheva O.I.** A simple mechanical model of turbulence ..... **63**

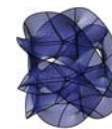
### Mathematical Methods in Natural Sciences

- Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V.** On the problem of optimal control of rotation axis reorientation of a spacecraft ..... **76**

### Physics

- Bagrov A.R., Bashkirov E.K.** Dynamics of entanglement of qubits in the three-qubit Tavis — Cummings model with dipole-dipole interaction ..... **89**

- Requirements to the design of articles* ..... **104**



# Два замечания о свойствах функций ограниченной вариации

Асташкин С.В. , Ершов В.М. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; [astash56@mail.ru](mailto:astash56@mail.ru) (С.В.); [erшов189510@yandex.ru](mailto:erшов189510@yandex.ru) (В.М.);

Поступила: 18.07.2024

Рассмотрена: 22.08.2024

Принята: 02.09.2024

Научная статья



**Аннотация.** В терминах вариаций доказано достаточное условие равномерной сходимости последовательностей непрерывных функций. С помощью этого результата получено дополнение классической теоремы Хелли о выделении сходящихся последовательностей функций с равномерно ограниченными вариациями в случае, когда предельная функция непрерывна. Кроме того, на примере показано, что условие непрерывной дифференцируемости функции, обеспечивающее дифференцируемость ее вариации с переменным верхним пределом, является в определенном смысле точным.

**Ключевые слова:** вариация; функция ограниченной вариации; равномерная сходимость; модуль непрерывности; теорема Хелли; теорема Штольца.

## Введение

Пусть дана функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Напомним, что ее *полной вариацией* на  $[a, b]$  называется величина

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

где супремум берется по множеству всех разбиений  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Если  $V_a^b(f) < \infty$ , то говорят, что  $f$  — *функция ограниченной вариации*; множество всех функций ограниченной вариации на  $[a, b]$  является линейным пространством и обозначается через  $V([a, b])$ .

Пространство  $V([a, b])$  играет важную роль во многих вопросах теории функций и функционального анализа. С ним тесно связано применение интеграла Стильтьеса при решении самых разных задач. В частности, на его использовании основано доказательство классической теоремы Ф. Рисса о том, что пространство  $V([a, b])$ , рассматриваемое с нормой  $\|f\|_V := V_a^b(f)$ , изометрично пространству всех линейных ограниченных функционалов на пространстве  $C([a, b])$  (см., например, [3, гл. VI, § 6, теор. 4] или [2, с. 309]). Кроме того, пространство  $V([a, b])$  может быть отождествлено со множеством всех ограниченных борелевских мер (вообще говоря, знакопеременных), определенных на отрезке  $[a, b]$  [1, предложение 4.2.9].

В данной статье рассматриваются два вопроса, связанные со свойствами функций ограниченной вариации. Во-первых, в терминах вариаций доказано достаточное условие равномерной сходимости последовательностей непрерывных функций. Во-вторых, найдены условия, при которых вариация функции с переменным верхним пределом дифференцируема; приведен пример, показывающий точность этих условий.

Всюду далее, как обычно,  $C([a, b])$  и  $C^1([a, b])$  — пространства непрерывных и соответственно непрерывно-дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций.



## 1. Об одном достаточном условии равномерной сходимости последовательностей непрерывных функций ограниченной вариации

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность невозрастающих функций на  $[a, b]$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$  для всех  $t \in [a, b]$ , где  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда сходимость последовательности  $\{f_n\}$  к  $f$  равномерна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $\omega(g, \eta)$ ,  $\eta > 0$ , модуль непрерывности функции  $g$ , определенной на  $[a, b]$ , т. е.

$$\omega(g, \eta) := \sup_{a \leq t_1, t_2 \leq b, |t_1 - t_2| \leq \eta} |g(t_1) - g(t_2)|,$$

и покажем, что

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(f_n, \eta) = 0. \quad (1)$$

Предполагая противное, найдем  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $\eta > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(f_n, \eta) > \varepsilon_0.$$

Тогда в силу непрерывности  $f$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\omega(f, \delta) < \frac{\varepsilon_0}{3}. \quad (2)$$

Согласно предыдущему неравенству, найдутся номера  $n_1 < n_2 < \dots$  и точки  $t_k, s_k \in [a, b]$ ,  $t_k < s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , для которых выполнено:

$$s_k - t_k < \frac{\delta}{2} \text{ и } f_{n_k}(t_k) - f_{n_k}(s_k) > \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, можно считать, что  $t_k \rightarrow t_0$ ,  $s_k \rightarrow s_0$ , где  $t_0, s_0 \in [a, b]$ . Очевидно, что  $0 \leq s_0 - t_0 \leq \delta/2$ .

Предположим, что  $a < t_0$  и  $s_0 < b$ . Тогда для некоторого  $\eta \in (0, \delta/4)$  и всех достаточно больших  $k$

$$a < t_0 - \eta < t_k < s_k < s_0 + \eta < b,$$

поэтому в силу второго неравенства в (3) и монотонности функций  $f_n$  получим

$$\varepsilon_0 < f_{n_k}(t_k) - f_{n_k}(s_k) \leq f_{n_k}(t_0 - \eta) - f_{n_k}(s_0 + \eta). \quad (4)$$

В то же время, если  $k$  достаточно велико, то по условию

$$\max(|f_{n_k}(t_0 - \eta) - f(t_0 - \eta)|, |f_{n_k}(s_0 + \eta) - f(s_0 + \eta)|) < \frac{\varepsilon_0}{3},$$

и, значит, так как  $0 < (s_0 + \eta) - (t_0 - \eta) = (s_0 - t_0) + 2\eta < \delta$ , в силу (2)

$$\begin{aligned} f_{n_k}(t_0 - \eta) - f_{n_k}(s_0 + \eta) &\leq |f_{n_k}(t_0 - \eta) - f(t_0 - \eta)| + \\ &+ |f(t_0 - \eta) - f(s_0 + \eta)| + \\ &+ |f_{n_k}(s_0 + \eta) - f(s_0 + \eta)| < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Так как последнее неравенство противоречит (4), то (1) в этом случае доказано.

Если  $t_0 = a$ , то опять для некоторого  $\eta \in (0, \delta/2)$  и всех достаточно больших  $k$

$$a \leq t_k < s_k < s_0 + \eta < b.$$

Далее так же, как и ранее, с одной стороны,

$$\varepsilon_0 < f_{n_k}(t_k) - f_{n_k}(s_k) \leq f_{n_k}(a) - f_{n_k}(s_0 + \eta).$$

С другой стороны, так как для достаточно больших  $k$

$$\max(|f_{n_k}(a) - f(a)|, |f_{n_k}(s_0 + \eta) - f(s_0 + \eta)|) < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

и  $0 < (s_0 + \eta) - a = (s_0 - a) + \eta < \delta$ , применяя (2), получим

$$\begin{aligned} f_{n_k}(a) - f_{n_k}(s_0 + \eta) &\leq |f_{n_k}(a) - f(a)| + |f(a) - f(s_0 + \eta)| + \\ &+ |f_{n_k}(s_0 + \eta) - f(s_0 + \eta)| < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Случай, когда  $s_0 = b$ , рассматривается совершенно аналогично.

Теперь доказательство леммы получается стандартным образом. Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно, а  $\eta > 0$  таково, что  $\omega(f, \eta) < \varepsilon/3$  и в силу (1)  $\omega(f_n, \eta) < \varepsilon/3$  для всех достаточно больших  $n$ . По условию для каждого  $t \in [a, b]$  найдется  $n_t \in \mathbb{N}$  такое, что  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$  для всех  $n > n_t$ . Тогда, если  $|s - t| < \eta$ , то в силу выбора  $\eta$  для всех достаточно больших  $n$  имеем:

$$|f_n(s) - f(s)| \leq |f_n(s) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| + |f(t) - f(s)| \leq \omega(f_n, \eta) + \frac{\varepsilon}{3} + \omega(f, \eta) < \varepsilon.$$

Так как по соображениям компактности  $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m (t_i - \eta, t_i + \eta)$  для некоторого конечного набора точек  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , то отсюда  $|f_n(s) - f(s)| < \varepsilon$  для любого  $s \in [a, b]$  и всех достаточно больших  $n$ .  $\square$

Применяя лемму 1, а также известное представление функций ограниченной вариации, нетрудно получить следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть функции  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определенные на  $[a, b]$ , имеют равномерно ограниченные вариации, т. е.  $V_a^b(f_n) \leq C$  для некоторого  $C > 0$  и всех  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$  для всех  $t \in [a, b]$  и  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то сходимость последовательности  $\{f_n\}$  к  $f$  равномерна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Напомним, что каждая функция ограниченной вариации  $g$  на  $[a, b]$  представима в виде разности двух невозрастающих функций. Точнее (см., например, [4, гл. VIII, § 3, доказательство теоремы 6]):  $g = g_1 - g_2$ , где  $g_1(t) := -V_a^t(g) + g(t)$ ,  $g_2(t) := -V_a^t(g)$ . Если дополнительно  $g$  непрерывна на  $[a, b]$ , то функции  $g_1$  и  $g_2$  также непрерывны на этом отрезке [4, гл. VIII, § 5, теор. 1, следствие]. Применяя эти результаты к функциям  $f_n$  и  $f$ , получим, что  $f_n = u_n - v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $f = u - v$ , причем функции  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , не возрастают, а  $u$ ,  $v$  не возрастают и непрерывны. Кроме того, из приведенного ранее определения функций  $g_1$ ,  $g_2$  из представления  $g$ , а также того, что по условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$  для всех  $t \in [a, b]$ , следует:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = v(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Поэтому в силу леммы 1 последовательности  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  сходятся к  $u$  и  $v$  соответственно равномерно на  $[a, b]$ . Отсюда вытекает доказываемое утверждение.  $\square$

Классическая теорема Хелли [4, гл. VIII, § 4] утверждает, что из любого множества равномерно ограниченных на  $[a, b]$  функций с равномерно ограниченными вариациями можно извлечь последовательность  $\{f_n\}$ , которая сходится в каждой точке  $[a, b]$  к некоторой функции  $f$  ограниченной вариации. В случае, когда  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , из теоремы 1 вытекает следующее дополнение к этому результату.

**Следствие 1.** Если предельная функция  $f$  в теореме Хелли непрерывна на  $[a, b]$ , то сходимость последовательности  $\{f_n\}$  к  $f$  равномерна на этом отрезке.

## 2. О дифференцируемости вариации с переменным верхним пределом

*Теорема 2.* Пусть  $f \in C^1([a, b])$ . Тогда  $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$ .

Отсюда, в частности, следует, что функция  $F(x) := V_a^x(f)$  дифференцируема на  $[a, b]$  и  $F'(x) = |f'(x)|$  для всех  $x \in [a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  — произвольное разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\lambda(\pi) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$  — параметр разбиения  $\pi$ . Составим сумму

$$v_\pi(f) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

По теореме Лагранжа для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  существует  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  такое, что  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ . Поэтому

$$v_\pi(f) = \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}).$$

Заметим, что в правой части этого равенства стоит интегральная сумма Римана  $S_\pi(|f'|)$  функции  $|f'(t)|$  на  $[a, b]$ .

С другой стороны, в силу определения вариации функции существует последовательность разбиений  $\pi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , отрезка  $[a, b]$  такая, что  $\lambda(\pi_k) \rightarrow 0$  и  $v_{\pi_k}(f) \rightarrow V_a^b(f)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, в силу сделанного ранее замечания

$$v_{\pi_k}(f) = S_{\pi_k}(|f'|), \quad k = 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу в этом равенстве при  $k \rightarrow \infty$ , по определению интеграла Римана получаем, что

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt,$$

и тем самым первое утверждение теоремы доказано. Что касается второго утверждения, то оно — непосредственное следствие первого и формулы Ньютона — Лейбница для дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции.  $\square$

Далее мы покажем, что условие непрерывности производной во втором утверждении последней теоремы существенно. Точнее, если производная функции ограниченной вариации имеет разрыв хотя бы в одной точке, то вариация с переменным верхним пределом в этой точке может быть не дифференцируема.

При построении соответствующего примера нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения, с которых мы и начнем.

**Лемма 2.** Пусть функция  $f$  непрерывна в точке  $a$  справа и в точке  $b$  слева. Тогда  $V_a^b(f) = \lim_{\eta \rightarrow 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . В силу непрерывности функции  $f$  в точках  $a$  и  $b$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\max(|f(t) - f(a)|, |f(s) - f(b)|) < \varepsilon, \quad (5)$$

если  $\max(t - a, b - s) < \delta$ . Рассмотрим два случая в зависимости от того, конечна вариация функции  $f$  или нет.

(а)  $V_a^b(f) < \infty$ . По определению вариации для заданного  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение  $\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  отрезка  $[a, b]$  такое, что

$$v_\pi(f) = \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \geq V_a^b(f) - \varepsilon.$$

При этом, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\max(t_1 - a, b - t_{n-1}) < \delta. \tag{6}$$

Тогда в силу (5), обозначая через  $\pi'$  разбиение отрезка  $[t_1, t_{n-1}]$  точками  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$ , получим

$$v_{\pi'}(f) \geq V_a^b(f) - 3\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) \geq V_{t_1}^{t_{n-1}}(f) \geq v_{\pi'}(f) \geq V_a^b(f) - 3\varepsilon,$$

если только выполнено (6). В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  отсюда

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) \geq V_a^b(f).$$

Так как противоположное неравенство очевидно, то в случае (а) лемма доказана.

(б)  $V_a^b(f) = \infty$ . Тогда для каждого  $M > 0$  существует разбиение  $\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  отрезка  $[a, b]$  такое, что

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \geq M.$$

При этом опять можно считать, что выполнено условие (6). Тем самым, рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) \geq V_{t_1}^{t_{n-1}}(f) \geq M - 2\varepsilon.$$

Так как  $M > 0$  произвольно велико, то отсюда

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) = \infty.$$

Таким образом, лемма в случае (б) также доказана. □

Распространим теперь первое утверждение теоремы 2 на класс функций, имеющих кусочно-непрерывную производную.

**Предложение 1.** Пусть  $f \in C([a, b])$  и дифференцируема на  $(a, b)$  за исключением, возможно, конечного числа точек  $u_1 < u_2 < \dots < u_m$ , причем  $f'$  непрерывна на каждом интервале  $(a, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_m, b)$ . Предположим также, что интеграл  $\int_a^b |f'(t)| dt$  сходится как несобственный интеграл II рода. Тогда  $f \in V([a, b])$  и  $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$ .

*Доказательство.* Пусть  $\delta > 0$  таково, что

$$a + \delta < u_1 - \delta < u_1 + \delta < u_2 - \delta < \dots < u_m + \delta < b - \delta.$$

Рассмотрим отрезки  $\Delta_k := [u_{k-1} + \delta, u_k - \delta]$ ,  $k = 1, \dots, m + 1$ , где  $u_0 := a$ ,  $u_{m+1} := b$ . Так как по условию  $f \in C^1(\Delta_k)$ ,  $k = 1, \dots, m + 1$ , то по теореме 2

$$V_{\Delta_k}(f) = \int_{\Delta_k} |f'(t)| dt.$$

Если теперь  $\delta \rightarrow 0$ , то в силу леммы 2 и определения несобственного интеграла получим, что

$$V_{u_k}^{u_{k+1}}(f) = \int_{u_k}^{u_{k+1}} |f'(t)| dt \text{ для всех } k = 0, \dots, m.$$

В итоге, суммируя эти равенства, в силу аддитивности вариации и несобственного интеграла приходим к доказываемому соотношению.  $\square$

В заключение покажем, что вариация с переменным верхним пределом может быть не дифференцируема в том случае, когда производная функции, вариация которой рассматривается, имеет разрыв хотя бы в одной точке (ср. со вторым утверждением теоремы 2).

**Предложение 2.** Пусть  $1 < \alpha < 2$ . Функция  $f(x) := x^2 \cos \frac{1}{x^\alpha}$  при  $0 < x \leq 1$ ,  $f(0) = 0$ , обладает следующими свойствами:

- (a)  $f$  дифференцируема на  $[0, 1]$  и производная  $f'$  непрерывна на  $(0, 1]$ ;
- (b)  $f \in V([0, 1])$ ;
- (c) функция  $F(x) := V_0^x(f)$  не дифференцируема в нуле.

*Доказательство.* (a) Если  $0 < x \leq 1$ , то

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^\alpha} + \alpha x^{1-\alpha} \sin \frac{1}{x^\alpha}. \quad (7)$$

Кроме того, по определению производной

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x \cos \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Таким образом, функция  $f$  дифференцируема на  $[0, 1]$  и  $f'$  непрерывна на  $(0, 1]$ . В то же время  $f'$  разрывна в нуле справа, так как  $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = +\infty$ .

(b) Покажем, что интеграл  $\int_0^1 |f'(x)| dx$  сходится, используя признак сравнения. Действительно, в силу (7)

$$|f'(x)| \leq h(x), \text{ где } h(x) := 2x + \alpha x^{1-\alpha}.$$

При этом, так как  $\alpha < 2$ , то

$$\int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 (2x + \alpha x^{1-\alpha}) dx = 2 \int_0^1 x dx + \alpha \int_0^1 x^{1-\alpha} dx = 1 + \frac{\alpha}{2-\alpha} < \infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл  $\int_0^1 |f'(x)| dx$  сходится, поэтому, применяя предложение 1, получаем, что  $f \in V([0, 1])$ .

(c) Для доказательства недифференцируемости функции  $F(x) = V_0^x(f)$  в нуле достаточно показать, что для некоторой убывающей к нулю последовательности  $\{x_n\} \subset (0, 1]$  имеет место равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(x_n)}{x_n} = +\infty.$$

В свою очередь, по теореме Штольца [5, с. 67–68] это эквивалентно тому, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(x_n) - F(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = +\infty$$

или в силу предложения 1 тому, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x_{n+1}}^{x_n} |f'(t)| dt}{x_n - x_{n+1}} = +\infty. \quad (8)$$

Из равенства (7) следует, что

$$\frac{1}{x_n - x_{n+1}} \int_{x_{n+1}}^{x_n} |f'(t)| dt \geq \frac{1}{x_n - x_{n+1}} \left( \alpha \int_{x_{n+1}}^{x_n} \left| t^{1-\alpha} \sin \frac{1}{t^\alpha} \right| dt - 2 \int_{x_{n+1}}^{x_n} \left| t \cos \frac{1}{t^\alpha} \right| dt \right).$$

Так как

$$0 \leq \frac{2}{x_n - x_{n+1}} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \left| t \cos \frac{1}{t^\alpha} \right| dt \leq \frac{2}{x_n - x_{n+1}} \int_{x_{n+1}}^{x_n} |t| dt = x_n + x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

то отсюда получаем, что (8) будет доказано, если показать следующее:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{x_n - x_{n+1}} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \left| t^{1-\alpha} \sin \frac{1}{t^\alpha} \right| dt = +\infty. \quad (9)$$

Полагая  $x_n := (\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}$ , в интеграле из левой части (9) сделаем замену  $p = t^{-\alpha}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}} - (\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}} \int_{(\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}}^{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}} \left| t^{1-\alpha} \sin \frac{1}{t^\alpha} \right| dt &= \frac{1}{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}} - (\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin p|}{p^{\frac{2}{\alpha}}} dp \geq \\ &\geq \frac{\int_{\pi n + \frac{\pi}{6}}^{\pi(n+1) - \frac{\pi}{6}} p^{-\frac{2}{\alpha}} dp}{2 \left( (\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}} - (\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}} \right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из этой оценки вытекает, что соотношение (9) выполнено для выбранной последовательности  $\{x_n\}$ , если правая часть (10) стремится к  $+\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

Так как

$$\int_{\pi n + \frac{\pi}{6}}^{\pi(n+1) - \frac{\pi}{6}} p^{-\frac{2}{\alpha}} dp = \frac{\alpha}{2-\alpha} \left( \left( \pi n + \frac{\pi}{6} \right)^{1-\frac{2}{\alpha}} - \left( \pi n + \frac{5\pi}{6} \right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \right),$$

то элементарные преобразования показывают, что предел правой части в (10) при  $n \rightarrow +\infty$  равен следующему:

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \pi n + \frac{\pi}{6} \right)^{1-\frac{2}{\alpha}} - \left( \pi n + \frac{5\pi}{6} \right)^{1-\frac{2}{\alpha}}}{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}} - (\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\alpha \pi^{1-\frac{1}{\alpha}}}{2(2-\alpha)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{\alpha}} \left( 1 - \left( \frac{n+\frac{1}{6}}{n+\frac{5}{6}} \right)^{\frac{2}{\alpha}-1} \right)}{\left( n + \frac{1}{6} \right)^{\frac{2}{\alpha}-1} \left( 1 - \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)}.$$

Далее, по правилу Лопиталья

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{y+\frac{1}{6}}{y+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}}{1 - \left(\frac{y}{y+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} &= \frac{2(2-\alpha)}{3} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\left(y+\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{\alpha}-2} \left(y+\frac{5}{6}\right)^{-\frac{2}{\alpha}}}{y^{\frac{1}{\alpha}-1} (y+1)^{-\frac{1}{\alpha}-1}} = \\ &= \frac{2(2-\alpha)}{3} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{\frac{2}{\alpha}-2} \left(1+\frac{1}{6y}\right)^{\frac{2}{\alpha}-2} y^{-\frac{2}{\alpha}} \left(1+\frac{5}{6y}\right)^{-\frac{2}{\alpha}}}{y^{\frac{1}{\alpha}-1} y^{-\frac{1}{\alpha}-1} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{\alpha}-1}} = \frac{2(2-\alpha)}{3}, \end{aligned}$$

и, значит, так как  $\alpha > 1$ , то

$$\frac{\alpha\pi^{1-\frac{1}{\alpha}}}{2(2-\alpha)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 - \left(\frac{n+\frac{1}{6}}{n+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}\right)}{\left(n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1} \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)} = \frac{\alpha\pi^{1-\frac{1}{\alpha}}}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}} = +\infty.$$

В итоге соотношение (9), а с ним и предложение доказаны.  $\square$

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2024-1456.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Цитирование.** Асташкин С.В., Ершов В.М. Два замечания о свойствах функций ограниченной вариации // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 7–16. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-7-16.

© Асташкин С.В., Ершов В.М., 2024

Асташкин Сергей Владимирович (astash56@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Ершов Владислав Максимович (ershov189510@yandex.ru) – студент, группа № 4341-010501D, механико-математический факультет, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Литература

- [1] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. 728 с. URL: <https://djvu.online/file/J45IxweiiQHOT?ysclid=m1erhtogan399934303>.
- [2] Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. Москва: ЛИБРОКОМ, 2010. 479 с. URL: <https://djvu.online/file/rMxu2zCznQGSW?ysclid=m1f3l7qh3k850744665>.



- [3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 542 с. URL: <https://djvu.online/file/acB4ODGXeJeSf?ysclid=m1f3rqwfjj688702689>.
- [4] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 1974. 480 с. URL: <https://djvu.online/file/KO7DQP52iL3oh?ysclid=m1f3v42p8s44016586>.
- [5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. Москва: Наука, 1962. 616 с. URL: <https://djvu.online/file/x6N9RDsAtAL7X?ysclid=m1f3yq51dy652360573>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-7-16

## Two remarks on properties of functions of bounded variation

Astashkin S.V. , Ershov V.M. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [astash56@mail.ru](mailto:astash56@mail.ru) (S.V.); [ershov189510@yandex.ru](mailto:ershov189510@yandex.ru) (V.M.);

Received: 18.07.2024

Revised: 22.08.2024

Accepted: 02.09.2024

Scientific article



**Abstract.** In terms of variations, a sufficient condition for the uniform convergence of sequences of continuous functions is proved. Using this result, we obtain an addition to the classical Helly theorem on the selection of convergent sequences of functions with uniformly bounded variations in the case when the limit function is continuous. Also, by using an example we show that the condition of continuous differentiability of a function, ensuring the differentiability of its variation with the variable upper limit, is in a certain sense sharp.

**Key words:** variation; function of bounded variation; uniform convergence; modulus of continuity; Helly's theorem; Stolz's theorem.

**Funding.** The work was carried out within the framework of the implementation of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, agreement № 075-02-2024-1456.

**Information about the conflict of interests:** the authors and reviewers declare no conflict of interest.

**Citation.** Astashkin S.V., Ershov V.M. Two remarks on properties of functions of bounded variation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 7–16. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-7-16 (In Russ.)

© Astashkin S.V., Ershov V.M., 2024

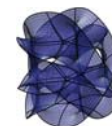
Sergey V. Astashkin ([astash56@mail.ru](mailto:astash56@mail.ru)) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Vladislav M. Ershov ([ershov189510@yandex.ru](mailto:ershov189510@yandex.ru)) – student, Faculty of Mathematics and Mechanics, group no. 4341-010501D, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.



## References

- [1] Bogachev V.I., Smolyanov O.G. Real and functional analysis: university course. Moscow; Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2011, 728 p. Available at: <https://djvu.online/file/J45IxweiiQHOT?ysclid=m1erhtogan399934303>. (In Russ.)
- [2] Gorodetsky V.V., Nagnibida N.I., Nastasiev P.P. Methods for solving problems in functional analysis. Moscow: LIBROKOM, 2010, 479 p. Available at: <https://djvu.online/file/rMxu2zCznQGSW?ysclid=m1f3l7qh3k850744665>. (In Russ.)
- [3] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1976, 542 p. Available at: <https://djvu.online/file/acB4ODGXeJeSf?ysclid=m1f3rqwfjj688702689>. (In Russ.)
- [4] Natanson I.P. Theory of functions of a real variable. Moscow: Nauka, 1974, 480 p. Available at: <https://djvu.online/file/KO7DQP52iL3oh?ysclid=m1f3v42p8s44016586>. (In Russ.)
- [5] Fihtengoltz G.M. The course of differential and integral calculus. Vol. I. Moscow: Nauka, 1962, 616 p. Available at: <https://djvu.online/file/x6N9RDsAtAL7X?ysclid=m1f3yq51dy652360573>. (In Russ.)



# Решение задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным краевым условием

Гасанова Э.Э.<sup>ORCID</sup>, Пулькина Л.С.<sup>ORCID</sup>

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; gasanowaelvira@gmail.com (Э.Э.); louise@samdiff.ru (Л.С.);

Поступила: 10.04.2024

Рассмотрена: 17.05.2024

Принята: 02.09.2024

**Аннотация.** В статье доказано существование единственного решения начально-краевой задачи с нелокальным условием для одномерного волнового уравнения. Обоснование разрешимости основано на возможности построения биортогонального базиса и представлении решения в виде ряда по собственным и присоединенным функциям.

**Ключевые слова:** волновое уравнение; краевая задача; нелокальное условие; биортогональный базис.

Научная статья



## Введение

Задачи с нелокальными условиями, которые мы понимаем как соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных в различных точках границы и на внутренних многообразиях, активно изучаются в настоящее время. Интерес к ним связан не только с теоретическим аспектом развития теории дифференциальных уравнений, но и с тем, что математические модели, в основе которых лежат нелокальные задачи, часто оказываются более эффективными и полезными для современного естествознания [1; 2]. Задолго до начала систематических исследований задач с нелокальными условиями была опубликована статья В.А. Стеклова [3], в которой изучена задача с нелокальными краевыми условиями для уравнения теплопроводности. В ней получены условия на коэффициенты нелокальных соотношений, выполнение которых гарантирует разрешимость поставленной задачи. Естественно возник интерес к тем случаям, когда эти условия не выполнены. В этой связи отметим статьи Н.И. Ионкина [4], в которой рассмотрена задача с неклассическим краевым условием для уравнения теплопроводности, и С.А. Бейлина [5]. В нашей статье рассматривается задача с нелокальным краевым условием, которое является частным случаем условий В.А. Стеклова, для простейшего гиперболического уравнения.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим в области  $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$  уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим следующую задачу: найти в области  $Q_T$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t). \quad (3)$$

Под решением задачи будем понимать функцию  $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$ , удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2), (3). Отметим, что второе из условий (3) является нелокальным. На первый взгляд кажется естественным применить метод разделения переменных, однако на этом пути возникают трудности отнюдь не технического свойства. Их преодолению посвящен следующий раздел.

## 2. Собственные и присоединенные функции задачи

Будем искать частные решения задачи (1)–(3) в виде  $u(x, t) = X(x)T(t)$  и, разделив переменные в уравнении (1), приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1), \quad (4)$$

собственные функции которой

$$X_0(x) = x, \quad X_n(x) = \sin 2\pi n x, \quad \lambda_n = 2\pi n. \quad (5)$$

Полученная совокупность функций не ортогональна, не полна и, стало быть, не образует базис в  $L_2(0, 1)$ . Следуя [8; 9], дополним собственные функции  $X_n(x)$  присоединенными, которые найдем как решения задачи (6)

$$\tilde{X}_n'' + \lambda_n^2 \tilde{X}_n(x) = p_n X_n(x), \quad \tilde{X}(0) = 0, \quad \tilde{X}'(0) = \tilde{X}'(1), \quad (6)$$

где  $p_n \neq 0$ . Положим  $p_n = -4n\pi$ . Получим

$$\tilde{X}_n(x) = x \cos 2\pi n x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Пополненную таким образом систему запишем, переобозначив функции, так:

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k-1}(x) = x \cos 2k\pi x, \quad X_{2k}(x) = \sin 2k\pi x. \quad (8)$$

В силу результатов, полученных В.А. Ильиным [9], система функций (8) образует базис.

Рассмотрим теперь сопряженную к (4) задачу

$$Y''(x) + \mu^2 Y(x) = 0, \quad Y'(1) = 0, \quad Y(0) = Y(1) \quad (9)$$

и найдем ее собственные функции:

$$Y_0(x) = q_0, \quad Y_k(x) = q_k \cos 2\pi k x, \quad \mu_k = \lambda_k = 2\pi k. \quad (10)$$

Решив задачу

$$\tilde{Y}_k'' + \lambda_k^2 \tilde{Y}_k(x) = p_k Y_k(x), \quad \tilde{Y}_k'(1) = 0, \quad \tilde{Y}_k(0) = \tilde{Y}_k(1), \quad (11)$$

найдем и присоединенные функции

$$\tilde{Y}_k(x) = q_k(1 - x) \sin 2k\pi x.$$

Переобозначив, как и выше, найденные функции, запишем систему собственных и присоединенных функций сопряженной задачи:

$$Y_0 = q_0, \quad Y_{2k-1}(x) = q_{2k-1} \cos 2k\pi x, \quad Y_{2k} = q_{2k}(1 - x) \sin 2k\pi x. \quad (12)$$

Числа  $q_0, q_{2k}, q_{2k-1}$  найдем так, чтобы системы функций (8) и (12) оказались биортонормированными, а именно:

$$(X_0, Y_0) = 1, \quad (X_{2k-1}, Y_{2l-1}) = \delta_{kl}, \quad (X_{2k}, Y_{2l}) = \delta_{kl},$$

$$(X_{2k}, Y_{2l-1}) = 0, \quad (X_{2k-1}, Y_{2l}) = 0 \quad \forall k, l.$$

Эти равенства оказываются выполненными, если положить  $q_0 = 2, q_{2k} = q_{2k-1} = 4$ .

### 3. Существование решения

Основным результатом статьи является обоснование существования единственного решения поставленной задачи.

**Теорема.** Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi, \psi &\in C^2[0, 1] \cap C^3(0, 1), \quad f \in C^2(Q_T), \quad f_x \in C^1(\bar{Q}_T), \\ \varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1), \quad \psi'(0) = \psi'(1), \quad \varphi''(0) = \psi''(0) = 0, \\ f(0, t) = 0, \quad f'(1) = f'(0). \end{aligned}$$

Тогда существует решение задачи (1)–(3), и оно единственно.

**Доказательство.**

Решение задачи будем искать в виде суммы  $u(x, t) + v(x, t)$ , где  $u(x, t)$  — решение поставленной задачи для однородного уравнения, соответствующего (1), а  $v(x, t)$  — решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее однородным условиям (2) и (3).

Начнем с решения задачи для однородного уравнения. Будем искать решение в виде ряда

$$u(x, t) = X_0(x)T_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)T_{2k}(t) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(t), \quad (13)$$

где  $X_0(x)$ ,  $X_{2k}(x)$ ,  $X_{2k-1}(x)$  — собственные и присоединенные функции (8), а  $T_0(t)$ ,  $T_{2k}(t)$ ,  $T_{2k-1}(t)$  найдем из (1) и (2) следующим образом: потребуем, чтобы функции  $u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t)$ ,  $u_k(x, t) = X_{2k}(x)T_{2k}(t) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(t)$  были решениями однородного уравнения (1) и удовлетворяли условиям (2).

Подставив  $u_0(x, t)$  в уравнение (1), получим, учитывая, что  $X_0(x) = x$ , уравнение  $T_0''(t) = 0$ , откуда  $T_0(t) = at + b$ . Постоянные  $a, b$  найдем из начальных условий (2). Положив в (13)  $t = 0$ , получим

$$\varphi(x) = X_0(x)b + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)T_{2k}(0) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(0). \quad (14)$$

Умножив обе части (14) скалярно на  $Y_0(x)$  и, учитывая биортогональность систем функций (8) и (12), получим  $b = (\varphi, Y_0) = 2 \int_0^1 \varphi(x) dx$ . Совершенно аналогично из равенства

$$\psi(x) = X_0(x)a + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)T_{2k}'(0) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}'(0) \quad (15)$$

найдем  $a = (\psi, Y_0) = 2 \int_0^1 \psi(x) dx$ . Подставив в уравнение (1) функции  $u_k(x, t) = X_{2k}(x)T_{2k}(t) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(t)$ , получим равенство

$$(T_{2k}'' + (2k\pi)^2 T_{2k} + 4k\pi T_{2k-1}) \sin 2k\pi x + x(T_{2k-1}'' + (2k\pi)^2 T_{2k-1}) \cos 2k\pi x = 0,$$

из которого вытекают два уравнения для нахождения  $T_{2k}, T_{2k-1}$ . Прежде чем их выписать, найдем начальные условия, которым должны удовлетворять функции  $T_{2k}, T_{2k-1}$ . Для этого умножим (14), (15) скалярно на  $Y_{2k}(x)$ , а затем на  $Y_{2k-1}(x)$  и получим, учитывая биортогональность систем (8), (12) и представление функций из (12)

$$T_{2k}(0) = 4 \int_0^1 \varphi(x)(1-x) \sin 2k\pi x dx = \varphi_{2k},$$

$$T_{2k-1}(0) = 4 \int_0^1 \varphi(x) \cos 2k\pi x dx = \varphi_{2k-1},$$

$$T_{2k}'(0) = 4 \int_0^1 \psi(x)(1-x) \sin 2k\pi x dx = \psi_{2k},$$

$$T'_{2k-1}(0) = 4 \int_0^1 \psi(x) \cos 2k\pi x dx = \psi_{2k-1}.$$

Таким образом, для нахождения  $T_{2k}, T_{2k-1}$  мы пришли к двум начальным задачам:

$$T''_{2k-1}(t) + (2k\pi)^2 T_{2k-1}(t) = 0, \quad T_{2k-1}(0) = \varphi_{2k-1}, \quad T'_{2k-1}(0) = \psi_{2k-1},$$

$$T''_{2k} + (2k\pi)^2 T_{2k} = -4k\pi T_{2k-1}, \quad T_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \quad T'_{2k}(0) = \psi_{2k}.$$

Решив эти задачи, получим

$$T_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} \cos 2k\pi t + \frac{\psi_{2k-1}}{2k\pi} \sin 2k\pi t, \quad (16)$$

$$T_{2k}(t) = (\psi_{2k-1}t - \varphi_{2k}) \cos 2k\pi t - (\varphi_{2k-1}t + \frac{\varphi_{2k-1} - \psi_{2k}}{2k\pi}) \sin 2k\pi t. \quad (17)$$

Итак, членами ряда (13) являются частные решения задачи (1)–(3) и, если ряд (13) и полученные ряды из производных второго порядка сходятся равномерно, то сумма ряда (13) будет решением поставленной задачи.

Найдем производные частных решений второго порядка.

$$u_{kxx}(x, t) = -4k^2\pi^2 \sin 2k\pi x T_{2k}(t) - 4k^2\pi^2 \left( \frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi x + x \cos 2k\pi x \right) T_{2k-1}(t),$$

$$u_{ktt}(x, t) = X_{2k} 4k^2\pi^2 \left[ (\varphi_{2k}t + \frac{\varphi_{2k-1} - \psi_{2k} - \psi_{2k-1}}{2k\pi}) \sin 2k\pi t + \right. \\ \left. + (\varphi_{2k} - \psi_{2k-1}t - \frac{1}{k\pi} \varphi_{2k-1}) \cos 2k\pi t \right] - X_{2k-1}(x) 4k^2\pi^2 (\varphi_{2k-1} \cos 2k\pi t + \frac{1}{2k\pi} \psi_{2k-1} \sin 2k\pi t).$$

Из этих представлений видно, что для сходимости рядов необходимы дополнительные условия на функции  $\varphi(x), \psi(x)$ , получением которых мы и займемся. Для этого сделаем элементарные преобразования, интегрируя по частям, в результате чего приходим к следующему утверждению:

если  $\varphi, \psi \in C^2[0, 1] \cap C^3(0, 1), \varphi(0) = \psi(0) = 0, \varphi'(0) = \psi'(1), \psi'(0) = \psi'(1), \varphi''(0) = \psi''(0) = 0$ , то

$$\varphi_{2k-1} = 2 \frac{\tilde{\varphi}_{2k-1}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\varphi}_{2k-1} = 2 \int_0^1 (\varphi'(x) \sin k\pi x)'' \cos k\pi x dx,$$

$$\varphi_{2k} = 2 \frac{\tilde{\varphi}_{2k}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\varphi}_{2k} = 2 \int_0^1 [(1-x)\varphi(x) \cos k\pi x]'''' \cos k\pi x dx,$$

$$\psi_{2k-1} = 2 \frac{\tilde{\psi}_{2k-1}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\psi}_{2k-1} = 2 \int_0^1 (\psi'(x) \sin k\pi x)'' \cos k\pi x dx,$$

$$\psi_{2k} = 2 \frac{\tilde{\psi}_{2k}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\psi}_{2k} = 2 \int_0^1 [(1-x)\psi(x) \cos k\pi x]'''' \cos k\pi x dx.$$

Заметим, что в полученных формулах  $\tilde{\varphi}_{2k}, \tilde{\varphi}_{2k-1}, \tilde{\psi}_{2k}, \tilde{\psi}_{2k-1}$  — коэффициенты Фурье функций  $(\varphi'(x) \sin k\pi x)''$ ,  $[(1-x)\varphi(x) \cos k\pi x]''''$ ,  $(\psi'(x) \sin k\pi x)''$ ,  $[(1-x)\psi(x) \cos k\pi x]''''$  и, стало быть, гарантирована сходимость рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_{2k}}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_{2k-1}}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_{2k}}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_{2k-1}}{k^3}$ . Нетрудно убедиться, что

ряд (13) мажорируется сходящимся рядом  $\frac{2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_{2k}| + |\tilde{\varphi}_{2k-1}| + |\tilde{\psi}_{2k}| + |\tilde{\psi}_{2k-1}|}{k^3}$ , а ряды из производных

$\sum_{k=1}^{\infty} u_{kxx}, \sum_{k=1}^{\infty} u_{ktt}$  — сходящимся рядом  $\frac{8}{\pi} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_{2k}| + |\tilde{\varphi}_{2k-1}| + |\tilde{\psi}_{2k}| + |\tilde{\psi}_{2k-1}|}{k}$ . Следовательно, ряд (13)

сходится абсолютно и равномерно и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и по  $t$ . В силу обобщенного принципа суперпозиции сумма ряда (13) является решением задачи с условиями (2), (3) для однородного уравнения (1).

Приступим к нахождению функции  $v(x, t)$  — решения неоднородного уравнения (1).

Будем искать решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным начальным условиям в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2k}(t)X_{2k}(x) + V_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x). \quad (18)$$

Функции  $V_{2k}(t)$ ,  $V_{2k-1}(t)$ , подлежащие определению, должны удовлетворять условиям  $V_{2k}(0) = 0$ ,  $V'_{2k}(0) = 0$ ,  $V_{2k-1}(0) = 0$ ,  $V'_{2k-1}(0) = 0$ , а  $X_{2k}(x)$ ,  $X_{2k-1}(x)$  — собственные и присоединенные функции однородной задачи. Подставим  $v(x, t)$  в уравнение (1) и получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} [V''_{2k-1}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k-1}(t)] \cos 2k\pi x + \\ & + [V''_{2k}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k}(t) + 4k\pi V_{2k-1}(t)] \sin 2k\pi x = f(x, t). \end{aligned}$$

Разложив  $f(x, t)$  в ряд по  $X_{2k}(x)$ ,  $X_{2k-1}(x)$ , получим из последнего равенства две задачи для каждого  $k$ :

$$V''_{2k-1}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k-1}(t) = f_{2k-1}(t), \quad V_{2k-1}(0) = 0, \quad V'_{2k-1}(0) = 0,$$

$$V''_{2k}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k}(t) = f_{2k}(t) - 4k\pi V_{2k-1}(t), \quad V_{2k}(0) = 0, \quad V'_{2k}(0) = 0,$$

где  $f_{2k-1}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t)Y_{2k-1}(x)dx$ ,  $f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t)Y_{2k}(x)dx$ . Каждая из этих задач имеет единственное решение, поэтому функция  $v(x, t)$  найдена. Действительно, сходимость ряда (18) и рядов из производных доказывается так же, как и выше.

#### 4. Единственность решения

Покажем, что решение задачи единственно. Предположим, что это не так, и существует два различных решения  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ . Тогда их разность,  $u = u_1 - u_2$ , представляет собой решение однородного уравнения (1) и удовлетворяет однородным условиям (2) и (3). Но тогда функцию  $u(x, t)$  можно представить в форме биортогонального ряда

$$u(x, t) = c_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}(t)X_{2k}(x) + c_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x), \quad (19)$$

где  $X_0(x)$ ,  $X_{2k}(x)$ ,  $X_{2k-1}(x)$  — собственные и присоединенные функции (8). Найдем коэффициенты  $c_i(t)$ , пользуясь свойством биортогональности систем функций (8) и (12). Нам потребуется следующее утверждение. Если решение уравнения (1) удовлетворяет условию  $u_x(0, t) = u_x(1, t)$ , то  $\int_0^1 u(x, t)dx = 0$ . Действительно, пусть  $u(x, t)$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Интегрируя обе его части по  $x \in (0, 1)$ , получим равенство  $\int_0^1 u_{tt}dx = u_x(1, t) - u_x(0, t)$  и в силу условия  $u_x(0, t) = u_x(1, t)$ ,  $\int_0^1 u_{tt} = 0$ . Рассматривая последнее равенство как дифференциальное уравнение  $\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t)dx = 0$  и учитывая, что в силу начальных условий  $\int_0^1 u(x, 0)dx = 0$ ,  $\int_0^1 u_t(x, 0)dx = 0$ , получим  $\int_0^1 u(x, t)dx = 0$ . Но тогда

$$c_0(t) = 2 \int_0^1 u(x, t)dx = 0.$$

Найдем  $c_{2k-1}(t)$ , умножив обе части (19) на  $Y_{2k-1}$  скалярно и проделав ряд преобразований, интегрируя по частям и учитывая, что  $u(x, t)$  и  $Y_{2k-1}$  удовлетворяют уравнениям (1) с  $f = 0$  и (9).

$$\begin{aligned} c_{2k-1}(t) &= \int_0^1 u(x, t)Y_{2k-1}(x)dx = -\frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 u(x, t)Y''_{2k-1}dx = \\ &= -\frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 u_{xx}(x, t)Y_{2k-1}dx = -\frac{1}{(2k\pi)^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t)Y_{2k-1}(x)dx, \end{aligned}$$

откуда сразу следует

$$c''_{2k-1}(t) + (2k\pi)^2 c_{2k-1}(t) = 0.$$

Так как из нулевых начальных условий  $u(x,0) = 0$ ,  $u_t(x,0) = 0$  следует, что  $c_{2k-1}(0) = 0$ ,  $c'_{2k-1}(0) = 0$ , то и  $c_{2k-1}(t) = 0$  как решение однородной задачи Коши. Совершенно аналогично доказывается, что и  $c_{2k}(t) = 0$ . Таким образом, наше предположение не верно,  $u_1 = u_2$ , и, стало быть, решение задачи единственно.

Теорема полностью доказана.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Цитирование.** Гасанова Э.Э., Пулькина Л.С. Решение задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным краевым условием // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 17–24. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-17-24.

© Гасанова Э.Э., Пулькина Л.С., 2024

Гасанова Эльвира Эльчиновна (gasanowaelvira@gmail.com) – студент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Литература

- [1] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4116>.
- [2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek, Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128, issue 11. P. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- [3] Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня // Сообщ. Харьковского мат. общества. Вторая серия. 1897. Т. 5, № 3–4. С. 136–181. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/khmo222>.
- [4] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2993>.
- [5] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2001. Vol. 2001, no. 76. P. 1–8. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/76/beilin.pdf>.
- [6] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва: Наука, 2006. 287 с. URL: <https://knigogid.ru/books/1900983-zadachi-so-smescheniem-dlya-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread>.



- [7] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2020. Vol. 2020, no. 28. P. 1–20. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/pulkina.pdf>.
- [8] Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // *Доклады Академии наук СССР*. 1976. Т. 227, № 4. С. 796–799. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan40263>.
- [9] Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора 2 порядка // *Доклады Академии наук СССР*. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan9839>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-17-24

# Solution of certain problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional wave equation

Gasanova E.E. , Pulkina L.S. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [gasanowaelvira@gmail.com](mailto:gasanowaelvira@gmail.com) (E.E.); [louise@samdiff.ru](mailto:louise@samdiff.ru) (L.S.);

Received: 10.04.2024

Revised: 17.05.2024

Accepted: 02.09.2024

**Abstract.** In this paper, we study a problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional wave equation. To prove the solvability of the problem we construct biorthogonal basis consisting of eigen- and adjoint-functions of not self adjoint operator.

**Key words:** wave equation; boundary problem; nonlocal condition; biorthogonal basis

Scientific article



**Information about the conflict of interests:** the authors and reviewers declare no conflict of interest.

**Citation.** Gasanova E.E., Pulkina L.S. Solution of certain problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional wave equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 17–24. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-17-24. (In Russ.)

© Gasanova E.E., Pulkina L.S., 2024

*Elvira E. Gasanova* ([gasanowaelvira@gmail.com](mailto:gasanowaelvira@gmail.com)) – student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

*Ludmila S. Pulkina* ([louise@samdiff.ru](mailto:louise@samdiff.ru)) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.




## References

- [1] Samarskii A.A. Some problems of the theory of differential equations. *Differential Equations*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de4116>. (In Russ.)
- [2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol. 128, issue 11, pp. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- [3] Stekloff W. Problem of cooling an inhomogeneous solid body. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*. 2-e série, 1897, vol. 5, no. 3–4, pp. 136–181. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/khmo222>. (In Russ.)
- [4] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de2993>. (In Russ.)
- [5] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001, vol. 2001, no. 76, pp. 1–8. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/76/beilin.pdf>.
- [6] Nakhushev A.M. Displacement problems for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006, 287 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/1900983-zadachi-so-smescheniem-dlya-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread>.
- [7] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2020, vol. 2020, no. 28, pp. 1–20. Available at: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/pulkina.pdf>.
- [8] Il'in V.A. Necessary and sufficient conditions for a subsystem of eigen- and associated functions of a Keldys bundle of ordinary differential operators to be a basis. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1976, vol. 227, no. 4, pp. 796–799. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan40263>. (In Russ.)
- [9] Il'in V.A. Unconditional basis property on a closed interval of systems of eigen- and associated functions of a second-order differential operator. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1048–1053. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan9839>. (In Russ.)



# Моделирование упруго-пластического деформирования приповерхностных слоев материалов

Мехеда В. А. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; villiy.mekheda@gmail.com;

Поступила: 04.04.2024

Рассмотрена: 15.05.2024

Принята: 02.09.2024

Научная статья



**Аннотация.** По результатам тензометрических измерений для описания процесса упруго-пластического деформирования стали 1X18H9T используется модель кинематически упрочняющегося тела. Особое внимание уделено процессам, происходящим в приповерхностных слоях. Модель учитывает рост стесненности сдвиговых деформаций вглубь материала. Увеличение напряжения пластического течения в глубину описывается полиномом второго порядка. Экспериментально и путем расчетов методом редуцированных коэффициентов в процессе последовательных приближений определены основные параметры поверхностного эффекта: глубина, коэффициент упрочнения материала, напряжения пластического течения на поверхности и внутри материала. Показано, что для исследования приповерхностного эффекта тензометрическим методом следует отдавать предпочтение испытаниям образцов на изгиб, а не на растяжение. Наличием поверхностного эффекта объясняются следующие факты: разрушение образца при испытании на растяжение начинается не с поверхности, а изнутри, зарождение усталостных трещин происходит под поверхностью, приповерхностный эффект практически не влияет на деформированное состояние упругого тела, но очень сильно влияет на напряженное состояние у поверхности.

**Ключевые слова:** нелинейная деформация; приповерхностный эффект; напряжение пластического течения; упрочнение; трещина.

## Введение

Определение и анализ напряженно-деформированного состояния в нагруженном элементе конструкции с учетом поверхностных дефектов представляет собой одну из ключевых проблем современной механики и ее практических приложений [1–3].

Особое поведение поверхностного и приповерхностных слоев материалов обусловлено тем, что свободная поверхность не препятствует развитию пластических сдвигов и в результате после статической и циклических нагрузок на поверхности наблюдаются выступы (экструзии) и впадины (интрузии) (рис. 1). Чем глубже слой, тем сильнее стеснение сдвиговых деформаций. Они тормозятся, в основном, границами зерен и разориентировкой плоскостей сдвига в блоках внутри зерен.

Местное возмущение в виде поверхностного эффекта, согласно принципу Сен-Венана, должно постепенно затухать, а напряжение пластического течения приповерхностных слоев, плавно возрастая, переходит на некоторой глубине в напряжение течения основного материала.

Слой материала, ослабленный поверхностным эффектом, при изгибе приводят к дополнительному повороту поперечного сечения образца по сравнению с упругим решением задачи.

Проявление поверхностного эффекта обнаруживается тензометрическим методом. Однако дополнительная нелинейная деформация на поверхности образца, фиксируемая тензорезистором, весьма мала по сравнению с упругой составляющей. Наиболее ярко это проявляется на уровнях номинальных напряжений, соответствующих области чистой усталости и ниже.

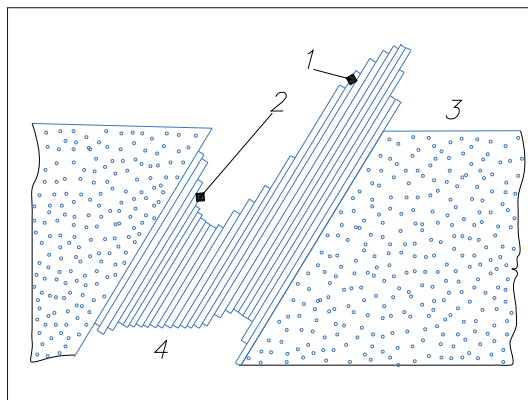


Рис. 1. Схема образования экструзий (1) и интрузий (2) на поверхности (3) металлических материалов, подвергнутых циклическим нагрузкам; (4) – полосы скольжения

Fig. 1. Scheme of the formation of extrusions (1) and intrusions (2) on the surface (3) of metal materials subjected to cyclic loads; (4) – slip stripes

## 1 Экспериментальное исследование приповерхностного эффекта

Используя свойства тензометрического измерительного моста, можно в его пределах из полной деформации поверхности  $\varepsilon$  вычесть линейную составляющую  $\varepsilon_L$ :

$$\varepsilon_{NL} = \varepsilon - \varepsilon_L = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}. \quad (1)$$

При таком подходе достигается высокая точность измерения нелинейной деформации [4; 5]. Поскольку в металлах нелинейная упругая деформация практически отсутствует, то измеренная нелинейная деформация есть неупругая деформация.

Консольно закрепленный образец длиной 100 мм и постоянным поперечным сечением  $4 \times 14$  мм из стали 1X18H9T в состоянии поставки подвергался поперечному изгибу силой, приложенной на свободном конце. Результаты такого эксперимента [6] приведены на рис. 2.

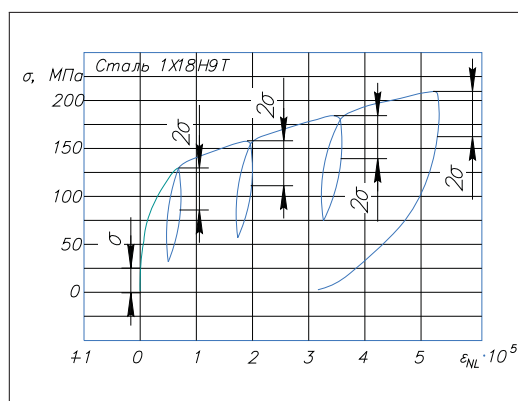


Рис. 2. Диаграмма деформирования стали 1X18H9T при поперечном изгибе с тремя промежуточными циклами разгрузки-нагрузки

Fig. 2. Strain-stress diagram of steel 1X18H9T during transverse bending with three intermediate unloading-loading cycles

Нагрузка прикладывалась достаточно медленно со скоростью изменения номинального напряжения 37,5 МПа/мин. Под номинальным напряжением понимается напряжение на поверхности образца, определенное по формуле сопротивления материалов при изгибе балок.

Тензометрическая аппаратура позволяет надежно фиксировать деформацию поверхности тела величиной  $1 \cdot 10^{-6}$ . Тогда, согласно диаграмме рис. 2, обнаруживаемое пластическое течение поверхности образца составляет  $\sigma_{T1} = 25$  МПа.

Представляют интерес участки разгрузки. В начале этих участков, когда номинальное напряжение в образце стало снижаться, нелинейные деформации продолжали расти, и чем выше уровень достигнутого перед разгрузкой номинального напряжения, тем этот процесс протекает интенсивнее. Такое поведение материала можно объяснить проявлением процесса ползучести. Вклад ползучести в нелинейную деформацию достаточно весом, поэтому подобные эксперименты должны проводиться под управлением ЭВМ со строгим соблюдением режима нагружения во времени.

В металлах наблюдается единый процесс неупругого деформирования, отражением которого является нелинейная деформация, включающая пластическую составляющую и составляющую от ползучести.

Если отбросить проявление ползучести в начале участков разгрузки, то обратное пластическое течение при  $\epsilon_{NL} = 1 \cdot 10^{-6}$  наблюдается при снижении номинального напряжения на  $2\sigma$  (рис. 2). Поверхностный слой ведет себя как идеальное упруго-пластическое тело, а напряжение течения  $\sigma = \sigma_{T1}$  — константа. Поверхностным слоем являются берега микро- и макротрещин, а также берега магистральной трещины. Снижение напряжений у поверхности микротрещин отмечается в работах [7; 8]. Замечено, что с увеличением напряжений в стали каждая микротрещина затуплялась, и вокруг нее возникало пластическое течение, а результирующие локальные концентрации напряжений были пренебрежимо малы.

Чтобы определиться с глубиной  $\delta$  проявления поверхностного эффекта, была рассчитана производная от номинального напряжения по нелинейной составляющей деформации  $\frac{d\sigma}{d\epsilon_{NL}}$ . Производная является чувствительным индикатором происходящих структурных процессов. Как видно из рис. 3, производная в процессе нагружения сначала резко падает с увеличением нелинейной деформации, а затем в точке **В** характер ее изменения стабилизируется. Примем, что в точке **В** пластическое течение охватило все ослабленные приповерхностные слои. При этом номинальное напряжение достигло значения начала пластического течения внутренних слоев  $\sigma_{T2} = 130$  МПа, а нелинейная деформация, фиксируемая тензорезистором на поверхности, достигла величины  $\epsilon_{NL} = 7,64$  мкм/м.

Далее с увеличением изгибающего момента вклад поверхностного эффекта в нелинейную деформацию практически стабилизируется, а ее нарастание обусловлено включением в пластическое течение более глубоких внутренних слоев.

Закон изменения напряжения текучести в приповерхностных слоях в зависимости от глубины залегания слоя примем в виде полинома второй степени

$$\sigma_T(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad (2)$$

где  $x$  — глубина расположения приповерхностного слоя,  $A, B, C$  — постоянные коэффициенты, определяемые из следующих граничных условий:

$$\sigma_T(0) = \sigma_{T1}, \quad \sigma_T(\delta) = \sigma_{T2}, \quad \frac{d\sigma_T}{dx}(\delta) = 0.$$

Здесь  $\delta$  — глубина распространения приповерхностного эффекта.

Последнее условие обеспечивает плавный переход напряжения течения приповерхностных слоев в напряжения течения внутренних слоев.

Подстановка граничных условий в (2) дает

$$\sigma_T(x) = -\Delta\sigma_T \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 + 2\Delta\sigma_T \frac{x}{\delta} + \sigma_{T1} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \delta. \quad (3)$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta\sigma_T = \sigma_{T2} - \sigma_{T1}. \quad (4)$$

Глубина  $\delta$  в выражении (3) подбиралась таким образом, чтобы при изгибающем моменте, вызывающем на поверхности образца напряжение  $\sigma_{T2}$ , расчетная нелинейная деформация  $\epsilon_{NL2}$  под тензорезистором равнялась экспериментальному значению.

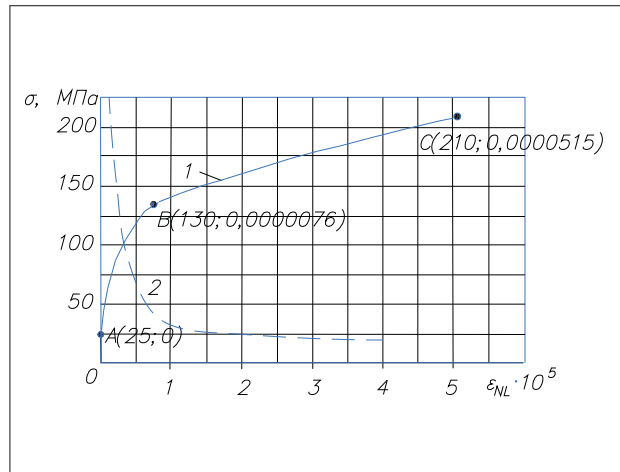


Рис. 3. Диаграмма деформирования (1) и первая производная (2) от номинального напряжения по нелинейной деформации

Fig. 3. Strain-stress diagram (1) and the first derivative (2) of the nominal stress with respect to nonlinear strain

Эта задача решена методом редуционных коэффициентов в процессе последовательных приближений. Образец разбивался по высоте на отдельные полоски толщиной  $\Delta x_i$ . Более мелкое разбиение (до 0,1 микрона) производилось в приповерхностных слоях, а ближе к оси изгиба образца  $\Delta x_i = 0,4$  мм.

Последовательность вычислений в **нулевом** приближении

$$\varphi^{(0)} = 1 \rightarrow F^{(0)} = bh \rightarrow I^{(0)} = \frac{bh^3}{12} \rightarrow \sigma_i^{(0)} = \frac{M}{I^{(0)}} y_i \rightarrow \varepsilon_i^{(0)} = \frac{\sigma_i^{(0)}}{E}.$$

Здесь нижний индекс — номер полоски, верхний индекс в скобках — номер приближения, а  $y_i$  — расстояние от оси изгиба сечения до центра тяжести полоски.

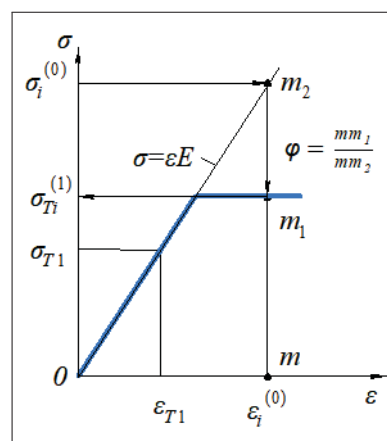


Рис. 4. Схема определения редуционных коэффициентов в первом приближении

Fig. 4. Scheme for determining reduction coefficients in a first approximation

В **первом** приближении (рис. 4) ослабление поперечного сечения образца пластическим деформированием учитывалось введением редуционного коэффициента  $\varphi_i$ , равного отношению напряжения пластического течения в  $i$ -й полоске, вычисленного по формуле (3), к номинальному напряжению в ней из предыдущего приближения

$$\varphi_i^{(1)} = \frac{\sigma_{Ti}^{(1)}}{\sigma_i^{(0)}}. \quad (5)$$

Расчет выполняется для уровня напряжения на поверхности 130 МПа в следующей последовательности:

$$\sigma_{Ti}^{(1)}(y_i, \varepsilon_i^{(0)}) = \begin{bmatrix} \varphi_i^{(1)} = 1 & \text{если } \sigma_{Ti}^{(1)} \geq \sigma_i^{(0)} \\ \varphi_i^{(1)} = \frac{\sigma_{Ti}^{(1)}}{\sigma_i^{(0)}} & \text{если } \sigma_{Ti}^{(1)} \leq \sigma_i^{(0)} \end{bmatrix} \rightarrow b_i^{(1)} = b\varphi^{(1)} \rightarrow F_i^{(1)} = b_i^{(1)} \Delta x_i \rightarrow$$

$$\rightarrow I_i^{(1)} = F_i^{(1)} y_i^2 \rightarrow I^{(1)} = 2 \sum_{i=1}^k I_i^{(1)} \rightarrow \sigma_i^{(1)} = \frac{M}{I^{(1)}} y_i \rightarrow \varepsilon_i^{(1)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{E}.$$

*Пояснение.* Материал приповерхностных полосок считается идеальным упруго-пластическим. Если напряжение нулевого приближения в полоске не превышает напряжение пластического течения в ней, то для полоски редуцированный коэффициент принимается равным единице. Для других приповерхностных полосок редуцированный коэффициент назначается в соответствии со схемой рис. 4.

Определяется эффективная ширина полоски, находится площадь полоски и переносный момент инерции относительно оси изгиба образца. Ввиду малости собственный момент инерции полосок не учитывается. Суммируются моменты инерции всех полосок, результат удваивается в силу симметрии сечения относительно оси изгиба. Вычисляются в первом приближении напряжения и деформации в сечении.

По такому же алгоритму выполняются и последующие приближения. Процесс последовательных приближений быстро сходится. Достаточно пяти приближений. Выполняя расчеты для разных  $\delta$ , определено значение  $\delta = 25,7$  мкм, удовлетворяющее условию равенства расчетного значения нелинейной деформации на поверхности образца экспериментальному значению (точка **В** на рис. 3).

Сдвиговые деформации неизбежно приводят к взаимному повороту кристаллических плоскостей в микро- и макрообъемах. Материал упрочняется и «запоминает» степень достигнутого упрочнения. Действительно, после каждой промежуточной разгрузки и последующего нагружения (см. рис. 2) состояние материала возвращается практически в исходную точку. Полного совпадения точек не происходит из-за ползучести материала, которая проявляется все сильнее с ростом уровня нагрузки. В предлагаемой модели ползучесть не учитывалась.

В соответствии с вышеизложенным принимаем, что сталь 1Х18Н9Т является кинематически упрочняющимся материалом, то есть предполагаем, что наряду с жестким смещением предельной поверхности текучести происходит также ее расширение [9].

Экспериментальная диаграмма деформирования на участке **ВС** (рис. 3) близка к линейной. Тогда, принимая линейный закон упрочнения, запишем

$$\begin{aligned} \sigma_i &= E\varepsilon_i, & \text{если } 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{T2}, \\ \sigma_{Ti} &= E\varepsilon_{T2} + E^*(\varepsilon_i - \varepsilon_{T2}) = \sigma_{T2} + E^*(\varepsilon_i - \varepsilon_{T2}), & \text{если } \varepsilon_i \geq \varepsilon_{T2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $E^*$  — коэффициент упрочнения.

Проводя расчеты при различных значениях коэффициента упрочнения и используя описанный выше метод последовательных приближений и соблюдая условия точки **С** (рис. 3), получаем значение  $E = 1,668 \cdot 10^5$  МПа, которое на 7,6 % ниже нормального модуля упругости  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа. Для учета упрочнения материала в приповерхностных слоях и устранения разрыва в напряжениях пластического течения при переходе от приповерхностных слоев к внутренним в начале каждого приближения вводится поправка: напряжение  $\sigma_{T2}$  в формуле (4) заменяется на  $\sigma_{Ti}(\delta)$ .

Таким образом, определены четыре параметра модели деформирования материала, которые характеризуют поверхностный эффект. Используя модель, были рассчитаны нелинейные деформации, если вместо испытаний на изгиб проводить испытания образца на растяжение. Результаты расчета приведены на рис. 5. Как видно из этого рисунка, нелинейная деформация на поверхности образца как минимум в три раза больше при изгибе, чем при растяжении в

области напряжений, при которых определяются параметры поверхностного эффекта. Следовательно, при изучении поверхностного эффекта методами тензометрии следует предпочитать испытания образцов на изгиб. Если предположить, что напряжения текучести в приповерхностном слое равны нулю, то такой предельный случай даст максимальное отклонение от линейной деформации 4 %. В действительности это значение будет еще меньше и не превысит 2 %.

Таким образом, поверхностный эффект очень слабо влияет на деформированное состояние упругого тела и значительно — на его напряженное состояние у поверхности. Поэтому он не обнаруживается экспериментальными методами, основанными на изучении деформированного состояния тела, такими как метод интерференционного муара или поляризационно-оптический, если в последнем изменение оптических свойств модели связывать с напряжениями, как у Максвелла, а не с деформациями по Нейману [10].

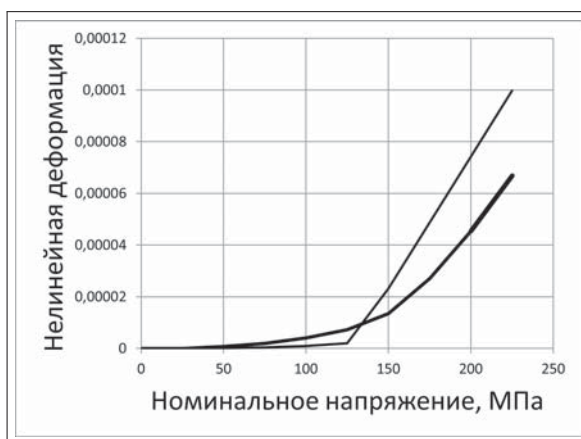


Рис. 5. Нелинейная деформация на поверхности образца в зависимости от номинального напряжения. Жирная линия — изгиб, тонкая линия — растяжение

Fig. 5. Nonlinear strain on the surface of the sample depending on the nominal stress. Thick line — bending, thin line — stretching

Изучение поверхностного эффекта осложняется тем, что, как правило, приповерхностные слои подвергаются различного рода обработкам с целью улучшения механических характеристик конструкций. В приповерхностных слоях протекают коррозионные процессы. Механическим удалением слоя невозможно избавиться от поверхностного эффекта.

Данное исследование проведено на коррозионно-устойчивом материале, что позволило свести к минимуму влияние коррозионных процессов, которые усложняют ситуацию.

Результаты расчета образца на изгиб и растяжение при одном и том же номинальном напряжении на поверхности 245 МПа приведены на рис. 6 и 7. Показано, как с глубиной изменяется удельная работа упругого, пластического деформирования и их суммы.

Особый интерес вызывает энергия пластического деформирования, которую можно считать мерой разрушения кристаллической структуры и превращения ее в аморфную. Согласно расчетам вне зависимости от вида нагружения энергия пластического деформирования достигает максимума под поверхностью на глубине от семи до восьми микрон. Следовательно, при воздействии переменной нагрузки зарождение микро- и макротрещин будет происходить под поверхностью, и трещина выйдет на поверхность после разрыва перемычки [11].

Однако при растяжении максимальная энергия пластического деформирования на 0,41 % выше, чем при изгибе. Следовательно, при растяжении-сжатии процесс накопления повреждений происходит интенсивнее, чем при изгибе, что подтверждается экспериментальными данными: предел выносливости при растяжении-сжатии ниже, чем при изгибе.

Как видно из рис. 7, полная энергия минимальна на поверхности образца. Значит начало разрушения образца при растяжении должно происходить изнутри, а излом иметь форму «конус-чашечка» [12].

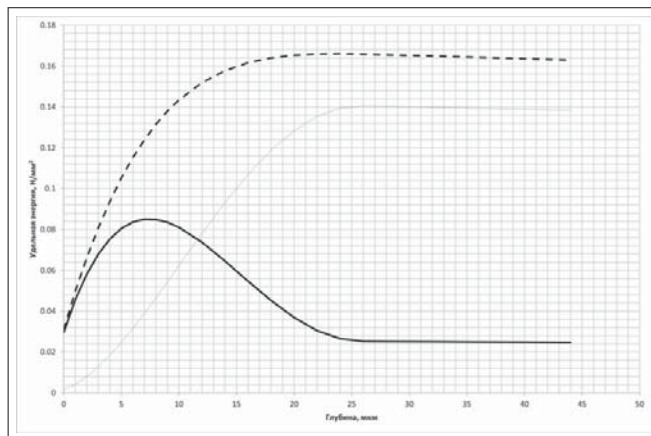


Рис. 6. Изменение энергий деформирования в приповерхностных слоях при изгибе образца: жирная линия — энергия пластического деформирования; тонкая линия — энергия упругого деформирования; пунктирная линия — полная энергия

Fig. 6. Changes in strain energies in the near-surface layers when the sample is bent: thick line — energy of plastic strain; thin line — energy of elastic strain; dotted line — the total energy

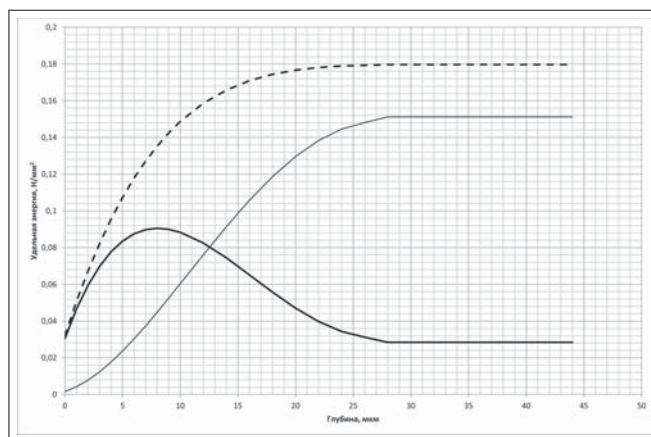


Рис. 7. Изменение энергий деформирования в приповерхностных слоях при растяжении образца: жирная линия — энергия пластического деформирования; тонкая линия — энергия упругого деформирования; пунктирная линия — полная энергия

Fig. 7. Changes in strain energies in the near-surface layers when the sample is stretched: thick line — plastic strain energy; thin line — elastic strain energy; dotted line — the total energy

## Заключение

Предложенная модель деформирования металлов с учетом приповерхностного эффекта позволяет приближенно численным методом решать сложные упруго-пластические задачи и с единой позиции объяснять многие процессы, которые происходят при статическом и переменном нагружении.

**Информация о конфликте интересов:** автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Цитирование.** Мехеда В.А. Моделирование упруго-пластического деформирования приповерхностных слоев материалов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 25–34. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-25-34.

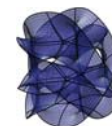


© Мехеда В.А., 2024

*Мехеда Виллий Андреевич* (villiy.mekheda@gmail.com) – доцент кафедры космического машиностроения имени Генерального конструктора Д.И. Козлова, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Литература

- [1] Шанявский А.А., Солдатенков А.П. Связь границ масштабных уровней усталостной диаграммы и различие в механизмах разрушения на мезо- и макромасштабном уровне // Физическая мезомеханика. 2024. Т. 27, № 1. С. 49–63. DOI: [http://doi.org/10.55652/1683-805X\\_2024\\_27\\_1\\_49-63](http://doi.org/10.55652/1683-805X_2024_27_1_49-63). EDN: <https://elibrary.ru/hzvqox>.
- [2] Инженерное материаловедение / В.В. Перинский [и др.]. Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2023. 363 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50472977>. EDN: <https://elibrary.ru/atqcmw>.
- [3] Основы металловедения и технологии производства труб из коррозионно-стойких сталей / Д.А. Пумпянский [и др.]. Москва: Общество с ограниченной ответственностью "Металлург-издат", 2023. 682 с.
- [4] Мехеда В.А., Хазанов Х.С. О методах измерения динамической петли гистерезиса // Вопросы прикладной механики в авиационной технике: сб. тр. Куйбышев, 1972. С. 47–52. URL: <http://repo.ssau.ru/bitstream/Voprosy-prikladnoi-mehaniki-v-aviacionnoi-tehnike/O-metodah-izmereniya-dinamicheskoi-petli-gistereza-94664/1.pdf>.
- [5] Мехеда В.А. О связи неупругих деформаций с усталостной прочностью металлов при изгибе // Вопросы прикладной механики в авиационной технике: сб. ст. аспирантов кафедр "Сопротивление материалов", "Прочность летательных аппаратов", "Аэрогидродинамика". Куйбышев, 1972. С. 53–59. URL: <http://repo.ssau.ru/bitstream/Voprosy-prikladnoi-mehaniki-v-aviacionnoi-tehnike/O-svyazi-neuprugih-deformacii-s-ustalostnoi-prochnostu-metallov-pri-izgibe-94663>.
- [6] Мехеда В.А., Спивак С.Е. Установка для измерения неупругих деформаций: сб. тр. студентов и аспирантов факультета летательных аппаратов. Студенческая наука аэрокосмическому комплексу. Самара: Изд.-во СГАУ, 2006. Вып. 8. С. 92–99.
- [7] Авербах Б.Л. Некоторые физические аспекты разрушения // Разрушение / ред. Г. Либовиц, пер. с англ. Т. 1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения. Москва: Мир, 1973. С. 471–504. URL: [https://books.totalarch.com/fracture\\_vol\\_1?ysclid=m0qc0vukjv734101484](https://books.totalarch.com/fracture_vol_1?ysclid=m0qc0vukjv734101484).
- [8] Бичем К.Д. Микропроцессы разрушения // Разрушение / ред. Г. Либовиц, пер. с англ. Т. 1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения. Москва: Мир, 1973. С. 265–375. URL: [https://books.totalarch.com/fracture\\_vol\\_1?ysclid=m0qcacwyvm856194334](https://books.totalarch.com/fracture_vol_1?ysclid=m0qcacwyvm856194334).
- [9] Селиванов В.В. Механика разрушения деформируемого тела: учебник для втузов. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 418 с.
- [10] Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. Москва: Наука, 1973. 576 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35626697>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xzsbps>.
- [11] Шанявский А.А. Самоорганизация кинетики усталостных трещин // Синергетика и усталостное разрушение металлов. Москва: Наука, 1989. С. 57–76. URL: <https://tut-files.ru/previewfile/77143/10>.



- [12] Полухин П.И., Горелик С.С., Воронцов В.К. Физические основы пластической деформации: учеб. пособие для вузов. Москва: Металлургия, 1982. 584 с. URL: <https://djuv.online/file/3Yc0Ahq4OX0Fy?ysclid=m0qd786upz326089843>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-25-34

# Modeling of elastic plastic deformation of near-surface layers of materials

Mekheda V.A. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [villiy.mekheda@gmail.com](mailto:villiy.mekheda@gmail.com);

Received: 04.04.2024

Revised: 15.05.2024

Accepted: 02.09.2024

Scientific article



**Abstract.** According to the results of strain measurements, a kinematically hardening body model is used to describe the process of elastic-plastic deformation of 1X18H9T steel. Special attention is paid to the processes occurring in the surface layers. The model takes into account the increasing tightness of shear deformations deep into the material. The increase in the stress of the plastic flow in depth is described by a second-order polynomial. The main parameters of the surface effect were determined experimentally and by calculations using the method of reduction coefficients in the process of successive approximations: depth, coefficient of hardening of the material, stresses of plastic flow on the surface and inside the material. It is shown that in order to study the near-surface effect by the strain gauge method, it is necessary to give preference to bending tests of samples rather than stretching. The presence of the surface effect explains the following facts: the destruction of the sample during the tensile test does not begin from the surface, but from the inside, the origin of fatigue cracks occurs under the surface, the surface effect practically does not affect the deformed state of the elastic body, but very strongly affects the stress state at the surface.

**Key words:** nonlinear deformation; near-surface effect; stress of plastic flow hardening crack.

**Information about the conflict of interests:** the author and reviewers declare no conflict of interest.

**Citation.** Mekheda V.A. Modeling of elastic plastic deformation of near-surface layers of materials. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 25–34. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-25-34. (In Russ.)

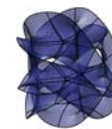
© Mekheda V.A., 2024

Villiy A. Mekheda ([villiy.mekheda@gmail.com](mailto:villiy.mekheda@gmail.com)) – associate professor of the Department of Space Engineering, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] Shanyavskiy A.A., Soldatenkov A.P. Relationship between stresses for the boundaries of scale levels of fatigue diagram and the difference of the meso- and macroscale. *Physical Mesomechanics*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 49–63. DOI: [http://doi.org/10.55652/1683-805X\\_2024\\_27\\_1\\_49-63](http://doi.org/10.55652/1683-805X_2024_27_1_49-63). EDN: <https://elibrary.ru/hzvqox>. (In Russ.)
- [2] Perinskii V.V., Perinskaia I.V., Kalganova S.G., Venig S.B. Engineering materials science. Moscow: Ai Pi Ar Media, 2023, 363 p. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50472977>. EDN: <https://elibrary.ru/atqcmw>. (In Russ.)

- [3] Pumpyanskii D.A., Pyshmintsev I.Yu., Vydrin A.V. [et al.] Fundamentals of metal science and technology of production of pipes from corrosion-resistant steels. Moscow: Obshchestvo s ogranichennoi otvetstvennost'yu "Metallurgizdat", 2023, 682 p. (In Russ.)
- [4] Mekheda V.A., Khazanov Kh.S. On methods for measuring the dynamic hysteresis loop. In: *Issues of applied mechanics in aviation technology: collection of articles*. Kuibyshev, 1972, pp. 47–52. Available at: <http://repo.ssau.ru/bitstream/Voprosy-prikladnoi-mehaniki-v-aviacionnoi-tehnike/O-metodah-izmereniya-dinamicheskoi-petli-gistereza-94664>. (In Russ.)
- [5] Mekheda V.A. On the connection between inelastic deformations and the fatigue strength of metals during bending. In: *Issues of applied mechanics in aviation engineering: collection of articles by postgraduate students of the Department "Strength of materials", "Strength of aircrafts", "Aerohydrodynamics"*. Kuibyshev, 1972, pp. 53–59. Available at: <http://repo.ssau.ru/bitstream/Voprosy-prikladnoi-mehaniki-v-aviacionnoi-tehnike/O-svyazi-neuprugih-deformacii-s-ustalostnoi-prochnostu-metallov-pri-izgibe-94663>. (In Russ.)
- [6] Mekheda V.A., Spivak S.E. Installation for measuring nonlinear deformations. In: *Collection of works of students and graduate students of the Faculty of Aircrafts. Student science to the aerospace complex*. Samara: Izd-vo SGAU, 2006, issue 8, pp. 92–99. (In Russ.)
- [7] Averbakh B.L. Some physical aspects of destruction. In: *Liebowitz H. (Ed.) Fracture. An advanced treatise. Vol. 1. Microscopic and macroscopic fundamental: translation from English*. Moscow: Mir, 1973, pp. 471–504. Available at: [https://books.totalarch.com/fracture\\_vol\\_1?ysclid=m0qc0vukjv734101484](https://books.totalarch.com/fracture_vol_1?ysclid=m0qc0vukjv734101484). (In Russ.)
- [8] Beecham K.D. Microprocesses of destruction. In: *Liebowitz H. (Ed.) Fracture. An advanced treatise. Vol. 1. Microscopic and macroscopic fundamental: translation from English*. Moscow: Mir, 1973, pp. 265–375. Available at: [https://books.totalarch.com/fracture\\_vol\\_1?ysclid=m0qcacwyvm856194334](https://books.totalarch.com/fracture_vol_1?ysclid=m0qcacwyvm856194334). (In Russ.)
- [9] Selivanov V.V. Mechanics of fracture of a deformable body: textbook for colleges. Moscow: MGTU im. N.E. Bauman, 1999, 418 p. (In Russ.)
- [10] Alexandrov A.Ya., Akhmetzyanov M.Kh. Polarization-optical methods of mechanics of a deformable body. Moscow: Nauka, 1973, 576 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35626697>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xzsbps>. (In Russ.)
- [11] Shanyavsky A.A. Self-organization of fatigue crack kinetics. In: *Synergetics and fatigue fracture of metals*. Moscow: Nauka, 1989, pp. 57–76. Available at: <https://tut-files.ru/previewfile/77143/10>. (In Russ.)
- [12] Polukhin P.I., Gorelik S.S., Vorontsov V.K. Physical foundations of plastic deformation: textbook for universities. Moscow: Metallurgiya, 1982, 584 p. Available at: <https://djvu.online/file/3Yc0Ahq4OX0Fy?ysclid=m0qd786upz326089843>. (In Russ.)



# Динамика балки Эйлера — Бернулли с учетом распределенных гистерезисных свойств

Карпов Е. А. 

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация; [believedream95@gmail.com](mailto:believedream95@gmail.com);

Поступила: 05.06.2024

Рассмотрена: 02.08.2024

Принята: 02.09.2024

Научная статья



**Аннотация.** В настоящей статье изучается математическая модель балки с распределенными гистерезисными свойствами. Свойства гистерезиса формализуются в рамках двух подходов: феноменологического (модель Боука — Вена) и конструктивного (модель Прандтля — Ишлинского). Уравнения колебаний балки получены с использованием известного подхода Гамильтона. Рассмотрены динамические характеристики балки с распределенным гистерезисом при различных видах внешней нагрузки: импульсной, периодической и сейсмической. Численное моделирование показывает, что балка гистерезиса более “устойчива” к внешним нагрузкам, чем классическая балка Эйлера — Бернулли. Эти результаты могут найти применение в области проектирования сейсмостойких конструкций и зданий.

**Ключевые слова:** гистерезис; балка Эйлера — Бернулли; балка; модель Боука — Вена; нелинейная динамика, устойчивость.

## Введение

В настоящее время проектирование несущих конструкций различных инженерных сооружений, а также разработка адекватных физических моделей являются неотъемлемой частью строительного процесса. Особенно остра задача выбора конструктивных составляющих зданий стоит в городах и странах, находящихся в сейсмоопасных регионах. Одним из важнейших этапов моделирования несущих конструкций в этом случае является идентификация форм их поведения под воздействием внешних возмущений (нагрузок). Обычно классификация нагрузок выполняется по нескольким критериям: по характеру приложения (сосредоточенные и распределенные), по продолжительности во времени (переменные и постоянные), по характеру действия (статические и динамические). В зависимости от типа нагрузки проявляются те или иные свойства несущих конструкций, являющиеся, в свою очередь, следствием внутренних особенностей используемых материалов.

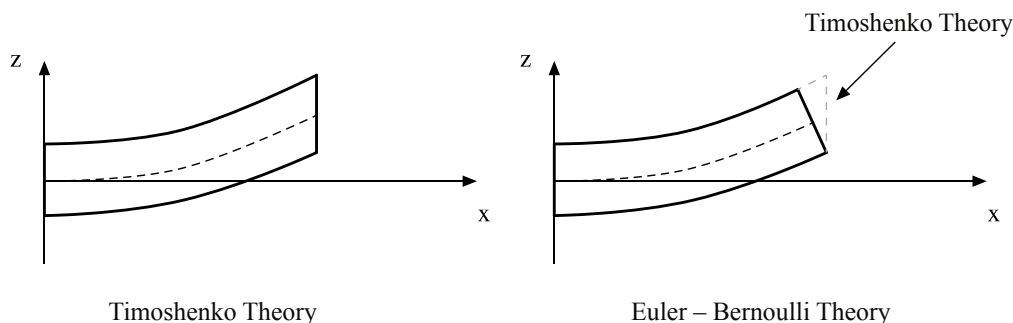


Рис. 1. Графическое представление принципиального различия между теориями Тимошенко и Эйлера — Бернулли

Fig. 1. Illustration of the main difference between Timoshenko and Euler — Bernoulli beam theories

Известно, что одним из базовых элементов любой несущей конструкции является балка. Математическое описание балки обычно формализуется в рамках теории Эйлера — Бернулли [1] или теории Тимошенко [2] (рис. 1). Основное различие между вышеозначенными подходами заключается в поведении балки при поперечных деформациях. В теории Эйлера — Бернулли предполагается, что во время деформаций поперечное сечение перпендикулярно нейтральной оси. В то же время в теории Тимошенко оно не перпендикулярно нейтральной оси и напрямую зависит от интенсивности деформации. В настоящей статье модель колебаний балки строится с использованием теории Эйлера — Бернулли в предположении, что балка имеет шарнирное закрепление в двух концах и обладает нулевыми начальными условиями (балка покоится и не имеет начальной скорости). Следуя работе [3], классическое уравнение колебаний балки имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = g(x, t), & t > 0, x \in [0, L], \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = S(t), \\ u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  — отклонение балки от положения равновесия, индексы обозначают частные производные<sup>1</sup>,  $g(x, t)$  есть функция, характеризующая вертикальную нагрузку (управление),  $S(t)$  — функция, характеризующая внешнее воздействие, прикладываемое к закрепленным концам балки,  $a^2 = EI$  — произведение модуля упругости и момента инерции,  $t > 0$  есть время моделирования,  $L$  — длина балки.

Балки в зависимости от своих конструктивных особенностей находят свое применение в различных элементах строительных (и не только) конструкций. Например, двутавровые балки используются для обеспечения устойчивости перекрытий между этажами и в мостовых сооружениях, швеллерные же балки используются для армирования железобетонных конструкций, а также в качестве рам, каркасов и т. д. Кроме того, балки по-разному реагируют на внешнюю нагрузку, которая, в свою очередь, может быть импульсной, вибрационной, подвижной [4], ударной, ветровой. При этом основная задача, решаемая при выборе типа балки применительно к задачам строительства, заключается в обеспечении устойчивости всего сооружения по отношению к потенциальным внешним воздействиям, к числу которых, в первую очередь, относятся сейсмические волны как природного, так и техногенного характера. В таком случае балка выступает в роли демпфирующего элемента, трансформируя входящую энергию воздействия в иные ее формы [5].

Известно, что во время нагрузок балка начинает деформироваться, порождая во внутренней структуре материала силы, стремящиеся вернуть ей исходную форму. Если после снятия нагрузки она принимает форму, отличную от исходной, то следует говорить об упруго-пластическом гистерезисе. Он играет важную роль в современных исследованиях реальных систем и процессов. Это явление было обнаружено во многих областях современной науки: физике [6–14], экономике, биологии, химии и т. д. Недавние исследования показывают важность и целесообразность использования гистерезиса в нейронных сетях, например, включая его как звено или как самостоятельный элемент в функцию активации соответствующей сети. Такой широкий спектр применения обуславливается важными структурными особенностями гистерезиса — зависимостью текущего состояния системы от предыстории и начального состояния как от параметра. Еще более важной особенностью гистерезиса является тот факт, что в ряде задач он позволяет моделировать процесс диссипации энергии, что, в свою очередь, позволяет использовать гистерезисные преобразователи в качестве управляющего элемента, стабилизирующего поведение динамических систем [15–17].

Теоретические модели, описывающие гистерезисные явления, восходят к классическим работам Прандтля [18], Прейзаха [19] и др. В начале 60-х годов XX века появились первые феноменологические модели [20–23]. Теория конструктивных моделей гистерезиса, учитываю-

<sup>1</sup>Здесь  $u_{xxxx} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ,  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

щая физические особенности конструктивных элементов исследуемых систем, получила свое развитие в трудах М.А. Красносельского и его учеников в Воронежском университете в 60-х годах прошлого века. Фундаментальная монография [24] с подробным описанием свойств конструктивных моделей гистерезиса вышла в 1983 г. Разработанная в ней методология позволила описывать гистерезис на языке нелинейных операторов, зависящих от своего начального состояния как от параметра. Математический аппарат, предложенный в ней, базируется на выделении элементарных носителей гистерезисных свойств – гистеронов – преобразователей, наделенных пространством состояний и входно-выходными соответствиями. Такой подход позволил имплементировать модели гистерезиса в состав более сложных систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

В настоящей статье предлагается модель балки с учетом распределенных гистерезисных свойств, в разд. 1 описываются используемые в работе модели гистерезиса, разд. 2 посвящен выводу уравнений колебаний гистерезисной балки, в разд. 3 описаны численные методы, используемые в работе, а в разд. 4 приводятся результаты моделирования и сравнительный анализ классической и гистерезисной балок. В качестве моделируемой нагрузки будут выступать периодические и импульсные воздействия, а также нагрузка сейсмического характера.

## 1. Модели гистерезиса: феноменологический и конструктивный подходы

### 1.1. Преобразователь Прандтля

Одной из самых известных и простых гистерезисных моделей является преобразователь Прандтля [25–27] (также известный как “stop operator”). Он используется для моделирования упруго-пластических волокон [28], где состояния полностью определяются величинами переменной деформации и переменного напряжения, а также применяется в качестве элементарной составляющей в сложных континуальных гистерезисных моделях в рамках теории упруго-пластического гистерезиса. Действительно, преобразователь Прандтля идеально описывает поведение материала: материал, находящийся в изначальном состоянии, когда нормальное напряжение и деформация отсутствуют, под нагрузкой начинает вести себя упруго до некоторого порогового значения  $h$ , а после демонстрирует пластические свойства, находясь под постоянным напряжением. Это поведение также называется “пластическое течение”, так как при уменьшении напряжения материал обладает пластическими свойствами, пока не достигнет порогового значения с противоположным знаком  $-h$ . Однако отметим, что преобразователь Прандтля позволяет моделировать упруго-пластические свойства без деформационного упрочнения<sup>2</sup>.

Структурно этот преобразователь может быть представлен как последовательное соединение линейного упругого элемента  $E$  (например, пружина) с жестким, идеально пластическим элементом  $P$  (например, брусок,двигающийся по поверхности, под действием силы сухого трения) (рис. 2). Если предположить, что упругость пружины  $E$  равна единице, следует говорить о более простом преобразователе – упоре.

Описание преобразователя Прандтля начнем с определения его состояний. Состояниями этого преобразователя являются пары “вход-выход”  $\{x, u\}$  с областью определения в виде полосы  $\Omega = \Omega(\Gamma_P, E)$ , угол наклона которой зависит от коэффициента  $E$ , определяющего модуль упругости. Причем полоса  $\Omega$  зависит также и от порогового значения  $h$  (полоса пересекает ось  $O_x$  в точках  $\pm h$ ), которое является еще одной характеристикой этой модели. Иначе говоря, модель может быть формализована в виде равенства:

$$\sigma(t) = \Gamma_P[h]\varepsilon(t),$$

<sup>2</sup>Также известно как “strain hardening”, которое представляет собой упрочнение материала (например, металла или полимера) за счет пластической деформации, которое появляется из-за возникновения и движения дислокаций в кристаллической структуре материала



Рис. 2. Графическое представление гистерезисного преобразователя Прандтля. Здесь  $E$  и  $P$  — упругий и пластический элементы соответственно

Fig. 2. Graphical representation of the Prandtl operator.  $E$  and  $P$  are the elastic and the plastic elements respectively

где

$$\Gamma_P[h]\varepsilon(t) = \begin{cases} \min\{h, \varphi(t, \tau)\}, & \text{если } \varepsilon(t) \geq \varepsilon(t - \tau), \\ \max\{-h, \varphi(t, \tau)\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi(t, \tau) = E [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)] + \sigma(t - \tau)$$

или в более компактной форме:

$$\sigma(t) = \Gamma_P[h]\varepsilon(t) = \min\{h, \max\{-h, \varphi(t, \tau)\}\}, \quad (2)$$

где  $\sigma(t - \tau)$  — значение выхода гистерезисного преобразователя в момент времени  $t - \tau$ ,  $\varepsilon(t)$  — входной сигнал,  $\sigma(t)$  — выходной сигнал (реакция преобразователя). Графическое представление описанного выше преобразователя отображено на рис. 3.

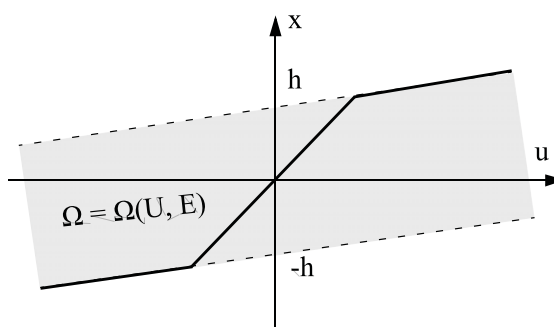


Рис. 3. График зависимости входа  $\varepsilon(t)$  от выхода  $\sigma(t)$  для преобразователя Прандтля с пороговым значением, равным  $h$ , и областью определения  $\Omega = \Omega(\Gamma_P, E)$  в виде полосы с углом наклона, зависящим от коэффициента  $E$

Fig. 3. Dependence of the input  $\varepsilon(t)$  on the output  $\sigma(t)$  for the Prandtl operator with the threshold value  $h$  and the domain  $\Omega = \Omega(\Gamma_P, E)$  presented as a band with the slope angle determined by the coefficient  $E$

## 1.2. Конструктивный подход: преобразователь Прандтля — Ишлинского

Одним из самых известных преобразователей в рамках конструктивного подхода к моделированию упруго-пластического гистерезиса является преобразователь Прандтля — Ишлинского. Обычно этот преобразователь применяется в задачах, где требуется формализовать гистерезисную связь между напряжением и деформацией. Он является компиляцией преобразователей Прандтля и материала Ишлинского. В отличие от преобразователя Прандтля преобразователь Прандтля — Ишлинского позволяет учитывать деформационное упрочнение совместно с упруго-пластическими свойствами (рис. 4). Натурные эксперименты, проведенные с упруго-пластическими материалами, демонстрируют, что состояние материала не только характеризуется входно-выходной характеристикой “напряжение-деформация”, но и зависит

от некоторых внутренних переменных. Преобразователь Прандтля — Ишлинского позволяет учитывать предысторию и является удобным инструментом для моделирования гистерезисных зависимостей. Преобразователи с такой структурой относят к классу сложных гистерезисных систем, описываемых посредством континуальных аналогов блок-схем (рис. 5). В настоящем разделе приводится математическое описание этого преобразователя.

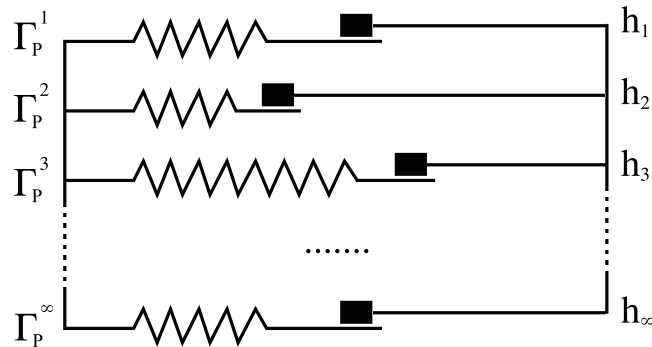


Рис. 4. Внутренняя структура континуального преобразователя Прандтля — Ишлинского с пороговыми значениями  $h = h_1, h_2, \dots, h_\infty$ , распределенными с помощью некоторой функции распределения и параллельно соединенными преобразователями Прандтля  $\Gamma_P = \Gamma_{P1}, \Gamma_{P2}, \dots, \Gamma_{P\infty}$   
 Fig. 4. Inner structure of the Prandtl — Ishlinskii operator with the threshold values  $h = h_1, h_2, \dots, h_\infty$ , distributed using a distribution function and connected in parallel by the Prandtl operators  $\Gamma_P = \Gamma_{P1}, \Gamma_{P2}, \dots, \Gamma_{P\infty}$

Зададим семейство однопараметрических преобразователей Прандтля (2), зависящих от порогового значения  $h$  как от параметра. Пусть параметр  $h$ , характеризующий пороговое значение, принадлежит некоторому множеству  $\Phi$ . Пусть задана неубывающая непрерывная слева функция  $\Xi = \Xi(h)$ ,  $h > 0$  на множестве  $\Phi$ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \Xi(h) = 0,$$

$$\int_0^\infty |\Xi(h)| dh < \infty.$$

Также пусть задано множество  $Z$  непрерывных функций  $\sigma(h)$ , удовлетворяющих условию

$$|\sigma(h)| \leq h.$$

Теперь определим множество  $\Omega(\Gamma_P, E)$  возможных состояний преобразователя  $\Gamma_P$  как

$$\Omega(\Gamma_P, E) = \{\{\varepsilon, \sigma_1(h)\}, \{\varepsilon, \sigma_2(h)\}, \dots, \{\varepsilon, \sigma_\infty(h)\}\},$$

где  $\varepsilon$  — это вход,  $\sigma_i(h)$  — выход (реакция)  $i$ -го преобразователя  $\Gamma_P^i$  (каждый преобразователь зависит от порогового значения как от параметра). Входно-выходные соответствия такого преобразователя описываются следующим равенством:

$$\sigma(t) = \Gamma_P[t_0, \sigma_0(h); \Xi] \varepsilon(t) = \int_0^\infty \Gamma_P[t_0, \sigma_0(h); h] \varepsilon(t) d\Xi(h), \tag{3}$$

а переменное состояние  $\{\varepsilon(t), \sigma(h, t)\}$  определяется равенством

$$\sigma(h; t) = Q[t_0, z_0(h); \Xi] \varepsilon(t) = \Gamma_P[t_0, \sigma_0(h); h] \varepsilon(t), \tag{4}$$

где  $Q$  есть пучок гистеронов (конечный или в общем случае бесконечный набор гистеронов), преобразователь  $\Gamma_P$  описывает параллельное соединение бесконечного набора преобразователей,



описываемых соотношением (2) (см. рис. 4),  $\sigma_0(h)$  стоит понимать как значение выхода в предыдущий момент времени (альтернативная запись  $\sigma(t - \tau, h)$ ).

Согласно определениям и свойствам, изложенным в работе [24], подобный преобразователь обладает свойствами статичности и виброкорректности, однако свойствами управляемости и детерминированности не располагает. В ряде задач, вместо континуального преобразователя

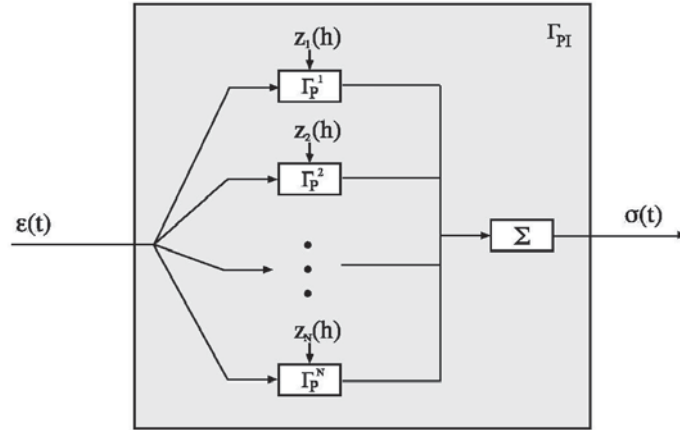


Рис. 5. Блок-схема параллельного соединения упоров в модели Прандтля — Ишлинского  
 Fig. 5. Schema of parallel connection of the stop-operator models in the Prandtl — Ishlinskii model

Прандтля — Ишлинского удобно использовать его конечномерный аналог (именно такая ситуация имеет место в компьютерном моделировании гистерезисных зависимостей). Более того, в моделях реальных физических систем практически всегда реализуется конечномерный аналог континуального преобразователя. Пусть задан конечный набор размера  $N \in \mathbb{Z}$  гистеронов  $\Gamma_P$ , формализуемых посредством преобразователя Прандтля. Предполагая, что гистероны соединены параллельно (как и в континуальной модели), и переходя от интеграла к интегральной сумме, преобразователь примет вид (рис. 5):

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N f(h_i) \Gamma_P[t_0, \sigma_i; h_i] \varepsilon(t). \quad (5)$$

Большое разнообразие работ, использующих преобразователь Прандтля — Ишлинского, можно условно разделить на две категории: фундаментальные и прикладные. В рамках фундаментальных работ исследуются структурные особенности преобразователя [29–31], вопросы корректности, а также проблемы идентификации его параметров [32]. В работах прикладной направленности преобразователь используется для описания гистерезисных явлений в механических системах, например актуаторы, магнитореологические эластомеры [33], несущие конструкции [34] и т. д.

### 1.3. Феноменологический подход: преобразователь Боука — Вена

Наряду с конструктивным, не менее известным является феноменологический подход к моделированию гистерезиса. Он позволяет моделировать петли гистерезиса разной структуры, не принимая во внимание физическую основу моделируемого процесса. Обычно феноменологический подход применяется в том случае, когда необходимо оценить реакцию системы на сигнал лишь на основе экспериментальных данных о характеристиках входного воздействия и отклике системы на него. Одним из самых известных преобразователей в рамках этого подхода является преобразователь Боука — Вена, предложенный в [21; 22]. Входные-выходные соответствия преобразователя Боука — Вена формализуются уравнением:

$$\dot{\Gamma}_{BW} = \dot{x} \{A - [\beta \text{sign}(\dot{x} \Gamma_{BW}) + \gamma] |\Gamma_{BW}|^m\}, \quad (6)$$

где  $x = x(t)$  — входной сигнал,  $\Gamma_{BW} = \Gamma_{BW}(t)$  — выходной сигнал (реакция преобразователя),  $\gamma, n, \beta, A > 0$  — безразмерные параметры. Как можно заметить, преобразователь Боука — Вена является четырехпараметрическим, что позволяет моделировать различные по форме и площади гистерезисные петли. Отметим, что проблеме идентификации этих параметров посвящено достаточно большое количество публикаций.

Очевидным преимуществом преобразователя Боука — Вена являются простота численной реализации и развитый математический аппарат [35–38]. В этих работах рассмотрены задачи возникновения предельного цикла, взаимная зависимость параметров преобразователя, адаптация модели применительно к некоторому набору прикладных задач и т. д. На сегодняшний день преобразователь Боука — Вена применяется и для моделирования процессов различного масштаба [15; 39].

## 2. Уравнение колебаний гистерезисной балки: гамильтоновский подход

В настоящем разделе производится вывод уравнений колебаний балки с распределенными гистерезисными свойствами (рис. 6). Отметим, что в подавляющем большинстве прикладных задач рассматривались объекты с сосредоточенными гистерезисными свойствами. Распределенные гистерезисные свойства рассматривались в весьма ограниченном количестве работ, из которых отметим работу [34]. Ниже приводится вывод уравнений колебаний гистерезисной балки, основанный на вариационном принципе, а именно принципе наименьшего действия Гамильтона. В рамках этого подхода искомые уравнения являются следствием экстремального значения функционала действия.

Рассмотрим стержень, работающий на изгиб, имеющий постоянную площадь поперечного сечения  $S = const$ , симметричную относительно обеих осей  $O_y$  и  $O_z$ , при этом нейтральная ось стержня совпадает с осью  $O_x$ . Отметим, что в текущем выводе учитываются только поперечные колебания в плоскости  $O_{xy}$ , продольными колебаниями пренебрегают. Пусть отклонение гисте-

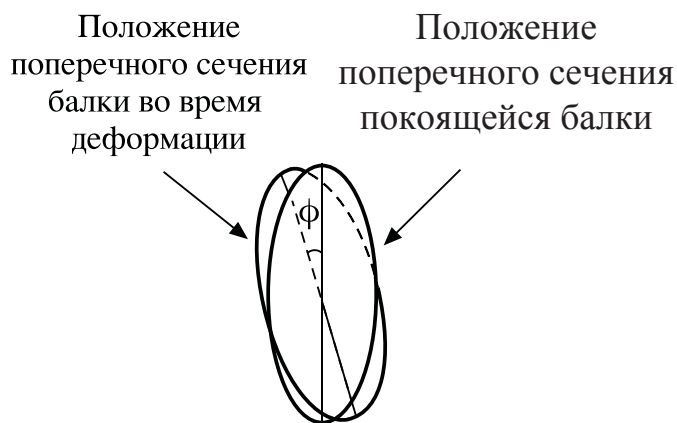


Рис. 6. Изгиб поперечного сечения балки во время деформации  
 Fig. 6. Bending of the cross section of the beam during the deformation

резисной балки от положения равновесия описывается следующим функционалом действия:

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \tag{7}$$

где  $t_0 \leq t \leq t_1$  — некоторый промежуток времени,  $u = u(x, t)$  — кривая, описывающая динамику

балки,  $L$  — функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергии:

$$L = T - U, \quad (8)$$

где  $U$  — потенциальная энергия,  $T$  — кинетическая энергия. Определим потенциальную энергию балки как

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l M \chi dx, \quad (9)$$

где  $M$  — изгибающий момент, а  $\chi$  — деформация балки в точке  $x$ . Деформацию определим через кривизну.

Пусть кривая, описывающая положение балки в плоскости  $O_{xy}$ , задана уравнением  $F = F(x, y) = 0$  ( $F \in \mathbb{R}^2$ ), тогда ее кривизна будет описываться уравнением:

$$\kappa = \frac{|F_y^2 F_{xx} - F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}|}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

Так как продольными колебаниями можно пренебречь (согласно предположению), то уравнение, описывающее положение балки, будет иметь вид  $F(x, y) = y - u(x) = 0$ , а ее кривизна определяться следующим соотношением:

$$\kappa = \frac{u_{xx}}{(1 - u_x^2)^{3/2}}.$$

Ограничиваясь рассмотрением лишь малых углов отклонения поперечного сечения  $\phi \ll 1$  ( $u_x \ll 1$  и как следствие  $1 - u_x^2 \xrightarrow{u_x \rightarrow 0} 1$ ), кривизна будет определяться равенством:

$$\kappa = u_{xx}.$$

В свою очередь, изменение кривизны балки равно<sup>3</sup>

$$\chi = k - k_0 = k - 0 = k = u_{xx} \quad (10)$$

где  $k_0$  — начальная кривизна покоящейся балки, равная нулю.

Для вывода уравнения изгибающего момента выберем два параллельных сечения  $\Omega(x)$  и  $\Omega(x + \Delta x)$  на расстоянии  $\Delta x$ . Очевидно, что углы поворота в этих сечениях будут различными во время деформации. Вследствие этого происходят растяжение (в верхней части балки) и сжатие (в нижней части балки) материала балки в продольном направлении. Рассмотрим часть балки, находящейся на расстоянии  $r = r(y)$  от ее оси симметрии. Как видно на рис. 7, длина растянутого материала изменилась на  $\Delta s = r \Delta \phi$ . Относительное удлинение материала

$$\varepsilon(x, \Delta x, y, t) = -\frac{\Delta s}{\Delta x} = -r \frac{\Delta \phi}{\Delta x}, \quad (11)$$

а деформация растяжения-сжатия в точке  $x$

$$\varepsilon(x, y, t) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(x, \Delta x, y, t) = -r \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta x} = -r \phi_x. \quad (12)$$

Угол отклонения поперечного сечения  $\phi$  от “нормального” положения в точке  $x$  (см. рис. 6) с учетом ортогональности оси симметрии направлению деформации равен:

$$\phi = u_x. \quad (13)$$

<sup>3</sup>Кривизна равна нулю только в том случае, когда каждая точка балки неподвижна, однако как только балка подвергается деформациям, то есть некоторые бесконечно малые элементы балки начинают отклоняться от положения равновесия, кривизна становится ненулевой.

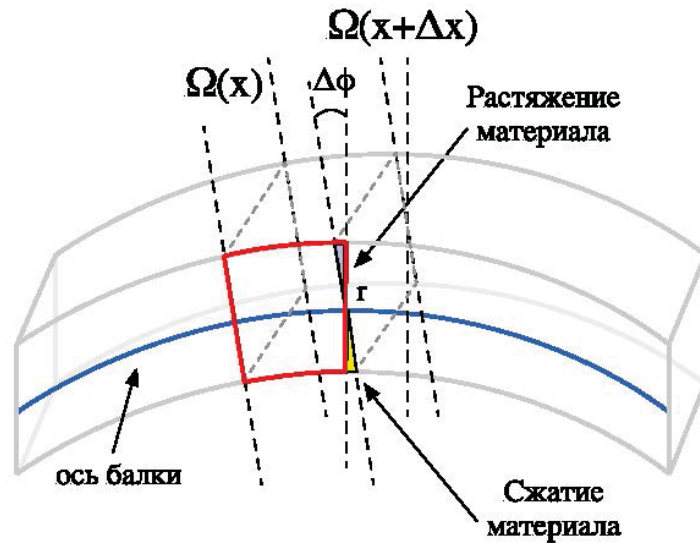


Рис. 7. Деформированная часть балки, полученная двумя параллельными сечениями  $\Omega(x)$  и  $\Omega(x + \Delta x)$

Fig. 7. Deformed part of the beam obtained by means of two parallel cross sections  $\Omega(x)$  and  $\Omega(x + \Delta x)$

Таким образом, подставляя (13) в (14), получим

$$\varepsilon(x, y, t) = -ru_{xx}. \quad (14)$$

Изгибающий момент, возникающий относительно оси  $O_z$  вследствие нормального напряжения в сечении  $\Omega(x)$ , описывается уравнением

$$M(x, t) = \int_{\Omega} r\sigma dS. \quad (15)$$

Теперь вычислим нормальное напряжение в сечении  $\Omega(x)$ , полагая, что материал балки обладает упруго-пластическими свойствами с деформационным упрочнением. Для этого воспользуемся преобразователем Прандтля – Ишлинского:

$$\sigma(t) = \Gamma_{PI}[t_0, \sigma_0; \Xi]\varepsilon(t) := \int_0^{\infty} \Gamma_P[t_0, \sigma_0; h]\varepsilon(t)d\Xi(h), \quad (16)$$

где  $\sigma(t)$  – выход (реакция преобразователя),  $\Gamma_{PI}$  – преобразователь Прандтля – Ишлинского,  $\varepsilon(t)$  – вход. Выполним переход от одномерного преобразователя Прандтля – Ишлинского к двумерному, введя пространственный параметр  $\zeta$ , принадлежащий множеству измеримых параметров, по Лебегу, как предлагается в работе [34]. Тогда параметрический преобразователь примет вид:

$$\sigma(\zeta, t) = \Gamma_{PI}[t_0, \sigma_0; \Xi]\varepsilon(\zeta, t) := \int_0^{\infty} \Gamma_P[t_0, \sigma_0; h]\varepsilon(\zeta, t)d\Xi(\zeta, h),$$

где  $\zeta$  – параметр, характеризующий пространственную (по материалу балки) плотность распределения элементарных носителей гистерезиса. Или, используя следующее соотношение  $\zeta = (x, y)$  (параметр  $\zeta$  представлен в виде пространственной переменной), окончательно получим:

$$\sigma(x, y, t) = \Gamma_{PI}[t_0, \sigma_0; \Xi]\varepsilon(x, y, t) := \int_0^{\infty} \Gamma_P[t_0, \sigma_0; h]\varepsilon(x, y, t)d\Xi(x, y, h). \quad (17)$$

С учетом соотношения (17) уравнение (15) примет вид:

$$M(x, t) = \int_{\Omega} r \left( \int_0^{\infty} \Gamma_P[t_0, \sigma_0; h]\varepsilon(x, y, t)d\Xi(x, y, h) \right) dS. \quad (18)$$

Раскрыв скобки и учитывая соотношение (14), получим

$$M(x, t) = \int_{\Omega} \int_0^{\infty} r\Gamma_P[t_0, \sigma_0; h](-ru_{xx})d\Xi(x, y, h)dS. \quad (19)$$

Теперь воспользуемся свойством преобразователя Прандтля [34], а именно соотношением

$$r\Gamma_P[h](-ru_{xx}) = -r^2\Gamma[h/|r|]u_{xx}. \quad (20)$$

Для подынтегрального выражения из соотношения (19) с учетом соотношения (14)

$$M(x, t) = \int_{\Omega} -r^2 \left( \int_0^{\infty} \Gamma_P[t_0, \sigma_0; h/|r|]u_{xx}d\Xi(x, y, h) \right) dS \quad (21)$$

и введя переменную  $\widehat{\Xi}(x, h) = \int_{\Omega} r^2\Xi(x, y, |r|h)dS$ , получим

$$M(x, t) = - \int_0^{\infty} \Gamma_P[t_0, \sigma_0; h]u_{xx}d_h\widehat{\Xi}(x, h). \quad (22)$$

Как можно заметить, уравнение (22) совпадает с уравнением (16), что позволяет записать соотношение в следующей форме:

$$M(x, t) = -\Gamma_{PI}u_{xx}. \quad (23)$$

Таким образом, связывая отношение деформации к напряжению посредством преобразователя Прандтля — Ишлинского (17), по сути, осуществляется распределение гистерезисных свойств вдоль длины балки.

Окончательно принимая во внимание соотношения (10) и (23), уравнение для потенциальной энергии примет вид

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^l u_{xx}\Gamma_{PI}[u_{xx}]dx. \quad (24)$$

Кинетическую энергию определим классическим образом:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x)Su_t^2dx. \quad (25)$$

Тогда интеграл действия для такой системы примет вид

$$I(u) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \left( \int_0^L u_{xx}\Gamma_{PI}[u_{xx}]dx + \int_0^L \rho Su_t^2dx \right) dt. \quad (26)$$

Из принципа наименьшего действия в форме Гамильтона следует, что функция  $u = u(x, t)$  является экстремалью функционала (26). Рассмотрим вариацию этой функции  $\widehat{u}(x, t) = u(x, t) + \epsilon\eta(x, t)$ , для которой справедливо следующее:

- в начальный и конечный моменты времени функция  $u(x, t)$  не варьируется;
- $\eta(x, t_1) = \eta(x, t_2) = 0$  для таких  $x$ , для которых верно  $0 \leq x \leq L$ .

Таким образом, функционал (26) для кривой  $\widehat{u}$  примет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \left( \int_0^L (u_{xx} + \epsilon\eta_{xx})\Gamma[u_{xx} + \epsilon\eta_{xx}]dx + \rho S \int_0^L (u_t + \epsilon\eta_t)^2dx \right) dt. \quad (27)$$

Ясно, что функционал действия (27) достигает экстремума в точке  $\epsilon = 0$ . Согласно необходимому условию существования экстремума, положим вариацию функционала действия относительно  $\epsilon$  равной нулю

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (28)$$

Перед вычислением производной по  $\epsilon$  раскроем скобки внутри подынтегральных уравнений (27):

$$\int_0^L u_{xx} \Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}] + \epsilon \eta_{xx} \Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}] dx, \quad (29)$$

$$\rho S \int_0^L (u_t^2 + 2\epsilon u_t \eta_t + \eta_t^2) dx. \quad (30)$$

Подставляя в (28) выражение интеграла действия (27) с учетом (29) и (30), вычислим производную по  $\epsilon$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} ((I_1 + I_2) + \rho S I_3)_\epsilon dt = 0, \quad (31)$$

где

$$I_1 = \int_0^L u_{xx} \Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}] dx, \quad (32)$$

$$I_2 = \int_0^L \epsilon \eta_{xx} \Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}] dx, \quad (33)$$

$$I_3 = \int_0^L (u_t^2 + 2\epsilon u_t \eta_t + \eta_t^2) dx. \quad (34)$$

Предположим, что функция  $\eta(x, t)$  на концах равняется нулю, то есть  $\eta(0, t) = \eta(L, t) = 0$ . Рассмотрим более детально каждое слагаемое (32)–(34).

Найдем частную производную по  $\epsilon$  для (32). Для этого продифференцируем подынтегральное слагаемое<sup>4</sup>:

$$\int_0^L u_{xx} (\Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}])_\epsilon dx. \quad (35)$$

Для дальнейших вычислений предположим, что весовая функция  $\widehat{\Xi}$  дифференцируема и ее производная есть функция  $f(h)$ . Следуя этому, преобразователь Прандтля — Ишлинского примет вид:

$$\Gamma_{PI}[h]\epsilon = \int_0^\infty f(h) \Gamma_P[h]\epsilon dh. \quad (36)$$

Учитывая (36), запишем полную форму производной преобразователя Прандтля — Ишлинского из соотношения (35):

$$(\Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}])_\epsilon = \int_0^\infty f(h) (\Gamma_P[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}])_\epsilon dh, \quad (37)$$

где  $\Gamma_P$  — преобразователь Прандтля. Представляя преобразователь Прандтля в форме (2):

$$\Gamma_P[\phi(x, t, \epsilon)] = \min\{h, \max\{-h, \psi(x, t, t_0, \epsilon)\}\}, \quad (38)$$

где  $\psi(x, t, t_0, \epsilon) = \Gamma_{P0} + \phi(x, t, \epsilon) - \phi(x, t_0, \epsilon)$  и  $\phi(x, t, \epsilon) = u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}$ , его производная примет вид:

$$\Gamma_P[\phi(x, t, \epsilon)]_\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi(x, t, t_0, \epsilon) \in [-h, h], \\ \eta_{xx}(x, t) - \eta_{xx}(x, t_0), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (39)$$

Полученный выше результат можно представить в виде

$$\Gamma_P[\phi(x, t, \epsilon)]_\epsilon = (\eta_{xx}(x, t) - \eta_{xx}(x, t_0)) \times (\Theta(\psi(x, t, t_0, \epsilon) + h) - \Theta(\psi(x, t, t_0, \epsilon) - h)), \quad (40)$$

<sup>4</sup>Очевидно, что производную необходимо взять только у слагаемого  $\Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon \eta_{xx}]$ , поскольку  $u$  не зависит от  $\epsilon$ .

где  $\Theta(\cdot)$  — функция Хевисайда. Тогда, подставляя полученный результат в (37) и вынося слагаемые, не зависящие от  $h$ , получим

$$\begin{aligned} (\Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon\eta_{xx}])_{\epsilon} &= (\eta_{xx}(x, t) - \eta_{xx}(x, t_0)) \times \\ &\times \int_0^{\infty} f(h)(\Theta(\psi(x, t, t_0, \epsilon) + h) - \Theta(\psi(x, t, t_0, \epsilon) - h)) dh. \end{aligned} \quad (41)$$

Подставив в (35) выражение (41), обозначив интеграл как некоторую функцию  $\beta(x, t, t_0, \epsilon)$ :

$$\int_0^L u_{xx}(\eta_{xx}(x, t) - \eta_{xx}(x, t_0))\beta(x, t, t_0, \epsilon) dx, \quad (42)$$

проинтегрируем два раза по частям, принимая за  $v$  функцию от  $\eta$  (чтобы избавиться от двух производных по  $x$ ), и окончательно получим

$$(I_1)_{\epsilon} = \int_0^L (\eta(x, t) - \eta(x, t_0))\alpha(x, t, t_0, \epsilon) dx, \quad (43)$$

где  $\alpha(x, t, t_0, \epsilon)$  — некоторая произвольная функция, полученная в ходе интегрирования.

Теперь рассмотрим второй интеграл  $I_2$ . Дифференцируя интеграл по  $\epsilon$ :

$$\int_0^L \eta_{xx}\Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon\eta_{xx}] dx + \int_0^L \epsilon\eta_{xx}(\Gamma_{PI}[u_{xx} + \epsilon\eta_{xx}])_{\epsilon} dx \quad (44)$$

и полагая  $\epsilon = 0$ , получим следующее выражение:

$$\int_0^L \eta_{xx}\Gamma_{PI}[u_{xx}] dx. \quad (45)$$

Теперь продифференцируем выражение два раза по частям и окончательно получим

$$(I_2)_{\epsilon} = \int_0^L \eta\Gamma_{PI}[u_{xx}]_{xx} dx. \quad (46)$$

Нетрудно заметить, что в интеграле (34) только одно слагаемое зависит от  $\epsilon$ . Следовательно, дифференцируя по  $\epsilon$ , имеем:

$$\int_0^L 2u_t\eta_t dx. \quad (47)$$

Теперь, продифференцировав один раз по частям полученное выражение, окончательно имеем:

$$(I_3)_{\epsilon} = \int_0^L 2\eta u_{tt} dx. \quad (48)$$

Таким образом, подставляя в (31) выражения (43), (46), (48), получим:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^L (\eta(x, t) - \eta(x, t_0))\alpha(x, t, t_0, 0) dx + \int_0^L \eta\Gamma[u_{xx}]_{xx} dx \right) + \\ + \rho S u_{tt} \eta dx dt = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Заметим, что вышеполученное уравнение есть необходимое условие Эйлера локального экстремума функционала действия. Воспользуемся леммой Дебуа-Реймона, которая является основой для построения теории обобщенных функций, применительно к уравнению (49) и получим окончательно уравнение колебаний гистерезисной балки<sup>5</sup>:

$$\Gamma[u_{xx}]_{xx} + \rho S u_{tt} = 0. \quad (50)$$

<sup>5</sup>Вследствие использования леммы первое интегральное слагаемое будет равно нулю из-за разности  $\eta(x, t) - \eta(x, t_0)$ .

Учитывая потенциал внешней нагрузки и полагая произведение распределением массы на площадь поперечного сечения, равного единице, перепишем уравнение в виде

$$u_{tt} + \Gamma[u_{xx}]_{xx} = g(x, t), \quad (51)$$

где  $g(x, t)$  — функция внешней нагрузки.

### 3. Численные методы: явная разностная схема и метод Рунге — Кутты

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (в общем случае системы дифференциальных уравнений) является самой первой задачей в рамках исследования любой системы, описываемой дифференциальными уравнениями. Как правило, обычно используются точные аналитические методы решения. Ярким примером служит применение метода разделения переменных Фурье в задаче о колебаниях струны. Преимущество точных методов состоит в том, что они позволяют получить решение уравнения в виде некоторой комбинации элементарных функций (иногда решение представляется в виде квадратур от элементарных функций). Однако большинство практических задач решить с использованием этих методов не является возможным. Вызвано это либо особенностями области, в которой ищется решение уравнения (многие практические задачи накладывают ограничения на пространство параметров и области решений), либо вообще невозможностью нахождения аналитического решения. В таком случае удобно использовать численные методы, позволяющие искать решение, аппроксимируя исходное уравнение. Математический аппарат численных методов достаточно развит для его применения во многих задачах. Однако применение этих методов становится нетривиальной задачей, когда уравнения содержат операторные нелинейности гистерезисного типа. Для решения таких уравнений необходимо модифицировать классические методы.

В рамках настоящей статьи рассматриваются численные методы, преобразующие дифференциальное уравнение в частных производных с операторной гистерезисной нелинейностью к конечной системе алгебраических уравнений. Наиболее часто в литературе используется следующая интерпретация разностных схем: явные и неявные разностные схемы. Неявная разностная схема предполагает преобразование исходного уравнения к системе алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей с последующим решением (например, методом прогонки). Явная схема более проста в реализации и позволяет вычислять значение функции, опираясь на данные, полученные на предыдущем шаге. Неявные схемы, как правило, более устойчивы, чем явные. Однако, полагая отношение шага по времени много больше шага по пространству, можно добиться необходимой устойчивости. Ввиду сложности формализации гистерезисных операторов и их множественной суперпозиции в неявной разностной схеме, в настоящей работе используется явная разностная схема.

Введем в области  $\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  равномерную сетку с шагом по пространству  $h_x$  и с шагом по времени  $h_t$ , равную

$$h_x = \frac{L}{N}, \quad h_t = \frac{T}{M}, \quad (52)$$

где  $M$  — количество узлов сетки по временной координате,  $T$  — время моделирования,  $N$  — количество узлов сетки по пространственной координате (рис. 8). Причем шаги подчиняются соотношению  $h_t \ll h_x$  для устойчивости описываемой схемы. Первые два временных шага  $t = 0$ ,  $t = 1$  вычисляются на основе начальных условий. Используя граничные условия, нетрудно идентифицировать все значения в узлах с координатами  $(x_i, t_j)$ , где  $i = 0, 1, N - 1, N - 2$ ,  $j = 0, M$ . Для вычисления остальных значений аппроксимируем уравнение колебаний гистерезисной балки.

Уравнения, аппроксимирующие вторые производные по времени и пространству, примут вид:

$$u_{tt} = \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{h_t^2}, \quad (53)$$



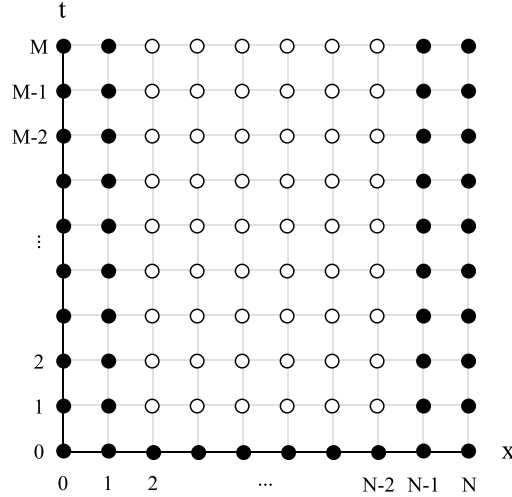


Рис. 8. Область  $\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  с введенной равномерной сеткой размера  $M$  на  $N$ . Узлы сетки, обозначенные белым цветом, вычисляются в ходе решения уравнения, узлы, обозначенные черным цветом, вычисляются из граничных условий

Fig. 8. Grid  $\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  with size  $M$  for  $N$ . Undefined grid nodes are denoted by white color, nodes denoted by black color are calculating based on boundary conditions

$$u_{xx} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h_x^2}, \quad (54)$$

где  $u_i^j$  соответствует значению в области  $\Omega$  с координатами  $(i, j)$ . Аппроксимация нулевых начальных и граничных условий очевидна, поэтому не приводится в настоящей статье. Аппроксимация функции нагрузки  $g(x, t)$  выполнена следующим образом:

$$g(x, t) = g(jh_x, ih_t), \quad (55)$$

а аппроксимация гистерезисного оператора имеет вид:

$$\Gamma[u_{xx}]_{xx} = \frac{\Gamma[u_{xx}]_i^{j-1} - 2\Gamma[u_{xx}]_i^j + \Gamma[u_{xx}]_i^{j+1}}{h_x^2}, \quad (56)$$

и, вводя новую переменную  $\tilde{u}_i^j = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h_x^2}$ , согласно (54), окончательно получим соотношение:

$$\Gamma[u_{xx}] = \frac{\Gamma[\tilde{u}_i^j]^{j-1} - 2\Gamma[\tilde{u}_i^j]^j + \Gamma[\tilde{u}_i^j]^{j+1}}{h_x^2}, \quad (57)$$

где  $\Gamma$  — гистерезисный оператор. Подставляя полученные аппроксимации в уравнение (51), получим следующее соотношение:

$$\frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{h_t^2} + \frac{\Gamma[\tilde{u}_i^j]^{j-1} - 2\Gamma[\tilde{u}_i^j]^j + \Gamma[\tilde{u}_i^j]^{j+1}}{h_x^2} = g(jh_x, ih_t). \quad (58)$$

Оставляя в левой части уравнения только неизвестные, окончательно получим уравнение колебаний гистерезисной балки, аппроксимированное явной численной схемой:

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + h_t^2 g(jh_x, ih_t) - h_t^2 \frac{\Gamma[\tilde{u}_i^j]^{j-1} - 2\Gamma[\tilde{u}_i^j]^j + \Gamma[\tilde{u}_i^j]^{j+1}}{h_x^2}. \quad (59)$$

Таким образом, значение на  $j + 1$  временном слое будет высчитываться на основе  $j$  и  $j - 1$  слоев.

В зависимости от формализации гистерезисного звена будут рассматриваться различные подходы к его разностной дискретизации. Так, для расчета реакции преобразователя Прандтля — Ишлинского будет использоваться его дискретный аналог (5). Выход преобразователя Боука — Вена рассчитывается, используя модификацию хорошо известного метода Рунге — Кутты четвертого порядка. Кратко опишем используемый алгоритм.

Пусть  $F = F(\xi, \eta)$  есть правая часть дифференциального уравнения преобразователя Боука — Вена со входом  $\xi$  и значением этой функции в предыдущий момент времени  $\eta$ . Введем вектор

$$\mathbf{F}^j = \begin{pmatrix} F(\xi_2^j, \eta_2^j) \\ F(\xi_3^j, \eta_3^j) \\ \vdots \\ F(\xi_{N-2}^j, \eta_{N-2}^j) \end{pmatrix} \quad (60)$$

преобразователей Боука — Вена со значениями  $\xi_i^j = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h_x^2}$  и  $\eta_i^j = \Gamma_{i+1}^{j+1}$  соответственно. Тогда модель Рунге — Кутты 4-го порядка применительно к решению уравнения Боука — Вена можно записать в векторном виде:

$$\Gamma^{j+1} = \Gamma^j + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1^j + 2\mathbf{k}_2^j + 2\mathbf{k}_3^j + \mathbf{k}_4^j), \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^j &= h_t \mathbf{F}^j|_{\xi_i^j = \xi_i^j}, \\ \mathbf{k}_2^j &= h_t \mathbf{F}^j|_{\xi_i^j = \xi_i^j + \mathbf{k}_1^j/2}, \\ \mathbf{k}_3^j &= h_t \mathbf{F}^j|_{\xi_i^j = \xi_i^j + \mathbf{k}_2^j/2}, \\ \mathbf{k}_4^j &= h_t \mathbf{F}^j|_{\xi_i^j = \xi_i^j + \mathbf{k}_3^j}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}^j$ ,  $\mathbf{k}_1^j$ ,  $\mathbf{k}_2^j$ ,  $\mathbf{k}_3^j$ ,  $\mathbf{k}_4^j$  есть векторы-столбцы на  $j$  временном интервале. Таким образом, представленный метод позволяет оптимизировать вычисления, значительно сократив время их выполнения (в средах, где есть поддержка векторного исчисления, например, среда *Mathlab* или библиотека *NumPy* для языка *Python* и др.).

#### 4. Результаты моделирования колебаний

В настоящем разделе описываются результаты моделирования колебаний классической и гистерезисной балок в зависимости от разных типов нагрузок. Моделирование феномена гистерезиса осуществляется посредством двух преобразователей: Боука — Вена и Прандтля — Ишлинского. Также в разделе приводится сравнительная характеристика между этими моделями. Начальные условия полагаются нулевыми (балка покоится в начальный момент времени и не имеет начальной скорости соответственно) и ненулевыми граничные условия, когда моделируется сейсмическая нагрузка (на концах моделируется воздействие сейсмической волны) и нулевыми для иных нагрузок (рис. 9). Характеристики балки постоянны во всех экспериментах (кроме тех случаев, где явно указаны другие параметры):

- длина балки балки равна  $L = 1$ ;
- время моделирования равно  $T = 5$ ;
- коэффициент  $a^2$  равняется 0.5;

параметры численного моделирования полагались следующими:

- шаг по времени равен  $h_t = 0.00125$ ;

- шаг по пространству равен  $h_x = 0.05$ ;

а параметры гистерезисных моделей:

- пороговые значения  $h_i$  преобразователя Прандтля — Ишлинского распределялись в интервале  $(0, 100)$  с шагом 0.5;
- коэффициент  $E$  преобразователя Прандтля — Ишлинского полагается равным 0.9.
- параметры преобразователя Боука — Вена полагаются равными:  $A = 0.9$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $n = 0.2$ .

Отметим, что результаты были получены с использованием численных методов, описанных в разд. 3. Начнем описание полученных результатов с моделирования воздействия периодической структуры.

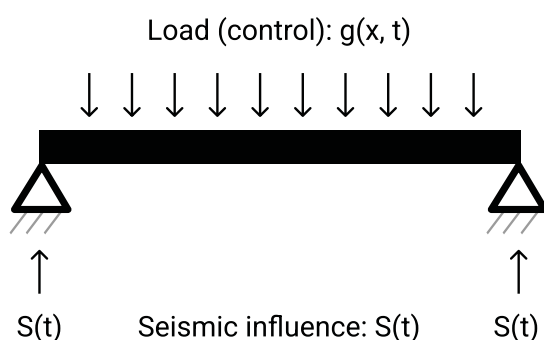


Рис. 9. Шарнирное закрепление балки с учетом внешней нагрузки  $g(x, t)$  (управления) и сейсмологической нагрузки  $S(t)$  в месте закрепления

Fig. 9. Fixed boundary of the beam taking into account the external load  $g(x, t)$  (control) and seismological load  $S(t)$  at the boundary connection

#### 4.1. Моделирование нагрузки как функции периодической структуры

Одним из классических типов нагрузки является периодическая нагрузка. С ее помощью можно понять, как реагирует система на периодические воздействия с меняющейся частотой или амплитудой. Обычно в качестве периодической нагрузки принято использовать тригонометрические функции, изменяющиеся в зависимости от времени, вида  $A \sin(\omega t + \phi_0)$  или  $A \cos(\omega t + \phi_0)$ , где  $A$  — амплитуда,  $\omega$  — частота и  $\phi_0$  — начальная фаза колебаний. В настоящей статье в качестве функции периодического воздействия будет использоваться функция  $g(x, t) = 0.12 \sin(2\pi/2 - 4\pi t)$  (рис. 10).

Как можно видеть из полученных результатов (рис. 11), реакция каждого типа балки на периодическое воздействие разная. Классическая балка с начального момента времени начинает демонстрировать квазипериодические формы колебаний с двумя частотами (основной с наибольшей мощностью, и второстепенная, с меньшей), что подтверждается анализом спектра Фурье-преобразования (рис. 12, а). Балка с гистерезисными свойствами, формализуемыми преобразователем Боука — Вена, демонстрирует схожие результаты с классической балкой. А именно на начальном временном отрезке можно видеть схожие колебания с классической моделью. Однако, начиная с некоторого момента времени, устанавливаются периодические колебания с постоянной частотой (отметим, что частота у каждого из преобразователей отличается, ровно как и амплитуда колебаний). Анализ спектра Фурье-преобразования показывает, что использование преобразователя Боука — Вена способствует уменьшению мощности неосновной частоты колебаний (рис. 12, в) практически нивелируя ее. Используя в качестве носителя гистерезисных свойств преобразователь Прандтля — Ишлинского, можно добиться лучших

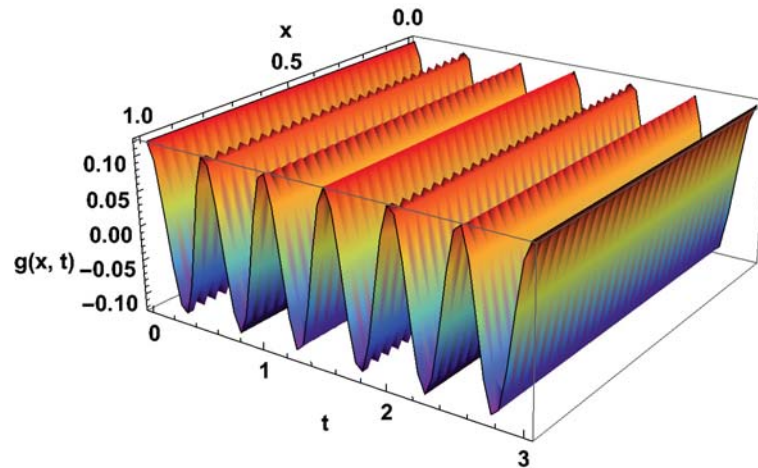


Рис. 10. График функции нагрузки  $g(x, t) = 0.12\sin(\pi/2 - 4\pi t)$   
 Fig. 10. Graphical representation of the load function  $g(x, t) = 0.12\sin(\pi/2 - 4\pi t)$

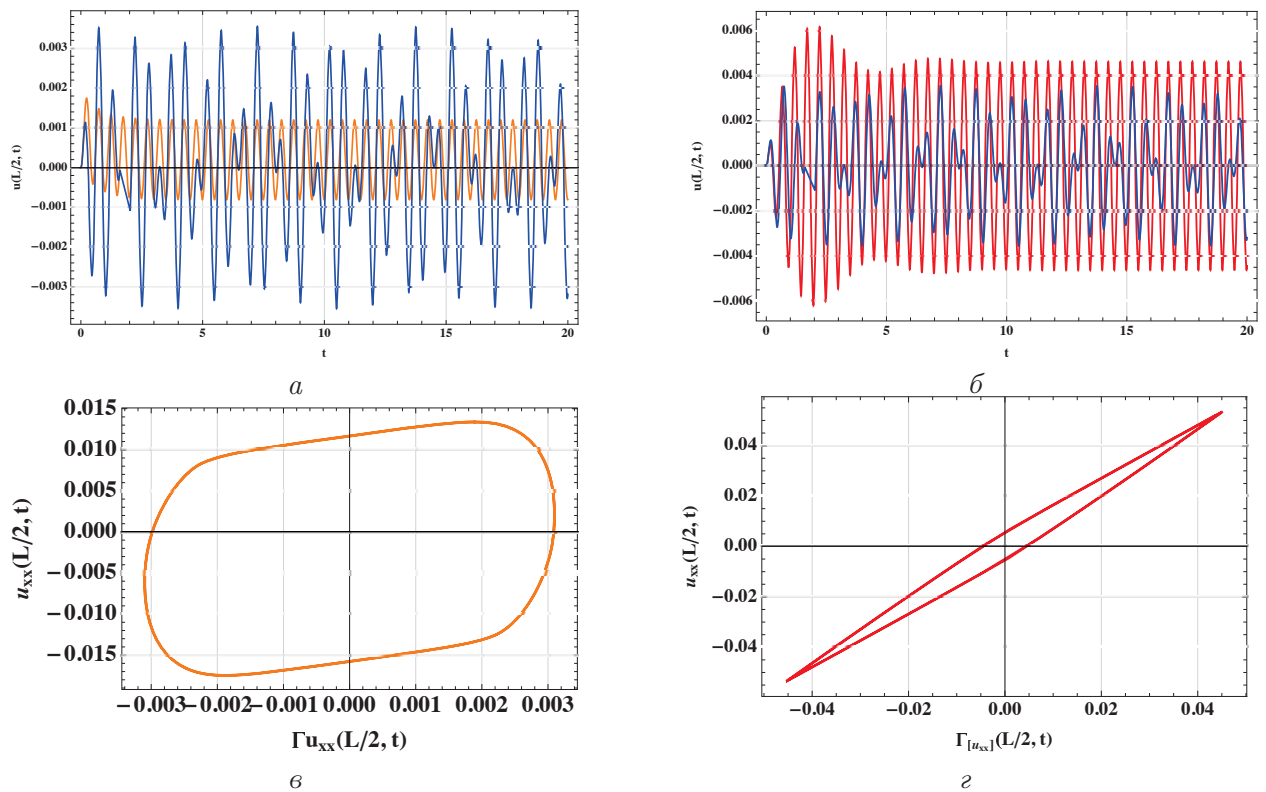


Рис. 11. Графики колебаний балки в точке  $x = L/2$  в зависимости от времени: синяя кривая — классическая модель балки, оранжевая кривая — гистерезисная балка с использованием преобразователя Прандтля — Ишлинского, красная кривая — гистерезисная балка с использованием преобразователя Боука — Вена (*а, б*); параметрические графики гистерезисных петель (время  $t$  как параметр): входно-выходная зависимость входа  $u_{xx}$  от выхода  $\Gamma[u_{xx}]$  в точке  $x = L/2$  (*в, г*)  
 Fig. 11. Vibration graphs at the point  $x = L/2$  depending on time: the blue curve denotes the classical beam, the orange curve denotes the Prandtl — Ishlinskii model, the red curve denotes the Bouc — Wen model (*a, b*); parametric graphs of hysteresis loops (time  $t$  as a parameter): input-output dependence of the input  $u_{xx}$  on the output  $\Gamma[u_{xx}]$  at the point  $x = L/2$  (*c, d*)

результатов в сравнении с остальными моделями. А именно с ее помощью, во-первых, можно добиться уменьшения амплитуды основной частоты, во-вторых, редуцировать второстепенную частоту (рис. 12, б). Представленные гистерезисные зависимости (рис. 11, в, г) позволяют

оценить энергетический вклад гистерезисного звена в редуцирование колебаний: площадь петли пропорциональна энергии, “отводимой” гистерезисным звеном из системы.

Таким образом, преобразователь Прандтля — Ишлинского позволяет избавиться колебания балки от квазипериодической структуры, трансформируя их в чисто периодическую, а преобразователь Боука — Вена способствует уменьшению мощности неосновной частоты колебаний балки.

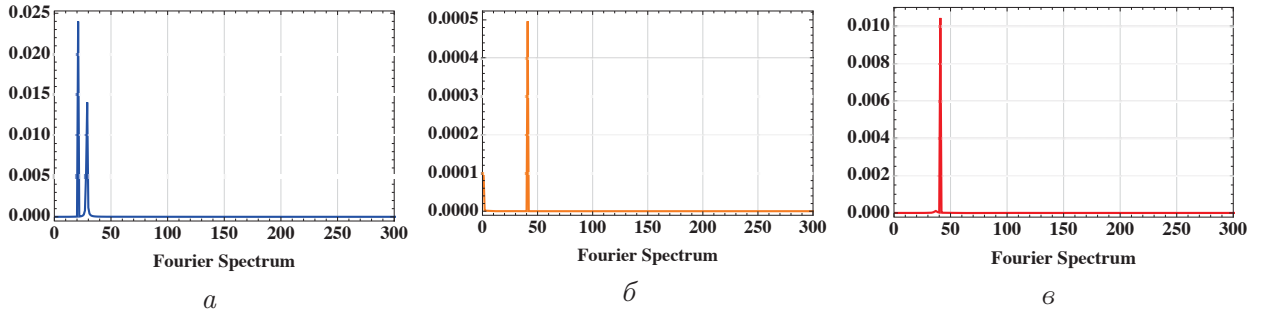


Рис. 12. Спектр Фурье-преобразования колебаний балки в точке  $x = L/2$ : *a* — классическая модель, *б* — гистерезисная балка с использованием модели Прандтля — Ишлинского, *в* — гистерезисная балка с использованием модели Боука — Вена

Fig. 12. Fourier spectrum of the vibrations of the beam at the point  $x = L/2$ : left — classical model, middle — Prandtl — Ishlinskii model, right — Bouc — Wen model

#### 4.2. Моделирование воздействия импульсной нагрузки

Нередко в рамках прикладных задач важно знать реакцию несущей конструкции на импульсную нагрузку. Самым простым примером такой нагрузки является точечный удар по конструкции с некоторой “силой”. Классическим методом формализации импульсной нагрузки является дельта-функция Дирака. Однако, принимая во внимание использование численных методов в работе, имеет смысл рассмотреть подобную ей функцию, которая в одномерном случае имеет вид:

$$\hat{\delta}(t) = \begin{cases} A, & \text{если } t = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а в двумерном:

$$\hat{\delta}(x, t) = \begin{cases} A, & \text{если } t = 0 \text{ и } x = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $A$  — “сила” удара. Использование такой функции позволяет нивелировать бесконечности в расчетах, что сильно упрощает задачу моделирования. Ясно, что балка за счет внутренних сил должна “поглощать” удар, преобразуя энергию удара в иные ее формы, например, в тепловую энергию (нагрев балки). В настоящей статье исследуется реакция классической и “гистерезисной” балок на импульсную нагрузку (удар), приложенную к ее определенной дискретной точке в некоторый момент времени. Таким образом, функцию  $g(x, t)$  можно представить в виде:

$$g(x, t) = \hat{\delta}(x - \chi, t - \tau) = \hat{\delta}(x - \chi)\hat{\delta}(t - \tau),$$

где  $\chi \in [0, L]$  есть дискретная точка балки, в которой действует импульсная нагрузка, а  $\tau \in (0, T)$  — момент времени, в который действует нагрузка.

Результаты моделирования, продемонстрированные на рис. 13, показали, что учет гистерезисных свойств приводит к совершенно иной динамике колебаний, нежели в классической модели. А именно начиная с момента времени  $t = \tau$  классическая балка начинает совершать колебания с постоянной частотой, причем в ходе экспериментов было установлено, что импульсная нагрузка любой “силы” выводит балку из состояния равновесия, заставляя балку

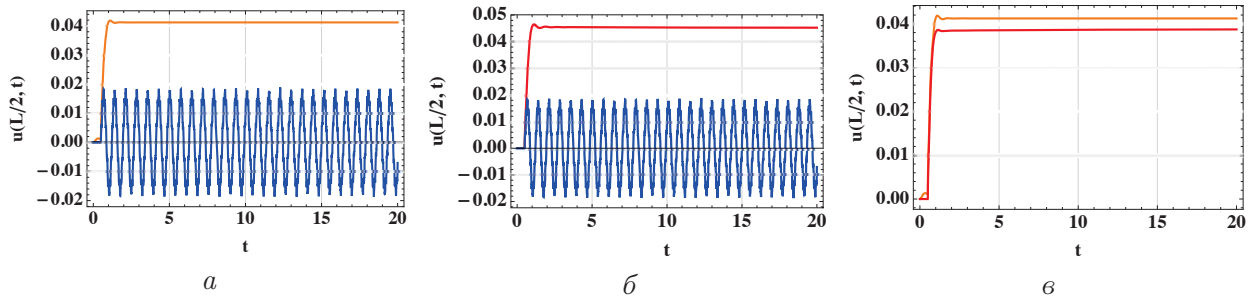


Рис. 13. Графики колебаний балки в точке  $x = L/2$  в зависимости от времени при импульсной нагрузке с силой  $A = 1000$  и параметрами  $\chi = 0.5$ ,  $\tau = 0.5$ : синяя кривая — классическая модель балки, оранжевая кривая — гистерезисная балка с использованием преобразователя Прандтля — Ишлинского, красная кривая — гистерезисная балка с использованием преобразователя Боука — Вена

Fig. 13. Vibration graphs at the point  $x = L/2$  depending on time under the impulse load with the force  $A = 1000$  and parameters  $\chi = 0.5$ ,  $\tau = 0.5$ : the blue curve denotes the classical beam, the orange curve denotes the Prandtl — Ishlinskii model, the red curve denotes the Bouc — Wen model

бесконечно долго колебаться. Напротив, балка с учетом гистерезисных свойств с момента времени  $t = \tau$  начинает отклоняться от положения равновесия, достигает некоторой точки, совершая при этом одиночное колебание малой амплитуды, после чего достигает устойчивого положения, отличного от положения равновесия и остается в этом положении бесконечно долго. При этом на рис. 13, в можно видеть, что результаты, демонстрируемые с использованием преобразователей Прандтля — Ишлинского и Боука — Вена, отличаются, однако схожи по своей структуре. Схожесть результатов подтверждается и подобностью гистерезисных петель, продемонстрированных на рис. 14.

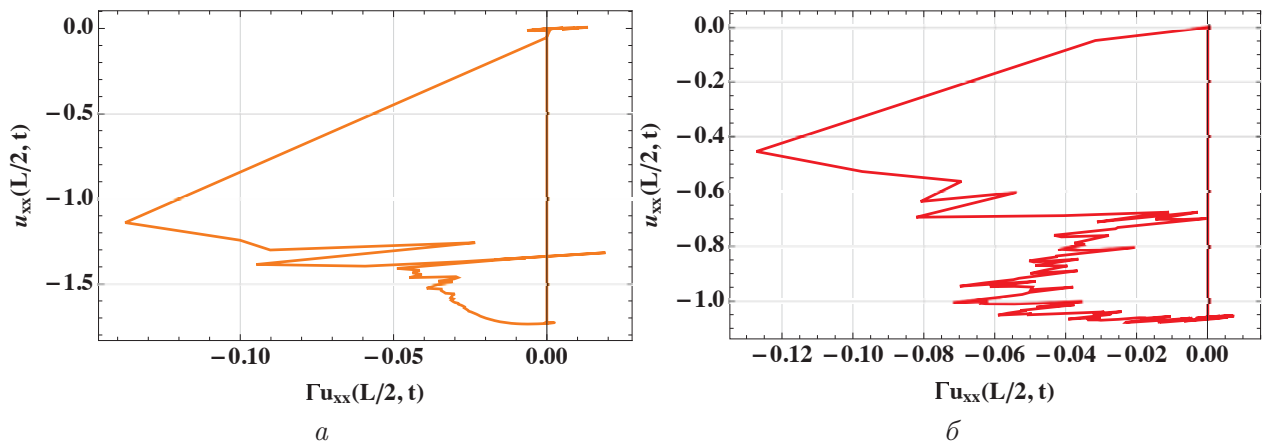


Рис. 14. Параметрические графики гистерезисных петель (время  $t$  как параметр): входно-выходная зависимость входа  $u_{xx}$  от выхода  $\Gamma[u_{xx}]$  в точке  $x = L/2$ : а — преобразователь Прандтля — Ишлинского, б — преобразователь Боука — Вена

Fig. 14. Parametric graphs of hysteresis loops (time  $t$  as a parameter): input-output dependence of the input  $u_{xx}$  on the output  $\Gamma[u_{xx}]$  at the point  $x = L/2$ : а — the Prandtl — Ishlinskii operator, б — the Bouc — Wen operator

Наблюдаемое поведение колебаний у балки с учетом гистерезисных свойств можно интерпретировать как более удачное, чем у балки, моделируемой классическим методом. Такой вывод можно сделать, полагая, что, получая удар, балка деформируется в сторону удара (соседние точки деформируются, в том числе образуя адекватный прогиб, см. рис. 15), при этом гистерезис способствует диссипации энергии удара, нивелируя дальнейшие колебания балки, в отличие от классической модели, колебания которой имеют периодический характер.

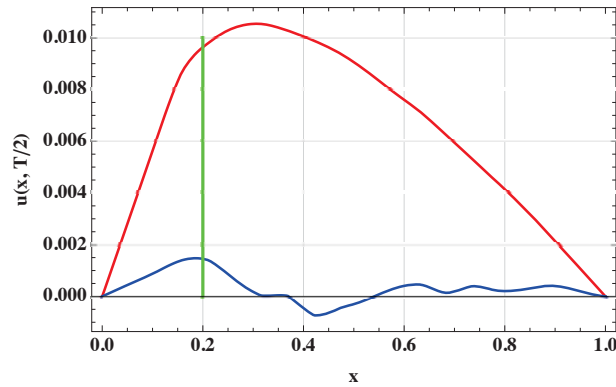


Рис. 15. Красной кривой соответствует положение гистерезисной балки, формализуемой преобразователем Боука — Вена, синей кривой — положение классической балки, зеленая линия демонстрирует место, в которое был совершен удар

Fig. 15. The red curve corresponds to the position of the hysteretic beam formalised using the Bouc — Wen operator, the blue curve corresponds to the position of the classical beam, and the green curve corresponds to the point of impact

### 4.3. Моделирование воздействия сейсмической нагрузки

В настоящем разделе приводятся результаты моделирования колебаний классической и “гистерезисной” балок, находящихся под воздействием в виде сейсмической волны. Влияние волны классически воздействует на балку в местах ее крепления. В качестве функции, имитирующей поведение сейсмических волн, используется функция материнского вейвлета “mother wavelet”, имеющая вид:

$$\Psi_{a,b}(t) = \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (62)$$

где  $a$  и  $b$  являются параметрами растяжения и сдвига материнской функции, соответственно. Под вейвлет-функциями в рамках настоящей работы понимается хорошо известное семейство вейвлетов Добеши.

Начнем анализ полученных результатов со сравнения классической и “гистерезисной” балок с гистерезисным преобразователем Боука — Вена. Как видно из рис. 16 на начальных временных интервалах (с 0 по 3 отчет модельного времени) балки ведут себя одинаково, однако спустя 8 интервала временного отчета “гистерезисная” балка стабилизируется, в то время как классическая балка демонстрирует периодические колебания. Такая структура колебаний объясняется диссипирующими свойствами гистерезисного преобразователя (рис. 17), который трансформирует энергию колебаний сейсмической волны в иные формы.

Также из результатов моделирования, представленных на рис. 16, видно, что реакция классической и “гистерезисной” балок различна. А именно в моментах воздействия сейсмической волны гистерезисная балка демонстрирует возмущения меньшей амплитуды (особенно четко это наблюдается для балки с использованием модели Прандтля — Ишлинского) в сравнении с классической балкой. После прекращения сейсмического воздействия обе балки стабилизируются в состоянии равновесия, однако гистерезисная балка, формализуемая преобразователем Прандтля — Ишлинского, оказывается в положении равновесия, отличном от исходного (рис. 16, б), что согласуется с упруго-пластическими свойствами гистерезисного материала.

Также, как видно из представленных результатов, обе балки все еще продолжают совершать колебания после воздействия нагрузки. Однако балка с учетом гистерезисных свойств показывает колебания значительно меньшей амплитуды, чем классическая (0.0004 против 0.1 соответственно).

Из продемонстрированных результатов можно сделать вывод, что учет гистерезисных свойств позволяет идентифицировать новые формы поведения в сравнении с классической моделью.

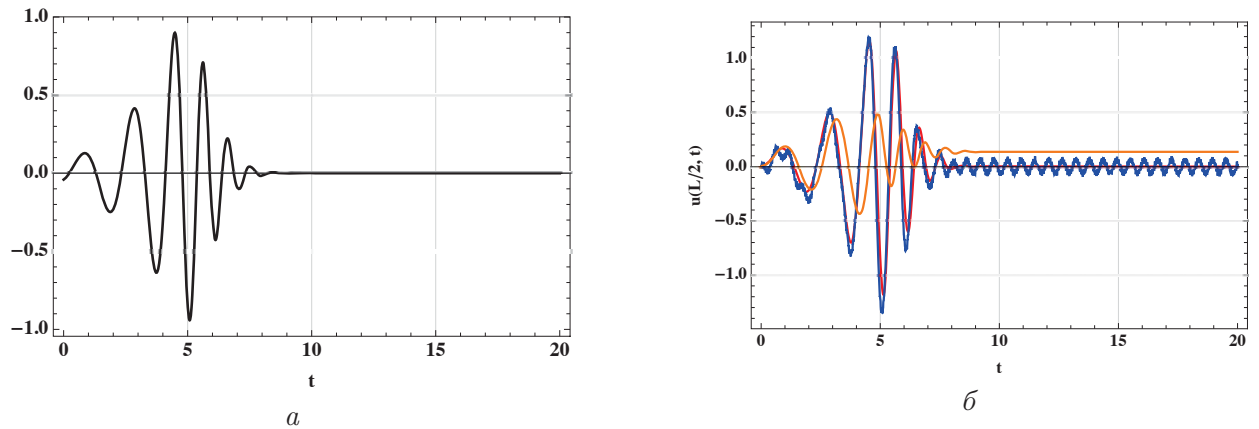


Рис. 16. Слева — график материнской вейвлет-функции в зависимости от времени (вейвлет Добеши 12 порядка с параметрами  $a = 1, b = 4$ ). Справа — отклонение дискретной точки балки с координатами  $L/2$  от положения равновесия в зависимости от времени: синяя кривая — классическая модель балки, оранжевая кривая — гистерезисная балка с использованием преобразователя Прандтля — Ишлинского, красная кривая — гистерезисная балка с использованием преобразователя Боука — Вена

Fig. 16. Deflection graphs of the point on the beam with coordinates  $x = L/2$  depending on the time under the influence of the seismic load presented as the Daubechies wavelets of the 12th order with parameters  $a = 1, b = 4$ : the orange curve — Prandtl-Ishlinskii model, the blue curve — the classical model

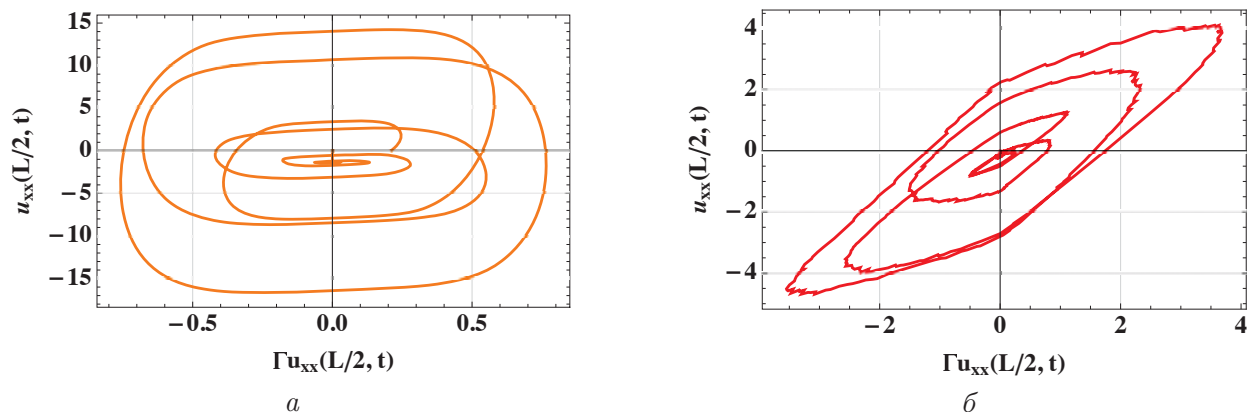


Рис. 17. Параметрические графики гистерезисных петель (время  $t$  как параметр): входно-выходная зависимость входа  $u_{xx}$  от выхода  $\Gamma[u_{xx}]$  в точке  $x = L/2$ :  $a$  — преобразователь Прандтля — Ишлинского,  $b$  — преобразователь Боука — Вена

Fig. 17. Parametric graphs of hysteresis loops (time  $t$  as a parameter): input-output dependence of the input  $u_{xx}$  on the output  $\Gamma[u_{xx}]$  at the point  $x = L/2$ :  $a$  — the Prandtl — Ishlinskii operator,  $b$  — the Bouc — Wen operator

## Заклучение

В настоящей статье исследована динамика балки с распределенными гистерезисными свойствами. В первой части работы получены уравнения с использованием гамильтоновского подхода, описывающие модель движений балки, когда носитель гистерезисных свойств распределен по всей ее длине. Приведены результаты моделирования колебаний балки, находящейся под внешней нагрузкой различной природы: сейсмической (формализуемой материнской вейвлет-функцией из семейства вейвлетов Добеши), ударной и периодической. Произведено сравнение характера колебаний классической и “гистерезисной” балок. Для описания гистерезисных свойств использовались два подхода: феноменологический (преобразователь Боука — Вена) и конструктивный (преобразователь Прандтля — Ишлинского). На основе численных экспериментов установлено, что балка с распределенными гистерезисными свойствами обладает повышенной (по сравнению с классической моделью) устойчивостью по отношению к внешним



воздействиям различной природы. Иными словами, области устойчивости (в пространстве параметров этой системы) шире для гистерезисной балки. Полученные результаты могут найти применение при разработке и проектировании несущих конструкций в сейсмоопасных регионах.

**Финансирование.** Статья поддержана РФФ. Грант № 23-29-00696.

**Информация о конфликте интересов:** автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Цитирование.** Карпов Е.А. Динамика балки Эйлера — Бернулли с учетом распределенных гистерезисных свойств // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series 2024. Т. 30, № 3. С. 35–62. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-35-62.

© Карпов Е.А., 2024

Карпов Евгений Андреевич (believedream95@gmail.com) – аспирант кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

## Литература

- [1] Timoshenko S. History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. New York: Dover Publications. 1983. ISBN 9780486611877. URL: [https://archive.org/details/historyofstrengt0000timo\\_k8r2](https://archive.org/details/historyofstrengt0000timo_k8r2).
- [2] Elishakoff I. Who developed the so-called Timoshenko beam theory? // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020. Vol. 25, issue 1. P. 97–116. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286519856931>.
- [3] Bauchau O.A., Craig J.I. Euler — Bernoulli Beam Theory // Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009. P. 173–221. DOI: [http://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6\\_5](http://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6_5).
- [4] Esen I. Dynamics of size-dependant Timoshenko micro beams subjected to moving loads // International Journal of Mechanical Sciences. 2020. Vol. 175. P. 105501. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105501>.
- [5] Krysko A., Awrejcewicz J., Kutepov I., Krysko V. Stability of curvilinear Euler — Bernoulli beams in temperature fields // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 94. P. 207–215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.004>.
- [6] Semenov M., Reshetova O., Borzunov S., Meleshenko P. Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach // The European Physical Journal Special Topics. 2021. Vol. 230. P. 3565–3571. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00237-3>.
- [7] Semenov M., Solovyov A., Meleshenko P., Balthazar J. Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers // Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics. Cham: Springer, 2018. P. 259–275. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_15).
- [8] Semenov M., Solovyov A., Meleshenko P., Reshetova O. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2020. Vol. 15, article number 43. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>.

- [9] Semenov M., Reshetova O., Tolkachev A., Solovyov A., Meleshenko P. Oscillations Under Hysteretic Conditions: From Simple Oscillator to Discrete Sine-Gordon Model // Belhaq M. (eds.) Topics in Nonlinear Mechanics and Physics. Springer Proceedings in Physics. Vol. 228. Singapore: Springer, 2019. P. 229–253. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8_12).
- [10] Medvedskii A., Meleshenko P., Nesterov V., Reshetova O., Semenov M., Solovyov A. Unstable oscillating systems with hysteresis: Problems of stabilization and control // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59. P. 533–556. DOI: <http://dx.doi.org/10.31857/S0002338820030099>.
- [11] Semenov M., Borzunov S., Meleshenko P., Stochastic preisach operator: definition within the design approach // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 101. P. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [12] Semenov M., Borzunov S., Meleshenko P. A new way to compute the Lyapunov characteristic exponents for non-smooth and discontinues dynamical systems // Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 109. P. 1805–1821. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07492-6>.
- [13] Semenov M., Meleshenko P., Borzunov S., Reshetova O., Barsukov A. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach // Micromachines. 2023. Vol. 14, no. 2, article number 310. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi14020310>. EDN: <https://elibrary.ru/wssbtt>.
- [14] Борзунов С. Трансформация колебаний неустойчивой системы в преобразователе-накопителе энергии // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 2. С. 7–18. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18>.
- [15] Semenov M., Solovyov A., Meleshenko P. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case // Journal of Vibration and Control. 2021. Vol. 27, issue 1–2. P. 43–56. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>.
- [16] Osintsev M., Sobolev V. Order Reduction of Kalman–Bucy Filter for Systems with Low Measurement Noise. Slow-Fast Systems and Hysteresis: Theory and Applications // Korobeinikov A. (eds.) Extended Abstracts Summer 2016. Trends in Mathematics. Vol. 10. Birkhauser, Cham, 2018. P. 47–52. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6_9).
- [17] Sobolev V. Thrice Critical Case in Singularly Perturbed Control Problems: Slow-Fast Systems and Hysteresis: Theory and Applications // Korobeinikov A. (eds.) Extended Abstracts Summer 2016. Trends in Mathematics. Vol. 10. Birkhauser, Cham, 2018. P. 83–87. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6_15).
- [18] Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., Riegels F. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper // Riegels F.W. (eds.) Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen. Berlin; Heidelberg: Springer, 1961. P. 149–184. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8_12).
- [19] Preisach F. Über die magnetische nachwirkung // Zeitschrift für Physik. 1935. Vol. 94, issue 5. P. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [20] Iwan W. A Distributed-Element Model for Hysteresis and Its Steady-State Dynamic Response // Journal of Applied Mechanics. 1966. Vol. 33, issue 4. P. 893–900. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3625199>.
- [21] Bouc R. Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis // Proceedings of the fourth Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, September 5–9. 1967. P. 315–321.
- [22] Bouc R. Modèle mathématique d’hystérésis // Acustica. 1971. Vol. 24. P. 16–25.

- [23] Lin Y., Cai G. Random vibration of hysteretic systems // Schiehlen W. (eds.) *Nonlinear Dynamics in Engineering Systems*. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer, 1976. P. 189–196. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-83578-0\\_24](https://doi.org/10.1007/978-3-642-83578-0_24).
- [24] Krasnosel'skii M., Niezgodka M., Pokrovskii A. *Systems with Hysteresis*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. 410 p. ISBN 978-3-642-61302-9. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61302-9>.
- [25] Visintin A. Chapter 1 – mathematical models of hysteresis. In: Bertotti G., Mayergoyz I.D. (eds.) *The Science of Hysteresis*. Oxford: Academic Press, 2006. ISBN 978-0-12-480874-4. P. 1–123. URL: <https://www.science.unitn.it/visintin/Elsevier2006.pdf>.
- [26] Desch W., Turi J. The stop operator related to a convex polyhedron // *Journal of Differential Equations*. 1999. Vol. 157, issue 2. P. 329–347.
- [27] Lang H., Dressler K., Pinnau R., Speckert M. Notes on Lipschitz estimates for the stop and play operator in plasticity // *Applied Mathematics Letters*. 2009. Vol. 22, issue 4. P. 623–627. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.07.004>.
- [28] Matsuo T., Terada Y., Shimasaki M. Representation of minor hysteresis loops of a silicon steel sheet using stop and play models // *Physica B: Condensed Matter*. 2006. Vol. 372, issues 1–2. P. 25–29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2005.10.121>.
- [29] Al Janaideh M., Krejch P. An inversion formula for a Prandtl–Ishlinskii operator with time dependent thresholds // *Physica B: Condensed Matter*. 2011. Vol. 406, issue 8. P. 1528–1532. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2011.01.062>.
- [30] Li Z., Zhang X., Ma L. Development of a combined Prandtl–Ishlinskii–Preisach model // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2020. Vol. 304. P. 111797. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2019.111797>.
- [31] Krejch P., Sprekels J. On a class of multi dimensional Prandtl–Ishlinskii operators // *Physica B: Condensed Matter*. 2001. Vol. 306, issues 1–4, P. 185–190. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(01\)01001-8](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(01)01001-8).
- [32] Hassani V., Tjahjowidodo T., Do T.N. A survey on hysteresis modeling, identification and control // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2014. Vol. 49, issues 1–2. P. 209–233. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.04.012>.
- [33] Dargahi A., Rakheja S., Sedaghati R. Development of a field dependent Prandtl–Ishlinskii model for magnetorheological elastomers // *Materials & Design*. 2019. Vol. 166. P. 107608. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107608>.
- [34] Krejch P. Reliable solutions to the problem of periodic oscillations of an elastoplastic beam // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002. Vol. 37, issue 8. P. 1337–1349. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00022-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00022-7).
- [35] Ikhoulane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc–Wen model // *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 42, issue 1. P. 63–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0069-3>.
- [36] Ikhoulane F., Rodellar J., On the hysteretic Bouc–Wen model // *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 42, issue 1. P. 79–95. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0070-x>.
- [37] Ikhoulane F., Hurtado J.E., Rodellar J. Variation of the Hysteresis Loop with the Bouc–Wen Model Parameters // *Nonlinear Dynamics*. 2007. Vol. 48, issue 4. P. 361–380. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9091-3>.




[38] Ismail M., Ikhoulane F., Rodellar J. The Hysteresis Bouc-Wen model, a Survey // Archives of Computational Methods in Engineering. 2009. Vol. 16, issue 2. P. 161–188. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-009-9031-8>.

[39] Semenov M., Karpov E., Tikhomirov S., Meleshenko P., Teplyakova M. Stabilization of Chaos Via Strong Nonlinearities: The Lorenz-Malkus Wheel Under Coulomb and Hysteresis Frictions // Balthazar J.M. (eds.) Vibration Engineering and Technology of Machinery. Mechanisms and Machine Science. Vol. 95. Cham: Springer, 2021. P. 3–36. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7_1).

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-35-62

# Dynamics of the Euler — Bernoulli beam with distributed hysteresis properties

Karpov E.A. 

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation; [believedream95@gmail.com](mailto:believedream95@gmail.com);

Received: 05.06.2024

Revised: 02.08.2024

Accepted: 02.09.2024

Scientific article



**Abstract.** In this paper, we present a new mathematical approach to the analysis of a beam with distributed hysteresis properties. These hysteresis characteristics are described by two methods: phenomenological (Bouc — Wen model) and constructive (Prandtl — Ishlinskii model). The equations for beam are developed using the well-known Hamilton method. We investigate the dynamic response of a hysteresis beam under various external loads, including impulse, periodic and seismic loads. The results of numerical simulations show that the hysteresis beam exhibits differently to external influences as compared to the classical Euler-Bernoulli beam. In particular, under the same external loads, the vibration amplitude and energy characteristics of the hysteresis beam are lower than those of the classical one. These findings can be useful for buildings developers in the design of external load resistant buildings and structures.

**Key words:** hysteresis; Euler-Bernoulli beam; Bouc — Wen model; Prandtl — Ishlinskii model; nonlinear dynamics; stability; elastoplasticity.

**Funding.** The article is supported by the RNF. Grant № 23-29-00696.

**Information about the conflict of interests:** the author and reviewers declare no conflicts of interest

**Citation.** Karpov E.A. Dynamics of the Euler — Bernoulli beam with distributed hysteresis properties. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 35–62. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-35-62. (In Russ.)

© Karpov E.A., 2024

*Evgeny A. Karpov* ([believedream95@gmail.com](mailto:believedream95@gmail.com)) – postgraduate student, student of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation.

## References

- [1] Timoshenko S. History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. New York: Dover Publications, 1983. ISBN 9780486611877. Available at: [https://archive.org/details/historyofstrengt0000timo\\_k8r2](https://archive.org/details/historyofstrengt0000timo_k8r2).




- [2] Elishakoff I. Who developed the so-called Timoshenko beam theory? *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2020, vol. 25, issue 1, pp. 97–116. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286519856931>.
- [3] Bauchau O.A., Craig J.I. Euler — Bernoulli Beam Theory. In: *Solid Mechanics and Its Applications*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009. ISBN 978-90-481-2516-6, pp. 173–221. DOI: [http://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6\\_5](http://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6_5).
- [4] Esen I. Dynamics of size-dependant Timoshenko micro beams subjected to moving loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, vol. 175, p. 105501. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105501>.
- [5] Krysko A., Awrejcewicz J., Kutepov I., Krysko V. Stability of curvilinear Euler — Bernoulli beams in temperature fields. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 94, pp. 207–215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.004>.
- [6] Semenov M., Reshetova O., Borzunov S., Meleshenko P. Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach. *The European Physical Journal Special Topics*, 2021, vol. 230, pp. 3565–3571. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00237-3>.
- [7] Semenov M., Solovyov A., Meleshenko P., Balthazar J. Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers. *Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics*. Cham: Springer, 2018, pp. 259–275. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_15).
- [8] Semenov M., Solovyov A., Meleshenko P., Reshetova O. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2020, vol. 15, Article number 43. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>.
- [9] Semenov M., Reshetova O., Tolkachev A., Solovyov A., Meleshenko P. Oscillations Under Hysteretic Conditions: From Simple Oscillator to Discrete Sine-Gordon Model. In: *Belhaq M. (eds.) Topics in Nonlinear Mechanics and Physics. Springer Proceedings in Physics*, vol. 228. Singapore: Springer, 2019, pp. 229–253. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8_12).
- [10] Medvedskii A., Meleshenko P., Nesterov V., Reshetova O., Semenov M., Solovyov A., Unstable oscillating systems with hysteresis: Problems of stabilization and control. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, pp. 533–556. DOI: <http://dx.doi.org/10.31857/S0002338820030099>.
- [11] Semenov M., Borzunov S., Meleshenko P., Stochastic preisach operator: definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 101, pp. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [12] Semenov M., Borzunov S., Meleshenko P. A new way to compute the Lyapunov characteristic exponents for non-smooth and discontinues dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 109, pp. 1805–1821. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07492-6>.
- [13] Semenov M., Meleshenko P., Borzunov S., Reshetova O., Barsukov A. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach. *Micromachines*, 2023, vol. 14, no. 2, Article number 310. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi14020310>. EDN: <https://elibrary.ru/wssbtt>.
- [14] Borzunov S. Transformation of oscillations of an unstable system in an energy harvester. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 7–18. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18>. (In Russ.)
- [15] Semenov M., Solovyov A., Meleshenko P. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case. *Journal of Vibration and Control*, 2021, vol. 27, issue 1–2, pp. 43–56. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>.

- [16] Osintsev M., Sobolev V. Order Reduction of Kalman – Bucy Filter for Systems with Low Measurement Noise: Slow-Fast Systems and Hysteresis: Theory and Applications. In: *Korobeinikov A. (eds.) Extended Abstracts Summer 2016. Trends in Mathematics*, vol 10. Birkhauser, Cham, 2018, pp. 47–52. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6_9).
- [17] Sobolev V. Thrice Critical Case in Singularly Perturbed Control Problems: Slow-Fast Systems and Hysteresis: Theory and Applications. In: *Korobeinikov A. (eds.) Extended Abstracts Summer 2016. Trends in Mathematics*, 2018, vol. 10. Birkhauser, Cham, pp. 83–87. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01153-6_15).
- [18] Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., Riegels F., Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. In: *Riegels F.W. (eds.) Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen*. Berlin; Heidelberg: Springer, 1961, pp. 149–184. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8_12).
- [19] Preisach F. Über die magnetische nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*, 1935, vol. 94, issue 5, pp. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [20] Iwan W. A Distributed-Element Model for Hysteresis and Its Steady-State Dynamic Response. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33 (4), pp. 893–900. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3625199>.
- [21] Bouc R. Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the 4th Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, September 5–9, 1967*, pp. 315–321.
- [22] Bouc R. Modèle mathématique d’hystérésis. *Acustica*, 1971, vol. 24, pp. 16–25.
- [23] Lin Y., Cai G. Random Vibration of Hysteretic Systems. In: *Schiehlen W. (eds.) Nonlinear Dynamics in Engineering Systems. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin; Heidelberg: Springer, 1976, pp. 189–196. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-83578-0\\_24](https://doi.org/10.1007/978-3-642-83578-0_24).
- [24] Krasnosel’skii M., Niezgodka M., Pokrovskii A. Systems with Hysteresis. Berlin; Heidelberg: Springer, 2012, 410 p. ISBN 978-3-642-61302-9. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61302-9>.
- [25] Visintin A. Chapter 1 – Mathematical Models of Hysteresis. In: *Bertotti G., Mayergoyz I.D. (eds.) The Science of Hysteresis*. Oxford: Academic Press, 2006, ISBN 978-0-12-480874-4, pp. 1–123. Available at: <https://www.science.unitn.it/~visintin/Elsevier2006.pdf>.
- [26] Desch W., Turi J. The stop operator related to a convex polyhedron. *Journal of Differential Equations*, 1999, vol. 157, issue 2, pp. 329–347.
- [27] Lang H., Dressler K., Pinnau R., Speckert M. Notes on Lipschitz estimates for the stop and play operator in plasticity. *Applied Mathematics Letters*, 2009, vol. 22, issue 4, pp. 623–627. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.07.004>.
- [28] Matsuo T., Terada Y., Shimasaki M. Representation of minor hysteresis loops of a silicon steel sheet using stop and play models. *Physica B: Condensed Matter*, vol. 372, issues 1–2, pp. 25–29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2005.10.121>.
- [29] Al Janaideh M., Krejch P. An inversion formula for a Prandtl–Ishlinskii operator with time dependent thresholds. *Physica B: Condensed Matter*, 2011, vol. 406, issue 8, pp. 1528–1532. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2011.01.062>.
- [30] Li Z., Zhang X., Ma L. Development of a combined Prandtl Ishlinskii – Preisach model. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2020, vol. 304, p. 111797. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2019.111797>.

- [31] Krejch P., Sprekels J. On a class of multi dimensional Prandtl — Ishlinskii operators. *Physica B: Condensed Matter*, 2001, vol. 306, issues 1–4, pp. 185–190. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(01\)01001-8](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(01)01001-8).
- [32] Hassani V., Tjahjowidodo T., Do T.N. A survey on hysteresis modeling, identification and control. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, vol. 49, issues 1–2, pp. 209–233. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.04.012>.
- [33] Dargahi A., Rakheja S., Sedaghati R. Development of a field dependent Prandtl-Ishlinskii model for magnetorheological elastomers. *Materials & Design*, 2019, vol. 166, p. 107608. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107608>.
- [34] Krejch P. Reliable solutions to the problem of periodic oscillations of an elastoplastic beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, vol. 37, issue 8, pp. 1337–1349. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00022-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00022-7).
- [35] Ikhoulane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc–Wen model. *Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 42, issue 1, pp. 63–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0069-3>.
- [36] Ikhoulane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc–Wen model. *Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 42, issue 1, pp. 79–95. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0070-x>.
- [37] Ikhoulane F., Hurtado J.E., Rodellar J. Variation of the Hysteresis Loop with the Bouc–Wen Model Parameters. *Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 48, issue 4, pp. 361–380. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9091-3>.
- [38] Ismail M., Ikhoulane F., Rodellar J. The Hysteresis Bouc–Wen Model, a Survey. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2009, vol. 16, issue 2, pp. 161–188. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-009-9031-8>.
- [39] Semenov M., Karpov E., Tikhomirov S., Meleshenko P., Teplyakova M. Stabilization of Chaos Via Strong Nonlinearities: The Lorenz-Malkus Wheel Under Coulomb and Hysteresis Frictions. In: *Balthazar J.M. (eds.) Vibration Engineering and Technology of Machinery. Mechanisms and Machine Science*. Cham: Springer, 2021, vol. 95, pp. 3–36. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7_1).



# Механическая модель турбулентности

Семенов<sup>1,2</sup> М.Е. , Толкачев<sup>1,3</sup> А.В. , Канищева<sup>1</sup> О.И. 

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация; *mkl150@mail.ru* (М.Е.); *tolkachev.akim@mail.ru* (А.В.); *oleka-olesya@mail.ru* (О.И.);

<sup>2</sup>Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация;

<sup>3</sup>Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация;

Поступила: 15.05.2024

Рассмотрена: 20.06.2024

Принята: 02.09.2024

Научная статья



**Аннотация.** В статье исследуются вопросы, связанные с управлением и стабилизацией колебаний в иерархической цепочке осцилляторов с гистерезисными связями. Гистерезисные связи формализуются с помощью феноменологической модели Боука — Вена. Масса, жесткость и демпфирующие свойства осцилляторов заданы таким образом, чтобы они соответствовали определенному правилу масштабирования, и уменьшаются вдоль цепи по геометрической прогрессии, формируя таким образом иерархию. Проводится верификация модели с помощью гипотезы Колмогорова, подобно тому как это делается для сформировавшихся турбулентных потоков. Для этого строятся энергетические спектры в условиях гистерезиса в связях и без него при различных амплитудах внешней силы. В результате вычислительных экспериментов показывается, что для цепочки с гистерезисными связями при высокой амплитуде воздействия кривая энергетического спектра в достаточной степени соответствует гипотезе Колмогорова. Далее проводится расчет амплитудно-частотных характеристик системы в условиях гистерезисного воздействия с помощью метода "сканирования" частотой. В результате численных экспериментов идентифицированы диапазоны частот внешнего воздействия, которым отвечают хаотическое поведение осцилляторов и их синхронизация.

**Ключевые слова:** турбулентность; гипотезы Колмогорова; гистерезис; модель Боука — Вена

## 1. Предварительные сведения

Исследование турбулентности является одной из важнейших задач как прикладной, так и фундаментальной науки. Обусловливается это широким распространением указанного явления в природе, особенно в прикладных механических задачах, связанных с течением жидкости и газа, а также в разнообразных атмосферных процессах и явлениях. Несмотря на стремительное развитие вычислительной техники и разработку численных методов с соответствующим математическим обеспечением, моделирование турбулентных течений остается одной из сложнейших проблем механики жидкости и газа. Традиционно для описания турбулентности используется три различных подхода — статический, структурный и динамический. Однако каждый из них не дает общего математического способа описания этого физического явления, так как области применимости каждого из методов существенно различны [1–4]. Поэтому создание новых подходов к описанию и моделированию турбулентного движения представляется важным и востребованным.

Кратко опишем основные подходы к моделированию турбулентных движений. К первому из них относится метод, основанный на использовании усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes — RANS) с замыканием с помощью той или иной полуэмпирической модели турбулентности. Ко второй категории относятся два классических вихреразрешающих подхода, а именно прямое численное моделирование турбулентности (Direct Numerical Simulation — DNS) и моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation — LES). Наконец, третья категория включает гибридные подходы, опирающиеся на совместное использование RANS и LES в различных областях потока [5–9].



Исчерпывающее и точное определение турбулентности дать крайне тяжело. Возможно только выделить ряд свойств, которые будут описывать это явление. Одним из таких свойств, характеризующих турбулентный поток, является "завихренность" (растяжение вихрей). Вихри, которые образуются в турбулентном потоке, сохраняются достаточно долгое время благодаря механизму каскадного переноса энергии. Когда большие и неустойчивые завихрения, "отбирая" энергию у основного потока, временно сохраняют ее, после чего растягиваются и разбиваются на несколько меньших, и так до тех пор, пока не рассеют кинетическую энергию в тепло. Таким образом, осуществляется направленная передача энергии от более крупных вихрей к более мелким, формирующая их иерархию в потоке [10; 11].

Особого внимания при рассмотрении турбулентного течения заслуживают мелкомасштабные вихри, структура которых подразумевает их однородность и изотропность. Теория локально-изотропной и однородной турбулентности представляет собой достаточно разработанный раздел теории турбулентности. Принципиальные результаты в этой области получены А.Н. Колмогоровым [12], который предложил "закон пяти третей", играющий на сегодняшний день ключевую роль при разработке современных подходов к моделированию турбулентных течений и их верификации.

Другим примером сложного нелинейного явления, играющего значительную роль при проектировании и исследовании сложных динамических систем, является гистерезис. Нелинейности гистерезисной природы присущи многим физическим, биологическим и экономическим процессам и явлениям. Во многом это либо обуславливается их внутренней структурой (магнитный гистерезис), либо является следствием их динамических особенностей (рулевой люфт). Строгое математическое описание гистерезиса было дано М.А. Красносельским и А.В. Покровским в монографии [13]. В ней гистерезисные нелинейности трактуются как операторы или преобразователи с соответствующими пространствами состояний. Выход такого преобразователя будет зависеть не только от мгновенного значения входа, но и от состояния преобразователя в предшествующие моменты времени. Разработанные в [13] модели позволяют использовать их в уравнениях динамики систем с носителями гистерезисных свойств. При этом модели соответствующих систем сводятся к операторно-дифференциальным уравнениям, для которых к настоящему времени доказаны теоремы существования и единственности [14]. Данным задачам посвящено множество работ, среди которых отметим публикации [15; 16].

В настоящее время для моделирования динамики систем с гистерезисом, как правило, используются два подхода: конструктивный подход (неидеальное реле, преобразователь Прейсаха, модель Ишлинского [17–22]) и феноменологический подход (модель Боука – Вена, Айвана, Дьюема [23–27]). Каждый из них зарекомендовал себя в различных областях, например, оператор Прейсаха находит широкое применение при моделировании систем с ферромагнитными элементами, а также в гидрологических моделях проникновения осадков в почву [28]. Среди феноменологических моделей наиболее популярным является модель Боука – Вена. Эта модель формализуется посредством двух соотношений: одного алгебраического и дифференциального уравнения. Модель Боука – Вена является удобным инструментом для формализации гистерезисных зависимостей, особенно в ситуации, когда гистерезисное звено является частью сложной системы. Применительно к проблемам турбулентных течений отметим, что в традиционных подходах гистерезисное трение к настоящему времени не рассматривалось, хотя механизмы диссипации энергии в каскадах турбулентных вихрей допускают "гистерезисную" трактовку. Применительно к тематике настоящей работы отметим такое явление, как аэродинамический гистерезис, его детальное описание можно найти в статье [29].

В настоящей статье исследуется перенос энергии в механической системе, состоящей из связанных осцилляторов, соединенных между собой иерархическим образом. Указанная система является достаточно простой моделью переноса энергии в турбулентной среде. Каждый осциллятор в системе, кроме первого, связан со своими соседями сильно нелинейными кубическими пружинами. Помимо пружин в связи между осцилляторами включены вязкие и гистерезисные демпферы, которые формализуются с помощью феноменологической модели Боука–Вена. В эту систему гистерезис добавляется как естественный элемент управления и стабилизации. Это

исследование помогает найти некоторые общие законы передачи энергии между осцилляторами и предлагает новый способ изучения турбулентности жидкости без использования системы Навье–Стокса.

## 2. Описание системы и ее верификация

В природе и в технических устройствах часто наблюдаются разнообразные явления, включающие передачу энергии между элементами в виде каскада-трансляции. Эти элементы при проектировании находятся по отношению друг к другу на различных уровнях или масштабах, формируя таким образом иерархию, в которой осуществляется каскад. Такой перенос энергии описывает передачу преимущественно с более крупных масштабов на более малые, например, как для однородного изотропного движения в гидродинамике. Часто в качестве модели для исследования подобного явления используют нелинейные цепочки осцилляторов [30–32].

Цепочка нелинейных осцилляторов является универсальной и относительно простой моделью, способной описать сложные нелинейные процессы. Простейшей из таких моделей является модель межатомного взаимодействия в кристаллической решетке. Отметим, что в подавляющем количестве публикаций, посвященных связанным осцилляторам, используются упругие взаимодействия. Однако реальная природа межатомных связей зачастую требует учета принципиально иных форм взаимодействия, а именно взаимодействия гистерезисной природы. Поэтому представляется важной задача изучения динамики гистерезисно связанных осцилляторов. В этой связи отметим близкие к тематике настоящей статьи работы [33; 34].

Еще одно важное приложение динамики связанных осцилляторов обусловливается использованием соответствующей модели для описания турбулентных процессов. В настоящей работе предлагается использовать в качестве простейшей модели турбулентных движений систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую в том числе и колебания связанных осцилляторов. При этом для старого обоснования такой замены требуется провести верификацию модели, сравнивая полученный экспериментально энергетический спектр с законом Колмогорова.

Рассмотрим сначала механическую модель исследуемой системы, которая представлена на рис. 2.1. Она состоит из осцилляторов, каждый из которых кроме первого  $x_0$  связан со своими соседями  $x_n$  нелинейными пружинами (с потенциалом  $k_n x_n^4/4$ ), где  $k_n$  — жесткость нелинейной пружины для  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ . Помимо пружин в связи между осцилляторами включены вязкие и гистерезисные демпферы с коэффициентами  $l$  и  $(1 - \alpha)k_n D$  соответственно. Гистерезисный демпфер формализуется с помощью феноменологической модели Боука–Вена, имеющей простую реализацию в виде обыкновенного дифференциального уравнения.

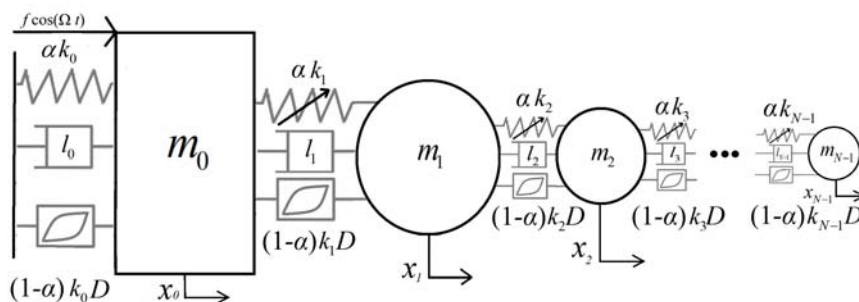


Рис 2.1. Исследуемая механическая система

Fig 2.1. The considered mechanical system

Уравнения движения для механической системы на рис. 2.1 будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \ddot{x}_0 + \alpha k_0 x_0 + l_0 \dot{x}_0 + (1 - \alpha) k_0 D z_0^l + \alpha k_1 (x_0 - x_1)^3 + l_1 (\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + \\ + (1 - \alpha) k_0 D z_0^r = f \cos \Omega t, \\ \dots \\ m_n \ddot{x}_n + \alpha k_n (x_n - x_{n-1})^3 + l_n (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + (1 - \alpha) k_n D z_n^l + \\ + \alpha k_{n+1} (x_n - x_{n+1})^3 + l_{n+1} (\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1}) + (1 - \alpha) k_0 D z_n^r = 0, \\ \dots \\ m_{N-1} \ddot{x}_{N-1} + \alpha k_{N-1} (x_{N-1} - x_{N-2})^3 + l_{N-1} (\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_{N-2}) + \\ + (1 - \alpha) k_{N-1} D z_{N-1}^l = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где  $z_n^l$  и  $z_n^r$  — гистерезисные переменные, являющиеся решением следующих дифференциальных уравнений (2.2) для левой и правой ( $l$  и  $r$ ) стороны относительно  $n$ -го осциллятора.

Имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_n^l = D^{-1} [A - |z_n^l|^\eta (\beta \text{sign}(z_n^l (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})) + \gamma)] (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}), \\ \dot{z}_n^r = D^{-1} [A - |z_n^r|^\eta (\beta \text{sign}(z_n^r (\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1})) + \gamma)] (\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1}). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.2)  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  — безразмерные гистерезисные параметры, которые определяют форму и размер петли гистерезиса согласно подходу модели Боука–Вена. При исследовании системы примем следующие значения:  $A = 1, \beta = \gamma = 0.5, \eta = 4$ . Для других же гистерезисных параметров в системе (2.1) значения будут:  $D = 1$  и  $\alpha = 0.5$ .

Параметры  $m_n$  — масса осциллятора,  $x_n$  — его смещение относительно положения равновесия,  $\dot{x}_n$  — скорость и  $\ddot{x}_n$  — ускорение для соответствующих элементов в цепочке.

Зададим параметры так, чтобы в системе (2.1) была иерархия масштабов в направлении слева направо. Для этого пусть у первого линейного осциллятора  $m_0 = 1, k_0 = 1, l_0 = 0.01$ . Далее за ним у второго нелинейного осциллятора  $m_1 = 0.01, k_1 = 0.1, l_0 = 0.001$ . Параметры остальных осцилляторов в цепи вплоть до  $N - 1$  задаются по правилам:

$$\frac{m_n}{m_{n+1}} = 6, \frac{k_n}{m_{k+1}} = 45, \frac{l_n}{l_{l+1}} = 2,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Теперь проведем верификацию модели. Энергетический спектр  $\hat{E}(\kappa)$  рассчитаем с помощью отношения

$$\hat{E}(\kappa) = \frac{\bar{E}_n}{\bar{E}},$$

где  $\bar{E}_n(\kappa)$  — усредненная по периоду  $T$  энергия колебаний для  $n$ -го осциллятора цепи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{t_0} \left( \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} k_0 x_0^2 + \frac{1}{8} k_1 (x_0 - x_1)^4 \right) dt, \\ \dots \\ \bar{E}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{t_0} \left( \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 + \frac{1}{8} k_n (x_n - x_{n-1})^4 + \frac{1}{8} k_{n+1} (x_n - x_{n+1})^4 \right) dt, \\ \dots \\ \bar{E}_{N-1} = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{t_0} \left( \frac{1}{2} m_{N-1} \dot{x}_{N-1}^2 + \frac{1}{8} k_{N-1} (x_{N-1} - x_{N-2})^4 \right) dt, \end{array} \right.$$

$\bar{E}$  — усредненная полная энергия системы для всех осцилляторов, которая рассчитывается следующим образом:

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{E}_n,$$

а  $\kappa = \frac{1}{m_n}$  — волновое число для  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . В итоге общая математическая схема верификации модели будет выражаться:

$$\hat{E}(\kappa) \sim \kappa^{-\frac{5}{3}}. \quad (2.3)$$

Результат расчета энергетического спектра системы (2.1) приведен на рис. 2.1 в логарифмическом масштабе. Черными сплошными линиями обозначены энергетические спектры, полученные без учета (при  $\alpha = 1$ ) гистерезиса в системе, красным обозначены результаты, полученные с учетом гистерезиса, а синяя линия — это ”закон пяти третей” (2.3).

Моделирование осуществлялось для пятнадцати осцилляторов ( $N = 15$ ) в условиях резонансного внешнего воздействия на первый элемент в цепи ( $\Omega = 1$ ) при различных амплитудах ( $f = 0.001, 0.0025, 0.005$  и  $0.01$ ). Решение исходной системы (2.1) осуществлялось методом Рунге–Кутты 4-5-го порядка при нулевых начальных условиях.

Рисунок 2.2 иллюстрирует, как энергия первого осциллятора транслируется остальным осцилляторам цепи и убывает по достаточно сложному закону. Видно, что при высокой амплитуде воздействия каскад энергии гораздо более интенсивен, а для осцилляторов меньшего масштаба по наклону он в достаточной степени соответствует гипотезе Колмогорова. Так при амплитуде внешнего воздействия кривая спектра (красная линия с квадратом) и соответствующая логарифмическая прямая ”закона пяти третей” находятся в высокой степени соответствия.

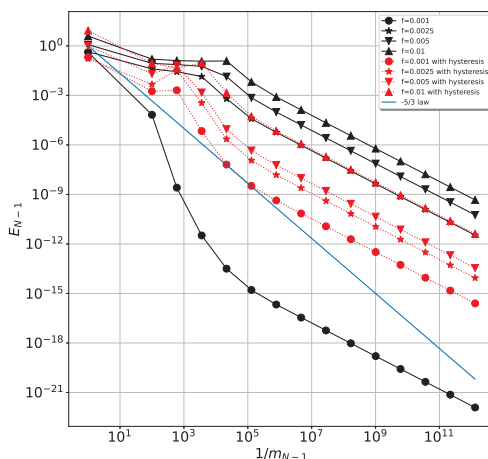


Рис 2.2. Энергетический спектр системы (2.1)

Fig 2.2. Energy spectrum of the system (2.1)

### 3. Особенности динамики исследуемой системы

Изучим подробнее динамику системы. Для этого рассчитаем амплитудно-частотные характеристики у отдельных осцилляторов в цепи с помощью метода ”сканирования” частотой. Суть данного метода заключается в том, что при компьютерном моделировании системы (2.1) изменяется значение частоты  $\Omega$  внешнего воздействия последовательно, без прерывания процесса вынужденных колебаний (”сканирование частотой”). Иными словами, изменяя последовательно частоту  $\Omega_i$ , с каждой  $i$ -й итерацией значения для начальных условий при следующей  $\Omega_{i+1}$  следует брать не нулевыми, а с того момента времени, когда прервалось моделирование на текущем  $i$ -м шаге.

Особенности динамики без учета гистерезиса подробно изучены в работе, где показано, что в зависимости от амплитуды внешнего воздействия в цепи наблюдаются различные типы синхронизации колебаний [35; 36]. Также авторы отмечают, что при высоких значениях  $f$  и частоте  $\Omega = 1$  система реагирует хаотично, и значительная часть энергии передается по цепи в виде энергетического каскада-трансляции. При таких условиях существуют хаотические области, в которых все нелинейные осцилляторы одновременно возбуждаются до хаотического

состояния (активируются), когда частота  $\Omega$  превышает нижний критический порог; таким образом, в системе происходит хаотическая синхронизация.

Результаты расчета амплитудно-частотных характеристик для второго, четвертого и шестого осциллятора в цепи в условиях гистерезисного демпфирования представлены на рис. 3.1 (*a, b, c*), когда на первый осциллятор в цепочке оказывается внешняя сила с амплитудами  $f = 0.001, 0.005$  и  $0.01$ .

Ниже (рис. 3.1, *c*) проведена идентификация динамических режимов для всех элементов в цепочке при частоте внешнего воздействия  $\Omega = 0.99$ . Для этого рассчитывался старший показатель Ляпунова  $\Lambda$  методом Розенштейна [37] для амплитуд  $x_n$  каждого осциллятора из временного окна  $t \in (0, 4000)$ .

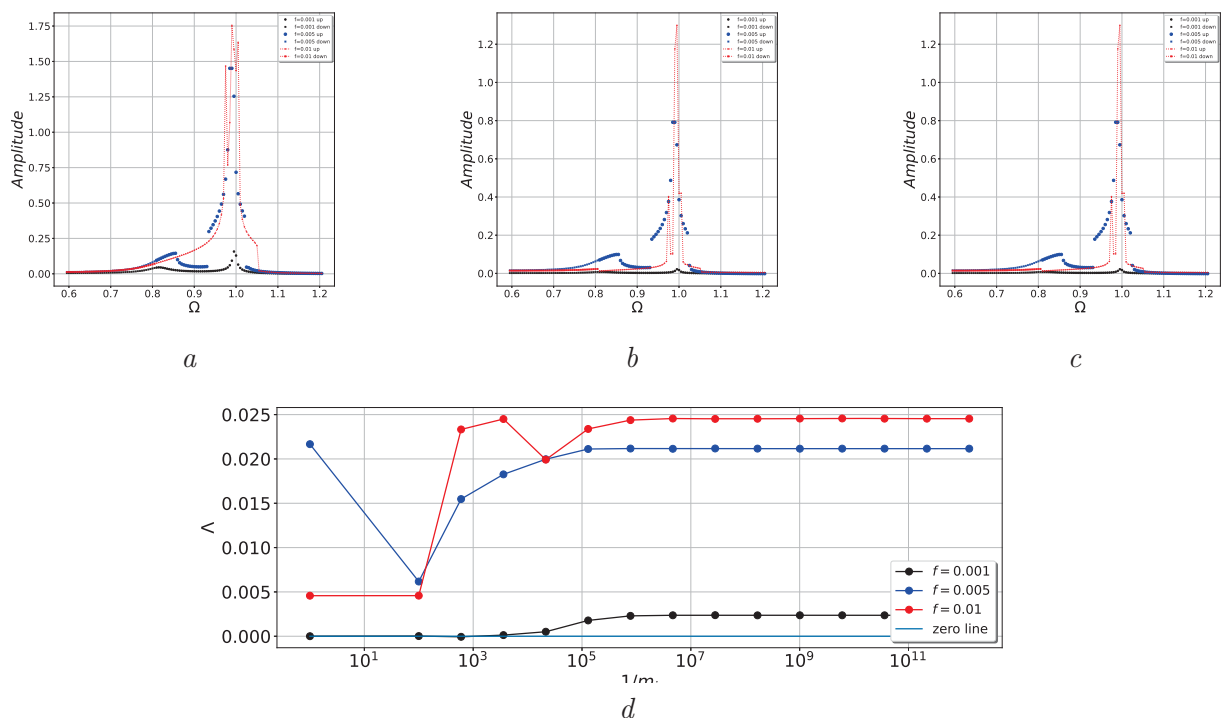


Рис 3.1. Динамические характеристики системы: *a* — амплитудно-частотные характеристики 2-го осциллятора при различных значениях  $f$ ; *b* — амплитудно-частотные характеристики 4-го осциллятора при различных значениях  $f$ ; *c* — амплитудно-частотные характеристики 6-го осциллятора при различных значениях  $f$ ; *d* — старший показатель Ляпунова  $\Lambda$  каждого осциллятора в цепочке при различных значениях  $f$

Fig 3.1. Dynamic properties of the system: *a* — frequency response of the 2nd oscillator for various values  $f$ ; *b* — frequency response of the 4th oscillator for various values  $f$ ; *c* — frequency response of the 6th oscillator for various values  $f$ ; *d* — the largest Lyapunov exponents  $\Lambda$  for every oscillator in the chain for various values  $f$

Как видно из сравнения рисунков, максимумы амплитуд соответствуют одинаковой частоте, что означает синхронизацию колебаний осцилляторов. При низком значении  $f = 0.001$  в системе преобладает устойчивая динамика, однако с ростом амплитуды внешнего воздействия появляются области неустойчивости. Например, с ростом значения  $f$  в окрестности частоты  $\Omega = 1$  имеется хаотическая область, аналогичная той, что наблюдалась в [35; 36].

## Выводы

В настоящей статье рассматривалась динамика связанных осцилляторов с убывающими в геометрической прогрессии массами. Кроме того, предполагалось наличие не только нелинейных

упругих, но и гистерезисных связей между осцилляторами. Исследовалась динамика указанной системы в условиях периодического воздействия на первый элемент в цепочке.

Для анализа реакции системы на внешнее периодическое воздействие строилась амплитудно-частотная характеристика для набора осцилляторов. Кроме того, численно строился энергетический спектр системы (зависимость сосредоточенной на  $n$ -м осцилляторе энергии от величины, обратно пропорциональной массе). Как следует из результатов вычислительных экспериментов, при достаточно низких значениях амплитуды имеет место "почти" гармонический резонанс. При этом механическая энергия в основном локализуется на первом осцилляторе, а ее трансформация на остальные элементы цепи происходит по экспоненциальному закону. Однако при достаточно высоком значении амплитуды внешнего воздействия система реагирует хаотично. В результате численных экспериментов были идентифицированы диапазоны частот внешнего воздействия, которым отвечает хаотическое поведение осцилляторов. При этом указанные отрезки существенно уже по сравнению с системой, в которой имеют место лишь упругие взаимодействия. Отметим, что аналогичная ситуация наблюдалась для систем гистерезисно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля [38]. Указанный эффект объясняется регулизирующей ролью гистерезисных звеньев, абсорбирующей часть энергии колебаний на каждом такте.

Из сравнения кривых энергетического спектра систем осцилляторов с гистерезисными связями с системами осцилляторов с нелинейными упругими связями следует, что гипотеза Колмогорова находится в лучшем соответствии с данными, полученными в результате вычислительных экспериментов именно для систем с гистерезисными связями.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 23-29-00696).

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Цитирование.** Семенов М.Е., Толкачев А.В., Канищева О.И. Механическая модель турбулентности // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 63–75. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-63-75.

© Семенов М.Е., Толкачев А.В., Канищева О.И., 2024

Семенов Михаил Евгеньевич (mkl150@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ГосНИИАС), 125319, Российская Федерация, г. Москва, ул. Викторенко, 7, к. 2.

Толкачев Аким Владимирович (tolkachev.akim@mail.ru) – старший преподаватель кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, 394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8.

Канищева Олеся Ивановна (oleka-olesya@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1.

## Литература

- [1] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1986. 551 p.
- [2] Friedlander S., Topper L. Turbulence: classic papers on statistical theory. London: Interscience Publishers LTD, 1961. 187 p. URL: [vhttps://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961\\_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical %20theory.pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical%20theory.pdf).

- [3] Townsend A.A. The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 416 p. URL: <https://books.google.ru/books?id=0wuu9y8vRagC&printsec=frontcover&hl=ru>.
- [4] Tropea C., Yarin A., Foss J. Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics. Berlin: Springer, 2007. 237 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-30299-5>.
- [5] Davidson L. An Introduction to Turbulence Models. Goteborg: Chalmers University of Technology, 2011. 50 p. URL: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/2011\\_Davidson\\_An-introduction-to-turbulence-models.pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/2011_Davidson_An-introduction-to-turbulence-models.pdf).
- [6] Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows. Second edition. Oxford: Elsevier, 2007. 538 p. URL: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics\(Elsevier,2nd%20edn,2007\).pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics(Elsevier,2nd%20edn,2007).pdf).
- [7] Meyers J., Geurts B.J., Sagaut P. Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations. Berlin; New York: Springer, 2008. 378 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8578-9>.
- [8] Frohlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // Progress in Aerospace Sciences. 2008. Vol. 44, issue 5. P. 349–377. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2008.05.001>.
- [9] Schiestel R. Modeling and simulation of turbulent flows. Hoboken: John Wiley and Sons Ltd., 2008. 725 p. URL: <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/5720/27/L-G-0000572027-0002358757.pdf>.
- [10] McComb W.D. Homogeneous, Isotropic Turbulence: Phenomenology, Renormalization and Statistical Closures. Oxford: Oxford University Press, 2014. 408 p. URL: <https://readli.net/homogeneous-isotropic-turbulence-phenomenology-renormalization-and-statistical-closures/>.
- [11] Задорожный В.Г. Линейный хаотический резонанс при вихревом движении // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 4. С. 486–502.
- [12] Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Успехи физических наук. 1967. Т. 93, № 3. С. 476–481.
- [13] Krasnoselskii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with hysteresis. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 410 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61302-9>.
- [14] Visintin A. Differential models of hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1994. 409 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11557-2>.
- [15] Antonelli M., Carboni B., Lacarbonara W., Bernardini D., Kalmar-Nagy T. Quantifying rate-dependence of a nonlinear hysteretic device // Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices. 2020. Vol. 1. P. 347–355. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0\\_35](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_35).
- [16] Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P., Masri S. Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2018. Vol. 29, issue 13. P. 2795–2810. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X18778792>.
- [17] Mayergoyz I.D. Mathematical Models of Hysteresis. New York: Spinger-Verlag, 1991. 207 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3028-1>.
- [18] Weiss P., Freundereich J.D. Etude de l'aimantation initiale en fonction de la temperature // Archives des Sciences Physiques et Naturelles. 1916. Vol. 42. P. 449–470.

- [19] Preisach F. Uber die magnetische nachwirkung // *Zeitschrift fur Physik*. 1935. Vol. 94. P. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [20] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 101, № 11. P. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [21] Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A., Solovyov A.M. Stochastic model of a hysteresis converter with a domain structure // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022. Vol. 14, № 2. P. 305–321. DOI: <https://doi.org/10.1134/S207004822202003X>.
- [22] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. A New Way to Compute the Lyapunov Characteristic Exponents for Non-Smooth and Discontinues Dynamical Systems // *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 109, № 3. P. 1805–1821. DOI: <http://dx.doi.org/10.21203/rs.3.rs-1202895/v1>.
- [23] Lacarbonara W. Vestroni F. Nonclassical responses of oscillators with hysteresis // *Nonlinear Dynamics*. 2003. Vol. 32. P. 235–258. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024423626386>.
- [24] Charalampakis A.E. The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited // *Archive of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 85. P. 1209–1223. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0937-8>.
- [25] Ikhrouane F., Rodellar J. On the Hysteretic Bouc–Wen Model // *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 42. P. 63–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0069-3>.
- [26] Iwan W.D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response // *Journal of Applied Mechanics*. 1966. Vol. 33, no. 4. P. 893–900. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3625199>.
- [27] Lin C.-J., Lin P.-T. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model // *Computers and Mathematics with Applications*. 2012. Vol. 64, issue 5. P. 766–787. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.015>.
- [28] Flynn D., Zhezherun A., Pokrovskii A., O’Kane J.P. Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator // *Physica B: Condensed Matter*. 2008. Vol. 403, issues 2–3. P. 440–442. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.08.070>.
- [29] Khatuntseva O.N. Analysis of the reasons for an aerodynamic hysteresis in flight tests of the Soyuz reentry capsule at the hypersonic segment of its descent // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2011. Vol. 52. P. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894411040067>.
- [30] Bak B.D., Kalmar–Nagu T. Energy cascade in a nonlinear mechanistic model of turbulence // *Technische Mechanik*. 2019. Vol. 39, no. 1. P. 64–71. DOI: <https://doi.org/10.24352/UB.OVGU-2019-007>.
- [31] Vakakis A.F., Gendelman O.V., Bergman L.A., McFarland D.M., Kerschen G., Lee Y.S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems. Berlin: Springer, 2009. 1033 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9130-8>.
- [32] Vakakis A.F., Gendelman O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part II-resonance capture // *Journal of Applied Mechanics*. 2001. Vol. 68, no. 1. P. 42–48. DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.1345525>.
- [33] Semenov M.E., Reshetova O.O., Solovyov A.M., Tolkachev A.V., Meleshenko P.A. Oscillations under hysteretic conditions: from simple oscillator to discrete sine-Gordon model // *Springer Proceedings in Physics*. 4th. “Topics in Nonlinear Mechanics and Physics — Selected Papers from CSNDD 2018”. 2019. P. 229–253. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8_12).








- [34] Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Semenov M.E., Solovyov A.M., Sypalo K.I. Stabilization of a system of unstable pendulums: discrete and continuous case // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2022. Vol. 61, no. 1. P. 135–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230722020113>.
- [35] Chen J.E., Theurich T., Krack M., Sapsis T., Bergman L.A., Vakakis A.F. Intense cross-scale energy cascades resembling “mechanical turbulence” in harmonically driven strongly nonlinear hierarchical chains of oscillators // *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. P. 1289–1305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03159-w>.
- [36] Chen J.E., Sun M., Zhang W., Li S.B., Wu R.Q. Cross-scale energy transfer of chaotic oscillator chain in stiffness-dominated range // *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 110. P. 2849–2867. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07737-4>.
- [37] Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. Vol. 65. P. 117–134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P).
- [38] Medvedsky A.L., Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Reshetova O.O., Semenov M.E. Dynamics of hysteretic-related Van-Der-Pol oscillators: the small parameter method // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2021. Vol. 60, no. 4. P. 511–529. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230721040092>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-63-75

## A simple mechanical model of turbulence

Semenov<sup>1,2</sup> M.E. , Tolkachev<sup>1,3</sup> A.V. , Kanishcheva<sup>1</sup> O.I. 

<sup>1</sup>Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation; [mkl150@mail.ru](mailto:mkl150@mail.ru) (M.E.); [tolkachev.akim@mail.ru](mailto:tolkachev.akim@mail.ru) (A.V.); [oleka-olesya@mail.ru](mailto:oleka-olesya@mail.ru) (O.I.);

<sup>2</sup>State Research Institute of Aircraft Systems (GosNIIAS), Moscow, Russian Federation;

<sup>3</sup>Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation;

Received: 15.05.2024

Revised: 20.06.2024

Accepted: 02.09.2024

Scientific article



**Abstract.** This work examines the control and stabilization problems of vibrations in a hierarchical chain of oscillators with hysteresis couplings. Hysteresis coupling is formalized within the Bouc – Wen phenomenological model. The mass, stiffness, and damping properties of the oscillators are set to follow a specific scaling rule and decrease exponentially along the chain, thus forming a hierarchy. The model is verified using Kolmogorov’s hypotheses. To do this, energy spectra are constructed under hysteresis in coupling and without it at different amplitudes of the external excitation. As a result of computational experiments, it is shown that for a chain with hysteresis couplings at a high amplitude of excitation, the energy spectrum curve sufficiently corresponds to Kolmogorov’s hypotheses. The amplitude-frequency characteristics of the system are calculated under hysteresis in coupling using the frequency scanning method. In numerical experiments, frequency ranges of external excitation are identified, which correspond to the chaotic behavior of oscillators and their synchronization.

**Key words:** turbulence; Kolmogorov’s hypotheses; hysteresis; Bouc – Wen model.

**Funding.** The work is carried out at financial support from Russian Science Fund (project 23-29-00696).

**Information about the conflict of interests:** the authors and reviewers declare no conflicts of interest.

**Citation.** Semenov M.E., Tolkachev A.V., Kanishcheva O.I. A simple mechanical model of turbulence . *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 63–75. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-63-75. (In Russ.)

© Semenov M.E., Tolkachev A.V., Kanishcheva O.I., 2024

*Mikhail E. Semenov* (mkl150@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation, State Research Institute of Aircraft Systems (GosNIIAS), 7, Viktorenko Street, Moscow, 125319, Russia Federation.

*Akim V. Tolkachev* (tolkachev.akim@mail.ru) – senior lecturer of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation, Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, 8, Timiryazeva Street, Voronezh, 394613, Russian Federation.

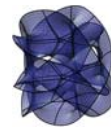
*Olesya I. Kanishcheva* (oleka-olesya@mail.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation.

## References

- [1] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1986. 551 p.
- [2] Friedlander S., Topper L. Turbulence: classic papers on statistical theory. London: Interscience publishers ltd., 1961, 187 p. Available at: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961\\_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical %20theory.pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical%20theory.pdf).
- [3] Townsend A.A. The structure of turbulent shear flow. Cambridge: Cambridge University Press, 1976, 416 p. Available at: <https://books.google.ru/books?id=0wuu9y8vRagC&printsec=frontcover&hl=ru>.
- [4] Tropea C., Yarin A., Foss J. Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics. Berlin: Springer, 2007, 237 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-30299-5>.
- [5] Davidson L. An Introduction to Turbulence Models. Goteborg: Chalmers University of Technology, 2011. 50 p. Available at: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/2011\\_Davidson\\_An-introduction-to-turbulence-models.pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/2011_Davidson_An-introduction-to-turbulence-models.pdf).
- [6] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. Second edition. Oxford: Elsevier, 2007, 538 p. Available at: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20C.%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics\(Elsevier,2nd%20edn,2007\).pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20C.%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics(Elsevier,2nd%20edn,2007).pdf).
- [7] Meyers J., Geurts B. J., Sagaut P. Quality and reliability of large-eddy simulations. Berlin; New York: Springer, 2008, 378 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8578-9>.
- [8] Frohlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 2008, vol. 44, issue 5, pp. 349–377. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2008.05.001>.
- [9] Schiestel R. Modeling and simulation of turbulent flows. Hoboken: John Wiley and Sons ltd., 2008, 725 p. Available at: <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/5720/27/L-G-0000572027-0002358757.pdf>.
- [10] McComb W.D. Homogeneous, Isotropic Turbulence: Phenomenology, Renormalization and Statistical Closures. Oxford: Oxford University Press, 2014, 408 p. Available at: <https://readli.net/homogeneous-isotropic-turbulence-phenomenology-renormalization-and-statistical-closures/>.

- [11] Zadorozhniy V.G. Linear chaotic resonance in vortex motion. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 4, pp. 486–502 (in Russ.)
- [12] Kolmogorov A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1967, vol. 93, no. 4, pp. 476–481 (in Russ.)
- [13] Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with hysteresis. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 410 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61302-9>.
- [14] Visintin A. Differential models of hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1994, 409 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11557-2>.
- [15] Antonelli M., Carboni B., Lacarbonara W., Bernardini D., Kalmar-Nagy T. Quantifying rate-dependence of a nonlinear hysteretic device. *Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices*, 2020, vol. 1, pp. 347–355. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0\\_35](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_35).
- [16] Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P., Masri S. Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, vol. 29, issue 13, pp. 2795–2810. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X18778792>.
- [17] Mayergoyz I.D. Mathematical models of hysteresis. New York: Spinger-Verlag, 1991, 207 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3028-1>.
- [18] Weiss P., Freundereich J.D. Etude de l'aimantation initiale en fonction de la temperature. *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, 1916, vol. 42, pp. 449–470.
- [19] Preisach F. Uber die magnetische nachwirkung. *Zeitschrift fur Physik*, 1935, vol. 94, pp. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [20] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 101, no. 11, pp. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [21] Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A., Solovyov A.M. Stochastic model of a hysteresis converter with a domain structure. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2022, vol. 14, issue 2, pp. 305–321. DOI: <https://doi.org/10.1134/S207004822202003X>.
- [22] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. A New Way to Compute the Lyapunov Characteristic Exponents for Non-Smooth and Discontinues Dynamical Systems. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 109, no. 3, pp. 1805–1821. DOI: <http://dx.doi.org/10.21203/rs.3.rs-1202895/v1>.
- [23] Lacarbonara W., Vestroni F. Nonclassical responses of oscillators with hysteresis. *Nonlinear Dynamics*, 2003, vol. 32, pp. 235–258. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024423626386>.
- [24] Charalampakis A.E. The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, vol. 85, pp. 1209–1223. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0937-8>.
- [25] Ikhouane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc–Wen model. *Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 42, pp. 63–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0069-3>.
- [26] Iwan W.D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33, no. 4, pp. 893–900. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3625199>.
- [27] Lin C.-J., Lin P.-T. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 64, issue 5, pp. 766–787. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.015>.

- [28] Flynn D., Zhezherun A., Pokrovskii A., O’Kane J.P. Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator. *Physica B: Condensed Matter*, 2008, vol. 403, issues 2–3, pp. 440–442. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.08.070>.
- [29] Khatuntseva O.N. Analysis of the reasons for an aerodynamic hysteresis in flight tests of the Soyuz reentry capsule at the hypersonic segment of its descent. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, pp. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894411040067>.
- [30] Bak B.D., Kalmar–Nagu T. Energy cascade in a nonlinear mechanistic model of turbulence. *Technische Mechanik*, 2019, vol. 39, no. 1, pp. 64–71. DOI: <https://doi.org/10.24352/UB.OVGU-2019-007>.
- [31] Vakakis A.F., Gendelman O.V., Bergman L.A., McFarland D.M., Kerschen G., Lee Y.S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems. Berlin: Springer, 2009, 1033 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9130-8>.
- [32] Vakakis A.F., Gendelman O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part II-resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, vol. 68, no. 1, pp. 42–48. DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.1345525>.
- [33] Semenov M.E., Reshetova O.O., Solovyov A.M., Tolkachev A.V., Meleshenko P.A. Oscillations under hysteretic conditions: from simple oscillator to discrete sine-Gordon model. In: *Springer Proceedings in Physics*. 4th. edition. Topics in Nonlinear Mechanics and Physics — Selected Papers from CSNDD 2018, 2019, pp. 229–253. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8_12).
- [34] Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Semenov M.E., Solovyov A.M., Sypalo K.I. Stabilization of a system of unstable pendulums: discrete and continuous case. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2022, vol. 61, no. 1, pp. 135–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230722020113>.
- [35] Chen J.E., Theurich T., Krack M., Sapsis T., Bergman L.A., Vakakis A.F. Intense cross-scale energy cascades resembling “mechanical turbulence” in harmonically driven strongly nonlinear hierarchical chains of oscillators. *Acta Mechanica*, 2022, vol. 233, pp. 1289–1305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03159-w>.
- [36] Chen J.E., Sun M., Zhang W., Li S.B., Wu R.Q. Cross-scale energy transfer of chaotic oscillator chain in stiffness-dominated range. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 110, pp. 2849–2867. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07737-4>.
- [37] Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, vol. 65, pp. 117–134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P).
- [38] Medvedsky A.L., Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Reshetova O.O., Semenov M.E. Dynamics of hysteretic-related Van-Der-Pol oscillators: the small parameter method. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, no. 4, pp. 511–529. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230721040092>.



# К задаче оптимального управления переориентацией оси вращения космического аппарата

Горелов Ю.Н. , Курганская Л.В. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара,  
Российская Федерация; yungor07@mail.ru (Ю.Н.); limbo83@mail.ru (Л.В.);

Поступила: 11.04.2024

Рассмотрена: 17.05.2024

Принята: 18.06.2024

Научная статья



**Аннотация.** Рассматриваются различные варианты постановки задачи оптимального управления переориентацией оси динамической симметрии космического аппарата, являющейся осью закрутки. Предполагается, что решение этой задачи должно отыскиваться в классе движений с одним направленным (плоским) поворотом при условии, что до и после переориентации оси вращения угловая скорость закрутки космического аппарата одинакова. При этом управление угловым движением космического аппарата осуществляется по схеме «поворотного реактивного двигателя», когда вектор управляющего момента ограничивается эллипсоидом вращения. Приведена соответствующая математическая модель движения космического аппарата для рассматриваемой задачи управления. Кроме постановки задачи о наискорейшей переориентации оси вращения космического аппарата также сформулирована взаимная к ней задача оптимального управления, для которой найдено оптимальное управление для полного управляющего момента. С целью проведения дальнейшего анализа рассматриваемой задачи управления приводятся также результаты её сведения к краевой задаче и к изопериметрической вариационной задаче.

**Ключевые слова:** космический аппарат; ось вращения; переориентация; оптимальное управление; краевая задача; изопериметрическая задача.

## Введение

Рассматривается управляемое движение динамически симметричного космического аппарата (КА) вокруг центра масс. Исследованию оптимальной по быстродействию переориентации КА посвящен ряд работ [1–5]. Например, в [1; 2; 5] рассмотрены задачи оптимального управления переориентацией оси вращения КА, являющейся осью его динамической симметрии, в классе движений с одним направленным плоским поворотом. Соответственно, в [1; 3] были поставлены и решены задачи оптимального управления в предположении, что угловая скорость закрутки КА в течение маневра остается постоянной, а в [2] — в предположении, что она может регулироваться с помощью автономной системы реактивных двигателей, когда допустимые управляющие моменты ограничены поверхностью круглого прямого цилиндра. В настоящей статье рассматривается также постановка взаимной задачи к задаче наискорейшей переориентации оси вращения КА. Эти задачи аналогичны задаче оптимального управления, рассмотренной в [2], но отличающиеся тем, что множество допустимых управляющих моментов КА здесь ограничивается эллипсоидом вращения. Такую схему управления обычно называют схемой «поворотного реактивного двигателя» [4]. В этом случае, как и в [2], требуется найти оптимальное управление наискорейшей переориентацией оси вращения КА в классе движений с одним направленным (в заданной плоскости) поворотом в инерциальном пространстве на заданный угол  $\gamma_T$ :  $0 < \gamma_T \leq \pi$ . Кроме того, с целью анализа постановки рассматриваемой задачи оптимального управления в настоящей статье также приводятся результаты ее сведения к соответствующей краевой задаче и к изопериметрической задаче вариационного исчисления.

## 1. Уравнения управляемого движения оси вращения КА в заданной плоскости

Пусть оси связанной системы координат КА  $Oxyz$  являются главными центральными осями инерции, а ось  $Oz$  является также осью динамической симметрии КА. Тогда  $J_x = J_y = J$  и в общем случае  $J_z \neq J$ , где  $J_x, J_y, J_z$  — главные центральные моменты инерции КА. Управление движением КА относительно центра масс и, соответственно, управление движением оси  $Oz$  в заданной плоскости  $P$  с нормалью  $\mathbf{e}_\omega$  осуществляется в рассматриваемой задаче с помощью моментов, создаваемых «поворотным реактивным двигателем» [4]:

$$M_x = a u v_x; \quad M_y = a u v_y; \quad M_z = a_z u v_z, \quad (1.1)$$

где  $a$  и  $a_z$  — постоянные, характеризующие эффективность управляющего воздействия «поворотного реактивного двигателя»;  $v_x, v_y, v_z$  — направляющие косинусы:  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$ ;  $u$  — степень дросселирования:  $0 \leq u \leq 1$ .

В начальный момент пусть ось  $Oz$  совмещена с осью  $OZ$  некоторой инерциальной системы координат  $OXYZ$ , а угол между осью  $Ox$  (или осью  $Oy$ ) и осью  $OX$  (или осью  $OY$ ) равен  $\varphi_0$ . Если обозначить через  $\mathbf{e}_0$  орт оси  $Oz$  в начальный момент и через  $\mathbf{e}_T$  — в конечный момент маневра ее переориентации, то нормаль к плоскости  $P$  определяется так:  $\mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_T / \sin \gamma_T$ , и  $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_T = \cos \gamma_T$ . Угол между осью  $OX$  и нормалью  $\mathbf{e}_\omega$  равен  $\delta$ , а между осью  $Ox$  и осью  $OX$  в начальный момент, соответственно,  $\delta = \varphi_0$ . Угол между осью  $Ox$  и нормалью  $\mathbf{e}_\omega$  в произвольный момент времени в течение маневра будет равен квазиординате  $\varphi$ , равной 
$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z(\xi) d\xi.$$

Если  $\gamma$  — текущий угол поворота оси  $Oz$  (угол между осью  $Oz$  и  $OZ$ ),  $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$  — ее угловая скорость, а  $\Omega$  — мгновенная угловая скорость закрутки КА вокруг оси  $Oz$ , то проекции вектора угловой скорости КА на оси связанной системы координат  $Oxyz$  будут равны [2; 3]:

$$\omega_x = \omega \cos(\delta - \varphi); \quad \omega_y = \omega \sin(\delta - \varphi), \quad \omega_z = \Omega. \quad (1.2)$$

Дополнительно введем направляющие косинусы для экваториальной составляющей вектора управляющего момента:

$$v_x^\ominus = v_x(v_x^2 + v_y^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad v_y^\ominus = v_y(v_x^2 + v_y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где  $(v_x^\ominus)^2 + (v_y^\ominus)^2 = (n^\ominus)^2 = 1$ , а  $n^\ominus$  — управляющий параметр, который равен  $n^\ominus = \pm 1$ . Можно записать, что  $v_x = v_x^\ominus(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}$  и  $v_y = v_y^\ominus(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}$ , где  $v_x^2 + v_y^2 = 1 - v_z^2$ . Учитывая эти соотношения и подставляя выражения (1.1) и (1.2) в динамические уравнения Эйлера [6], получим

$$\frac{d\omega}{dt} \cos(\delta - \varphi) + \sigma \omega \Omega \sin(\delta - \varphi) = \frac{a}{J} u (1 - v_z^2)^{\frac{1}{2}} v_x^\ominus; \quad (1.3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} \sin(\delta - \varphi) - \sigma \omega \Omega \cos(\delta - \varphi) = \frac{a}{J} u (1 - v_z^2)^{\frac{1}{2}} v_y^\ominus; \quad (1.4)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{a_z}{J_z} u z, \quad (1.5)$$

где обозначено  $u_z = u v_z$  и  $\sigma = J_z / J$ .

Исключая направляющие косинусы для экваториальной составляющей управляющего момента из первых двух уравнений системы (1.3) и (1.4), получим

$$\left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + \sigma^2 \omega^2 \Omega^2 = b^2 (u^2 - u_z^2) (n^\ominus)^2,$$

где  $b = a/J$ . С учетом этого уравнения и кинематического соотношения  $\frac{d\gamma}{dt} = \omega$ , а также  $(n^z)^2 = 1$  получим следующую систему уравнений управляемого движения оси динамической симметрии КА:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega; \quad \frac{d\omega}{dt} = bn(u^2 - u_z^2 - k^2\omega^2\Omega^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.6)$$

где  $n = 0, \pm 1$  — управляющий параметр,  $\kappa = \sigma/b = J_z/a$ . Соответственно, уравнение управления закруткой КА вокруг оси  $Oz$  получается из уравнения (1.5):

$$\frac{d\Omega}{dt} = b_z u_z, \quad (1.7)$$

где  $b_z = a_z/J_z$ .

Множество допустимых управлений для системы (1.6), (1.7) определяется следующими ограничениями:

$$n = 0, \pm 1; \quad 0 \leq \kappa\omega\Omega \leq u \leq 1; \quad (1.8)$$

$$0 \leq u_z^2 \leq u^2 - k^2\omega^2\Omega^2. \quad (1.9)$$

Отметим, что компонента  $\kappa\omega\Omega$  в (1.9) пропорциональна гироскопическому моменту, возникающему при движении оси  $Oz$  и при  $\Omega \neq 0$ , то есть ограничение на величину  $u_z = uv_z$  необходимо связано с выполнением условий плоского движения оси  $Oz$ .

Граничные условия для системы дифференциальных уравнений (1.6), (1.7) имеют следующий вид:

$$\gamma(0) = 0; \quad \omega(0) = 0; \quad \Omega(0) = \Omega_0; \quad (1.10)$$

$$\gamma(T) = \gamma_T; \quad \omega(T) = 0; \quad \Omega(T) = \Omega_0, \quad (1.11)$$

где  $\gamma_T$  и  $\Omega_0$  — заданные параметры маневра ( $0 < \gamma_T \leq \pi$  и  $\Omega_0 > 0$ ), а  $T$  — длительность маневра, которую по условиям рассматриваемой здесь задачи требуется минимизировать.

Итак, теперь можно сформулировать следующую задачу оптимального управления, в которой требуется минимизировать функционал

$$J_0 = \int_0^T dt \quad (1.12)$$

на допустимом множестве, определяемом условиями (1.6)–(1.11).

## 2. Сведение исходной задачи оптимального управления к взаимной задаче

Следуя [1; 2], вместо задачи оптимального управления (1.6)–(1.12) можно рассматривать взаимную для нее задачу, в которой требуется переориентировать ось  $Oz$  КА за фиксированное время  $T$  на максимальный угол  $\gamma_T$ . С учетом первого уравнения в (1.6) эта задача будет эквивалентна задаче максимизации функционала

$$\gamma_T = \int_0^T \omega dt \quad (2.1)$$

на множестве, которое определяется условиями (1.6)–(1.9), а также при учете граничных условий (1.10), (1.11) в виде

$$\omega(0) = 0; \quad \Omega(0) = \Omega_0; \quad \omega(T) = 0; \quad \Omega(T) = \Omega_0. \quad (2.2)$$

Доказательство эквивалентности задач (1.6)–(1.12) и (1.6)–(1.9), (2.1), (2.2) аналогично доказательству эквивалентности взаимных задач, которое приведено в [1].

Нормируя переменные  $\gamma$ ,  $\omega$  и  $\Omega$ , систему уравнений (1.6), (1.7) приведем к следующему виду:

$$\frac{dy}{d\tau} = n(u^2 - u_z^2 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{dz}{d\tau} = u_z \left( \frac{dx}{d\tau} = y \right), \quad (2.3)$$

где  $\tau = t/T$ ,  $x = (bT^2)^{-1}\gamma$ ,  $y = (bT)^{-1}\omega$ ,  $z = (b_z T)^{-1}\Omega$ ,  $p = \kappa b b_z T^2$  — параметр. Тогда с учетом указанных преобразований с точностью до постоянного множителя функционал (2.1) можно заменить функционалом

$$J_1 = \int_0^1 y d\tau \quad (J_1 = x_T = (bT^2)^{-1}\gamma_T, \quad x_T = x(1)). \quad (2.4)$$

Соответственно, граничные условия (2.2) здесь также следует переписать в виде:

$$y(0) = 0; \quad z(0) = z_0; \quad y(1) = 0; \quad z(1) = z_0, \quad (2.5)$$

где  $z_0 = (b_z T)^{-1}\Omega_0 > 0$ .

Таким образом, вместо задачи (1.6)–(1.12) далее можно рассматривать эквивалентную ей задачу максимизации функционала (2.4) при условиях (2.3), (2.5) и допустимых управлениях:

$$n = 0, \pm 1; \quad 0 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq u_z^2 \leq u^2 - p^2 y^2 z^2. \quad (2.6)$$

Можно показать, что на основе принципа оптимальности В.Ф. Кротова [1; 7] решение задачи (2.3)–(2.6), как и в [2], сводится к построению верхней границы функции  $y(\tau)$  на интервале  $[0, 1]$ , которая доставляет абсолютный максимум функционалу (2.4). Получаемая при этом программа оптимального управления:  $\tilde{n}(\tau)$ ;  $\tilde{u}(\tau)$ ;  $\tilde{u}_z(\tau)$ ,  $\forall \tau \in [0, 1]$ , в силу симметрии граничных условий (2.5), также будет симметрична относительно момента времени  $\tau = 1/2$ , а именно:

$$\tilde{n}(\tau) = -\tilde{n}(1 - \tau); \quad \tilde{u}(\tau) = \tilde{u}(1 - \tau); \quad \tilde{u}_z(\tau) = -\tilde{u}_z(1 - \tau), \quad \forall \tau \in [0, 1].$$

То же самое имеет место и для оптимальной траектории задачи:  $\tilde{y}(\tau)$ ,  $\tilde{z}(\tau)$ , которая получается для указанной программы управления  $\tilde{n}(\tau)$ ,  $\tilde{u}(\tau)$ ,  $\tilde{u}_z(\tau)$  и граничных условий (2.5):

$$\tilde{y}(\tau) = \tilde{y}(1 - \tau); \quad \tilde{z}(\tau) = \tilde{z}(1 - \tau); \quad \tilde{x}(\tau) = x_T - \tilde{x}(1 - \tau), \quad \forall \tau \in [0, 1].$$

Кроме того, здесь же можно показать, что функция  $\tilde{y}(\tau)$  на интервале  $[0, 1/2)$  является возрастающей, а функция  $\tilde{z}(\tau)$  — убывающей; на интервале  $(1/2, 1]$ , наоборот, функция  $\tilde{y}(\tau)$  — убывающая, а  $\tilde{z}(\tau)$  — возрастающая функция. Соответственно, на интервале  $[0, 1/2)$  имеет место:  $\tilde{n}(\tau) \geq 0$  и  $\tilde{u}_z(\tau) \leq 0$  — это участок «разгона» оси  $Oz$ ; интервал  $(1/2, 1]$  — участок «торможения» оси  $Oz$ , на котором  $\tilde{n}(\tau) \leq 0$  и  $\tilde{u}_z(\tau) \geq 0$ . Очевидно, что если на некоторых конечных подынтервалах  $\tilde{n}(\tau) = 0$ , то на этих же подынтервалах имеет место:  $\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = 0$ , а также выполняется условие

$$\tilde{u}^2(\tau) - \tilde{u}_z^2(\tau) - p^2 \tilde{y}^2(\tau) \tilde{z}^2(\tau) = 0.$$

Более того, можно показать, что для оптимального управления здесь, как и в [2], имеет место:

$$\tilde{u}(\tau) = 1, \quad \forall \tau \in [0, 1]. \quad (2.7)$$

Действительно, пусть  $u_z(\tau) = \tilde{u}_z(\tau)$ , где  $\tilde{u}_z(\tau)$  — оптимальное управление. В этом случае решение второго уравнения (2.3) —  $z(\tau) = \tilde{z}(\tau)$ . Соответственно, далее примем  $\tilde{u}(\tau) = 1$ ,  $\forall \tau \in [0, 1/2)$ , имея в виду, что в общем случае  $u(\tau) = 1 + \delta u(\tau)$ , где  $\delta u(\tau) \leq 0$ ,  $\forall \tau \in [0, 1/2)$ , и при этом выполняется условие  $[1 + \delta u(\tau)]^2 - \tilde{u}_z^2(\tau) - p^2 \tilde{y}^2(\tau) \tilde{z}^2(\tau) \geq 0$ . Первое уравнение в (2.3) тогда принимает вид:

$$\frac{dy}{d\tau} = \tilde{n}(u^2 - \tilde{u}_z^2 - p^2 y^2 \tilde{z}^2)^{\frac{1}{2}},$$



где  $y(\tau) = \tilde{y}(\tau) + \delta y(\tau)$ . Проводя линеаризацию этого уравнения в окрестности оптимальной траектории, получим

$$\frac{d\delta y}{d\tau} = \frac{\tilde{n}(\delta u - p^2 \tilde{y} \tilde{z}^2 \delta y)}{(1 - \tilde{u}_z^2 - p^2 \tilde{y}^2 \tilde{z}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Выберем такой подынтервал  $[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon) \in [0, 1/2)$ , на котором  $\tilde{n}(\tau) = 1$ ; здесь  $0 \leq \tau_0 < \tau_0 + \varepsilon < 1/2$ , а  $\varepsilon > 0$  — некоторое малое число. Пусть

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 - \delta u_0, & \forall \tau \in [\tau_0, \tau_0 + \varepsilon); \\ 1, & \forall \tau \in [0, 1/2) \setminus [\tau_0, \tau_0 + \varepsilon), \end{cases}$$

где  $0 < \delta u_0 < 1 - \sqrt{\tilde{u}_z^2(\tau_0) + p^2 \tilde{y}^2(\tau_0) \tilde{z}^2(\tau_0)}$ . Поэтому  $\delta y(\tau_0 + \varepsilon) \leq 0$ . Но тогда отсюда следует, что  $\forall \tau \in [\tau_0 + \varepsilon, 1/2)$  имеет место:  $\delta y(\tau) \leq 0$ , и, стало быть, для функционала (2.4), вычисляемого на интервале  $[0, 1/2)$ , получим

$$\int_0^{1/2} y(\tau) d\tau < \int_0^{1/2} \tilde{y}(\tau) d\tau.$$

Следовательно,  $\tilde{u}(\tau) = 1, \forall \tau \in [0, 1/2)$ . То же самое имеет место и  $\forall \tau \in (1/2, 1]$ .

В конечном счете эквивалентная задача (2.3)–(2.6) с интервалом управления  $[0, 1]$  сводится к задаче с интервалом управления  $[0, 1/2]$ , в которой с учетом (2.4) требуется максимизировать функционал

$$J_2 = \int_0^{1/2} y d\tau \tag{2.8}$$

на множестве решений системы дифференциальных уравнений (2.3) с учетом (2.6), (2.7), то есть на траекториях управляемой системы:

$$\frac{dy}{d\tau} = n(1 - u_z^2 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{dz}{d\tau} = u_z; \tag{2.9}$$

для которой заданы только начальные условия

$$y(0) = 0; \quad z(0) = z_0, \tag{2.10}$$

и выполняются следующие ограничения для управляющих параметров:

$$n = 0, 1; \quad 0 \leq |\delta u_z| \leq (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.11}$$

Очевидно, что в этом случае исходная задача (1.6)–(1.12) сведена к взаимной задаче (2.8)–(2.11) со свободным правым концом, то есть значения  $y(1/2) > 0$  и  $z(1/2) \geq 0$  для которой не фиксированы. Соответственно, допустимые и оптимальные траектории в этой задаче находятся в области  $D$ , определяемой условиями:  $0 \leq y \leq 1/2; 0 \leq z \leq \min \{z_0, 1/py\}$ .

### 3. Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче

Решение задачи оптимального управления (2.8)–(2.11) можно отыскивать с помощью принципа максимума Понтрягина [5; 6; 8]. Введем в системе уравнений (2.9) вместо параметра  $u_z$  новый управляющий параметр с учетом структуры ограничения (2.11). Итак, пусть

$$u_z = (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \sin \mu, \tag{3.1}$$

где  $\mu$  — управляющий параметр, удовлетворяющий ограничениям:

$$-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2, \tag{3.2}$$

то есть с учетом (3.1), (3.2) уравнения (2.9) принимают вид

$$\frac{dy}{d\tau} = (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \cos \mu; \quad \frac{dz}{d\tau} = (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \sin \mu. \quad (3.3)$$

С учетом (2.8) и (3.3) введем функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H = y + \psi_y (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \cos \mu + \psi_z (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \sin \mu, \quad (3.4)$$

где  $\psi_y$  и  $\psi_z$  — сопряженные переменные, которые должны удовлетворять дифференциальным уравнениям [8]:

$$\frac{d\psi_y}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{d\psi_z}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Дифференцируя функцию  $H$  (3.4) по  $y$  и  $z$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= 1 - p^2 (\psi_y \cos \mu + \psi_z \sin \mu) (1 - p^2 y^2 z^2)^{-\frac{1}{2}} y z^2; \\ \frac{\partial H}{\partial z} &= -p^2 (\psi_y \cos \mu + \psi_z \sin \mu) (1 - p^2 y^2 z^2)^{-\frac{1}{2}} y^2 z. \end{aligned}$$

Эти производные от правых частей уравнений (3.3) не существуют при выполнении условия:  $1 - p^2 y^2 z^2 = 0$ , когда имеет место  $y = const$ , то есть ось  $Oz$  движется по «инерции», также  $z = const$ , то есть угловая скорость закрутки КА сохраняется постоянной. При этом управляющий момент полностью направлен на компенсацию гироскопического момента, так как в этом случае  $u = 1$  и, соответственно,  $u_z = 0$ . Такого вида экстремали были выявлены в задачах оптимальной переориентации оси вращения КА в [1–5].

Если условие  $1 - p^2 y^2 z^2 = 0$  не выполняется для некоторого множества значений  $z_0$  и  $p \forall \tau \in [0; 1/2)$ , то в силу существования частных производных функции  $H$  по  $y$  и  $z$  применение принципа максимума будет правомерным.

Вводя вспомогательную переменную  $\vartheta$  с помощью соотношений:

$$\cos \vartheta = \psi_y (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \sin \vartheta = \psi_z (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

функцию  $H$  (3.4) с учетом  $\psi_y \cos \mu + \psi_z \sin \mu = (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\vartheta - \mu)$  можно переписать в следующем виде:

$$H = y + (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\vartheta - \mu). \quad (3.5)$$

Тогда из условия максимума функции  $H$  по  $\mu$  получим:  $\tilde{\mu} = \arg \max_{\mu} H(y, z, \psi_y, \psi_z, \mu)$ . Так как  $\max_{\mu} \cos(\vartheta - \mu) = 1$ , то тогда

$$\tilde{\mu} = \vartheta = \arctg \frac{\psi_z}{\psi_y}. \quad (3.6)$$

Следовательно,  $\cos \tilde{\mu} = \psi_y (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{-\frac{1}{2}}$  и  $\sin \tilde{\mu} = \psi_z (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

С учетом приведенных выше выражений для  $\frac{\partial H}{\partial y}$  и  $\frac{\partial H}{\partial z}$ , а также (3.6) дифференциальные уравнения для  $\psi_y$  и  $\psi_z$  будут иметь следующий вид:

$$\frac{d\psi_y}{d\tau} = -1 + p^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{\frac{1}{2}} (1 - p^2 y^2 z^2)^{-\frac{1}{2}} y z^2; \quad (3.7)$$

$$\frac{d\psi_z}{d\tau} = p^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{\frac{1}{2}} (1 - p^2 y^2 z^2)^{-\frac{1}{2}} y^2 z. \quad (3.8)$$

Соответственно, исходя из граничных условий задачи (2.8)–(2.11), для системы (3.7), (3.8) должны выполняться условия

$$\psi_y(1/2) = 0; \quad \psi_z(1/2) = 0. \quad (3.9)$$

Начальные условия:  $\psi_y(0) = \psi_{y0}$  и  $\psi_z(0) = \psi_{z0}$ , здесь не определены, хотя можно показать, что для них должны выполняться условия:  $\psi_{y0}^2 + \psi_{z0}^2 > 0$ .

Уравнения движения (3.3), для которых заданы начальные условия (2.10), с учетом (3.6) будут иметь следующий вид:

$$\frac{dy}{d\tau} = \psi_y (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}; \quad (3.10)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \psi_z (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Таким образом, задача оптимального управления (2.8)–(2.11) сведена к краевой задаче (2.10), (3.7)–(3.11).

На экстремали задачи, получаемой из условий принципа максимума [8], функция  $H$  (3.4) сохраняет постоянное значение. Поэтому с учетом (3.5) и (3.6) получим

$$H = y + (1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{\frac{1}{2}} = \text{const}. \quad (3.12)$$

Так как

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \psi_y'}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \psi_z'}$$

то соответствующее дифференцирование (3.12) приводит к уравнениям (3.10), (3.11). То же самое справедливо и для уравнений сопряженной системы (3.7), (3.8), поскольку

$$\frac{d\psi_y}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{d\psi_z}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial z'}.$$

Далее, учитывая начальные условия (2.10), из (3.12) получим

$$H(0) = (\psi_{y0}^2 + \psi_{z0}^2)^{\frac{1}{2}} = c_0,$$

где  $c_0$  — некоторая константа, и, соответственно, с учетом конечных условий (3.9) имеет место:

$$H(0) = y(1/2) = c_0 > 0,$$

то есть  $y(1/2) = c_0$ . Исходя из очевидных оценок для правых частей (3.3), имеем  $0 < y(1/2) < 1/2$ , но тогда  $0 < \psi_{y0}^2 + \psi_{z0}^2 < 1/4$  и, с учетом допустимого характера изменения  $\psi_y(\tau)$  и  $\psi_z(\tau)$  на интервале  $[0, 1/2]$ , получим:  $0 < \psi_{y0} < 1/2$ ;  $-1/2 < \psi_{z0} \leq 0$ . Кроме того, из (3.12) также получим  $(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} (\psi_y^2 + \psi_z^2)^{\frac{1}{2}} = c_0 - y$ , а отсюда следует

$$(\psi_y^2 + \psi_z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c_0 - y}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

#### 4. Сведение взаимной задачи оптимального управления к изопериметрической задаче вариационного исчисления

Сформулируем еще одну вспомогательную задачу, исходя из задачи управления (2.8)–(2.11). Для этого вначале предположим, что решение первого уравнения (2.9),  $y(\tau)$  монотонно возрастающая функция, что имеет место в том случае, когда  $n(\tau) \equiv 1$ , а также  $0 \leq |u_z(\tau)| < [1 - p^2 y^2(\tau) z^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}$ ,  $\forall \tau \in [0, 1/2)$ . При этом из первого уравнения (2.9) следует

$$d\tau = \frac{dy}{(1 - u_z^2 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.1)$$

Кроме того, если в (2.9) разделить второе уравнение на первое, то получим

$$\frac{dz}{dy} = z'_y = \frac{u_z}{(1 - u_z^2 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.2)$$

Отсюда нетрудно установить, что имеет место соотношение:

$$u_z^2 = \frac{(1 - p^2 y^2 z^2) z_y'^2}{1 + z_y'^2}. \quad (4.3)$$

С учетом (4.3) выражение для дифференциала (4.1) можно переписать так:

$$d\tau = \frac{(1 + z_y'^2)^{\frac{1}{2}} dy}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

и, соответственно, переходя к новой независимой переменной, функционал (2.8) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{J}_2 = \int_0^{y^*} \frac{y(1 + z_y'^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} dy, \quad (4.4)$$

где  $y^* = y(1/2) > 0$  — значение новой независимой переменной на момент  $\tau = 1/2$  в (2.8)–(2.11). Очевидно, что это значение удовлетворяет ограничениям:  $0 < y^* < 1/2$ . В свою очередь, в силу перехода к взаимной задаче (2.8)–(2.11) время маневра фиксировано, то есть при этом должно выполняться условие:  $\int_0^{1/2} d\tau = \frac{1}{2}$ . Поэтому при максимизации функционала (4.4) следует учитывать наличие указанного условия, которое в вариационном исчислении называют изопериметрическим ограничением для рассматриваемой задачи [9]:

$$\int_0^{y^*} \frac{(1 + z_y'^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} dy = \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

Таким образом, задача (2.8)–(2.11) сведена к изопериметрической задаче вариационного исчисления, в которой требуется найти экстремаль, доставляющую максимум функционалу (4.4) при выполнении условия (4.5). С учетом граничных условий (2.10) для искомой экстремали  $z = z(y)$  должны выполняться такие условия:

$$z(0) = z_0. \quad (4.6)$$

Следует также отметить, что сформулированная изопериметрическая задача (4.4)–(4.6) относится к классу вариационных задач с подвижными концами, а именно: здесь и значение  $y^*$ , и правый конец экстремали, то есть значение  $z^* = z(y^*)$ , не фиксированы.

В соответствии с правилом множителей Лагранжа [9] задача (4.4)–(4.6) сводится к простейшей вариационной задаче на максимум функционала

$$\tilde{J}_3 = \int_0^{y^*} \frac{(y + \lambda_0)(1 + z_y'^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} dy, \quad (4.7)$$

где  $\lambda_0$  — постоянный множитель Лагранжа.

Как известно, необходимыми условиями экстремума функционала (4.7) (здесь — его максимума) являются следующие условия: во-первых, первая вариация (4.7) должна обращаться в нуль, то есть  $\delta \tilde{J}_3 = 0$ , и, во-вторых, его вторая вариация должна быть неположительной, то есть  $\delta^2 \tilde{J}_3 \leq 0$ .

Первое из этих условий приводит к уравнению Эйлера [9]:

$$F_z - \frac{d}{dy} F_{z'_y} = 0, \quad (4.8)$$

где

$$F = F(y, z, z'_y) = \frac{(y + \lambda_0)(1 + z'^2_y)^{\frac{1}{2}}}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.9)$$

и, соответственно, в развернутом виде уравнение (4.8) записывается так:

$$F_z - F_{z'_y y} - F_{z'_y z} z'_y - F_{z'_y z'_y} z''_{yy} = 0, \quad (4.10)$$

где

$$F_{z'_y y} = \frac{\partial F_{z'_y}}{\partial y}, \quad F_{z'_y z} = \frac{\partial F_{z'_y}}{\partial z}, \quad F_{z'_y z'_y} = \frac{\partial F_{z'_y}}{\partial z'_y} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{dz'_y}{dy}.$$

Второе из указанных необходимых условий, то есть  $\delta^2 \tilde{J}_3 \leq 0$ , известно как условие Лежандра [9]:

$$F_{z'_y z'_y} \leq 0. \quad (4.11)$$

Кроме того, к необходимым условиям экстремума функционала (4.7) здесь также относятся следующие условия:

$$F_{z'_y}(y, z, z'_y) \Big|_{y=y^*} \delta z^* = 0; \quad (4.12)$$

$$[F(y, z, z'_y) - z'_y F_{z'_y}(y, z, z'_y)] \Big|_{y=y^*} \delta y^* = 0. \quad (4.13)$$

Вычисляя входящие в (4.10) соответствующие частные производные от функции (4.9) и подставляя полученные для них выражения в (4.10) при условии, что  $1 - p^2 y^2 z^2 > 0$  и  $1 + z'^2_y < \infty$ , уравнение Эйлера (4.8) можно переписать в явном виде:

$$[p^2 y^2 z(y + \lambda_0) - (1 + p^2 \lambda_0 y z^2) z'_y] (1 + z'^2_y) - (y + \lambda_0) (1 - p^2 y^2 z^2) z''_{yy} = 0.$$

При этом следует отметить, что условие  $1 + z'^2_y < \infty$  означает отсутствие вертикальных участков экстремали  $z = z(y)$ , что предполагалось в начале настоящего раздела, а условие  $1 - p^2 y^2 z^2 > 0$  то, что эта экстремаль лежит в допустимой области  $D$ .

Возвращаясь к рассмотрению необходимых условий экстремума функционала (4.7), вначале отметим, что с учетом выражений для  $F$  (4.9) и  $F_{z'_y}$ , а также  $\delta y^* \neq 0$  и  $\delta z^* \neq 0$  из условий (4.12) и (4.13) следует

$$\frac{(y + \lambda_0) z'_y}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} (1 + z'^2_y)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{y=y^*} = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{y + \lambda_0}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}} (1 + z'^2_y)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{y=y^*} = 0. \quad (4.15)$$

Очевидно, что при выполнении условия (4.15) условие (4.14) также выполняется, если только при этом  $1 - p^2 y^2 z^2 > 0$  и  $1 + z'^2_y < \infty$ . Тогда соответствующие необходимые условия принимают следующий вид:

$$y^* + \lambda_0 = 0.$$

Отсюда получим  $\lambda_0 = -y^*$ , но  $0 < y^* < 1/2$  (при  $z_0 > 0$ ), то есть  $-1/2 < \lambda_0 < 0$ . Следовательно,  $\forall y \in [0, y^*)$  имеет место:  $y + \lambda_0 < 0$ , и условие Лежандра (4.11) с учетом выражения (4.9) строго выполняется  $\forall y \in [0, y^*)$  и, стало быть, функционал (4.7) достигает на искомой экстремали максимума.

Как известно [9], приведенные выше необходимые условия экстремума функционала (4.7) выполняются в классе кусочно-гладких функций  $z(y)$ . Но в общем случае экстремум функционала (4.7) может достигаться на более широком классе функций, а именно кусочно-непрерывных функций. Для того чтобы установить возможность существования вертикальных участков экстремали  $z(y)$ , рассмотрим введенные В.Ф. Кротовым функции [9; 10]:

$$W(y, z) = \lim_{z'_y \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{z'_y} F(y, z, z'_y), \quad (4.16)$$

где предел  $W(y, z)$  при  $z'_y \rightarrow +\infty$  называют правым пределом, а при  $z'_y \rightarrow -\infty$  — левым пределом. Соответственно, характер экстремали в рассматриваемой задаче определяется поведением функции  $W(y, z)$ , и в зависимости от этого возможны пять основных случаев, перечисленных в [9]. С учетом (4.9) для соответствующих пределов в (4.16) получим, во-первых,

$$W(y, z) = \lim_{z'_y \rightarrow +\infty} \frac{(y + \lambda_0)(1 + z'^2_y)^{\frac{1}{2}}}{z'_y(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} = + \frac{y + \lambda_0}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad (4.17)$$

во-вторых,

$$W(y, z) = \lim_{z'_y \rightarrow -\infty} \frac{(y + \lambda_0)(1 + z'^2_y)^{\frac{1}{2}}}{z'_y(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} = - \frac{y + \lambda_0}{(1 - p^2 y^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.18)$$

Отсюда видно, что при  $y = 0$  и  $y = y^*$  правый и левый пределы (4.17) и (4.18) существуют и равны, то есть в этом случае функционал (4.7) относится ко второму типу по классификации [9; 10], и, стало быть, экстремаль может содержать вертикальные отрезки. Сразу же отметим, что при  $y = y^*$  или, что то же самое, в момент времени  $\tau = 1/2$  такой отрезок, очевидно, отсутствует. Если  $y = 0$ , то в этом случае экстремаль может содержать вертикальный отрезок и, соответственно, на некотором подынтервале  $[0, \tau_0)$ , где  $\tau_0 < \min(z_0, 1/2)$ , имеет место

$$u_z(\tau) = -1; \quad y(\tau) = 0; \quad z(\tau) = z_0 - \tau, \quad \forall \tau \in [0, \tau_0).$$

Если же  $0 < y < y^* < 1/2$ , то пределы (4.17) и (4.18) существуют, но не равны друг другу всюду на интервале  $(0, y^*)$ , что отвечает пятому типу функционалов. В этом случае могут существовать как кусочно-гладкие экстремали, так и экстремали с вертикальными отрезками. Можно показать, что в общем случае экстремали функционала (4.7), за исключением точки  $y = 0$ , вертикальных отрезков не имеют.

## Выводы

Рассмотрены различные постановки задачи оптимального управления переориентацией оси вращения динамически симметричного КА, решение которой отыскивается в классе движений с одним направленным (плоским) поворотом оси вращения. При этом до и после ее переориентации угловая скорость закрутки КА должна быть одной и той же. Управление угловым движением КА, совершающим указанный маневр, осуществляется по схеме «поворотного реактивного двигателя», когда управляющий момент ограничивается эллипсоидом вращения. Приведена соответствующая математическая модель движения КА для рассматриваемой задачи управления. Кроме постановки задачи о наискорейшей переориентации оси вращения КА также сформулирована взаимная к ней задача оптимального управления, для которой было найдено оптимальное управление для полного управляющего момента. С целью дальнейшего анализа рассматриваемой задачи приводятся также результаты ее сведения к краевой задаче и к изопериметрической вариационной задаче. Последнее существенно как для разработки численного метода решения рассматриваемой задачи, так и для выявления ее возможных особенностей при отыскании оптимальной экстремали.

В заключение также следует отметить, что в последнее время широко используются новые постановки различных задач оптимального управления ориентацией КА с применением кватернионных моделей вращательного движения твердого тела [11; 12]

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Цитирование.** Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. К задаче оптимального управления переориентацией оси вращения космического аппарата // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 76–88. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-76-88.

© Горелов Ю.Н., Курганская Л.В., 2024

Горелов Юрий Николаевич (yungor07@mail.ru) – доктор технических наук, профессор, директор НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.  
Курганская Любовь Викторовна (limbo83@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Литература

- [1] Григорьев Н.Г., Иослович И.В. О некоторых задачах наискорейшей переориентации космического аппарата // Космические исследования. 1978. Т. 16, № 6. С. 822–826.
- [2] Горелов Ю.Н. О наискорейшей переориентации оси вращения динамически симметричного космического аппарата // Космические исследования. 1983. Т. 21, № 1. С. 27–33.
- [3] Горелов Ю.Н., Титов Б.А. Об оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Космические исследования. 1980. Т. 18, № 2. С. 157–162.
- [4] Роцин Ю.Р. К задаче оптимальной переориентации твердого тела // Космические исследования. 1977. Т. 15, № 6. С. 846–852.
- [5] Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. Москва: Наука, 1987. 368 с. URL: <https://libcats.org/book/577488?ysclid=m1uei3rp8k286832965>.
- [6] Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: Наука, 1990. 416 с.
- [7] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. Москва: Наука, 1973. 448 с.
- [8] Понtryгин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1976. 392 с. URL: <https://djvu.online/file/NN6TYTWzZN0kJ?ysclid=m1uewjz6ev494212948>.
- [9] Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Москва; Ленинград: Энергия, 1965. 220 с.
- [10] Кротов В.Ф. Разрывные решения вариационных задач // Известия вузов. Сер.: Математика. 1960. № 5. С. 86–98. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm2307>; 1961. № 2. С. 75–89. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm1863>.
- [11] Левский М.В. Оптимальное управление ориентацией космического аппарата с ограничениями на управляющие и фазовые переменные // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2021. № 6. С. 158–176. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0002338821030100>.



[12] Левский М.В. Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией твердого тела (космического аппарата) с комбинированным критерием качества // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2024. № 1. С. 197–222. DOI: <http://doi.org/10.31857/S1026351924010115>. EDN: <https://elibrary.ru/vzsrqq>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-76-88

## On the problem of optimal control of rotation axis reorientation of a spacecraft

Gorelov Yu.N.<sup></sup>, Kurganskaya L.V.<sup></sup>

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [yungor07@mail.ru](mailto:yungor07@mail.ru) (Yu.N.); [limbo83@mail.ru](mailto:limbo83@mail.ru) (L.V.);

Received: 11.04.2024

Revised: 17.05.2024

Accepted: 18.06.2024

Scientific article



**Abstract.** Various variants of the formulation of optimal control problem of the reorientation of the axis of dynamic symmetry of the spacecraft (spacecraft), which is the axis of rotation, are considered. It is assumed that the solution to this problem should be found in the class of movements with one directional (flat) rotation, provided that before and after the reorientation of the axis of rotation, the angular velocity of the spacecraft is the same. In this case, the angular motion of the spacecraft is controlled according to the "rotary jet engine" scheme, when the control moment is limited by the ellipsoid of rotation. The corresponding mathematical model of spacecraft motion for the control problem under consideration is given. In addition to the formulation of the problem of the steepest reorientation of the axis of rotation of the spacecraft, the optimal control problem is also formulated, for which optimal control for the full control moment is found. In order to analyze the formulation of the problem under consideration, the results of its reduction to the boundary value problem and to the isoperimetric variational problem are also presented.

**Key words:** spacecraft; axis of rotation; reorientation; optimal control; boundary value problem; isoperimetric problem.

**Information about the conflict of interests:** the authors and reviewers declare no conflict of interest.

**Citation.** Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. On the problem of optimal control of rotation axis reorientation of a spacecraft. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 76–88. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-76-88. (In Russ.)

© Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V., 2024

*Yury N. Gorelov* ([yungor07@mail.ru](mailto:yungor07@mail.ru)) – Doctor of Technical Sciences, professor, director of the Research Institute of Modeling and Control Science, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

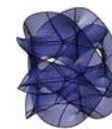
*Lubov V. Kurganskaya* ([limbo83@mail.ru](mailto:limbo83@mail.ru)) – Candidate of Physical and Mathematical Science, leading researcher of the Research Institute of the Modeling and Control Science, associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] Grigoriev N.G., Ioslovich I.V. On some tasks of the fastest reorientation of a spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniya = Cosmic Research*, 1978, vol. 16, no. 6, pp. 822–826. (In Russ.)



- [2] Gorelov Yu.N. On the fastest reorientation of the axis of rotation of a dynamically symmetrical spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniya = Cosmic Research*, 1983, vol. 21, no. 1, pp. 27–33. (In Russ.)
- [3] Gorelov Yu.N., Titov B.A. On the optimal reorientation of a rotating spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniya = Cosmic Research*, 1980, vol. 18, no. 2, pp. 157–162. (In Russ.)
- [4] Roshchin Yu.R. On the problem of optimal reorientation of a solid body. *Kosmicheskie issledovaniya = Cosmic Research*, 1977, vol. 15, no. 6, pp. 846–852. (In Russ.)
- [5] Akukenko L.D. Asymptotic methods of optimal control. Moscow: Nauka, 1987, 368 p. Available at: <https://libcats.org/book/577488?ysclid=m1uei3rp8k286832965>. (In Russ.)
- [6] Markeev A.P. Theoretical mechanics. Moscow: Nauka, 1990, 416 p. (In Russ.)
- [7] Krotov V.F., Gurman V.I. Methods and problems of optimal control. Moscow: Nauka, 1973, 448 p. (In Russ.)
- [8] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. Moscow: Nauka, 1976, 392 p. Available at: <https://djvu.online/file/NN6TYTWzZN0kJ?ysclid=m1uewjz6ev494212948>. (In Russ.)
- [9] Petrov Yu.P. Variational methods of optimal control theory. Moscow; Leningrad: Energiya, 1965, 220 p. (In Russ.)
- [10] Krotov V.F. Discontinuous solutions of variational problems. *Russian Mathematics. (Iz. VUZ)*, 1960, no. 5, pp. 86–98. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm2307>; 1961, no. 2, pp. 75–89. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm1863>. (In Russ.)
- [11] Levskii M.V. Optimal control of spacecraft orientation with constraints on control and phase variables. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2021, no. 6, pp. 158–176. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0002338821030100>. (In Russ.)
- [12] Levskii M.V. Quaternion solution of the problem on optimum control of the orientation of a solid (spacecraft) with a combined quality criteria. *Mechanics of Solids*, 2024, no. 1, pp. 197–222. DOI: <http://doi.org/10.31857/S1026351924010115>. EDN: <https://elibrary.ru/vzsrqq>. (In Russ.)



# Динамика перепутывания атомов в трехкубитной модели Тависа — Каммингса с диполь-дипольным взаимодействием

Багров А.Р.<sup>✉</sup>, Башкиров Е.К.<sup>✉</sup>

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара,  
Российская Федерация; alexander.bagrov00@mail.ru (А.Р.); bashkirov.ek@ssau.ru (Е.К.);

Поступила: 19.07.2024

Рассмотрена: 23.08.2024

Принята: 02.09.2024

Научная статья



**Аннотация.** В статье изучена динамика попарного перепутывания трех кубитов, два из которых захвачены в резонаторе и взаимодействуют с одноименным идеальным резонатором посредством однофотонных переходов, а третий кубит находится вне резонатора. При этом учитывается диполь-дипольная связь между изолированным кубитом и кубитом в резонаторе. Нами найдено решение квантового нестационарного уравнения Шредингера для полной волновой функции системы для начальных сепарабельных и бисепарабельных состояний кубитов и теплового начального состояния поля резонатора. С помощью указанных решений вычисляется критерий перепутанности пар кубитов — отрицательность. Результаты численного моделирования критерия отрицательности показали, что включение небольшой диполь-дипольной связи между изолированным и одним из захваченных кубитов может привести к существенному перепутыванию пар кубитов для всех начальных состояний. Наблюдается переход перепутанности от одной пары атомов к другим парам атомов в процессе эволюции системы. Показано также, что для некоторых сепарабельных и бисепарабельных состояний диполь-дипольное взаимодействие может подавить эффект мгновенной смерти перепутывания.

**Ключевые слова:** кубиты; копланарный резонатор; диполь-дипольное взаимодействие; перепутывание; мгновенная смерть перепутывания; отрицательность; однофотонные переходы; тепловое поле.

## Введение

Многокубитные перепутанные состояния играют одну из ключевых ролей в квантовой информации. Они используются для различных квантовых приложений, таких как квантовые вычисления и безопасная связь [1–3]. За последние годы виден значительный прогресс в создании квантовых чипов, содержащих большое количество кубитов. В 2019 году [4] был продемонстрирован квантовый компьютер с 53 сверхпроводящими джозефсоновскими кольцами. В 2021 году был создан чип для квантового компьютера на основе 127 сверхпроводящих джозефсоновских колец [5]. На сегодняшний момент также были реализованы многокубитные устройства на ионах в магнитных ловушках, квантовых точках, содержащие более десятка кубитов [6]. Для эффективного использования квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети, используют перепутанные состояния кубитов [7]. В качестве количественной меры перепутывания кубитов предложены различные меры. Однако большая часть из них требует выполнения определенных условий, которые можно определить как набор аксиом, таких как обнуление меры для сепарабельных состояний, инвариантность относительно локальных унитарных операций и другие. Сложность расчета этих мер для произвольных состояний лежит в их незамкнутой форме. Простейшей системой, для которой на данный момент времени определены строгие количественные критерии перепутывания кубитов, является двухкубитная. Критерии Переса — Хородецких (отрицательность) [8; 9] и согласованность Вуутерса [10] являются необходимыми условиями для сепарабельности двухкубитной матрицы плотности. Для систем с большим числом кубитов такие строгие критерии отсутствуют.

В случае многокубитной системы для анализа динамики перепутывания рассматривают запутывание отдельных пар кубитов с использованием отрицательности или согласованности. При этом особое внимание уделялось строгому математическому анализу свойств и динамики перепутанных состояний в трехкубитных системах [11–17].

В некоторых работах было доказано, что диполь-дипольное взаимодействие играет существенную роль в эволюции квантовых корреляций [18–20], а также в динамике перепутанности [21]. Влияние диполь-дипольного взаимодействия на характер перепутанности между двумя идентичными двухуровневыми атомами в двухмодовом поле резонатора было исследовано в работе [22]. Результаты показали, что диполь-дипольное взаимодействие может привести к большей перепутанности между атомами, и эффект внезапной смерти также может быть ослаблен. Следует подчеркнуть, что диполь-дипольным взаимодействием атомов нельзя пренебрегать, когда расстояние между атомами меньше длины волны в резонаторе. В нашей предыдущей работе мы детально исследовали динамику перепутывания системы трех кубитов, два из которых резонансно взаимодействуют с модой квантового электромагнитного поля в резонаторе без потерь, а третий находится вне резонатора [23]. Представляет большой интерес обобщить полученные результаты на случай, когда между изолированным и захваченным кубитами присутствует диполь-дипольное взаимодействие.

В данной статье нами была исследована динамика системы, состоящей из трех идентичных кубитов, два из которых резонансно взаимодействуют с модой квантового электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных переходов, а третий кубит перемещается вне резонатора. Между изолированным и захваченным кубитами учитывается диполь-дипольное взаимодействие. Полученные решения нестационарного уравнения Шредингера были использованы для расчета параметра перепутывания пар кубитов. Для оценки количественной меры перепутывания пар кубитов нами использовался параметр Переса — Хородецких.

## 1. Модель и решение нестационарного уравнения Шредингера

Опишем интересующую нас модель. Мы рассматриваем систему из трех идентичных кубитов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Два кубита  $B$  и  $C$  заперты в резонаторе и резонансно взаимодействуют с его квантованным электромагнитным полем, а третий кубит  $A$  перемещается вне резонатора. Будем учитывать прямое диполь-дипольное взаимодействие между кубитами  $A$  и  $B$ . Тогда гамильтониан взаимодействия описанной системы в приближении вращающейся волны можно записать в виде:

$$\hat{H}_{Int} = \hbar\gamma \sum_{i=B,C} (\hat{\sigma}_i^+ \hat{a} + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}^\dagger) + \hbar J (\hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_A^- \hat{\sigma}_B^+), \quad (1)$$

где  $\hat{\sigma}_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$  и  $\hat{\sigma}_i^- = |-\rangle_i \langle +|$  — повышающий и понижающий операторы в  $i$ -м кубите,  $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$  — оператор уничтожения (рождения) фотона в моде резонатора,  $\gamma$  — константа, характеризующая кубит-фотонную связь,  $J$  — константа диполь-дипольного взаимодействия. Важно отметить, что для сверхпроводящих кубитов константа диполь-дипольного взаимодействия может превосходить константу кубит-фотонной связи. При записи гамильтониана (1) мы предположили, что кубиты  $B$  и  $C$  имеют одинаковые константы взаимодействия с резонатором.

Мы будем полагать, что кубиты в начальный момент времени приготовлены в одном из следующих сепарабельных состояний

$$|\psi_1(0)\rangle_{ABC} = |+, +, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\psi_2(0)\rangle_{ABC} = |+, -, -\rangle \quad (3)$$

или в одном из бисепарабельных состояний

$$|\psi_3(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta |+, -, +\rangle, \quad (4)$$

$$|\psi_4(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |-, +, -\rangle + \sin \theta |-, -, +\rangle, \quad (5)$$

где  $\theta$  — параметр, определяющий начальную перепутанность кубитов.

Мы предполагаем, что поле резонатора в начальный момент времени находится в тепловом однофотонном состоянии с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|, \quad (6)$$

где  $p_n$  — статистический вес, который задается следующей формулой:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}, \quad \bar{n} = \left( \exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1 \right)^{-1}.$$

Здесь  $\bar{n}$  — среднее число тепловых фотонов,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура резонатора.

Для описания динамики изучаемой модели нам нужно найти волновую функцию в последующие моменты времени для фоковских состояний поля  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и затем обобщить полученное решение для волновой функции на случай теплового поля резонатора.

Запишем явный вид волновой функции для начального сепарабельного состояния (2) в случае фотонов в моде  $n = 0$

$$|\phi(t)_{ABCF}\rangle_1 = x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle, \quad (7)$$

и в случае  $n \geq 1$

$$|\psi(t)_{ABCF}\rangle_1 = B_1(t)|+, +, +, n-1\rangle + B_2(t)|+, +, -, n\rangle + B_3(t)|+, -, +, n\rangle + B_4(t)|-, +, +, n\rangle + B_5(t)|+, -, -, n+1\rangle + B_6(t)|-, +, -, n+1\rangle + B_7(t)|-, -, +, n+1\rangle + B_8(t)|-, -, -, n+2\rangle. \quad (8)$$

Теперь, подставляя гамильтониан взаимодействия (1) и волновые функции (7), (8) в нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{Int} |\Psi(t)\rangle, \quad (9)$$

можно получить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot{x}_1(t) = \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_2(t) = Jx_3(t) + \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_3(t) = Jx_2(t) + \gamma(x_5(t) + x_6(t)), \\ i\dot{x}_4(t) = Jx_5(t) + \gamma(x_1(t) + x_2(t)), \\ i\dot{x}_5(t) = Jx_4(t) + \gamma(x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_6(t) = \gamma(x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_7(t) = \sqrt{2}\gamma(x_5(t) + x_6(t)) \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\begin{cases} i\dot{B}_1(t) = \gamma\sqrt{n}(B_2(t) + B_3(t)), \\ i\dot{B}_2(t) = \gamma(\sqrt{n}B_1(t) + \sqrt{n+1}B_5(t)), \\ i\dot{B}_3(t) = \gamma(\sqrt{n}B_1(t) + \sqrt{n+1}B_5(t)) + JB_4(t), \\ i\dot{B}_4(t) = \gamma\sqrt{n+1}(B_6(t) + B_7(t)) + JB_3(t), \\ i\dot{B}_5(t) = \gamma\sqrt{n+1}(B_2(t) + B_3(t)) + JB_6(t), \\ i\dot{B}_6(t) = \gamma(\sqrt{n+1}B_4(t) + \sqrt{n+2}B_8(t)) + JB_5(t), \\ i\dot{B}_7(t) = \gamma(\sqrt{n+1}B_4(t) + \sqrt{n+2}B_8(t)), \\ i\dot{B}_8(t) = \gamma\sqrt{n+2}(B_6(t) + B_7(t)) \end{cases} \quad (11)$$

с начальными условиями:  $x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = x_7(0) = 0$  и  $B_2(0) = 1, B_1(0) = B_3(0) = B_4(0) = B_5(0) = B_6(0) = B_7(0) = B_8(0) = 0$ . Аналогичные системы

дифференциальных уравнений можно получить и для начального бисепарабельного состояния (4), но с другими начальными условиями:  $x_1(0) = \cos \theta$ ,  $x_2(0) = \sin \theta$ ,  $x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = x_7(0) = 0$  и  $B_2(0) = \cos \theta$ ,  $B_3(0) = \sin \theta$ ,  $B_1(0) = B_4(0) = B_5(0) = B_6(0) = B_7(0) = B_8(0)$ . Теперь запишем явный вид волновой функции в последующие моменты времени для начального сепарабельного состояния (3) в случае фотонов в моде  $n = 0$

$$|\mu(t)_{ABCF}\rangle = y_1(t)|+, -, -, 0\rangle + y_2(t)|-, +, -, 0\rangle + y_3(t)|-, -, +, 0\rangle + y_4(t)|-, -, -, 1\rangle, \quad (12)$$

в случае фотонов в моде  $n = 1$

$$\begin{aligned} |\phi(t)_{ABCF}\rangle_2 = & x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + \\ & + x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

и в случае фотонов в моде  $n \geq 2$  волновая функция запишется в виде

$$\begin{aligned} |\psi(t)_{ABCF}\rangle_2 = & B_1(t)|+, +, +, n-2\rangle + B_2(t)|+, +, -, n-1\rangle + B_3(t)|+, -, +, n-1\rangle + \\ & + B_4(t)|-, +, +, n-1\rangle + B_5(t)|+, -, -, n\rangle + B_6(t)|-, +, -, n\rangle + \\ & + B_7(t)|-, -, +, n\rangle + B_8(t)|-, -, -, n+1\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив волновые функции (12)–(14) и гамильтониан системы (1) в нестационарное уравнение Шредингера (9), можно получить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot{y}_1(t) = Jy_2(t), \\ i\dot{y}_2(t) = Jy_1(t) + \gamma y_4(t), \\ i\dot{y}_3(t) = \gamma y_4(t), \\ i\dot{y}_4(t) = \gamma (y_2(t) + y_3(t)), \end{cases} \begin{cases} i\dot{x}_1(t) = \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_2(t) = Jx_3(t) + \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_3(t) = Jx_2(t) + \gamma (x_5(t) + x_6(t)), \\ i\dot{x}_4(t) = Jx_5(t) + \gamma (x_1(t) + x_2(t)), \\ i\dot{x}_5(t) = Jx_4(t) + \gamma (x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_6(t) = \gamma (x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_7(t) = \sqrt{2}\gamma (x_5(t) + x_6(t)) \end{cases} \quad (15)$$

и

$$\begin{cases} i\dot{B}_1(t) = \gamma\sqrt{n-1} (B_2(t) + B_3(t)), \\ i\dot{B}_2(t) = \gamma (\sqrt{n}B_5(t) + \sqrt{n-1}B_1(t)), \\ i\dot{B}_3(t) = \gamma (\sqrt{n}B_5(t) + \sqrt{n-1}B_1(t)) + JB_4(t), \\ i\dot{B}_4(t) = \gamma\sqrt{n} (B_6(t) + B_7(t)) + JB_3(t), \\ i\dot{B}_5(t) = \gamma\sqrt{n} (B_2(t) + B_3(t)) + JB_6(t), \\ i\dot{B}_6(t) = \gamma (\sqrt{n}B_4(t) + \sqrt{n+1}B_8(t)) + JB_5(t), \\ i\dot{B}_7(t) = \gamma (\sqrt{n}B_4(t) + \sqrt{n+1}B_8(t)), \\ i\dot{B}_8(t) = \gamma\sqrt{n+1} (B_6(t) + B_7(t)) \end{cases} \quad (16)$$

с начальными условиями:  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0$ ;  $x_4(0) = 1$ ,  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_5(0) = x_6(0) = x_7(0) = 0$  и  $B_5(0) = 1$ ,  $B_1(0) = B_2(0) = B_3(0) = B_4(0) = B_6(0) = B_7(0) = B_8(0) = 0$ . Для начального бисепарабельного состояния (5) получаются аналогичные системы, но со следующими начальными условиями:  $y_2(0) = \cos \theta$ ,  $y_3(0) = \sin \theta$ ,  $y_1(0) = y_4(0) = 0$ ;  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_7(0) = 0$ ,  $x_5(0) = \cos \theta$ ,  $x_6(0) = \sin \theta$  и  $B_6(0) = \cos \theta$ ,  $B_7(0) = \sin \theta$ ,  $B_1(0) = B_2(0) = B_3(0) = B_4(0) = B_5(0) = B_8(0) = 0$ .

Для модели, изучаемой в настоящей статье, решения систем дифференциальных уравнений (10), (11) и (15), (16) имеют чрезмерно громоздкий вид. Поэтому в данной работе мы ограничимся численным решением указанных уравнений. Зная явный вид волновых функций (7), (8) и (12)–(14), мы можем вычислить временную матрицу плотности для полной системы, состоящей из трех кубитов и моды поля, по следующей формуле:

$$\rho_{ABCF}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|, \quad (17)$$

которая для начальных состояний (2) и (4) преобразуется в следующее выражение:

$$\rho_{ABCF}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\psi(t)_{ABCF}\rangle_{11} \langle \psi(t)_{ABCF}| + p_0 |\phi(t)_{ABCF}\rangle_{11} \langle \phi(t)_{ABCF}|,$$

а для состояний (3) и (5) получаем следующую формулу:

$$\rho_{ABCF}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n |\psi(t)_{ABCF}\rangle_{22} \langle \psi(t)_{ABCF}| + p_1 |\phi(t)_{ABCF}\rangle_{22} \langle \phi(t)_{ABCF}| + p_0 |\mu(t)_{ABCF}\rangle \langle \mu(t)_{ABCF}|.$$

На данный момент в квантовой оптике количественные критерии запутывания определены только для двухкубитных систем. К ним, например, относят отрицательность [8; 9] и согласованность [10]. В данной статье мы будем вычислять критерий отрицательности пар кубитов.

Для вычисления критерия отрицательности пары кубитов  $i$  и  $j$  нужно найти двухкубитную матрицу плотности  $\rho_{ij}(t)$ , которая вычисляется следующим образом:

$$\rho_{ij}(t) = \text{Tr}_k \text{Tr}_F \rho_{ABCF} \quad (i, j, k = A, B, C; i \neq j \neq k). \quad (18)$$

## 2. Вычисление параметра перепутывания и обсуждение результатов

Мы используем стандартную формулировку критерия отрицательности

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l (\mu_{ij})_l^-, \quad (19)$$

где  $\mu_{ij}$  — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности  $\rho_{ij}^T(t)$ , которая для начальных состояний (2)–(5) имеет следующий вид:

$$\rho_{ij}^T(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{ij} & 0 & 0 & (\rho_{23}^{ij})^* \\ 0 & \rho_{22}^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{ij} & 0 \\ \rho_{23}^{ij} & 0 & 0 & \rho_{44}^{ij} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тогда выражение (19) для критерия отрицательности примет следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\rho_{44}^{ij} - \rho_{11}^{ij})^2 + 4|\rho_{23}^{ij}|^2} - \rho_{11}^{ij} - \rho_{44}^{ij}. \quad (21)$$

Для начальных состояний (2), (4) и кубитов  $A$  и  $B$  элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [ |B_1(t)|^2 + |B_2(t)|^2 ] + p_0 |x_1(t)|^2, \\ \rho_{22}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [ |B_3(t)|^2 + |B_5(t)|^2 ] + p_0 [ |x_2(t)|^2 + |x_4(t)|^2 ], \\ \rho_{33}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [ |B_4(t)|^2 + |B_6(t)|^2 ] + p_0 [ |x_3(t)|^2 + |x_5(t)|^2 ], \\ \rho_{44}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [ |B_7(t)|^2 + |B_8(t)|^2 ] + p_0 [ |x_6(t)|^2 + |x_7(t)|^2 ], \end{aligned}$$

$$\rho_{23}^{AB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_5(t)B_6^*(t) + B_3(t)B_4^*(t)] + p_0 [x_2(t)x_3^*(t) + x_4(t)x_5^*(t)].$$

Для начальных состояний (2), (4) и кубитов  $A$  и  $C$  элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_3(t)|^2] + p_0 |x_2(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_5(t)|^2] + p_0 [|x_1(t)|^2 + |x_4(t)|^2],$$

$$\rho_{33}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_4(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_0 [|x_3(t)|^2 + |x_6(t)|^2],$$

$$\rho_{44}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_6(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_0 [|x_5(t)|^2 + |x_7(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_2(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_7^*(t)] + p_0 [x_1(t)x_3^*(t) + x_4(t)x_6^*(t)].$$

Для начальных состояний (2), (4) и кубитов  $B$  и  $C$  элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_4(t)|^2] + p_0 |x_3(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_6(t)|^2] + p_0 [|x_1(t)|^2 + |x_5(t)|^2],$$

$$\rho_{33}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_3(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_0 [|x_2(t)|^2 + |x_6(t)|^2],$$

$$\rho_{44}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_5(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_0 [|x_4(t)|^2 + |x_7(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_2(t)B_3^*(t) + B_6(t)B_7^*(t)] + p_0 [x_1(t)x_2^*(t) + x_5(t)x_6^*(t)].$$

Для начальных состояний (3), (5) и кубитов  $A$  и  $B$  элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_2(t)|^2] + p_1 |x_1(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_3(t)|^2 + |B_5(t)|^2] + p_1 [|x_2(t)|^2 + |x_4(t)|^2] + p_0 |y_1(t)|^2,$$

$$\rho_{33}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_4(t)|^2 + |B_6(t)|^2] + p_1 [|x_3(t)|^2 + |x_5(t)|^2] + p_0 |y_2(t)|^2,$$

$$\rho_{44}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_7(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_1 [|x_6(t)|^2 + |x_7(t)|^2] + p_0 [|y_3(t)|^2 + |y_4(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_3(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_6^*(t)] + p_1 [x_4(t)x_5^*(t) + x_2(t)x_3^*(t)] + p_0 y_1(t)y_2^*(t).$$

Для начальных состояний (3), (5) и кубитов  $A$  и  $C$  элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_3(t)|^2] + p_1 |x_2(t)|^2, \\ \rho_{22}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_5(t)|^2] + p_1 [|x_1(t)|^2 + |x_4(t)|^2] + p_0 |y_1(t)|^2, \\ \rho_{33}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_4(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_1 [|x_3(t)|^2 + |x_6(t)|^2] + p_0 |y_3(t)|^2, \\ \rho_{44}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_6(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_1 [|x_5(t)|^2 + |x_7(t)|^2] + p_0 [|y_2(t)|^2 + |y_4(t)|^2], \\ \rho_{23}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_2(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_7^*(t)] + p_1 [x_4(t)x_6^*(t) + x_1(t)x_3^*(t)] + p_0 y_1(t)y_3^*(t). \end{aligned}$$

Для начальных состояний (3), (5) и кубитов  $B$  и  $C$  элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_4(t)|^2] + p_1 |x_3(t)|^2, \\ \rho_{22}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_6(t)|^2] + p_1 [|x_1(t)|^2 + |x_5(t)|^2] + p_0 |y_2(t)|^2, \\ \rho_{33}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_3(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_1 [|x_2(t)|^2 + |x_6(t)|^2] + p_0 |y_3(t)|^2, \\ \rho_{44}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_5(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_1 [|x_4(t)|^2 + |x_7(t)|^2] + p_0 [|y_1(t)|^2 + |y_4(t)|^2], \\ \rho_{23}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_2(t)B_3^*(t) + B_6(t)B_7^*(t)] + p_1 [x_5(t)x_6^*(t) + x_1(t)x_2^*(t)] + p_0 y_2(t)y_3^*(t). \end{aligned}$$

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости критерия отрицательности  $\varepsilon_{ij}$  от приведенного времени  $\gamma t$  для начального сепарабельного состояния (2) и различных значений константы диполь-дипольного взаимодействия изображены на рис. 1. Среднее число тепловых фотонов выбрано равным  $\bar{n} = 0.1$ . Важно отметить, что для данной модели в случае отсутствия диполь-дипольного взаимодействия перепутывание между кубитами  $A$  и  $B$  (и  $A$  и  $C$ ) не появляется в процессе эволюции для всех начальных состояний кубитов (2)–(5). Однако учет даже небольшого значения константы диполь-дипольного взаимодействия приводит к существенному перепутыванию между кубитами  $A$  и  $B$  (и  $A$  и  $C$ ) в последующие моменты времени. Из всех графиков хорошо видно, что влияние диполь-дипольного взаимодействия не монотонно. Также наблюдается переход перепутанности от одной пары атомов к другим парам атомов в процессе эволюции. Включение диполь-дипольной связи между кубитами  $A$  и  $B$  не исключает эффект мгновенной смерти перепутывания для всех возможных пар кубитов. Мгновенной смертью перепутывания называется исчезновение перепутывания кубитов на временах меньше времени диссипации энергии, фазы и т. д. На рис. 2 мы строим аналогичные временные зависимости критерия отрицательности  $\varepsilon_{ij}$  от приведенного времени  $\gamma t$ , но для начального сепарабельного состояния (3) при среднем числе тепловых фотонов  $\bar{n} = 0.1$ . Все выводы, описанные в предыдущем случае, справедливы и для начального сепарабельного состояния (3). Однако есть существенное различие в поведении динамики перепутывания между кубитами  $A$  и  $B$ . Из рис. 2, *a* хорошо видно, что включение диполь-дипольной связи приводит к полному подавлению эффекта мгновенной смерти перепутывания. На рис. 3 показаны временные зависимости отрицательности  $\varepsilon_{ij}$  от приведенного времени  $\gamma t$  для начального



бисепарабельного состояния (4) при начальном параметре  $\theta = \pi/4$  и среднем числе тепловых фотонов  $\bar{n} = 0.1$ . Из графиков хорошо видно, что относительно небольшое значение диполь-дипольного взаимодействия  $J = 0.2$  приводит к перепутыванию кубитов  $A$  и  $B$  (и  $B$  и  $C$ ) и не приводит к существенным изменениям в динамике перепутывания кубитов, находящихся внутри резонатора, в отличие от сепарабельных состояний кубитов (2) и (3). Последующее увеличение диполь-дипольной связи приводит к увеличению максимальной степени перепутывания кубитов  $A$  и  $B$  (и  $B$  и  $C$ ) и к подавлению перепутанности между кубитами  $B$  и  $C$ . Также видно, что включение диполь-дипольного взаимодействия не приводит к подавлению эффекта мгновенной смерти перепутывания для кубитов  $A$  и  $B$ . На рис. 4 мы показываем аналогичные зависимости, но для начального бисепарабельного состояния кубитов (5). В принципе поведение отрицательности для состояния (5) аналогично поведению отрицательности для состояния (4). Различия заключаются в следующем: во-первых, для попарного перепутывания кубитов  $A$  и  $B$  диполь-дипольное взаимодействие может полностью исключить эффект внезапной смерти перепутывания. Во-вторых, перепутывание между кубитами  $A$  и  $B$  (и  $A$  и  $C$ ) не возникает при слабом диполь-дипольном взаимодействии в отличие от начального бисепарабельного состояния (4), у которого перепутывание пар кубитов возникает и при  $J = 0.2$ .

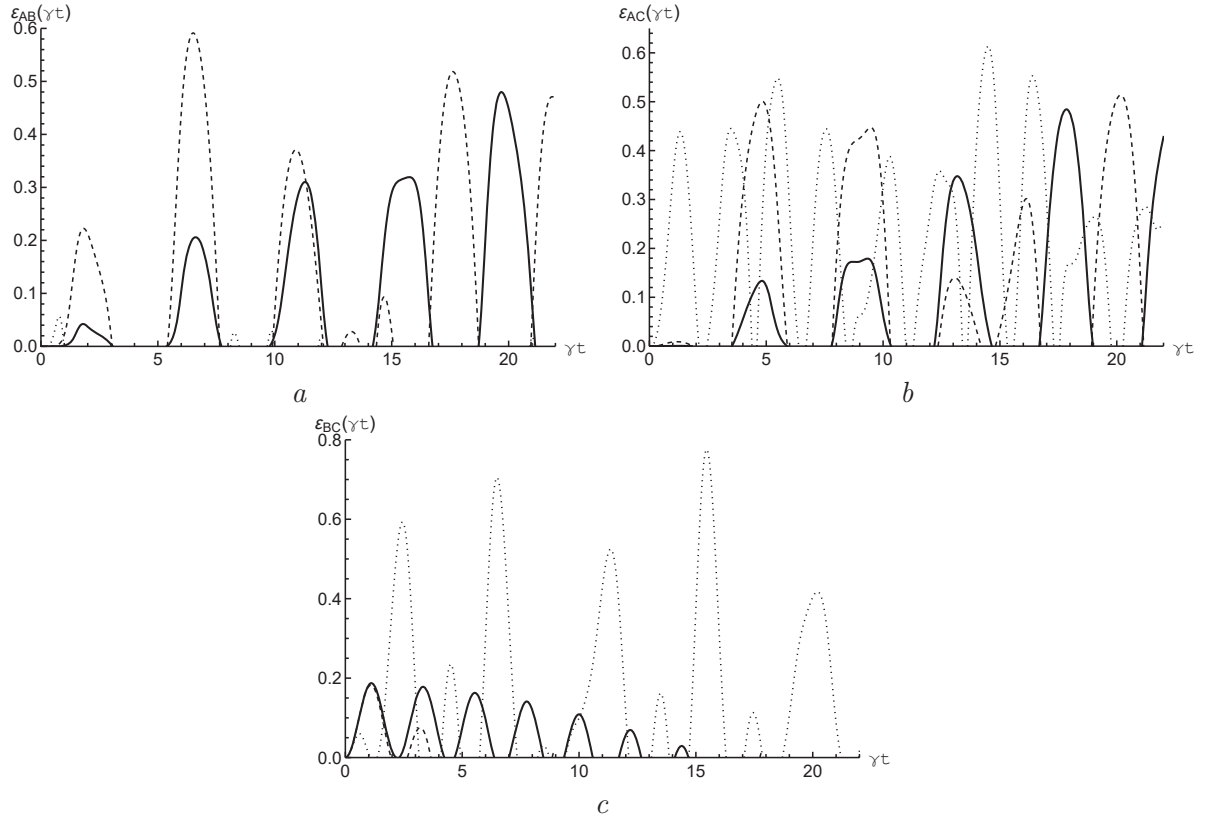


Рис 1. Критерий отрицательности  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) и  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) построен как функция приведенного времени  $\gamma t$  для начального сепарабельного состояния вида (2). Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 0.1$ . Константа диполь-дипольного взаимодействия  $J$ :  $J = 0.05$  (черная сплошная линия),  $J = 0.2$  (красная пунктирная линия),  $J = 2$  (синяя точечная линия)

Fig 1. Negativity criterion  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) and  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) are plotted as a function of the scaled time  $\gamma t$  for the initial separable state of the form (2). The mean number of thermal photons  $\bar{n} = 0.1$ . The constant of the dipole-dipole interaction  $J$ :  $J = 0.05$  (black solid line),  $J = 0.2$  (red dashed line),  $J = 2$  (blue dotted line)

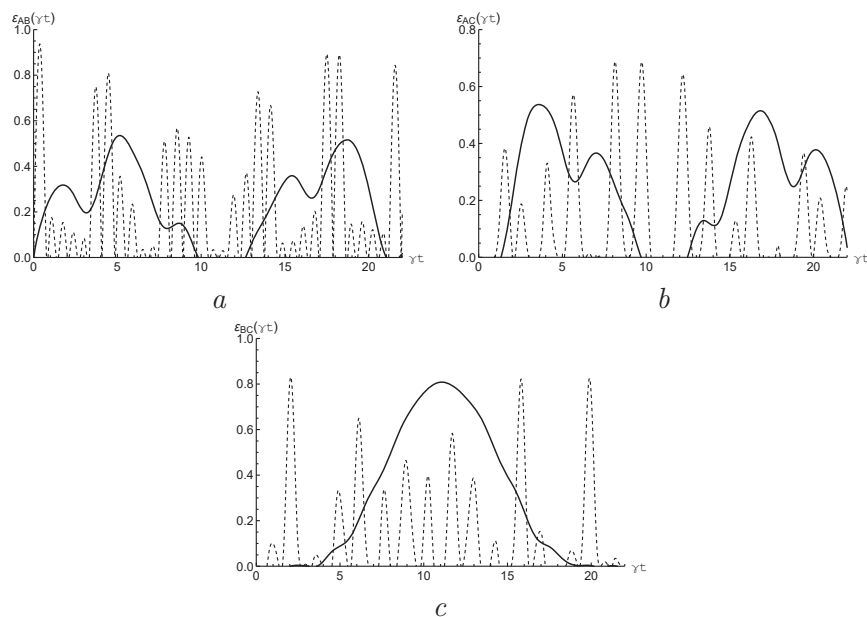


Рис 2. Критерий отрицательности  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) и  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) построен как функция приведенного времени  $\gamma t$  для начального сепарабельного состояния вида (3). Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 0.1$ . Константа диполь-дипольного взаимодействия  $J$ :  $J = 0.2$  (черная сплошная линия),  $J = 2$  (красная пунктирная линия)

Fig 2. Negativity criterion  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) and  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) are plotted as a function of the scaled time  $\gamma t$  for the initial separable state of the form (3). The mean number of thermal photons  $\bar{n} = 0.1$ . The constant of the dipole-dipole interaction  $J$ :  $J = 0.2$  (black solid line),  $J = 2$  (red dashed line)

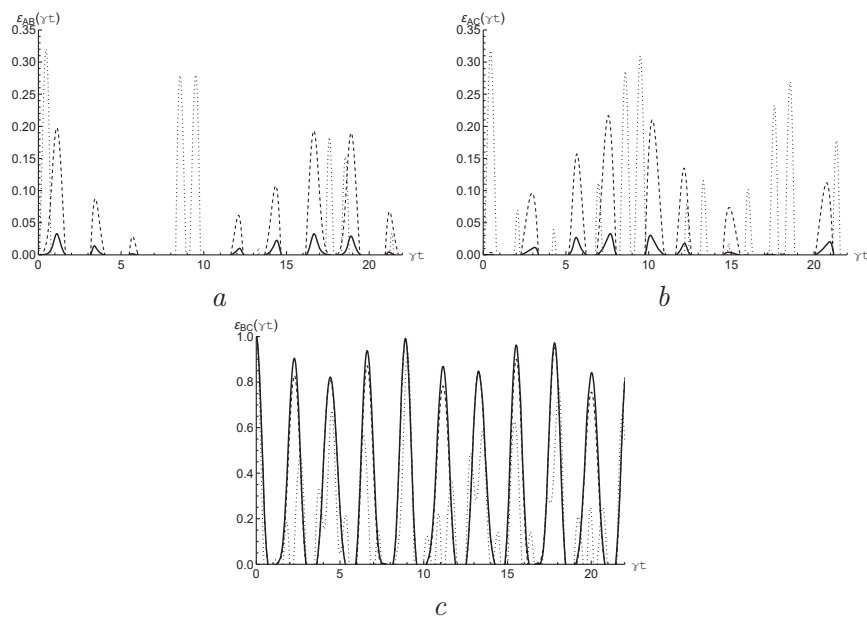


Рис 3. Критерий отрицательности  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) и  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) построен как функция приведенного времени  $\gamma t$  для начального бисепарабельного состояния вида (4). Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 0.1$ . Константа диполь-дипольного взаимодействия  $J$ :  $J = 0.05$  (черная сплошная линия),  $J = 0.2$  (красная пунктирная линия),  $J = 2$  (синяя точечная линия)

Fig 3. Negativity criterion  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) and  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) are plotted as a function of the scaled time  $\gamma t$  for the initial biseparable state of the form (4). The mean number of thermal photons  $\bar{n} = 0.1$ . The constant of the dipole-dipole interaction  $J$ :  $J = 0.05$  (black solid line),  $J = 0.2$  (red dashed line),  $J = 2$  (blue dotted line)

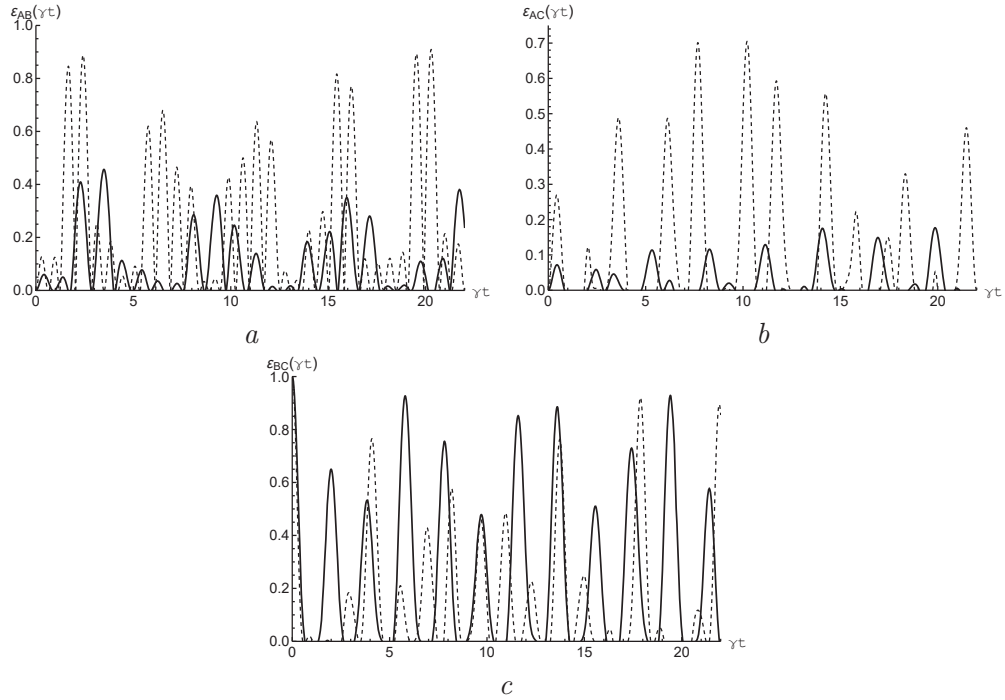


Рис 4. Критерий отрицательности  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) и  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) построен как функция приведенного времени  $\gamma t$  для начального бисепарабельного состояния вида (5). Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 0.1$ . Константа диполь-дипольного взаимодействия  $J$ :  $J = 1$  (черная сплошная линия),  $J = 2$  (красная пунктирная линия).

Fig 4. Negativity criterion  $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$  (a),  $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$  (b) and  $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$  (c) are plotted as a function of the scaled time  $\gamma t$  for the initial biseparable state of the form (5). The mean number of thermal photons  $\bar{n} = 0.1$ . The constant of the dipole-dipole interaction  $J$ :  $J = 1$  (black solid line),  $J = 2$  (red dashed line).

## Выводы

В данной статье мы исследовали динамику системы трех идентичных кубитов, один из которых находится вне резонатора, а два других захвачены в резонаторе и резонансно взаимодействуют с модой теплового поля этого резонатора. Предполагается, что между изолированным кубитом и захваченным кубитом в резонаторе есть диполь-дипольная связь. В центре нашего внимания были два различных типа начальных состояний кубитов: сепарабельные и бисепарабельные. Результаты компьютерного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что даже небольшое значение диполь-дипольного взаимодействия может индуцировать перепутывание кубитов для пар, состоящих из изолированного и захваченного кубитов, для всех начальных состояний. В случае отсутствия диполь-дипольной связи перепутывания между парами кубитов не возникает для выбранных состояний. Для некоторых начальных состояний диполь-дипольное взаимодействие приводит к полному подавлению эффекта мгновенной смерти перепутывания. Таким образом, диполь-дипольное взаимодействие между кубитами может рассматриваться как эффективный механизм контроля и управления перепутывания кубитов в резонаторах.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Цитирование.** Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика перепутывания атомов в трехкубитной модели Тависа — Каммингса с диполь-дипольным взаимодействием // Вестник Самар-

ского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 89–103. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-89-103.

© Багров А.Р., Башкиров Е.К., 2024

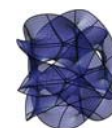
*Багров Александр Романович* (alexander.bagrov00@mail.ru) – магистр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Башкиров Евгений Константинович* (bashkirov.ek@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Литература

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // Reports on Progress in Physics. 2011. Vol. 74, number 10. P. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // Reviews of Modern Physics. 2013. Vol. 85, issue 2. P. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // Nature. 2019. Vol. 574. P. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race // Nature. 2021. Vol. 599. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation // Reviews of Modern Physics. 2014. Vol. 86, issue 1. P. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80, number 10. P. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, issue 8. P. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, issues 1–2, P. 333–339. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Woiters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, issue 10. P. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2012. Vol. 01, no. 06. P. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.

- [12] Liu H.P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis Cummings Model Induced by a Thermal Field // Communications in Theoretical Physics. 2005. Vol. 43, issue 3. P. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // Physical Review A. 2000. Vol. 62, issue 6. P. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // The European Physical Journal D. 2008. Vol. 48, issue 3. P. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2010. Vol. 43. P. 095501. URL: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement // Journal of Mathematical Physics. 2017. Vol. 58, issue 10. P. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups, SU(2) and SU(4) // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2019. Vol. 10, issue 7. P. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 2005. Vol. 39, number 11. P. 2619. DOI: <http://doi.org/10.1088/0953-4075/39/11/C01>.
- [19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states // International Journal of Quantum Information. 2017. Vol. 15, number 07. P. 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [20] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // Laser Physics. 2009. Vol. 19, issue 3. P. 525–530. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [21] Valizadeh S., Tavassoly M.K., Yazdanpanah N. Stability of various entanglements in the interaction between two two-level atoms with a quantized field under the influences of several decay sources // Indian Journal of Physics. 2018. Vol. 92, issue 8. P. 955–968. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12648-018-1173-9>.
- [22] Zhang G.-f., Chen Z.-y. The entanglement character between atoms in the non-degenerate two photons Tavis-Cummings model // Optics Communications. 2007. Vol. 275, issue 1. P. 274–277. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2007.03.022>.
- [23] Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика теплового перепутывания пар кубитов в трехкубитной модели Тависа-Каммингса // Журнал технической физики. 2024. Т. 94, вып. 3. С. 341–350. DOI: <https://doi.org/10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23>.



# Dynamics of entanglement of qubits in the three-qubit Tavis — Cummings model with dipole-dipole interaction

Bagrov A.R. , Bashkirov E.K. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; alexander.bagrov00@mail.ru (A.R.); bashkirov.ek@ssau.ru (E.K.);

Received: 19.07.2024

Revised: 23.08.2024

Accepted: 02.09.2024

Scientific article



**Abstract.** The article studies the dynamics of pairwise entanglement of three qubits, two of which are trapped in a resonator and interact with a single-mode ideal resonator through single-photon transitions, and the third qubit is outside the resonator. This takes into account the dipole-dipole coupling between the isolated qubit and the qubit in the resonator. We have found a solution to the quantum nonstationary Schrodinger equation for the total wave function of the system for the initial separable and biseparable states of qubits and the thermal initial state of the resonator field. Using these solutions, the criterion of entanglement of qubit pairs - negativity is calculated. The results of numerical simulation of the negativity criterion have shown that the including of a small dipole-dipole coupling between an isolated and one of the trapped qubits can lead to significant entanglement of qubit pairs for all initial states. There is a transition of entanglement from one pair of atoms to other pairs of atoms during the evolution of the system. It is also shown that for some separable and biseparable states, the dipole-dipole interaction can suppress the effect of sudden death of entanglement.

**Key words:** qubits; coplanar resonator; dipole-dipole interaction; entanglement; sudden death of entanglement; negativity; one-photon transitions; thermal field.

**Information about the conflict of interests:** the authors and reviewers declare no conflict of interest.

**Citation.** Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of entanglement of qubits in the three-qubit Tavis — Cummings model with dipole-dipole interaction. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 89–103. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-89-103. (In Russ.)

© Bagrov A.R., Bashkirov E.K., 2024

Alexander R. Bagrov (alexander.bagrov00@mail.ru) – master of Physical and Mathematical Sciences of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Eugene K. Bashkirov (bashkirov.ek@ssau.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, vol. 74, number 10, p. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 2013, vol. 85, issue 2, pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.

- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vols. 718–719, pp. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 2019, vol. 574, pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race. *Nature*, 2021, vol. 599. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation. *Reviews of Modern Physics*, 2014, vol. 86, issue 1, pp. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, pp. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issues 1–2, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, issue 10, pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2012, vol. 01, no. 06, pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [12] Liu P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis — Cummings Model Induced by a Thermal Field. *Communications in Theoretical Physics*, 2005, vol. 43, issue 3, pp. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 2000, vol. 62, issue 6, p. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *The European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, issue 3, pp. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2010, vol. 43, p. 095501. Available at: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 2017, vol. 58, issue 10, p. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups, SU(2) and SU(4). *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2005, vol. 39, number 11, p. 2619. DOI: <http://doi.org/10.1088/0953-4075/39/11/C01>.

- [19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states. *International Journal of Quantum Information*, 2017, vol. 15, number 07, p. 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [20] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise. *Laser Physics*, 2009, vol. 19 (3), pp. 525–530. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [21] Valizadeh S., Tavassoly M.K., Yazdanpanah N. Stability of various entanglements in the interaction between two two-level atoms with a quantized field under the influences of several decay sources. *Indian Journal of Physics*, 2018, vol. 92, issue 8, pp. 955–968. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12648-018-1173-9>.
- [22] Zhang G.-f., Chen Z.-y. The entanglement character between atoms in the non-degenerate two photons Tavis-Cummings model. *Optics Communications*, 2007, vol. 275, issue 1, pp. 274–277. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2007.03.022>.
- [23] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of thermal entanglement of qubit pairs in the three-qubit Tavis-Cummings model. *Journal of Technical Physics*, 2024, vol. 94, issue 3, pp. 341–350. DOI: <https://doi.org/10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23>. (In Russ.)



## ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <https://journals.ssau.ru/est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются через сайт <https://journals.ssau.ru/est>.
  2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.
  3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.
  4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.
  5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.
  6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.
  7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.
  8. Текст статьи должен быть подготовлен с использованием стиля "VesSamUn.sls". Стиль "VesSamUn.sls" и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций  $\TeX$  крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами  $\LaTeX$ . Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.
  9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:
    - а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("--")<sup>1</sup>, тройной дефис ("---")<sup>2</sup>. Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;
    - б) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;
    - в) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;
    - г) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11–15 см по горизонтали и 5–15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загораживающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;
    - д) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;
    - е) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;
    - ж) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;
    - з) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;
    - и) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.
- Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы. Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.
- В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

<sup>1</sup>Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

<sup>2</sup>Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`