



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

VESTNIK

OF SAMARA UNIVERSITY

NATURAL SCIENCE SERIES

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

ТОМ 30 • №2 • 2024 ГОД

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Подписной индекс 80307

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Математика*
- *Механика*
- *Математическое моделирование*

ТОМ 30 • № 2 • 2024 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru DOAJ zbMATH MathSciNet
Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень
ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ
Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета»,
с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural
Science Series»

Выходит 4 раза в год Т. 30, № 2, 2024

Главный редактор:

А.Б. Прокофьев, д-р тех. наук, доц., зав. кафедрой теории двигателей летательных аппаратов имени В.П. Лукачева, первый проректор - проректор по научно-исследовательской работе (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.А. Мурзинова

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель и учредитель: Самарский университет

Адрес издателя и учредителя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Периодическое печатное издание, журнал, зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

Подписной индекс в Объединенном интернет-каталоге «Пресса России» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 10.06.2024. Дата выхода в свет 18.06.2024

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 12.

Тираж 200 экз. (первый завод — 25 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Н. Аяззов, д-р физ.-мат. наук, директор (Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Самара, РФ), профессор кафедры физики (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, РФ)

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Ивазник, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

С.А. Лычев, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Механики технологических процессов (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

Константин Панкрашикин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пульжина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

К.Б. Устинов, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Геомеханики (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2024

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Subscription Index 80307

**VESTNIK
SAMARSKOGO UNIVERSITETA
ESTESTVENNONAUCHNAYA SERIYA**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mechanics*
- *Mathematical
Modelling*

VOL. 30 • № 2 • 2024

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru DOAJ zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 — "Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series"
It is published 4 times a year V. 30, № 2, 2024

Chief editor:

A.B. Prokofiev, Dr. of Engineering Sci., associate professor, head of the Department of Theory of Aircraft Engines named after V.P. Lukacheva, first vice-rector II vice-rector for research (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, RF)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.A. Murzinova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher and Founder: Samara National Research University

Address publisher and founder:

34, Moskovskoye shosse,

Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial stuff: 1, Akademika Pavlova Street, Samara, 443011, Samara region, Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС 77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the United catalog of Internet «Press of Russia» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 10.06.2024.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 12.

Circulation 200 copies (first printing – 25 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.N. Azyazov, Dr. of Phys.-Math. Sci., head (Samara Branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia), prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF)

S.A. Lychev, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Mechanics of Technological Processes (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay, France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Differential Equations and Control Theory, prof. of the Department of Engineering Cybernetics (Samara National Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov State University, Saratov, RF)

K.B. Ustinov, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Geomechanics (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

© Samara University, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

| | |
|--|-----------|
| Баданова С.А. О пространстве де Бранжа, связанном с дзета-функцией Римана | 7 |
| Долгова Е.С. Асимптотика критических условий в одной модели горения | 12 |
| Кипкаева О.С. Об одном сценарии смены устойчивости инвариантных многообразий сингулярно возмущенных систем | 20 |
| Пулькина Л.С. Задача с нелокальными интегральными условиями I рода для уравнения в частных производных четвертого порядка | 30 |

Механика

| | |
|--|-----------|
| Суслов А.В., Ярославкина Е.Е. Исследование влияния температурных напряжений на собственные колебания пластин | 45 |
| Фомченкова М.А., Степанова Л.В. Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения | 54 |

Математическое моделирование

| | |
|---|-----------|
| Агаев А.Р., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П. Расчет величины экранирования при высокочастотном воздействии на нефтяной пласт | 67 |
| Федоров К.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., Изотов А.А., Кобяшев А.В. Решение обратной задачи интерпретации результатов индикаторных исследований нефтяных пластов при наличии каналов низкого фильтрационного сопротивления | 81 |
| <i>Требования к оформлению статей</i> | 95 |

CONTENTS

Mathematics

| | |
|--|----|
| Badonova S.A. On a de Branges space related to the Riemann zeta function..... | 7 |
| Dolgova E.S. Asymptotics of critical conditions in one combustion model | 12 |
| Kipkaeva O.S. On one scenario for changing the stability of invariant manifolds of singularly perturbed systems | 20 |
| Pulkina L.S. A problem with nonlocal integral 1st kind conditions for 4th order partial differential equation | 30 |

Mechanics

| | |
|---|----|
| Suslov A.V., Yaroslavkina E.E. Study of the influence of temperature stresses to natural vibrations of the plates | 45 |
| Fomchenkova M.A., Stepanova L.V. Procedure of the overdeterministic method for finding the field expansion coefficients at the crack tip based on a finite element solution for the stress tensor components. | 54 |

Mathematical Modelling

| | |
|---|----|
| Agaev A.R., Gilmanov A.Ya., Shevelyov A.P. Calculation of the shielding at microwave impact on oil reservoirs | 67 |
| Fedorov K.M., Gilmanov A.Ya., Shevelyov A.P., Izotov A.A., Kobyashev A.V. Solution of the inverse problem of tracer tests interpretation results for oil reservoirs in the presence of low resistance channels | 81 |

| | |
|---|----|
| <i>Requirements to the design of articles</i> | 95 |
|---|----|

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS



Краткое сообщение

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11

УДК 517.98

Дата: поступления статьи: 15.02.2024
после рецензирования: 17.03.2024
принятия статьи: 15.05.2024

С.А. Баданова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация;
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

E-mail: badanova0116@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4477-9572>

О ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ БРАНЖА, СВЯЗАННОМ
С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА¹

АННОТАЦИЯ

В недавней статье В.В. Капустина было построено пространство де Бранжа, элементом которого является выражение, содержащее ζ -функцию Римана; были найдены каноническая система с диагональным гамильтонианом и обобщенное преобразование Фурье, соответствующие пространству. В данном кратком сообщении рассматривается аналогичное пространство де Бранжа с некоторыми предпочтительными изменениями и приводятся связанные с ним формулы; также выписываются гамильтониан и обобщенное преобразование Фурье.

Ключевые слова: пространство де Бранжа; ζ -функция Римана; каноническая система с диагональным гамильтонианом; обобщенное преобразование Фурье.

Цитирование. Баданова С.А. О пространстве де Бранжа, связанном с дзета-функцией Римана // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 7–11. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Баданова С.А., 2024

Светлана Алексеевна Баданова — студент механико-математического факультета, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34; Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Одним из важных положений теории пространств де Бранжа является их связь с каноническими системами — парами дифференциальных уравнений первого порядка, которые задаются гамильтонианом на интервале вещественной прямой. Такая связь осуществляется обобщенным преобразованием Фурье и позволяет проводить спектральный анализ дифференциальных операторов с помощью пространств де Бранжа. Пространства де Бранжа определяются их структурными функциями, представляющими собой целые функции из класса Эрмита — Билера; подпространства де Бранжа образуют упорядоченную по включению цепочку подпространств. Структурные функции подпространств де Бранжа могут быть выписаны через решения канонической системы. Таким образом, одной из важных задач при изучении пространств де Бранжа является нахождение канонической системы и обобщенного преобразования Фурье, соответствующих пространству.

¹Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022).

В статье [1] построено пространство де Бранжа, элементом которого является кси-функция Римана:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \pi^{-s/2} s(s-1) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

где ζ — дзета-функция Римана, — деленная на некоторый полином; найдены гамильтониан канонической системы, соответствующей пространству, и оператор, являющийся обобщенным преобразованием Фурье канонической системы, изометрически отображающий гильбертово пространство канонической системы на пространство де Бранжа. В.В. Капустин предложил автору найти пространство де Бранжа, которому соответствует аналогичная каноническая система с некоторыми предпочтительными изменениями. В данном кратком сообщении представлены полученные результаты и отражающие их формулы.

Приведем необходимые сведения из теории пространств де Бранжа. Подробнее некоторые утверждения и их доказательства рассматриваются в работе [1]. Теория пространств де Бранжа и канонических систем с гамильтонианом, суммируемым вблизи левого конца интервала, изложена, например, в работе [2]. Несмотря на то что в данном кратком сообщении рассматривается каноническая система с гамильтонианом, не суммируемым вблизи левого конца интервала, многие утверждения из работы [2] выполняются без существенных изменений.

Классом Эрмита — Билера \mathcal{HB} называется множество целых функций \mathcal{E} в комплексной плоскости, для которых выполнено неравенство

$$|\mathcal{E}(\bar{z})| < |\mathcal{E}(z)|$$

при всех z из верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. *Пространством де Бранжа* $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ со структурной функцией $\mathcal{E} \in \mathcal{HB}$ называется гильбертово пространство, состоящее из целых функций F таких, что функции $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^{\sharp}}{\mathcal{E}}$ принадлежат пространству Харди H^2 в верхней полуплоскости (здесь и далее $F^{\sharp}(z) = \overline{F(\bar{z})}$). Нормы функций $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^{\sharp}}{\mathcal{E}}$ совпадают в пространстве H^2 и определяют норму функции F в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Каждому пространству де Бранжа соответствует каноническая система, которая задается гамильтонианом на интервале вещественной прямой. *Гамильтониан* H представляет собой локально суммируемую матричнозначную функцию на интервале (a, b) вещественной прямой, значениями которой являются вещественные матрицы размера 2×2 такие, что $H(t) \geq 0$ почти всюду.

Будем рассматривать гамильтониан H на интервале (a, b) вещественной прямой, который дополнительно обладает свойствами i–iv:

i. Гамильтониан является диагональным, то есть представим в виде

$$H(t) = \begin{pmatrix} w_+(t) & 0 \\ 0 & w_-(t) \end{pmatrix}.$$

ii. Каждая из функций w_+ , w_- отлична от нуля почти всюду.

iii. Гамильтониан суммируем вблизи правого конца b интервала.

iv. Вблизи левого конца a интервала гамильтониан не суммируем, но выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\int_a^x w_+(t) dt \times \int_x^b w_-(t) dt \right) = 0.$$

Канонической системой называется матричное дифференциальное уравнение $J\dot{f}(t) = zH(t)f(t)$ на интервале (a, b) , где $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$ — векторнозначная функция от переменной t , $z \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. В случае диагонального гамильтониана H каноническая система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -\dot{f}_- = z w_+ f_+, \\ \dot{f}_+ = z w_- f_-. \end{cases}$$

Пространством канонической системы называется гильбертово пространство, состоящее из векторнозначных функций f на интервале (a, b) ; норма в пространстве определяется по формуле

$$\|f\|^2 = \int_a^b \langle H(t)f(t), f(t) \rangle dt,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{C}^2 . (Если свойство ii не выполнено, дополнительно требуется факторизация пространства). В случае гамильтониана H , обладающего свойствами i, ii, пространство может быть представлено в виде прямой суммы $L_{w_+}^2 \oplus L_{w_-}^2$ пространств, для которых диагональные элементы w_+ , w_- гамильтониана являются весовыми функциями.

Пусть $A(t, z)$, $B(t, z)$ — целые функции при каждом t . Предположим, что для любого z функции A и B определяют решение канонической системы и выполнено условие

$$A(t, z) \rightarrow 1, \quad B(t, z) \rightarrow 0 \tag{1}$$

при $t \rightarrow a$. В случае диагонального гамильтониана H существование такого решения обеспечивается свойством iv. Данное утверждение получено как сообщение от Р.В. Романова. Приведем схему доказательства. Не умаляя общности, можно полагать $\text{tr}H = 1$. Тогда несуммируемость гамильтониана H вблизи левого конца a интервала равносильна тому, что $a = -\infty$; свойство iv переписывается в

виде $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \int_{-\infty}^x w_+(t) dt = 0$. Функция A может быть найдена как неподвижная точка отображения $f_+ \mapsto 1 - z^2 \int_{-\infty}^x w_-(t) \int_{-\infty}^t w_+(\tau) f_+(\tau) d\tau dt$, которое является сжимающим на пространстве $C(-\infty, b)$ при

достаточно большом по модулю отрицательном $b \in \mathbb{R}$ с нормой $\|f_+\|_C = \sup_{x \in (-\infty, b)} |f_+(x)|$. Тогда функция B находится по A из уравнения канонической системы. Можно показать, что для таких функций A и B условие (1) выполнено, кроме того, $A^\sharp = A$, $B^\sharp = B$. Функции A и B могут быть найдены как целые функции при каждом t .

При каждом t функция $E(t, z) = A(t, z) + iB(t, z)$ как функция от z принадлежит классу Эрмита — Билера и потому является структурной функцией некоторого пространства де Бранжа. Оператор V :

$$\begin{aligned} (Vf)(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \left\langle H(t)f(t), \begin{pmatrix} A(t, \bar{z}) \\ B(t, \bar{z}) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b (f_+(t)A(t, z)w_+(t) + f_-(t)B(t, z)w_-(t)) dt, \end{aligned} \tag{2}$$

определяет обобщенное преобразование Фурье канонической системы. Он изометрически отображает пространство канонической системы на пространство де Бранжа со структурной функцией $E(b, z)$. Существование такого пространства обеспечивается свойством iii. Отметим, что утверждение также имеет место, если вместо интервала (a, b) рассматривать интервал (a, c) , где $c \in (a, b)$. При разных значениях c получается упорядоченная по включению цепочка подпространств де Бранжа.

Будем рассматривать каноническую систему на интервале $(-\infty, -4\pi)$ с гамильтонианом H :

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{-t} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-t}}{-t} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что для гамильтониана выполняются свойства i–iv. Отметим, что каноническую систему с таким гамильтонианом можно определить на всей отрицательной полуоси, но рассматривается только ее сужение на указанный интервал.

Обозначим $\alpha = \alpha(z) = \frac{1}{2} - iz$.

Теорема.

1. Функции

$$\begin{aligned} A(t, z) &= \sqrt{\frac{-t}{4\pi}} e^{-\frac{t}{2}} \left(K_\alpha \left(-\frac{t}{2} \right) + K_{\alpha-1} \left(-\frac{t}{2} \right) \right), \\ B(t, z) &= -i \sqrt{\frac{-t}{4\pi}} e^{\frac{t}{2}} \left(K_\alpha \left(-\frac{t}{2} \right) - K_{\alpha-1} \left(-\frac{t}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

определяют решение канонической системы на интервале $(-\infty, -4\pi)$ с гамильтонианом H , где K_α — модифицированная функция Бесселя. Кроме того, для функций A и B выполнено условие (1).

2. Оператор V , определяющий обобщенное преобразование Фурье канонической системы, имеет вид

$$\begin{aligned} (Vf)(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-4\pi} \left[f_+(t) \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{-t}} \left(K_\alpha \left(-\frac{t}{2} \right) + K_{\alpha-1} \left(-\frac{t}{2} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - i f_-(t) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{-t}} \left(K_\alpha \left(-\frac{t}{2} \right) - K_{\alpha-1} \left(-\frac{t}{2} \right) \right) \right] dt. \end{aligned}$$

3. Пространство де Бранжа со структурной функцией $E(-4\pi, z)$ является образом оператора V . Оно совпадает (в смысле совпадения множеств и равенства норм) с пространством де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ со структурной функцией $\mathcal{E}(z) = 2K_{\alpha}(2\pi)$.

4. Пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит функцию $\frac{\xi(\frac{1}{2}-2iz)}{p(z)}$, где ξ — кси-функция Римана, p — полином степени не меньше трех, нулями которого являются различные нули функции $\xi(\frac{1}{2} - 2iz)$.

Доказательство.

В работе [1] показано, что функции $A_1(t, z) = A(2t, \frac{z}{2})$, $B_1(t, z) = B(2t, \frac{z}{2})$ определяют решение канонической системы на интервале $(-\infty, -2\pi)$ с гамильтонианом $H_1(t) = H(2t)$ и удовлетворяют условию (1). Заменяя t на $t/2$ и z на $2z$, получим доказательство утверждения 1.

Для рассматриваемого гамильтониана $H(t)$ диагональными элементами являются функции $w_+(t) = \frac{e^t}{-t}$, $w_-(t) = \frac{e^{-t}}{-t}$. Подставив функции A , B , w_+ , w_- в формулу (2), найдем выражение для оператора V . Таким образом, получим доказательство утверждения 2.

Из приведенных выше утверждений следует, что образом оператора V является пространство де Бранжа со структурной функцией $E(-4\pi, z)$. Совпадение этого пространства с пространством $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}(z) = 2K_{\alpha}(2\pi)$, связано со свойством пространств де Бранжа. Известно, что структурная функция пространств де Бранжа определяется неоднозначно: пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_{\beta}}$ совпадают (в смысле совпадения множеств и равенства норм), где

$$\mathcal{E}_{\beta} = \frac{\mathcal{E} - \bar{\beta}\mathcal{E}^{\#}}{\sqrt{1 - |\beta|^2}}, \quad |\beta| < 1.$$

Положив $\beta = \frac{e^{-4\pi} - 1}{e^{-4\pi} + 1}$ для функции $\mathcal{E}(z) = 2K_{\alpha}(2\pi)$, получим $\mathcal{E}_{\beta}(z) = E(-4\pi, z)$. Таким образом, пространство де Бранжа со структурной функцией $E(-4\pi, z)$ совпадает с пространством $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Утверждение 3 доказано.

Для доказательства утверждения 4 определим оператор

$$\Phi : F(z) \mapsto \sqrt{2} F(2z).$$

Он изометрически отображает пространство де Бранжа со структурной функцией $2K_{\frac{2\alpha+1}{4}}(2\pi)$ на пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Из работы [1] следует, что если p — полином степени не меньше трех, нулями которого являются различные нули функции $\xi(\frac{1}{2} - iz)$, то функция $F(z) = \frac{\xi(\frac{1}{2}-iz)}{p(\frac{z}{2})}$ принадлежит пространству де Бранжа со структурной функцией $2K_{\frac{2\alpha+1}{4}}(2\pi)$. Тогда функция $\frac{\xi(\frac{1}{2}-2iz)}{p(z)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi F$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ как элемент образа оператора Φ . Утверждение 4 доказано.

Теорема доказана.

Литература

- [1] Капустин В.В. Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 4. С. 107–124. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/aa1771>.
- [2] Romanov R. Canonical systems and de Branges spaces. URL: <https://arxiv.org/abs/1408.6022v1>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11

Submitted: 15.02.2024

Revised: 17.03.2024

Accepted: 15.05.2024

S.A. Badonova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
 Saint Petersburg University, Saint Petersburg, Russian Federation
 E-mail: badonova0116@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4477-9572>

ON A DE BRANGES SPACE RELATED TO THE RIEMANN ZETA FUNCTION²

ABSTRACT

In a recent article by V.V. Kapustin a de Branges space, whose element is an expression containing the Riemann xi function, was constructed; the canonical system with a diagonal Hamiltonian and the generalized Fourier transform corresponding to the space were found. In this article we present a similar de Branges space with some preferred modifications and we provide formulas related to it; we also write down the Hamiltonian and the generalized Fourier transform.

Key words: De Branges space; Riemann xi function; canonical system with diagonal Hamiltonian; generalized Fourier transform.

Citation. Badonova S.A. On a de Branges space related to the Riemann zeta function. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 7–11. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Badonova S.A., 2024

Svetlana A. Badonova — undergraduate student of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation; Saint Petersburg University, 7/9 Universitetskaya nab., Saint Petersburg, 199034, Russian Federation.

References

- [1] Kapustin V.V. The set of zeros of the Riemann zeta function as the point spectrum of an operator. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2022, vol. 33, issue 4, pp. 661–673. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1720>. (In English; original in Russian)
- [2] Romanov R. Canonical systems and de Branges spaces. Available at: <http://arxiv.org/abs/1408.6022v1>.

²The work was performed at the Saint Petersburg Leonhard Euler International Mathematical Institute and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-15-2022-287).



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-12-19

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 11.02.2024
после рецензирования: 14.03.2024
принятия статьи: 15.05.2024

Е.С. Долгова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: dolgova.es@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7924-1356>

АСИМПТОТИКА КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ГОРЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена решению задачи о критических условиях для автокаталитической модели горения с учетом расхода реагента и окислителя. Анализ математической модели данного процесса методами геометрической теории сингулярных возмущений показал, что существуют два основных типа режимов горения: режим медленного горения и режим теплового взрыва. Промежуточным между ними является критический режим. В статье получено условие протекания критического режима в виде асимптотического представления соответствующего значения параметра системы, отражающего теплоотвод из реакционной фазы.

Ключевые слова: математическое моделирование; динамические системы; сингулярные возмущения; инвариантные многообразия; устойчивость; асимптотические методы; горение; критические явления; траектории-утки.

Цитирование. Долгова Е.С. Асимптотика критических условий в одной модели горения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 12–19. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-12-19>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Долгова Е.С., 2024

Елизавета Сергеевна Долгова — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В биологии, химии, механике и многих других областях встречается немало прикладных задач, характерной чертой которых является одновременное протекание сильно отличающихся по скорости процессов. Такие задачи описываются сингулярно возмущенными системами. Большой интерес представляет исследование критических явлений, при которых качественно меняется характер поведения траекторий системы. В горении так называемый критический режим разделяет режим медленного выгорания и режим теплового взрыва [1–5]. Его важная особенность заключается в том, что температура в реакторе достигает больших значений, чем при режиме медленного горения, но при этом реакция протекает со скоростью значительно меньшей, чем при режиме теплового взрыва.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель горения газовой смеси с учетом расхода реагента и окислителя. В безразмерной форме модель принимает вид [6; 7]:

$$\begin{cases} \gamma \frac{d\theta}{d\tau} = \phi(\eta, \xi) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}), \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\phi(\eta, \xi) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right), \\ \frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda\phi(\eta, \xi) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь η , ξ и θ — безразмерные концентрации реагента и окислителя и безразмерная температура, соответственно; θ_{amb} — безразмерная температура окружающей среды; α — параметр, характеризующий теплоотвод из реакционной фазы. Параметр λ — отношение стехиометрических коэффициентов и начальных концентраций реагента и окислителя. Случай $\lambda < 1$ отвечает обедненной горючей смеси, и завершение процесса горения связано с полным выгоранием горючего. Если $\lambda > 1$, то смесь является богатой, процесс горения завершится после полного расхода окислителя. В случае стехиометрической смеси ($\lambda = 1$) горючее и окислитель заканчиваются одновременно. $\phi(\eta, \xi)$ — кинетическая функция для безразмерных переменных, которая в случае автокаталитической реакции по реагенту и окислителю принимает вид

$$\phi(\eta, \xi) = \eta^{a_1} (1 + \eta_0 - \eta)^{a_2} \xi^{b_1} (1 + \xi_0 - \xi)^{b_2},$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — константы, определяющие порядок реакции [8]. Порядки реакций могут быть любые, в том числе дробные.

Начальные условия для (1.1) имеют вид

$$\theta(0) = 0, \eta(0) = 1, \xi(0) = 1. \quad (1.2)$$

Первый интеграл системы (1.1)

$$\xi - 1 = \lambda(\eta - 1)$$

позволяет свести рассмотрение (1.1)–(1.2) к задаче

$$\begin{cases} \gamma \frac{d\theta}{d\tau} = \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = g(\theta, \eta), \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) = f(\theta, \eta), \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\psi(\eta) = \eta^{a_1} (1 + \eta_0 - \eta)^{a_2} (\lambda(\eta - 1) + 1)^{b_1} (\xi_0 - \lambda(\eta - 1))^{b_2}$, с начальными условиями:

$$\theta(0) = 0, \eta(0) = 1. \quad (1.4)$$

γ и β — малые параметры, θ_{amb} положительна, когда начальная температура газовой смеси ниже температуры окружающей среды, в ином случае отрицательна.

Анализ поведения траекторий системы проводится на основе геометрической теории сингулярных возмущений и метода инвариантных многообразий [5; 9]. Такой подход позволяет определить существенные особенности динамики решений дифференциальной системы, даже не решая ее, опираясь на анализ так называемого вырожденного (алгебраического) уравнения. Далее, применяя асимптотические разложения для инвариантных многообразий, этот подход позволяет найти условия возникновения различных критических явлений. В задачах горения такой подход применялся, например, в работах [1–5; 10; 11].

В данной статье рассмотрен случай $a_1 = b_1 = b_2 = 1$ и $a_2 = 2$ для стехиометрической смеси ($\lambda = 1$), а именно функция $\psi(\eta)$ в системе (1.3)–(1.4) для рассматриваемого случая имеет вид $\psi(\eta) = \eta^2 (1 + \eta_0 - \eta)^2 (\xi_0 - \eta + 1)$.

2. Основные результаты

2.1. Медленная кривая

Уравнение

$$\gamma \frac{d\theta}{d\tau} = \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb})$$

определяет быструю подсистему системы (1.3)–(1.4). Положив в нем $\gamma = 0$, получим

$$\psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = 0.$$

Полученное уравнение определяет так называемую медленную кривую [5] системы (1.3)–(1.4), которая является эффективным средством для описания поведения ее траекторий. Фазовая точка системы (1.3)–(1.4) вблизи медленной кривой имеет скорость порядка единицы при $\gamma \rightarrow 0$, а вдали от медленной кривой температура θ меняется со скоростью порядка $O\left(\frac{1}{\gamma}\right)$. В γ -окрестности медленной кривой существует медленное инвариантное многообразие системы, которое определяется как инвариантное множество медленных движений [9]. Медленная кривая состоит из устойчивых (для них выполняется неравенство $\partial g/\partial \theta < 0$) и неустойчивых ($\partial g/\partial \theta > 0$) участков, разделенных точкой срыва. Устойчивые и неустойчивые части медленной кривой представляют собой нулевое приближение ($\gamma = 0$) устойчивых (или притягивающих) и неустойчивых (или отталкивающих) медленных инвариантных многообразий системы (1.3)–(1.4) соответственно.

В рассматриваемом случае точка срыва: $\theta^* = 1 + \theta_{amb} + 2(1 + \theta_{amb})\beta + O(\beta^2)$. Участок медленной кривой, для которого $\theta < \theta^*$ является устойчивым и притягивает траектории системы, а участок, где $\theta > \theta^*$, наоборот, их отталкивает.

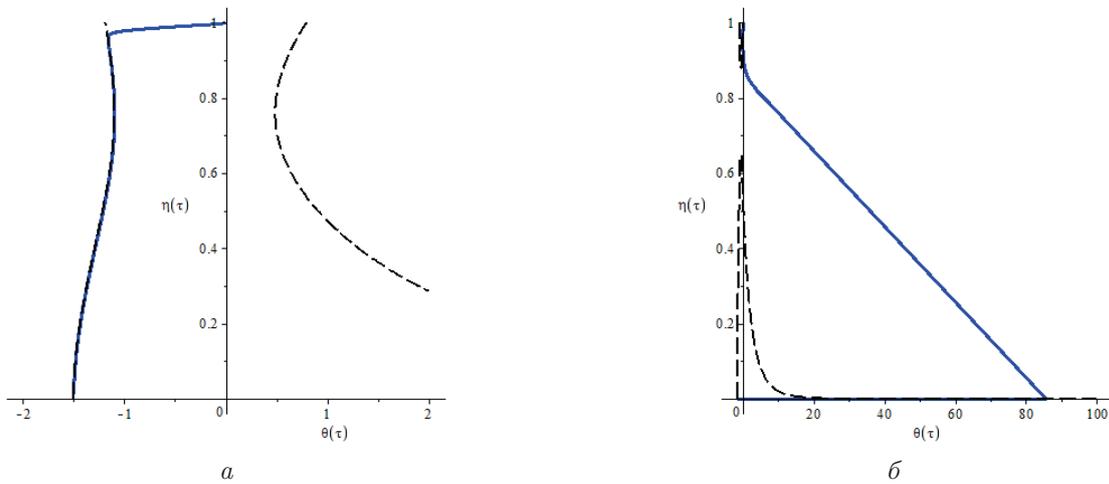


Рис. 2.1. Медленная кривая (пунктирная линия) и траектория (сплошная линия) системы (1.3)–(1.4), построенные при следующих значениях параметров: $\gamma = 0,01$; $\beta = 0,01$; $\eta_0 = 0,9$; $\xi_0 = 0,9$; $\theta_{amb} = -1,5$; $a - \alpha = 0,7$; $b - \alpha = 0,5$

Fig. 2.1. Slow curve (dotted line) and trajectory (solid line) of the system (1.3)–(1.4), constructed with the following parameter values: $\gamma = 0,01$; $\beta = 0,01$; $\eta_0 = 0,9$; $\xi_0 = 0,9$; $\theta_{amb} = -1,5$; $a - \alpha = 0,7$; $b - \alpha = 0,5$

На рисунке 2.1 изображены медленная кривая и траектории системы (1.3)–(1.4). В случае, представленном на рисунке 2.1, а, траектория, начавшаяся в точке $\eta = 1; \theta = 0$, притягивается к устойчивой части медленной кривой и идет в ее γ -окрестности до $\eta = 0; \theta = \theta_{amb}$, причем безразмерная температура не будет превышать значения θ^* . Такая траектория соответствует режиму медленного горения.

В случае, представленном на рисунке 2.1, б, траектория находится в области влияния неустойчивого участка медленной кривой и, оттолкнувшись от него, стремится вправо, достигая высоких значений температуры. Это режим теплового взрыва.

Кроме перечисленных возможен третий вариант, в котором медленная кривая имеет точку самопересечения, а траектория системы движется сначала вдоль устойчивого участка медленной кривой, затем, пройдя точку самопересечения (точку срыва), продолжает свое движение вдоль ее неустойчивого участка. Последний сценарий отвечает критическому режиму, а такие траектории носят название траекторий-уток [5; 9; 12–14]. В следующем параграфе найдено условие протекания данного режима.

2.2. Критические условия

Критический режим моделируется так называемым управляющим параметром, в данном случае — параметром, характеризующим теплоотвод из реакционной фазы. Критическое значение параметра α находится при построении траектории-утки, а именно так, чтобы позволить склеить устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия. Для начала найдем координаты точки срыва. Она удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} g(\theta, \eta) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0. \end{cases}$$

Подставив $g(\theta, \eta)$, получим

$$\begin{cases} \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = 0, \\ \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^{-2} - \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Система (2.1) сводится к уравнению

$$\alpha [(\theta - \theta_{amb}) - (1 + \beta\theta)^2] = 0.$$

Случай, когда параметр $\alpha = 0$ не рассматривается, поэтому приравняем к нулю выражение для θ . Получим уравнение

$$\beta^2\theta^2 + (2\beta - 1)\theta + 1 + \theta_{amb} = 0,$$

которое является квадратным относительно θ . Здесь и далее функции, зависящие от β , будем представлять в виде ряда Маклорена по малому параметру β и оставлять лишь первое приближение (поскольку β — малый параметр и более высокий порядок приближения будет незначительно отличаться от первого). Тогда значение θ в точке срыва будет

$$\theta^* = 1 + \theta_{amb} + 2(1 + \theta_{amb})\beta + O(\beta^2).$$

Концентрацию топлива и критическое значение параметра, характеризующего теплоотвод, будем искать в виде асимптотических рядов по степеням γ :

$$\eta(\theta, \gamma) = h_0(\theta) + \gamma h_1(\theta) + O(\gamma^2), \quad (2.2)$$

$$\alpha^*(\gamma) = \alpha_0 + \gamma\alpha_1 + O(\gamma^2). \quad (2.3)$$

Подставляя разложения (2.2)–(2.3) в уравнение инвариантности [9]

$$(h'_0(\theta) + \gamma h'_1(\theta) + O(\gamma^2))g(\theta, \eta) = \gamma f(\theta, \eta) \quad (2.4)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, найдем коэффициенты разложения в (2.2).

Полагая $\gamma = 0$ (рассматривая коэффициенты при γ^0), получим уравнение медленной кривой

$$F(h_0, \theta) = \psi(h_0) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = 0. \quad (2.5)$$

В случае автокаталитической реакции при критическом режиме точка срыва совпадает с точкой самопересечения медленной кривой, поэтому будем искать $h_0(\theta^*)$ и α_0 такими, чтобы выполнялось условие самопересечения медленной кривой, т. е.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h_0} = [2h_0(1 + \eta_0 - h_0)^2(\xi_0 - h_0 + 1) - 2h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)(\xi_0 - h_0 + 1) - h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)^2] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)^2(\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^{-2} - \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Из первого уравнения системы (2.6) найдем $h_0(\theta^*)$:

$$h_0(1 + \eta_0 - h_0)[5h_0^2 - h_0(4\xi_0 + 3\eta_0 + 7) + 2\xi_0 + 2\eta_0\xi_0 + 2\eta_0 + 2] = 0,$$

откуда получим четыре значения:

$$h_{0,1}(\theta^*) = 0, h_{0,2}(\theta^*) = 1 + \eta_0, h_{0,3}(\theta^*) = \frac{4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 + \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}}{10},$$

$$h_{0,4}(\theta^*) = \frac{4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}}{10}.$$

$h_{0,1}(\theta^*)$, $h_{0,2}(\theta^*)$, $h_{0,3}(\theta^*)$ выходят за рамки интересующей области, поэтому

$$h_0(\theta^*) = \frac{4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}}{10}.$$

Из уравнения медленной кривой (2.5) найдем значение α_0 — нулевого приближения параметра α :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 10^{-5} (4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - K)^2 (-4\xi_0 + 7\eta_0 + 3 + K)^2 \times \\ &\times (6\xi_0 - 3\eta_0 + 3 + K) e^{1+\theta_{amb}} (1 - (\theta_{amb} + 1)^2\beta + O(\beta^2)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $K = \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}$.

Теперь выпишем из уравнения инвариантности (2.4) равенство коэффициентов при первой степени малого параметра γ :

$$(h'_0 + \gamma h'_1 + O(\gamma^2)) [(h_0 + \gamma h_1 + O(\gamma^2))^2 (1 + \eta_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2))^2 (\xi_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2) + 1) \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) - (\alpha_0 + \gamma\alpha_1 + O(\gamma^2))(\theta - \theta_{amb})] = -\gamma(h_0 + \gamma h_1 + O(\gamma^2))^2 (1 + \eta_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2))^2 \times \\ \times (\xi_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2) + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right).$$

С учетом уравнения медленной кривой (2.5) получим

$$h'_0 [2h_1 h_0 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) + 2h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0) (-h_1) (\xi_0 - h_0 + 1) + h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (-h_1)] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) - h'_0 \alpha_1 (\theta - \theta_{amb}) = -h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right).$$

Отсюда получим формулу для $h_1(\theta)$:

$$h_1(\theta) = \frac{h'_0 \alpha_1 (\theta - \theta_{amb}) - h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right)}{h'_0 [2h_0 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) - 2h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0) (\xi_0 - h_0 + 1) - h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2] \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right)}.$$

Заметим, что знаменатель полученной дроби обращается в 0 в точке срыва. С целью обеспечения непрерывности $\eta(\theta, \gamma)$ потребуем, чтобы в этой точке числитель также обращался в 0. Тогда мы можем выразить коэффициент α_1 в (2.3):

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{h'_0(\theta^*)}. \quad (2.8)$$

Чтобы посчитать $h'_0(\theta^*)$, найдем из уравнения медленной кривой вторую производную по θ :

$$\frac{d^2 F}{d\theta^2} = F_{h_0 h_0} (h'_0)^2 + F_{h_0} h''_0 + 2F_{h_0 \theta} h'_0 + F_{\theta\theta} = F_{h_0 h_0} (h'_0)^2 + 2F_{h_0 \theta} h'_0 + F_{\theta\theta} = 0.$$

Из этого следует:

$$h'_0(\theta) = \frac{-F_{h_0 \theta} \pm \sqrt{F_{h_0 \theta}^2 - F_{h_0 h_0} F_{\theta\theta}}}{F_{h_0 h_0}}.$$

Посчитаем необходимые производные:

$$F_{h_0 \theta} = [2h_0 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) - 2h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) - h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1)] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^{-2},$$

$$F_{\theta\theta} = h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) [(1 + \beta\theta)^{-4} - 2\beta(1 + \beta\theta)^{-3}],$$

$$F_{h_0 h_0} = [4(1 + \eta_0 - h_0)[h_0^2 - h_0(1 + \eta_0 - h_0) - 2h_0(\xi_0 - h_0 + 1)] + 2(\xi_0 - h_0 + 1)[(1 + \eta_0 - h_0)^2 + 2h_0^2] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right).$$

С учетом (2.5) и (2.6) значения производных в точке срыва будут иметь вид

$$F_{h_0 \theta}(\theta^*) = 0,$$

$$F_{\theta\theta}(\theta^*) = \alpha_0 [(1 + \beta\theta)^{-2} - 2\beta(1 + \beta\theta)^{-1}] \Big|_{\theta=\theta^*},$$

$$F_{h_0 h_0}(\theta^*) = \frac{-8h_0(1 + \eta_0 - h_0)(\xi_0 - h_0 + 1)^2 - 3h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)^2}{2(\xi_0 - h_0 + 1)} \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) \Big|_{\theta=\theta^*}.$$

Приняв во внимание тот факт, что η — убывающая функция, подставим $h'_0(\theta^*)$ в (2.8):

$$\alpha_1 = -\alpha_0 \sqrt{\frac{-F_{h_0 h_0}(\theta^*)}{F_{\theta\theta}(\theta^*)}} = -\sqrt{\frac{\alpha_0 h_0 (1 + \eta_0 - h_0) [8(\xi_0 - h_0 + 1)^2 + 3h_0(1 + \eta_0 - h_0)] \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^2}{2(\xi_0 - h_0 + 1)(1 - 2\beta(1 + \beta\theta))}} \Big|_{\theta=\theta^*}.$$

Подставим в это выражение $\theta = \theta^*$:

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{\alpha_0(4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - K)(-4\xi_0 + 7\eta_0 + 3 + K)[8(6\xi_0 - 3\eta_0 + 3 + K)^2 + 3(4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - K)(-4\xi_0 + 7\eta_0 + 3 + K)]}{2 \cdot 10^3(6\xi_0 - 3\eta_0 + 3 + K)}} \times \\ \times e^{1 + \theta_{amb}} \left(1 + \left[3 - \frac{(\theta_{amb} - 1)^2}{2}\right] \beta + O(\beta^2)\right). \quad (2.9)$$

Итак, найдено критическое значение параметра α в первом приближении:

$$\alpha^*(\gamma) = \alpha_0 + \gamma\alpha_1 + O(\gamma^2),$$

где α_0 определено выражением (2.7), а α_1 — выражением (2.9). На рисунке 2.2 представлены медленная кривая, соответствующая критическому режиму, и траектория-утка системы.

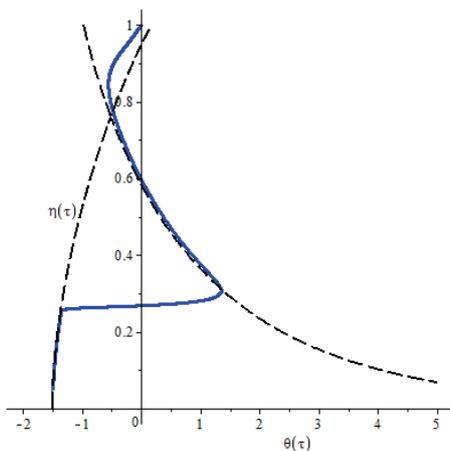


Рис. 2.2. Медленная кривая (пунктирная линия) и траектория (сплошная линия) системы (1.3)–(1.4), построенные при следующих значениях параметров: $\gamma = 0,01$; $\beta = 0,01$; $\eta_0 = 0,9$; $\xi_0 = 0,9$; $\theta_{amb} = -1,5$; $\alpha = 0,50796334626$.

Fig. 2.2. The slow curve (dotted line) and trajectory (solid line) of the system (1.3)–(1.4), constructed with the following parameter values: $\gamma = 0,01$; $\beta = 0,01$; $\eta_0 = 0,9$; $\xi_0 = 0,9$; $\theta_{amb} = -1,5$; $\alpha = 0,50796334626$.

Если сравнить с графиками, представленными на рисунке 2.1, то можно заметить, что при критическом режиме температура θ принимает гораздо большие значения, чем при режиме медленного горения, однако рост температуры происходит медленно, с контролируемой скоростью по сравнению с мгновенным ростом в режиме теплового взрыва. Этот факт имеет важное прикладное значение.

Выводы

Рассмотрена сравнительно новая модель автокаталитической реакции горения с учетом расхода реагента и окислителя. Найдено асимптотическое разложение значения параметра, отвечающего за теплоотвод из реакционной фазы, при котором в системе наблюдается критический режим. Такой режим интересен тем, что значение температуры газа может быть сравнительно высоким, но при этом сам процесс горения останется безопасным и не приведет к взрыву.

Литература

- [1] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory // Combustion and Flame. 1991. Vol. 87, issue 2. P. 203–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(91\)90170-G](https://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G).
- [2] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a thermal explosion problem // Applied Mathematics Letters. 1992. Vol. 5, issue 6. P. 3–6. DOI: [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(92\)90002-Q](https://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-Q).
- [3] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Самовоспламенение запыленных сред // Физ. горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 3. С. 133–136. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30074820>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zidhul>.
- [4] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1175–1184. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38243989>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ztnjpf>.
- [5] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. Москва: ФИЗМАЛИТ, 2010. 320 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ryrtfh>.
- [6] Shchepakina E. Unstable invariant manifolds in a control problem of the combustion process of a gas mixture // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow, Russian Federation: IEEE, 2022. P. 1–4. DOI: <http://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807573>.

- [7] Sobolev V., Shchepakina E. Critical conditions of a thermal explosion in the case of autocatalytic combustion with account reagent and oxidant consumption // 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). Moscow, Russian Federation: IEEE, 2023. P. 1–4, DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/MLSD58227.2023.10304029>.
- [8] Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. Москва: Высшая школа, 1984. 463 с. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/2958-1-n-m-emanuel-d-g-knorre-kurs.html>.
- [9] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell V. Singular Perturbations. Introduction to System order Reduction Methods with Applications // Springer Lecture Notes in Mathematics. 2014. Vol. 2114. P. 212. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7>.
- [10] Shchepakina E. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2003. Vol. 4, Issue 1. Pp. 45–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1468-1218\(02\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3).
- [11] Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models // Singular perturbations and hysteresis (Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev). Philadelphia: SIAM, 2005. P. 207–255. DOI: <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898717860.ch8>.
- [12] Benoit E., Callot J.L., Diener F., Diener M. Chasse au canard // Collectanea Mathematica. 1981. Vol. 31–32. P. 37–119. URL: https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard.
- [13] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2001. Vol. 44, issue 7. P. 897–908. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [14] Shchepakina E., Sobolev V. Invariant surfaces of variable stability // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 727, № 1. P. 012016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/727/1/012016>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-12–19

Submitted: 11.02.2024

Revised: 14.03.2024

Accepted: 15.05.2024

E.S. Dolgova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: dolgova.es@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7924-1356>

ASYMPTOTICS OF CRITICAL CONDITIONS IN ONE COMBUSTION MODEL

ABSTRACT

The work is devoted to solving the problem of critical conditions for an autocatalytic combustion model, taking into account the consumption of reagent and oxidizer. By use the methods of geometric theory of singular perturbations, the analysis of the mathematical model of this process show that there are two main types of combustion modes: the slow combustion mode and the thermal explosion mode. The critical mode is intermediate between them. In the paper, the condition of the critical regime is obtained in the form of an asymptotic representation of the corresponding value of the system parameter reflecting the heat loss from the reaction phase.

Key words: mathematical modeling; dynamic systems; singular perturbations; invariant manifolds; stability; asymptotic methods; combustion; critical phenomena; canards.

Citation. Dolgova E.S. Asymptotics of critical conditions in one combustion model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 12–19. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-12-19>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Dolgova E.S., 2024

Elizaveta S. Dolgova — post-graduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory. *Combustion and Flame*, 1991, vol. 87, issue 2, pp. 203–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(91\)90170-G](https://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G).
- [2] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a thermal explosion problem. *Applied Mathematics Letters*, 1992, vol. 5, issue 6, pp. 3–6. DOI: [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(92\)90002-Q](https://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-Q).
- [3] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Self-ignition of dusty media. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 1993, vol. 29, issue 3, pp. 378–381. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00797664>. (In Russ.)
- [4] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Duck-trajectories in a problem of combustion theory. *Differential equations*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1177–1186. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13231308>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ldobkp>. (In English; original in Russian)
- [5] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Model reduction and critical phenomena in macrokinetics. Moscow: FIZMATLIT, 2010, 320 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ryrtfh>. (In Russ.)
- [6] Shchepakina E. Unstable invariant manifolds in a control problem of the combustion process of a gas mixture. In: *2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*. Moscow, Russian Federation: IEEE, 2022, pp. 1–4. DOI: <http://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807573>.
- [7] Sobolev V., Shchepakina E. Critical conditions of a thermal explosion in the case of autocatalytic combustion with account reagent and oxidant consumption. In: *2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD)*. Moscow, Russian Federation: IEEE, 2023, pp. 1–4. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/MLSD58227.2023.10304029>.
- [8] Emanuel N.M., Knorre D.G. Course of chemical kinetics. Moscow: Vysshaya shkola, 1984, 463 p. Available at: <https://studizba.com/files/show/djvu/2958-1-n-m-emanuel-d-g-knorre-kurs.html>. (In Russ.)
- [9] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell V. Singular Perturbations. Introduction to System order Reduction Methods with Applications. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 2014, vol. 2114, 212 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7>.
- [10] Shchepakina E. Black swans and canards in self-ignition problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2003, vol. 4, issue 1, pp. 45–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1468-1218\(02\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3).
- [11] Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models. In: *Singular perturbations and hysteresis (Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev)*. Philadelphia: SIAM, 2005, pp. 207–255. DOI: <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898717860.ch8>.
- [12] Benoit E., Callot J. L., Diener F., Diener M. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*, 1981, vol. 31–32, pp. 37–119. Available at: https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard.
- [13] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2001, vol. 44, issue 7, pp. 897–908. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [14] Shchepakina E., Sobolev V. Invariant surfaces of variable stability. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 727, p. 012016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/727/1/012016>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-20-29

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 21.01.2024
после рецензирования: 17.04.2024
принятия статьи: 15.05.2024

О.С. Кипкаева

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: kipkaeva.os@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5448-9417>

ОБ ОДНОМ СЦЕНАРИИ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена особенностям смены устойчивости медленных инвариантных многообразий сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Необходимо отметить, что смена устойчивости инвариантных многообразий может протекать по различным сценариям. Кроме двух хорошо известных сценариев этого явления в данной работе рассматривается еще один сценарий. Для демонстрации особенностей смены устойчивости медленных инвариантных многообразий по этому сценарию предложен ряд примеров. Получена теорема существования точного инвариантного многообразия со сменой устойчивости для некоторого класса сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: динамические системы; сингулярные возмущения; инвариантные многообразия; устойчивость; затягивание потери устойчивости; траектории-утки; бифуркация; теорема существования.

Цитирование. Кипкаева О.С. Об одном сценарии смены устойчивости инвариантных многообразий сингулярно возмущенных систем // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 20–29. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-20-29>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Кипкаева О.С., 2024

Ольга Сергеевна Кипкаева — ассистент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Основным объектом изучения является автономная сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \mu, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, \mu, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

где x и y — векторы в Евклидовых пространствах; ε — малый положительный параметр; μ — вектор параметров, вектор-функции f и g достаточно гладкие, и их значения сравнимы с единицей. Медленная и быстрая подсистемы описываются первым и вторым уравнениями системы (1) соответственно [1–3].

Напомним, что гладкая поверхность называется инвариантным многообразием системы (1), если любая траектория, которая имеет с ней хотя бы одну общую точку, целиком принадлежит этой поверхности [1–3].

Среди инвариантных многообразий выделяют так называемые медленные инвариантные многообразия — инвариантные поверхности медленных движений, размерность которых равна размерности медленной подсистемы. В предельном случае (при $\varepsilon = 0$) медленное инвариантное многообразие называется медленной поверхностью (или медленной кривой, в зависимости от ее размерности), которая описывается уравнением

$$g(x, y, \mu, 0) = 0.$$

Устойчивость или неустойчивость медленного инвариантного многообразия определяется устойчивостью или неустойчивостью медленной поверхности. Известно, что медленная поверхность является устойчивой, то есть притягивающей для траекторий системы (1), если все собственные числа матрицы линеаризации быстрой подсистемы имеют отрицательные вещественные части [1–3]. В противном случае она будет неустойчивой (отталкивающей).

При исследовании сингулярно возмущенных систем большой интерес вызывают критические случаи, когда меняется знак одного или нескольких собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы. Это приводит к тому, что медленное инвариантное многообразие теряет устойчивость [2; 3]. Есть несколько сценариев данного явления [4; 5]. С помощью введения условий на дополнительные параметры системы в этих случаях можно построить медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости [6; 7].

Первый сценарий можно наблюдать, когда одно из собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы переходит через ноль и становится положительным. Этот случай связан с существованием траекторий-уток [6; 8–16]. Такая траектория системы идет сначала по притягивающему инвариантному многообразию, а после — по отталкивающему. В этом сценарии требуется подобрать значение дополнительного параметра, которое обеспечит непрерывность функции, описывающей траекторию-утку [3]. Аналогичный сценарий смены устойчивости наблюдается в многомерных инвариантных многообразиях со сменой устойчивости, которые можно рассматривать как инвариантные поверхности, целиком состоящие из траекторий-уток [2; 6; 7; 12; 14; 17].

Во втором сценарии меняется знак вещественной части пары комплексно сопряженных собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы. В этом случае наблюдается явление затягивания потери устойчивости: траектория системы (1) уходит от положения равновесия не сразу после того, как оно потеряло устойчивость, а через какое-то время [4; 18–22].

Данная работа посвящена еще одному сценарию смены устойчивости медленных инвариантных многообразий сингулярно возмущенных систем вида (1). Суть этого сценария заключается в том, что устойчивой части медленного инвариантного многообразия отвечает пара комплексно сопряженных собственных чисел с отрицательной вещественной частью матрицы линеаризации быстрой подсистемы, а неустойчивой части медленного инвариантного многообразия отвечает пара вещественных собственных чисел противоположных знаков. Другими словами, смена устойчивости связана с одновременным обнулением и вещественных частей, и коэффициентов при мнимой части собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы.

1. Основные результаты

В качестве простейшей системы, в которой наблюдается описанный выше сценарий смены устойчивости медленного инвариантного многообразия, можно рассмотреть сингулярно возмущенную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \varepsilon \dot{y} &= z, \\ \varepsilon \dot{z} &= axy + bxz, \end{aligned} \tag{2}$$

где a и b — константы; ε — малый положительный параметр.

Система

$$\begin{cases} z = 0, \\ axy + bxz = 0 \end{cases}$$

описывает медленную кривую системы (2). Для исследования ее на устойчивость запишем матрицу линеаризации быстрой подсистемы:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ax & bx \end{pmatrix}, \tag{3}$$

с характеристическим многочленом

$$\lambda^2 - bx\lambda - ax = 0.$$

Учитывая необходимое условие устойчивости полиномов, можем сказать, что при a и b разных знаков медленная кривая будет неустойчивой.

В случае когда $a > 0$ и $b > 0$, медленная кривая будет устойчивой, если x будет отрицательным. Если $a < 0$ и $b < 0$, то для устойчивости медленной кривой необходимо, чтобы x был положительным.

Исследуем собственные значения матрицы линеаризации (3). Они имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{bx \pm \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2}.$$

Смена знака подкоренного выражения собственных чисел происходит в двух точках: $x = 0$ и $x = -4a/b^2$. Причем при $x = 0$ происходит обнуление вещественных и мнимых частей собственных чисел.

Рассмотрим подробнее случай $a > 0$, $b > 0$.

1. $x < -4a/b^2$. При таких значениях x подкоренное выражение принимает положительные значения, то есть собственные числа будут вещественными.

Выясним знак собственного числа λ_1 , где

$$\lambda_1 = \frac{bx + \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2}.$$

Так как $x < 0$, то $bx < 0$ и

$$4ax < 0 \Rightarrow \sqrt{b^2x^2 + 4ax} < |bx|.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{bx + \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2} < \frac{bx + |bx|}{2} = 0.$$

Выясним знак собственного числа λ_2 , где

$$\lambda_2 = \frac{bx - \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2}.$$

Так как $bx < 0$ и

$$\sqrt{b^2x^2 + 4ax} > 0,$$

то

$$\lambda_2 = \frac{bx - \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2} < 0.$$

Таким образом, при $x < -4a/b^2$ матрица J имеет отрицательные вещественные собственные значения.

2. $-4a/b^2 < x < 0$. В этом случае подкоренное выражение принимает отрицательные значения, следовательно, собственные значения будут комплексными с отрицательной вещественной частью.
3. $x > 0$. При таких значениях x подкоренное выражение принимает положительные значения, то есть собственные числа будут вещественными.

Выясним знак собственного числа λ_1 , где

$$\lambda_1 = \frac{bx + \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2}.$$

Так как $x > 0$, то $bx > 0$ и

$$\sqrt{b^2x^2 + 4ax} > 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{bx + \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2} > 0.$$

Выясним знак собственного числа λ_2 , где

$$\lambda_2 = \frac{bx - \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2}.$$

Так как $bx > 0$ и

$$4ax > 0 \Rightarrow \sqrt{b^2x^2 + 4ax} > |bx|,$$

то

$$\lambda_2 = \frac{bx - \sqrt{b^2x^2 + 4ax}}{2} < \frac{bx - |bx|}{2} = 0.$$

Таким образом, при $x > 0$ матрица J имеет вещественные собственные значения разных знаков. Бифуркация собственных значений матрицы J представлена на рис. 1.

В случае $a < 0$ и $b < 0$ анализ собственных чисел проводится аналогично. Здесь при $x < 0$ собственные значения будут вещественными разных знаков, при $x \in (0, -4a/b^2)$ — комплексно сопряженными с отрицательной вещественной частью, а при $x > -4a/b^2$ собственные значения будут отрицательными вещественными, см. рис. 1. Отметим, что в случае $a < 0$ и $b < 0$ изменения в характере собственных чисел происходят аналогичным образом, но при уменьшении x .

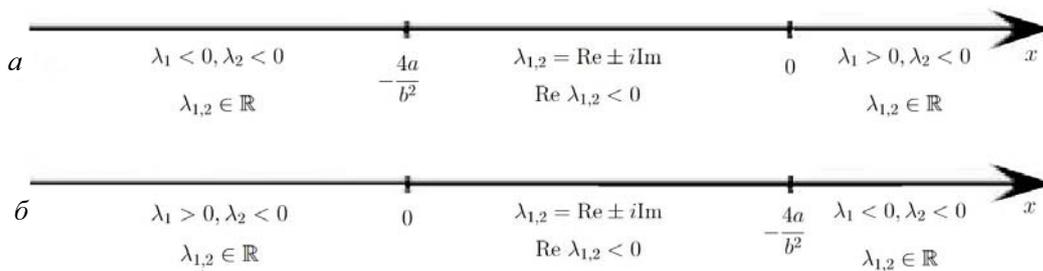


Рис. 1. Собственные числа матрицы J для случая $a - a > 0$ и $b > 0$; $б - a < 0$ и $b < 0$
 Fig. 1. Eigenvalues of the matrix J for the case $a - a > 0$ and $b > 0$; $б - a < 0$ and $b < 0$

Таким образом, в системе (2) при $x = 0$ наблюдается новый сценарий смены устойчивости точного медленного инвариантного многообразия $y \equiv 0, z \equiv 0$, связанный с одновременным обнулением и вещественных частей, и коэффициентов при мнимой части собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы.

Этот же сценарий смены устойчивости медленного инвариантного многообразия можно рассмотреть в более сложных системах. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \varepsilon \dot{y} &= z, \\ \varepsilon \dot{z} &= axy + bxz + f(x) + \mu, \end{aligned} \tag{4}$$

где $f(x) = \alpha_0x^2 + \alpha_1x + \alpha_2$, а α_i ($i = 0, \dots, 2$) — константы. Покажем, что система (4) имеет медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости, связанной с одновременным обнулением и вещественных частей, и коэффициентов при мнимой части собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы.

Чтобы найти это инвариантное многообразие, нужно должным образом подобрать значение дополнительного параметра μ . Бифуркационное значение $\mu = \mu^*$ и соответствующую ему траекторию (одномерное инвариантное многообразие со сменой устойчивости) будем искать в виде асимптотического разложения по степеням ε :

$$\begin{aligned} \mu^* &= \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \dots, \\ y &= Y(x, \varepsilon) = Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x) + \varepsilon^2 Y_2(x) + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

Для нахождения $\mu_i, Y_i(x)$ подставим разложения (5) в уравнение инвариантности:

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = \varepsilon \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим: при ε^0 :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= -\alpha_2, \\ Y_0(x) &= -\frac{\alpha_0x}{a} - \frac{\alpha_1}{a}; \end{aligned}$$

при ε^1 :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ Y_1(x) &= \frac{b}{a^2}\alpha_0; \end{aligned}$$

при ε^n , где $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mu_n &= 0, \\ Y_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для $\mu^* = -\alpha_2$ существует точное инвариантное многообразие со сменой устойчивости

$$\begin{cases} y = A_0x + A_1, \\ z = -\varepsilon A_0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$A_0 = -\frac{\alpha_0}{a}, \quad A_1 = -\frac{\alpha_1}{a} + \varepsilon \frac{b\alpha_0}{a^2}.$$

Траектория, соответствующая решению (6) системы (4), является глобальным медленным инвариантным многообразием со сменой устойчивости. Все остальные траектории, начиная с начальной точки в области влияния его устойчивой части, следуют вдоль него и затем продолжают свое движение вдоль его неустойчивой части на расстояние порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, см. рис. 2 и рис. 3.

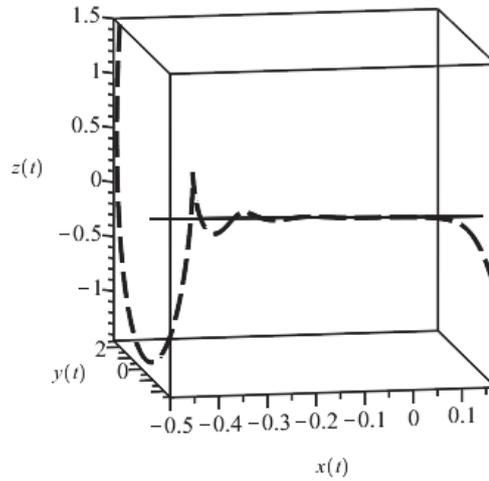


Рис. 2. Глобальное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости (6) (сплошная линия) и траектория системы (4) с начальным условием $x(0) = -0,5$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1,5$ (пунктирная линия); $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1,2$, $\alpha_2 = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$

Fig. 2. Global stable/unstable slow invariant manifold (6) (solid line) and the trajectory of the system (4) with initial data $x(0) = -0.5$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1.5$ (dash line); $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$

Пример 2. Рассмотрим еще один пример с другим возмущением:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \varepsilon \dot{y} &= z, \\ \varepsilon \dot{z} &= axy + bxz + f(x) + \mu, \end{aligned} \quad (7)$$

где $f(x) = \alpha_0x^5 + \alpha_1x^4 + \alpha_2x^3 + \alpha_3x^2 + \alpha_4x + \alpha_5$, а α_i ($i = 0, \dots, 5$) — константы.

Бифуркационное значение $\mu = \mu^*$ и соответствующую ему траекторию ищем в виде разложений (5).

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим:

при ε^0 :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= -\alpha_5, \\ Y_0(x) &= -\frac{\alpha_0x^4}{a} - \frac{\alpha_1x^3}{a} - \frac{\alpha_2x^2}{a} - \frac{\alpha_3x}{a} - \frac{\alpha_4}{a}; \end{aligned}$$

при ε^1 :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ Y_1(x) &= \frac{b}{a^2} (4\alpha_0x^3 + 3\alpha_1x^2 + 2\alpha_2x + \alpha_3); \end{aligned}$$

при ε^2 :

$$\mu_2 = -\frac{2\alpha_2}{a},$$

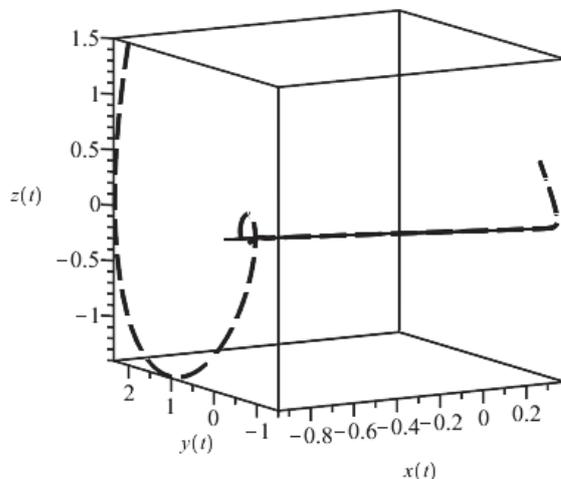


Рис. 3. Глобальное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости (6) (сплошная линия) и траектория системы (4) с начальным условием $x(0) = -0,95$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1,5$ (пунктирная линия); $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1,2$, $\alpha_2 = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$

Fig. 3. Global stable/unstable slow invariant manifold (6) (solid line) and the trajectory of the system (4) with initial data $x(0) = -0.95$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1.5$ (dash line); $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$

$$Y_2(x) = -\frac{b^2}{a^3} (12\alpha_0 x^2 + 6\alpha_1 x + 2\alpha_2) - \frac{1}{a^2} (12\alpha_0 x + 6\alpha_1);$$

при ε^3 :

$$\mu_3 = \frac{6b\alpha_1}{a^2},$$

$$Y_3(x) = \frac{b^3}{a^4} (24\alpha_0 x + 6\alpha_1) + \frac{b}{a^3} 12\alpha_0 + \frac{b}{a^3} 24\alpha_0;$$

при ε^4 :

$$\mu_3 = -\frac{24b^2\alpha_0}{a^3},$$

$$Y_4(x) = -\frac{b^4}{a^5} 24\alpha_0;$$

при ε^n , где $n \geq 5$:

$$\mu_n = 0,$$

$$Y_n(x) = 0.$$

Следовательно, для

$$\mu^* = -\alpha_5 - \varepsilon^2 \frac{2\alpha_2}{a} + \varepsilon^3 \frac{6b\alpha_1}{a^2} - \varepsilon^4 \frac{24b^2\alpha_0}{a^3}$$

существует точное инвариантное многообразие со сменой устойчивости

$$\begin{cases} y = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4, \\ z = -\varepsilon(4A_0 x^3 + 3A_1 x^2 + 2A_2 x + A_3), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$A_0 = -\frac{\alpha_0}{a}, \quad A_1 = -\frac{\alpha_1}{a} + \varepsilon \frac{4b\alpha_0}{a^2}, \quad A_2 = -\frac{\alpha_2}{a} + \varepsilon \frac{3b\alpha_1}{a^2} - \varepsilon^2 \frac{12b^2\alpha_0}{a^3},$$

$$A_3 = -\frac{\alpha_3}{a} + \varepsilon \frac{2b\alpha_2}{a^2} - \varepsilon^2 \frac{6b^2\alpha_1}{a^3} - \varepsilon^2 \frac{1}{a^2} 12\alpha_0 + \varepsilon^3 \frac{b^3}{a^4} 24\alpha_0,$$

$$A_4 = -\frac{\alpha_4}{a} + \varepsilon \frac{b\alpha_3}{a^2} - \varepsilon^2 \frac{2b^2\alpha_2}{a^3} - \varepsilon^2 \frac{1}{a^2} 6\alpha_1 + \varepsilon^3 \frac{b^3}{a^4} 6\alpha_1 + \varepsilon^3 \frac{b}{a^3} 12\alpha_0 + \varepsilon^3 \frac{b}{a^3} 24\alpha_0 - \varepsilon^4 \frac{b^4}{a^5} 24\alpha_0.$$

Траектория, соответствующая точному решению (8) системы (7), является глобальным медленным инвариантным многообразием со сменой устойчивости. Все остальные траектории, начиная с начальной точки в области влияния его устойчивой части, следуют вдоль него и затем продолжают свое движение вдоль его неустойчивой части на расстояние порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, см. рис. 4 и рис. 5.

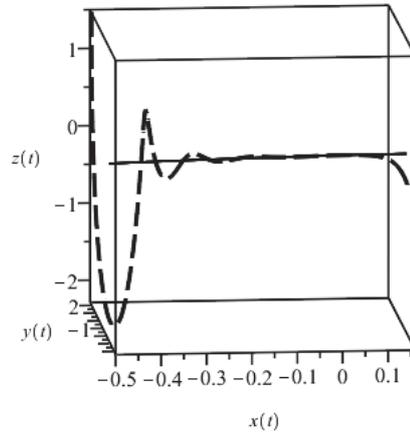


Рис. 4. Глобальное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости (8) (сплошная линия) и траектория системы (7) с начальным условием $x(0) = -0,5$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1,5$ (пунктирная линия);
 $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1,5$, $\alpha_1 = 1,2$, $\alpha_2 = 1,1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 2,1$, $\alpha_5 = 1,5$, $\varepsilon = 0,01$
 Fig. 4. Global stable/unstable slow invariant manifold (8) (solid line) and the trajectory of the system (7) with initial data $x(0) = -0.5$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1.5$ (dash line);
 $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1.5$, $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 1.1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 2.1$, $\alpha_5 = 1.5$, $\varepsilon = 0.01$

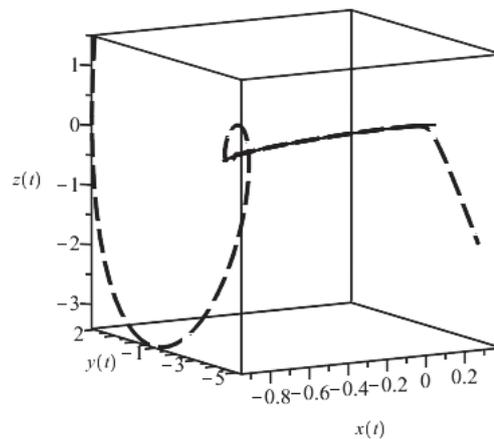


Рис. 5. Глобальное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости (8) (сплошная линия) и траектория системы (7) с начальным условием $x(0) = -0,95$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1,5$ (пунктирная линия);
 $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1,5$, $\alpha_1 = 1,2$, $\alpha_2 = 1,1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 2,1$, $\alpha_5 = 1,5$, $\varepsilon = 0,01$
 Fig. 5. Global stable/unstable slow invariant manifold (8) (solid line) and the trajectory of the system (7) with initial data $x(0) = -0.95$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1.5$ (dash line);
 $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1.5$, $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 1.1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 2.1$, $\alpha_5 = 1.5$, $\varepsilon = 0.01$

Таким образом, в рассмотренных примерах наблюдается новый сценарий смены устойчивости медленных инвариантных многообразий, связанный с одновременным обнулением и вещественных частей, и коэффициентов при мнимой части собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы. Эти примеры можно обобщить.

Теорема 1. Для системы

$$\dot{x} = 1, \quad \varepsilon \dot{y} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = axy + bxz + f(x) + \mu, \quad (9)$$

где $f(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$, а α_i , ($i = 0, \dots, k$) и k — константы, существует точное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости. Смена устойчивости этого многообразия обусловлена одновременным обнулением и вещественных частей, и коэффициентов при мнимой части собственных чисел матрицы линеаризации быстрой подсистемы.

Выводы

В работе исследовался сценарий смены устойчивости медленного инвариантного многообразия, связанный с одновременным обнулением и вещественной части, и коэффициентов при мнимой части собственных значений матрицы линеаризации быстрой подсистемы. В качестве иллюстрации было предложено несколько примеров сингулярно возмущенных систем, для которых существует точное инвариантное многообразие с такой сменой устойчивости. Получена теорема существования точного инвариантного многообразия со сменой устойчивости для некоторого класса сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

- [1] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. Москва: Наука, 1988. 256 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30130147>. EDN: <https://elibrary.ru/zjiugb>.
- [2] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications. Cham-Berlin-Heidelberg-London: Springer, 2014. 222 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7>.
- [3] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. Москва: ФИЗМАЛИТ, 2010. 320 с.
- [4] Теория бифуркаций / В.И. Арнольд [и др.]. Москва: ВИНТИ, 1986. Т. 5. 218 с.
- [5] Щепакина Е.А. Два вида смены устойчивости интегральных многообразий // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 713–716. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de11080>.
- [6] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2001. Vol. 44. Issue 7. P. 897–908. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [7] Shchepakina E.A. Stable/unstable slow integral manifolds in critical cases // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 811, issue 1. P. 012016. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/811/1/012016>.
- [8] Benoit E., Callot J. L., Diener F. Diener M. Chasse au canard // Collectanea Mathematica. 1981. Vol. 31–32. P. 37–119. URL: https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard.
- [9] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory // Combustion and Flame. 1991. Vol. 87, issue 2. P. 203–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(91\)90170-G](https://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G).
- [10] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a thermal explosion problem // Applied Mathematics Letters. 1992. Vol. 5, issue 6. P. 3–6. DOI: [http://doi.org/10.1016/0893-9659\(92\)90002-q](http://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-q).
- [11] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1175–1184. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38243989>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ztnjpf>.
- [12] Shchepakina E.A. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2003. Vol. 4, issue 1. P. 45–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1468-1218\(02\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3).
- [13] Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models // Singular perturbations and hysteresis (Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev). Philadelphia: SIAM, 2005. P. 207–255. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898717860.ch8>.
- [14] Shchepakina E. Canards and black swans in model of a 3-D autocatalator // Journal of Physics: Conference Series. 2005. Vol. 22, № 1. P. 194–207. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/22/1/013>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ljbfkd>.
- [15] Shchepakina E., Korotkova O. Condition for canard explosion in a semiconductor optical amplifier // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. 2011. Vol. 28, issue 8. P. 1988–1993. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.28.001988>.
- [16] Shchepakina E., Korotkova O. Canard explosion in chemical and optical systems // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B. 2013. Vol. 18, issue 2. P. 495–512. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.495>.
- [17] Shchepakina E., Sobolev V. Invariant surfaces of variable stability // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 727, № 1. P. 012016. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/727/1/012016>. EDN: <https://elibrary.ru/wvbect>.
- [18] Нейштадт А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, Вып. 5. С. 300–301.

- [19] Нейштадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференциальные уравнения. 1987-1988. Т. 23, № 12. С. 2060–2067. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de6386>; Т. 24, № 2. С. 226–233. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de/v24/i2/p226>.
- [20] Шипкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук СССР. 1973. Т. 209, № 3. С. 576–579. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan37550>.
- [21] Щетинина Е.В. Одна задача о смене устойчивости интегральных многообразий // Известия РАН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 1999. Т. 3, № 3. С. 129–134.
- [22] Schneider K.R., Shchetinina E.V., Sobolev V.A. Control of integral manifolds losing their attractivity in time // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 315, issue 2. P. 740–757. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.075>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-20-29

Submitted: 21.01.2024

Revised: 17.04.2024

Accepted: 15.05.2024

O.S. Kipkaeva

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: kipkaeva.os@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5448-9417>

ON ONE SCENARIO FOR CHANGING THE STABILITY OF INVARIANT MANIFOLDS OF SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS

ABSTRACT

The article is devoted to the peculiarities of stability change of slow invariant manifolds of singularly perturbed systems of ordinary differential equations. It should be noted that the change of stability of invariant manifolds can proceed according to different scenarios. In addition to two well-known scenarios of this phenomenon, one more scenario is considered in this paper. To demonstrate the peculiarities of the stability change of slow invariant manifolds under this scenario, a number of examples are proposed. The existence theorem of an exact invariant manifold with stability change for some class of singularly perturbed systems of ordinary differential equations is obtained.

Key words: dynamical systems; singular perturbations; invariant manifolds; stability; delayed stability loss; canards; bifurcation; existence theorem.

Citation. Kipkaeva O.S. On one scenario for changing the stability of invariant manifolds of singularly perturbed systems. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 20–29. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-20-29>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Kipkaeva O.S., 2024

Olga S. Kipkaeva — assistant lecturer of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Strygin V.V., Sobolev V.A. Decomposition of motions by the integral manifolds method. Moscow: Nauka, 256 p. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30130147>. EDN: <https://elibrary.ru/zjiugb>. (In Russ.)
- [2] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications. Cham-Berlin-Heidelber-London: Springer, 2014, 222 p. Available at: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7>.
- [3] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Reduction of models and critical phenomena in macrokinetics. Moscow: FIZMATLIT, 2010, 320 p. (In Russ.)
- [4] Arnold V.I. (et al.) Bifurcation Theory. Moscow: VINITI, 1986, Vol. 5. 218 p. (In Russ.)

- [5] Shchepakina E.A. Two Forms of Stability Change for Integral Manifolds. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 766–769. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000043535.71010.89>. (In English; original in Russian)
- [6] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2001, vol. 44, issue 7, pp. 897–908. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [7] Shchepakina E.A. Stable/unstable slow integral manifolds in critical cases. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 811, issue 1, p. 012016. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/811/1/012016>.
- [8] Benoit E., Callot J. L., Diener F. Diener M. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*, 1981, vol. 31–32, pp. 37–119. Available at: https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard.
- [9] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory. *Combustion and Flame*, 1991, vol. 87, issue 2, pp. 203–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(91\)90170-G](https://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G).
- [10] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a thermal explosion problem. *Applied Mathematics Letters*, 1992, vol. 5, issue 6, pp. 3–6. DOI: [http://doi.org/10.1016/0893-9659\(92\)90002-q](http://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-q).
- [11] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Duck trajectories in a problem of combustion theory. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1177–1186. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13231308>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ldobkp>. (In English; original in Russian)
- [12] Shchepakina E.A. Black swans and canards in self-ignition problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2003, vol. 4, issue 1, pp. 45–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1468-1218\(02\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3).
- [13] Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models. In: Singular perturbations and hysteresis (Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev). Philadelphia: SIAM, 2005, pp. 207–255. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898717860.ch8>.
- [14] Shchepakina E. Canards and black swans in model of a 3-D autocatalator. *Journal of Physics: Conference Series*, 2005, vol. 22, no. 1, pp. 194–207. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/22/1/013>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ljbkfd>.
- [15] Shchepakina E., Korotkova O. Condition for canard explosion in a semiconductor optical amplifier. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*, 2011, vol. 28, issue 8, pp. 1988–1993. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.28.001988>.
- [16] Shchepakina E., Korotkova O. Canard explosion in chemical and optical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B*, 2013, vol. 18, issue 2, pp. 495–512. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.495>.
- [17] Shchepakina E., Sobolev V. Invariant surfaces of variable stability. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 727, no. 1, p. 012016. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/727/1/012016>. EDN: <https://elibrary.ru/wvbect>.
- [18] Neustadt A.I. Asymptotic investigation of the loss of stability by an equilibrium as a pair of eigenvalues slowly cross the imaginary axis. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1985, vol. 40, issue 5, pp. 190–191. (In English; original in Russian)
- [19] Neustadt A.I. Prolongation of the loss of stability loss in the case of dynamic bifurcations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1987–1988, vol. 23, no. 12, pp. 2060–2067. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de6386>. (In Russ.); vol. 24, no. 2, pp. 226–233. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de/v24/i2/p226>. (In Russ.)
- [20] Shishkova M.A. Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1973, vol. 209, no. 3, pp. 576–579. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan37550>. (In Russ.)
- [21] Shchetinina E.V. A problem on the change of stability of integral manifolds. *Izvestija RAEN. Matematika. Matematicheskoe modelirovanie. Informatika i upravlenie.*, 1999, vol. 3, no. 3, pp. 129–134. (In Russ.)
- [22] Schneider K.R., Shchetinina E.V., Sobolev V.A. Control of integral manifolds losing their attractivity in time. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, vol. 315, issue 2, pp. 740–757. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.075>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 23.01.2024
после рецензирования: 25.04.2024
принятия статьи: 15.05.2024

Л.С. Пулькина

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ I РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями для одномерного уравнения четвертого порядка. Особенностью этой задачи являются нелокальные интегральные условия I рода, ядра которых зависят не только от пространственной переменной, но и от переменной времени. Для доказательства разрешимости задачи предложен метод, позволивший преодолеть трудности, связанные со структурой нелокальных условий, и получить априорные оценки решения, на которых базируется доказательство как единственности, так и существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка; нелокальная задача; интегральные условия 1-го и 2-го рода.

Цитирование. Пулькина Л.С. Задача с нелокальными интегральными условиями I рода для уравнения в частных производных четвертого порядка // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 30–44. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Пулькина Л.С., 2024

Людмила Степановна Пулькина — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными продолжают привлекать внимание исследователей. Интерес к этому классу задач обоснован необходимостью построения математических моделей, отвечающих потребностям современного естествознания [1; 2]. Вскоре после выхода статей [3; 4], положивших начало систематическим исследованиям нелокальных задач с интегральными условиями, появился ряд работ, в которых в том или ином качестве присутствуют нелокальные интегральные условия: либо вместо граничных [5–16], либо в качестве условий переопределения в обратных задачах [17; 18]. В большинстве из упомянутых работ изучены задачи для параболических и гиперболических уравнений второго порядка. К настоящему времени появились статьи, в которых исследуются нелокальные задачи для уравнений

порядка выше второго. Отметим статью [19], в которой рассмотрена нелокальная задача для уравнения четвертого порядка и, кроме того, имеется значительный список литературы. Исследования показали, что классические методы обоснования разрешимости начально-краевых задач не могут быть применены без существенных модификаций, если вместо краевых или начальных условий (или некоторых из них) заданы нелокальные условия. Основное содержание статьи представляет собой демонстрацию предложенного нами метода, который позволил доказать существование единственного решения задачи с нелокальными интегральными условиями I рода, ядра которых зависят как от x , так и от t , для уравнения четвертого порядка. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x - (b(x)u_{tx})_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1.1)$$

в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, предполагая, что коэффициенты уравнения и его правая часть — достаточно гладкие функции, $a(x, t) \geq a_0 > 0$ в \bar{Q}_T , $b(x) \geq b_0 > 0$, и поставим для него следующую задачу.

Задача 1. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (1.2)$$

$$\int_0^l K_i(x, t)u(x, t)dx = h_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Функции $f(x, t)$, $K_i(x, t)$, $h_i(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы в соответствующих областях и достаточно гладки там. Ниже мы приведем четкие требования и условия на эти функции. Будем также предполагать выполненными условия согласования

$$\int_0^l K_i(x, 0)\varphi(x)dx = h_i(0), \quad \int_0^l K_i(x, 0)\psi(x)dx + \int_0^l K_{it}(x, 0)\varphi(x)dx = h'_i(0). \quad (1.4)$$

Условие (1.3) относится к нелокальным интегральным условиям первого рода. Известно [20; 21], что интегральные условия первого рода приводят к значительным трудностям при обосновании разрешимости задач, отчасти аналогичных тем, что возникают при решении интегральных уравнений первого рода.

Интегральные условия, содержащие и внеинтегральные слагаемые, в которых присутствуют следы искомого решения и его производной по нормали к границе, называют условиями второго рода. Для исследования нелокальных задач с интегральными условиями второго рода, содержащими производные по пространственной переменной, разработан эффективный метод, позволяющий обосновать разрешимость задачи в пространстве Соболева [20; 21]. При его реализации удается использовать многие стандартные приемы вывода априорных оценок, на которых в основном базируется доказательство как единственности, так и существования решения. В случае одной пространственной переменной трудность, которую доставляет интегральное условие первого рода, можно легко обойти с помощью приема [20], позволяющего перейти от условия вида (1.3) к условию, содержащему производную по направлению нормали.

Мы используем здесь модифицированную версию этого приема и преодолеем на пути его реализации и другую трудность, связанную с тем, что в нашей статье, в отличие, например, от [14], ядра интегральных условий зависят как от x , так и от t .

2. Основной результат

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} a, a_x, a_t, c \in C(\bar{Q}_T), \quad b \in C^1[0, l], \quad \varphi \in W_2^1(0, l), \quad \psi \in L_2(0, l), \\ f \in L_2(Q_T), \quad h_i \in C^2[0, T], \quad K_i \in C^2(\bar{Q}_T), \quad K_{itxx} \in C(\bar{Q}_T), \\ \Delta = K_1(0, t)K_2(l, t) - K_1(l, t)K_2(0, t) \neq 0. \end{aligned}$$

Мы докажем существование единственного обобщенного решения поставленной задачи 1, определение которого будет дано ниже, в несколько этапов по следующей схеме.

1. Покажем, что условия первого рода (1.3) эквивалентны при выполнении условий согласования (1.4) интегральным условиям второго рода.

2. Введем понятие обобщенного решения задачи с нелокальным условием второго рода, которую будем называть задача 2.

3. Докажем единственность обобщенного решения задачи 2.

4. Докажем существование обобщенного решения задачи 2.

5. Сформулируем в терминах задачи 1 условия существования ее единственного обобщенного решения.

Приступим к реализации нашего плана.

Эквивалентность нелокальных условий

Лемма. Если $u(x, t)$ — решение задачи 1, выполняются условия согласования (1.4) и для всех $t \in [0, T]$

$$\Delta = K_1(0, t)K_2(l, t) - K_1(l, t)K_2(0, t) \neq 0, \quad (K_{ix}(x, t)b(x))_x = -K_i(x, t),$$

то условия (1.3) эквивалентны интегральным условиям второго рода вида

$$a(0, t)u_x(0, t) = M_1(u) + g_1(t),$$

$$a(l, t)u_x(l, t) = M_2(u) + g_2(t).$$

Здесь $M_i(u)$ представляют собой соотношения, содержащие искомое решение $u(x, t)$, его следы на $x = 0$, $x = l$, интегралы от искомого решения, но не содержат производных по пространственной переменной, $g_i(t)$ выражаются через известные функции. Мы сознательно не выписываем сразу представления $M_i(u)$, и не только по причине их громоздкости. В процессе доказательства леммы мы продемонстрируем их вывод, укажем возможные варианты, обоснуем сделанный выбор и обсудим дальнейшее обобщение.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи 1.

Дифференцируя равенство (1.3) по t дважды, получим

$$\int_0^l K_i(x, t)u_{tt}(x, t)dx + 2 \int_0^l K_{it}(x, t)u_t(x, t)dx + \int_0^l K_{itt}(x, t)u(x, t)dx = h_i''(t). \quad (2.1)$$

Так как по предположению $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.3), то

$$u_{tt} = (au_x)_x + (bu_{tx})_x - cu + f.$$

Подставив это равенство в (2.1), мы получаем возможность проинтегрировать слагаемое, содержащее вторые производные от искомого решения, что и сделаем. В результате получим из (2.1):

$$\begin{aligned} & K_1(l, t)a(l, t)u_x(l, t) - K_1(0, t)a(0, t)u_x(0, t) + K_1(l, t)b(l)u_{tx}(l, t) - \\ & - K_1(0, t)b(0)u_{tx}(0, t) - K_{1x}(l, t)a(l, t)u(l, t) + K_{1x}(0, t)a(0, t)u(0, t) + \\ & + K_{1x}(0, t)b(0)u_{tt}(0, t) - K_{1x}(l, t)b(l)u_{tt}(l, t) + \\ & + \int_0^l [(K_{1x}a)_x - K_1c + 2K_{1tt}]u(x, t)dx + \\ & + 4 \int_0^l K_{1t}(x, t)u_t(x, t)dx = 2h_1''(t) - \int_0^l K_1(x, t)f(x, t)dx, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & K_2(l, t)a(l, t)u_x(l, t) - K_2(0, t)a(0, t)u_x(0, t) + K_2(l, t)b(l)u_{tx}(l, t) - \\ & - K_2(0, t)b(0)u_{tx}(0, t) - K_{2x}(l, t)a(l, t)u(l, t) + K_{2x}(0, t)a(0, t)u(0, t) + \\ & + K_{2x}(0, t)b(0)u_{tt}(0, t) - K_{2x}(l, t)b(l)u_{tt}(l, t) + \\ & + \int_0^l [(K_{2x}a)_x - K_2c + 2K_{2tt}]u(x, t)dx + \\ & + 2 \int_0^l K_{2t}(x, t)u_t(x, t)dx = 2h_2''(t) - \int_0^l K_2(x, t)f(x, t)dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим равенства (2.2) и (2.3) как систему уравнений относительно $a(0, t)u_x(0, t) + bu_{tx}(0, t)$, $a(l, t)u_x(l, t) + bu_{tx}(l, t)$ и, учитывая условие

$\Delta = K_1(0, t)K_2(l, t) - K_1(l, t)K_2(0, t) \neq 0$, решим ее. Получим

$$\begin{aligned} & a(0, t)u_x(0, t) + bu_{tx}(0, t) = \alpha_{11}(t)u(0, t) + \alpha_{12}(t)u(l, t) + \beta_{11}(t)u_{tt}(0, t) + \\ & + \beta_{12}(t)u_{tt}(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)u(x, \tau)dx + \int_0^l P_1(x, t)u_t dx + g_1(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$a(l, t)u_x(l, t) + bu_{tt}(l, t) = \alpha_{21}(t)u(0, t) + \alpha_{22}(t)u(l, t) + \beta_{21}(t)u_{tt}(0, t) + \beta_{22}(t)u_{tt}(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)u(x, \tau)dx + \int_0^l P_2(x, t)u_t dx + g_1(t), \quad (2.5)$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(t) &= \frac{K_{1x}(0, t)K_2(l, t) - K_{2x}(0, t)K_1(l, t)}{\Delta} a(0, t), \\ \alpha_{12}(t) &= \frac{K_{2x}(l, t)K_1(l, t) - K_{1x}(l, t)K_2(l, t)}{\Delta} a(l, t), \\ \alpha_{21}(t) &= \frac{K_{1x}(0, t)K_2(0, t) - K_{2x}(0, t)K_1(0, t)}{\Delta} a(0, t), \\ \alpha_{22}(t) &= \frac{K_{2x}(l, t)K_1(0, t) - K_{1x}(l, t)K_2(0, t)}{\Delta} a(l, t), \\ \beta_{11}(t) &= \frac{K_{1x}(0, t)K_2(l, t) - K_{2x}(0, t)K_1(l, t)}{\Delta} b(0), \\ \beta_{12}(t) &= \frac{K_{2x}(l, t)K_1(l, t) - K_{1x}(l, t)K_2(l, t)}{\Delta} b(l), \\ \beta_{21}(t) &= \frac{K_{1x}(0, t)K_2(0, t) - K_{2x}(0, t)K_1(0, t)}{\Delta} b(0), \\ \beta_{22}(t) &= \frac{K_{2x}(l, t)K_1(0, t) - K_{1x}(l, t)K_2(0, t)}{\Delta} b(l), \\ \tilde{K}_1 &= (K_{1x}(x, t)a(x, t))_x - K_1(x, t)c(x, t) + 2K_{1tt}(x, t), \\ \tilde{K}_2 &= (K_{2x}(x, t)a(x, t))_x - K_2(x, t)c(x, t) + 2K_{2tt}(x, t), \\ H_1(x, t) &= \frac{\tilde{K}_1(x, t)K_2(l, t) - \tilde{K}_2(x, t)K_1(l, t)}{\Delta}, \\ H_2(x, t) &= \frac{\tilde{K}_1(x, t)K_2(0, t) - \tilde{K}_2(x, t)K_1(0, t)}{\Delta}, \\ P_1(x, t) &= 2 \frac{K_{1t}(x, t)K_2(l, t) - K_{2t}(x, t)K_1(l, t)}{\Delta}, \\ P_2(x, t) &= 2 \frac{K_{1t}(x, t)K_2(0, t) - K_{2t}(x, t)K_1(0, t)}{\Delta}, \\ g_1(t) &= \frac{1}{\Delta} [h_1''(t)K_2(l, t) - h_2''(t)K_1(l, t) - \\ &\quad - \int_0^l [K_1(x, t)K_2(l, t) - K_2(x, t)K_1(l, t)]f(x, t)dx], \\ g_2(t) &= \frac{1}{\Delta} [h_1''(t)K_2(0, t) - h_2''(t)K_1(0, t) - \\ &\quad - \int_0^l [K_1(x, t)K_2(0, t) - K_2(x, t)K_1(0, t)]f(x, t)dx]. \end{aligned}$$

Пусть теперь $u(x, t)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (2.4), (2.5), и выполняются условия согласования (1.4). Заметим, что если выполняются (2.4), (2.5), то выполняются и (2.2), (2.3), из которых и получены (2.4), (2.5). Умножив (1.1) на $K_i(x, t)$ и проинтегрировав полученные равенства по промежутку $(0, l)$ после элементарных, но громоздких преобразований, в которых учтены (2.2), (2.3), приходим к равенствам

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\int_0^l K_i(x, t)u(x, t)dx - h_i(t) \right] = 0. \quad (2.6)$$

Мы получили два уравнения второго порядка относительно функций $\int_0^l K_i(x, t)u(x, t)dx - h_i(t)$, $i = 1, 2$. В силу начальных данных (1.2) и условий согласования (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l K_i(x, 0)u(x, 0)dx - h_i(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_0^l K_i(x, t)u(x, t)dx|_{t=0} - h_i'(0) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^l K_i(x, t)u(x, t)dx - h_i(t) = 0$$

как решение однородной задачи Коши. Это означает, что выполняются условия (1.3) и лемма доказана

Утверждение доказанной леммы дает возможность вместо задачи 1 с нелокальными условиями (1.3) изучать задачу с условиями (2.4), (2.5), которые содержат производные по пространственной переменной. Именно их присутствие в нелокальном условии позволит получить оценки, с помощью которых мы и докажем однозначную разрешимость задачи. Действительно, для обоснования разрешимости задач с нелокальными условиями вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} + \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t)dy = h(x, t), x \in \partial\Omega$$

разработан и не раз применен эффективный метод [23; 9; 21]. Однако в нашем случае все не так просто, так как в правых частях равенств (2.4), (2.5) присутствуют следы производных второго порядка по t , что существенно отличает ситуацию от той, которая имеет место в отмеченных статьях. Мы покажем, что это не препятствует обоснованию разрешимости упомянутым методом, если предпринять некоторые меры.

Во избежание громоздких выражений введем обозначения

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \alpha_{11}(t)u(0, t) + \alpha_{12}(t)u(l, t) + \beta_{11}(t)u_{tt}(0, t) + \beta_{12}(t)u_{tt}(l, t) + \\ &+ \int_0^l H_1(x, t)u(x, \tau)dx + \int_0^l P_1(x, t)u_t dx, \\ B_2(u) &= \alpha_{21}(t)u(0, t) + \alpha_{22}(t)u(l, t) + \beta_{21}(t)u_{tt}(0, t) + \beta_{22}(t)u_{tt}(l, t) + \\ &+ \int_0^l H_2(x, t)u(x, \tau)dx + \int_0^l P_2(x, t)u_t dx. \end{aligned}$$

Учитывая доказанное в лемме 1 утверждение об эквивалентности нелокальных условий, перейдем к задаче с нелокальными интегральными условиями второго рода

$$\begin{aligned} a(0, t)u_x(0, t) + bu_{tt}(0, t) &= B_1(u) + g_1(t), \\ a(l, t)u_x(l, t) + bu_{tt}(l, t) &= B_2(u) + g_2(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Задача 2. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и (2.7).

Введем понятие решения задачи 2.

Следуя известной схеме [25] и предполагая, что $u(x, t)$ является классическим решением задачи 2, рассмотрим равенство

$$\int_0^T \int_0^l (u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{tt})_x + cu)v(x, t)dxdt = \int_0^T \int_0^l f(x, t)v(x, t)dxdt,$$

где $v(x, t)$ достаточно гладкая функция и $v(x, T) = 0$.

Преобразовав это равенство, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + au_x v_x - bu_{xt} v_{xt} + cuv)dxdt + \\ &+ \int_0^T v(0, t)[a(0, t)u_x(0, t) + b(0)u_{tt}(0, t)]dt - \\ &- \int_0^T v(l, t)[a(l, t)u_x(l, t) + b(l)u_{tt}(l, t)]dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая теперь условия (2.7), запишем полученное равенство так:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + au_x v_x - bu_{xt} v_{xt} + cuv)dxdt + \\ &+ \int_0^T v(0, t)B_1(u)dt - \int_0^T v(l, t)B_2(u)dt = \\ &= \int_0^T \int_0^l f v dx dt + \int_0^T v(0, t)g_1(t)dt + \int_0^T v(l, t)g_2(t)dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$W(Q_T) = \{u(x, t) : u \in W_2^1(Q_T), u_{xt} \in L_2(Q_T)\};$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v(x, t) : v \in W(Q_T), v(x, T) = 0\}.$$

Нашей целью является доказательство разрешимости задачи 2 в пространстве $W(Q_T)$, поэтому полученное выше равенство пока не может служить основой определения решения в этом пространстве, так как содержит следы производных второго и третьего порядков. Чтобы преодолеть это затруднение, преобразуем слагаемые, содержащие эти производные, интегрируя по частям, в

$$\int_0^T v(0, t)B_1(u)dt, \quad \int_0^T v(l, t)B_2(u)dt.$$

Приведем эти выкладки для первого слагаемого:

$$\int_0^T v(0, t)u_{tt}(0, t)\beta_{11}dt = - \int_0^T v_t(0, t)u_t(0, t)\beta_{11}dt - \int_0^T v(0, t)u_t(0, t)\beta'_{11}(t)dt,$$

$$\int_0^T v(0, t)u_{tt}(l, t)\beta_{12}dt = - \int_0^T v_t(0, t)u_t(l, t)\beta_{12}dt - \int_0^T v(0, t)u_t(l, t)\beta'_{12}(t)dt,$$

В результате сделанных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T v(0, t)B_1(u)dt = \\ &= \int_0^T v(0, t)[\alpha_{11}u(0, t) + \alpha_{12}u(l, t) - \beta'_{11}u_t(0, t) - \beta'_{12}u_t(l, t)]dt - \\ & \quad - \int_0^T v_t(0, t)[\beta_{11}(t)u_t(0, t) + \beta_{12}u_t(l, t)]dt + \\ & \quad + \int_0^T v(0, t)[\int_0^l H_1(x, t)u(x, t)dx + \int_0^l P_1(x, t)u_t(x, t)dx]dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Совершенно аналогично получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T v(l, t)B_2(u)dt = \\ &= \int_0^T v(l, t)[\alpha_{21}u(0, t) + \alpha_{22}u(l, t) - \beta'_{21}u_t(0, t) - \beta'_{22}u_t(l, t)]dt - \\ & \quad - \int_0^T v_t(l, t)[\beta_{21}(t)u_t(0, t) + \beta_{22}u_t(l, t)]dt + \\ & \quad + \int_0^T v(l, t)[\int_0^l H_2(x, t)u(x, t)dx + \int_0^l P_2(x, t)u_t(x, t)dx]dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Определение. Решением задачи 2 будем называть функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{xt} v_{xt} + c u v) dx dt + \int_0^T v(0, t)B_1(u)dt - \int_0^T v(l, t)B_2(u)dt = \\ &= \int_0^T \int_0^l f v dx dt - \int_0^T v(0, t)g_1(t)dt + \int_0^T v(l, t)g_2(t)dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

для любой $v \in \hat{W}(Q_T)$, а второй и третий интегралы в левой части (2.10) понимаются в смысле (2.8) и (2.9).

Теорема 1.

Если

$$\begin{aligned} & a, a_x, a_t, c \in C(\bar{Q}_T), \quad \alpha_{ij}, \in C^1[0, T], \quad \beta_{ij} \in C^2[0, T], \quad i, j = 1, 2, \\ & H_i, P_i, P_{ix} \in L_2(0, l) \quad \forall t \in [0, T], \quad g_i \in L_2(0, T), \\ & \beta_{12} + \beta_{21} = 0, \quad \beta_{11}\xi^2 - 2\beta_{12}\xi\eta - \beta_{22}\eta^2 \geq 0, \end{aligned}$$

то существует единственное обобщенное решение задачи 2.

Доказательство.

Покажем, что существует не более одного решения задачи 2. Предположим, что это не так. Тогда функция $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, разность предполагаемых различных решений задачи 2, удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{tx} v_{tx} + c u v) dx dt + \int_0^T v(0, t) B_1(u) dt - \int_0^T v(l, t) B_1(u) dt = 0. \quad (2.11)$$

Выберем функцию $v(x, t)$ в (2.11) следующим образом:

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_{\tau}^t u(x, \eta) d\eta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Преобразуем (2.11) с выбранной функцией, учитывая, что $v_t(x, t) = u(x, t)$, $v(x, \tau) = 0$. Начнем с интегрирования первых двух слагаемых под знаком интеграла слева и получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l [u^2(x, \tau) + b(x) u_x^2(x, \tau) + a(x, 0) v_x^2(x, 0)] dx &= \int_0^{\tau} \int_0^l c u v dx dt - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_0^l a_t v_x^2 dx dt + \int_0^{\tau} v(0, t) B_1(u) dt - \int_0^{\tau} v(l, t) B_2(u) dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

На первый взгляд очевиден следующий шаг в доказательстве — сделать оценку правой части (2.12). Но сразу это сделать нельзя, так как соотношения $B_i(u)$ содержат следы искомого решения, что пока не позволяет получить полезную оценку в нужном пространстве. Поэтому сделаем некоторые преобразования в процессе оценки правой части равенства (2.12). Запишем их постепенно и подробно, учитывая введенные обозначения.

Рассмотрим правые части (2.8), (2.9) и проведем некоторые вычисления с учетом представления выбранной функции $v(x, t)$.

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^{\tau} \alpha_{11}(t) v(0, t) u(0, t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \alpha'_{11}(t) v^2(0, t) dt - \frac{1}{2} \alpha_{11}(0) v^2(0, 0); \\ I_{12} &= \int_0^{\tau} \alpha_{12} v(0, t) v_t(l, t) dt; \\ I_{13} &= -\int_0^{\tau} \beta_{11}(t) v_t(0, t) u_t(0, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \beta'_{11}(t) u^2(0, t) dt - \frac{1}{2} \beta_{11}(\tau) u^2(0, \tau); \\ I_{14} &= -\int_0^{\tau} \beta_{12}(t) v_t(0, t) u_t(l, t) dt; \\ I_{15} &= -\int_0^{\tau} v(0, t) u_t(0, t) \beta'_{11}(t) dt = \int_0^{\tau} u^2(0, t) \beta'_{11}(t) dt + \int_0^{\tau} v(0, t) u(0, t) \beta''_{11}(t) dt; \\ I_{16} &= -\int_0^{\tau} v(0, t) u_t(l, t) \beta'_{12}(t) dt = \int_0^{\tau} u(0, t) u(l, t) \beta'_{12}(t) dt + \int_0^{\tau} v(0, t) u(l, t) \beta''_{12}(t) dt; \\ I_{17} &= \int_0^{\tau} v(0, t) \int_0^l P_1(x, t) u_t(x, t) dx dt = -\int_0^{\tau} u(0, t) \int_0^l P_1(x, t) u(x, t) dx dt - \\ &\quad - \int_0^{\tau} \int_0^l P_{1t}(x, t) u(x, t) dx dt; \\ I_{21} &= -\int_0^{\tau} \alpha_{21} v(l, t) u(0, t) dt = \int_0^{\tau} \alpha_{21} v(0, t) v_t(l, t) dt + \int_0^{\tau} \alpha'_{21}(t) v(l, t) v(0, t) dt + \\ &\quad + \alpha_{21}(0) v(0, 0) v(l, 0); \\ I_{22} &= -\int_0^{\tau} \alpha_{22}(t) v(l, t) u(l, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \alpha'_{22} v^2(l, t) dt + \frac{1}{2} \alpha_{22}(0) v^2(l, 0); \\ I_{23} &= \int_0^{\tau} \beta_{21}(t) v_t(l, t) u_t(0, t) dt = -\int_0^{\tau} \beta'_{21}(t) v_t(l, t) v_t(0, t) dt - \int_0^{\tau} \beta_{21}(t) v_t(0, t) u_t(l, t) dt + \\ &\quad + \beta_{21}(\tau) u(l, \tau) u(0, \tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{24} &= \int_0^\tau \beta_{22}(t)v_t(l,t)u_t(l,t)dt = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \beta'_{22}u^2(l,t)dt + \frac{1}{2}\beta_{22}(\tau)u^2(l,\tau); \\
 I_{25} &= \int_0^\tau v(l,t)u_t(0,t)\beta'_{21}(t)dt = - \int_0^\tau u(0,t)u(l,t)\beta'_{21}(t)dt - \int_0^\tau v(l,t)u(0,t)\beta''_{21}(t)dt; \\
 I_{26} &= \int_0^\tau v(l,t)u_t(l,t)\beta'_{22}(t)dt = - \int_0^\tau u^2(l,t)\beta'_{22}(t)dt - \int_0^\tau v(l,t)u(l,t)\beta''_{22}(t)dt; \\
 I_{27} &= - \int_0^\tau v(l,t) \int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dxdt = \int_0^\tau v_t(l,t) \int_0^l P_2(x,t)u(x,t)dxdt + \\
 &\quad + \int_0^\tau v(l,t) \int_0^l P_{2t}u(x,t)dxdt.
 \end{aligned}$$

Результаты сделанных преобразований нужно подставить в (2.12), но мы не будем это делать в явном виде, а воспользуемся введенными обозначениями и заметим, что так как по условию $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$, то $I_{14} + I_{23} = \int_0^\tau \beta'_{21}(t)u(0,t)u(l,t)dt - \beta_{21}(\tau)u(0,\tau)u(l,\tau)$, а так как $\beta_{11}\xi^2 + 2\beta_{12}\xi\eta - \beta_{22}\eta^2 \geq 0$, то из равенства (2.12) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
 \int_0^l [u^2(x,\tau) + bu_x^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx &\leq 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt \right| + \int_0^\tau \int_0^l |a_t|v_x^2dxdt + \\
 &+ \int_0^\tau |\alpha'_{11}|(t)v^2(0,t)dt + 2 \left| \int_0^\tau \alpha'_{12}v(0,t)v(l,t)dt \right| + \int_0^\tau |\alpha'_{22}|v^2(l,t)dt + \\
 &\quad + |\alpha_{11}|(0)v^2(0,0) + 2|\alpha_{21}(0)v(0,0)v(l,0)| + |\alpha_{22}|v^2(l,0) + \\
 &+ \int_0^\tau |\beta'_{11}|u^2(0,t)dt + 2 \left| \int_0^\tau \beta'_{21}u(0,t)u(l,t)dt \right| + \int_0^\tau |\beta'_{22}(t)u^2(l,t)dt| + \\
 &\quad + 2 \left| \int_0^\tau v(0,t)u(0,t)\beta''_{11}(t)dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau v(0,t)u(l,t)\beta''_{12}(t)dt \right| + \\
 &\quad + 2 \left| \int_0^\tau v(l,t)u(0,t)\beta''_{21}(t)dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau v(l,t)u(l,t)\beta''_{22}(t)dt \right| + \\
 &+ 2 \left| \int_0^\tau u(0,t) \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dxdt \right| + 2 \left| \int_0^\tau v(0,t) \int_0^l P_{1t}(x,t)u(x,t)dxdt \right| + \\
 &+ 2 \left| \int_0^\tau u(l,t) \int_0^l P_2(x,t)u(x,t)dxdt \right| + 2 \left| \int_0^\tau v(l,t) \int_0^l P_{2t}(x,t)u(x,t)dxdt \right| + \\
 &+ 2 \left| \int_0^\tau v(0,t) \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt \right| + 2 \left| \int_0^\tau v(l,t) \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt \right| + \\
 &\quad + 2 \left| \int_0^\tau \alpha_{21}v(0,t)u(l,t)dt \right|. \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Теперь уже легко вывести нужную оценку. Для этого нам понадобятся неравенства Коши, Коши — Буняковского, неравенства

$$\begin{aligned}
 w^2(\xi_i,t) &\leq 2l \int_0^l w_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l} \int_0^l w^2(x,t)dx, \\
 w^2(\xi_i,t) &\leq \varepsilon \int_0^l w_x^2(x,t)dx + c(\varepsilon) \int_0^l w^2(x,t)dx, \\
 \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = l, \quad w &\in W_2^1(Q_T),
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

которые выводятся так же, как и в ([25] (6.24, с. 77), а также неравенство

$$v^2(x,t) \leq \tau \int_0^\tau u^2(x,t)dt, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.15}$$

которое следует из представления выбранной выше функции $v(x,t)$.

Условия теоремы гарантируют существование таких положительных чисел $a_0, a_1, c_0, b_0, b_1, \kappa, \sigma$, что

$$\begin{aligned}
 a(x,t) \geq a_0, \quad b(x) \geq b_0, \quad \max_{Q_T} |a(x,t), a_t(x,t)| &\leq a_1, \quad \max_{Q_T} |c(x,t)| \leq c_0, \\
 \max_{[0,T]} |\alpha_{ij}(t), \beta_{ij}(t), \alpha'_{ij}(t), \beta'_{ij}(t), \beta''_{ij}(t)| &\leq b_1, \quad i, j = 1, 2, \\
 \max_{[0,T]} \int_0^l H_i^2(x,t)dx \leq \kappa, \quad \max_{Q_T} \int_0^l P_i^2(x,t,\tau)d\tau &\leq \sigma, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Учитывая выписанные ограничения и применяя к слагаемым, содержащим произведения, неравенства Коши и Коши — Буняковского, получим из (2.13), принимая также во внимание условие (2.15), неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^l [u^2(x, \tau) + a_0 v_x^2(x, 0) + b_0 u_x^2(x, \tau)] dx \leq C_1 \int_0^\tau \int_0^l [u^2 + v^2 + v_x^2] dx dt + \\ + C_2 \int_0^\tau [u^2(0, t) + u^2(l, t) + v^2(0, t) + v^2(l, t)] dt + C_3 [v^2(0, 0) + v^2(l, 0)], \end{aligned} \quad (2.16)$$

где C_1, C_2, C_3 выражаются через определенные выше числа $a_0, a_1, c_0, b_0, b_1, \kappa, \sigma$ элементарным образом, которые из-за большого количества слагаемых слишком громоздки, и мы их не приводим.

Теперь оценим слагаемые правой части последнего неравенства, содержащие следы функции $v(x, t)$ на боковых границах, применив для этого неравенства (2.14) и (2.15).

$$\begin{aligned} \int_0^\tau v^2(0, t) dt &\leq 2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l v^2(x, t) dx dt \leq \\ &\leq 2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt + \frac{2}{l} \tau^2 \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t) dx dt; \\ \int_0^\tau v^2(l, t) dt &\leq 2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l v^2(x, t) dx dt \leq \\ &\leq 2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt + \frac{2}{l} \tau^2 \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t) dx dt; \\ v^2(0, 0) &\leq \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + c(\varepsilon) \int_0^l v^2(x, 0) dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + c(\varepsilon) \tau \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t) dx; \\ v^2(l, 0) &\leq \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + c(\varepsilon) \int_0^l v^2(x, 0) dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + c(\varepsilon) \tau \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t) dx \\ \int_0^\tau u^2(0, t) dt &\leq 2l \int_0^\tau \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t) dx dt, \\ \int_0^\tau u^2(l, t) dt &\leq 2l \int_0^\tau \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

С учетом полученных неравенств из (2.16) следует

$$\begin{aligned} \int_0^l [u^2(x, \tau) + a_0 v_x^2(x, 0) + b_0 u_x^2(x, \tau)] dx \leq \\ \leq C \int_0^\tau \int_0^l [u^2 + u_x^2 + v_x^2] dx dt + 2C_3 \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где C выражается через C_1, C_2, C_3, l, τ . Выберем ε так, чтобы $a_0 - 2C_3 \varepsilon > 0$, положив для определенности $\varepsilon = \frac{a_0}{4C_3}$, и перенесем последний интеграл в (2.15) в левую часть неравенства. Тогда

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + \frac{a_0}{2} v_x^2(x, 0) + b_0 u_x^2(x, \tau)] dx \leq C \int_0^\tau \int_0^l [u^2 + v_x^2 + u_x^2] dx dt.$$

Последнее препятствие на пути к нужной оценке в виде $v_x^2(x, 0)$ преодолеем, введя функцию $w(x, t) = \int_0^t u_x(x, \eta) d\eta$. Из представления функции $v(x, t)$ следует

$$v_x(x, t) = \int_\tau^t u_x(x, \eta) d\eta = w(x, t) - w(x, \tau), \quad v_x(x, 0) = w(x, \tau).$$

Тогда, применив неравенство Коши для оценки $(w(x, t) - w(x, \tau))^2$, получим

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + \frac{a_0}{2} w^2(x, \tau) + b_0 u_x^2(x, \tau)] dx \leq$$

$$\leq 2C \int_0^\tau \int_0^l [u^2 + u_x^2 + w^2] dx dt + 2C\tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx.$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $\nu = \frac{a_0}{2} - 2C\tau > 0$, перенесем последнее слагаемое правой части неравенства в левую его часть и получим неравенство

$$m_0 \int_0^l [u^2(x, \tau) + w^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau)] dx \leq 2C \int_0^\tau \int_0^l [u^2 + w^2 + u_x^2] dx dt,$$

где $m_0 = \min\{1, \nu, b_0\}$, справедливое для всех $\tau \in [0, \frac{a_0}{4C}]$, из которого в силу леммы Гронуолла [24] следует

$$m_0 \int_0^l [u^2(x, \tau) + w^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau)] dx \leq 0,$$

откуда $u(x, t) = 0$ в $[0, \frac{a_0}{4C}]$. Следуя процедуре, описанной в [25] (с. 212), покажем, что $u(x, t) = 0$ и в $[\frac{a_0}{4C}, \frac{a_0}{2C}]$, и, продолжая этот процесс, на всем промежутке $[0, T]$.

Это и означает, что предположение о существовании двух различных решений задачи 2 неверно, и, стало быть, единственность решения доказана.

Приступим к доказательству **существования** решения, для чего воспользуемся методом Галеркина.

Пусть $\{w_k(x)\}$ — произвольная система функций из $C^2[0, l]$, линейно независимая и полная в $W_2^1(0, l)$.

Будем искать приближенные решения задачи 2 в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k(x) \tag{2.18}$$

из соотношений

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u_{tt}^m w_i + a u_x^m w_i' + b u_{ttt}^m w_i' + c u^m w_i) dx + w_i(0) B_1(u^m) - w_i(l) B_2(u) = \\ & = \int_0^l f w_i dx - w_i(0) F_1(t) + w_i(l) F_2(t), \quad c_{mk}(0) = c'_{mk}(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \alpha_{11}(t) u(0, t) + \alpha_{12}(t) u(l, t) + \beta_{11}(t) u_{tt}(0, t) + \beta_{12}(t) u_{tt}(l, t) + \\ &+ \int_0^l H_1(x, t) u(x, \tau) dx + \int_0^l P_1(x, t) u_t dx, \\ B_2(u) &= \alpha_{21}(t) u(0, t) + \alpha_{22}(t) u(l, t) + \beta_{21}(t) u_{tt}(0, t) + \beta_{22}(t) u_{tt}(l, t) + \\ &+ \int_0^l H_2(x, t) u(x, \tau) dx + \int_0^l P_2(x, t) u_t dx. \end{aligned}$$

Подставив (2.18) в (2.19), убеждаемся в том, что (2.19) представляет собой систему дифференциальных уравнений относительно $c_{mk}(t)$. Действительно, подстановка (2.18) в (2.19) дает

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u_{tt}^m w_i + a u_x^m w_i' + b u_{ttt}^m w_i' + c u^m w_i) dx = \sum_{k=1}^m c''_{mk}(t) \left(\int_0^l w_k w_i dx + \right. \\ & + \beta_{11} w_i(0) w_k(0) + \beta_{12} w_i(0) w_k(l) - \beta_{21} w_i(l) w_k(0) - \beta_{22} w_i(l) w_k(l) \Big) + \\ & + \sum_{k=1}^m c'_k(t) \left(w_i(0) \int_0^l P_1(x, t) w_k(x) dx - w_i(l) \int_0^l P_2(x, t) w_k(x) dx \right) + \\ & + \sum_{k=1}^m c_k(t) \left(\int_0^l [a w'_k w'_i + c w_i w_k] dx + \alpha_{11} w_i(0) w_k(0) + \alpha_{12} w_i(0) w_k(l) - \right. \\ & \quad \left. - \alpha_{21} w_i(l) w_k(0) - \alpha_{22} w_i(l) w_k(l) + \right. \\ & \quad \left. + w_i(0) \int_0^l (H_1 + P_1) w_k(x) dx - w_i(l) \int_0^l (H_2 + P_2) w_k(x) dx \right) = \\ & = \int_0^l f w_i dx - w_i(0) F_1(t) + w_i(l) F_2(t). \end{aligned}$$

Введя очевидное обозначение, получим

$$\sum_{k=1}^m A_{ik} c''_k(t) + D_{ik} c'_k(t) + d_{ik} c_k(t) = G_i(t), \quad c_k(0) = c'_k(0) = 0.$$

Эта задача Коши однозначно разрешима, Действительно, матрица коэффициентов при старших производных невырожденная в силу линейной независимости функций $w_i(x)$ и условий $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$ и $\beta_{11}\xi^2 + 2\beta_{12}\xi\eta - \beta_{22}\eta^2 \geq 0$. Условия теоремы гарантируют ограниченность коэффициентов и правой части уравнений.

Таким образом, последовательность приближенных решений задачи 2 построена.

На следующем этапе доказательства существования решения выведем априорную оценку. Для этого умножим каждое из соотношений (2.19) на свою $c'_{mi}(t)$, просуммируем по i от 1 до m , а затем проинтегрируем по $t \in (0, \tau)$. Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b u_{xtt}^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m) dx dt + \\ & + \int_0^\tau u_t^m(0, t) [\alpha_{11}(t) u(0, t) + \alpha_{12}(t) u(l, t) + \beta_{11}(t) u_{tt}(0, t) + \beta_{12} u_{tt}(l, t)] dt - \\ & - \int_0^\tau u_t^m(l, t) [\alpha_{21}(t) u(0, t) + \alpha_{22}(t) u(l, t) + \beta_{21}(t) u_{tt}(0, t) + \beta_{22} u_{tt}(l, t)] dt + \\ & + \int_0^\tau u_t^m(0, t) \left(\int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx + \int_0^l P_1(x, t) u_t^m(x, t) dx \right) dt - \\ & - \int_0^\tau u_t^m(l, t) \left(\int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx + \int_0^l P_2(x, t) u_t^m(x, t) dx \right) dt = \\ & = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt - \int_0^\tau F_1(t) u_t^m(0, t) dt + \int_0^\tau F_2(t) u_t^m(l, t) dt. \end{aligned}$$

Для вывода оценки применим в основном ту же технику, что и при доказательстве единственности решения, обратив внимание лишь на некоторые детали.

Первое слагаемое преобразуется стандартным образом с помощью интегрирования по частям

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b u_{xtt}^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m) dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + a (u_x^m(x, \tau))^2 + b (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + \\ & + \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие слагаемые и заметим, что в некоторых из них под знаком интеграла содержатся следы производных второго порядка искомого решения по t , что не позволит обойтись неравенством Коши для вывода оценки в пространстве $W_2^1(Q_T)$. Поэтому сделаем небольшие преобразования, интегрируя по частям и учитывая, что $u^m(x, 0) = 0$. После выполнения этих элементарных преобразований и учтя условие $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + a (u_x^m(x, \tau))^2 + b (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx = \\ & = -2 \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt + \\ & + [\alpha_{11}(\tau) (u^m(0, \tau))^2 - 2\alpha_{21}(\tau) u^m(0, \tau) u^m(l, \tau) - \alpha_{22} (u^m(l, \tau))^2] - \\ & - [\beta_{11}(\tau) (u_t^m(0, \tau))^2 - 2\beta_{21}(\tau) u_t^m(0, \tau) u_t^m(l, \tau) - \beta_{22} (u_t^m(l, \tau))^2] + \\ & + \int_0^\tau [\alpha'_{11} (u^m(0, t))^2 - 2\alpha'_{21} u^m(0, t) u^m(l, t) dt - \alpha'_{22} (u^m(l, t))^2] dt + \\ & + \int_0^\tau [\beta'_{11} (u_t^m(0, t))^2 - 2\beta'_{21} u_t^m(0, t) u_t^m(l, t) dt - \beta'_{22} (u_t^m(l, t))^2] dt - \\ & - 2 \int_0^\tau (\alpha_{12}(t) - \alpha_{21}(t)) u_t^m(0, t) u^m(l, t) dt + \\ & + 2 \int_0^\tau u_t^m(0, t) \left(\int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx + \int_0^l P_1(x, t) u_t^m(x, t) dx \right) dt - \\ & - 2 \int_0^\tau u_t^m(l, t) \left(\int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx + \int_0^l P_2(x, t) u_t^m(x, t) dx \right) dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt - \int_0^\tau F_1(t) u_t^m(0, t) dt + \int_0^\tau F_2(t) u_t^m(l, t) dt. \quad (2.20)$$

Теперь выведем оценку, применяя ту же технику, что и при доказательстве единственности решения: используем неравенства Коши, Коши – Буняковского и неравенства (2.14), (2.15). Получим из (2.20) неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + (u_x^m(x, \tau))^2 + (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx \leq \\ & \leq C_4 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dx dt + \\ & + C_5 (\|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|F_1\|_{L_2(0, T)}^2 + \|F_2\|_{L_2(0, T)}^2), \end{aligned}$$

Прибавив к обеим частям неравенство $(u^m(x, \tau))^2 \leq \tau \int_0^\tau (u_t^m(x, t))^2 dt$, которое вытекает из представления $u^m(x, \tau) = \int_0^\tau u_t^m(x, t) dt$, где мы учли, что $u^m(x, 0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u^m(x, \tau))^2 + (u_t^m(x, \tau))^2 + (u_x^m(x, \tau))^2 + (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx \leq \\ & \leq C_6 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dx dt + \\ & + C_5 (\|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|F_1\|_{L_2(0, T)}^2 + \|F_2\|_{L_2(0, T)}^2), \end{aligned}$$

применив к которому лемму Гронуолла, а затем проинтегрировав по $\tau \in [0, T]$, получим нужную оценку

$$\|u^m\|_{W(Q_T)} \leq S, \quad (2.21)$$

где S не зависит от m . Существование этой мажорирующей постоянной обеспечено условиями теоремы.

Благодаря (2.21) из построенной последовательности $u^m(x, t)$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q_T)$ и равномерно по $t \in [0, T]$ в $L_2(0, l)$. За выделенной подпоследовательностью сохраним прежнее обозначение. Указанные сходимости обеспечивают выполнение начального условия $u(x, 0) = 0$ и справедливость тождества (2.10), что доказывается так же, как и в [25] (с. 215).

Теорема 1 полностью доказана.

Вернемся к задаче 1 и, опираясь на лемму, под ее решением будем понимать обобщенное решение задачи 2. Поэтому нам осталось только сформулировать условия разрешимости в терминах задачи 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} & a, a_t, c \in C(\bar{Q}_T), \quad b \in C^1[0, T], \quad b(0) = b(l), \quad f \in L_2(Q_T), \\ & K_i \in C^2(\bar{Q}_T), \quad i = 1, 2, \quad \Delta = K_1(0, t)K_2(l, t) - K_2(0, t)K_1(l, t) \neq 0, \\ & K_{2x}(l, t)K_1(l, t) - K_{1x}(l, t)K_2(l, t) + K_{1x}(0, t)K_2(0, t) - K_{2x}(0, t)K_1(0, t) = 0, \\ & [K_{1x}(0, t)K_2(l, t) - K_{2x}(0, t)K_1(l, t)]\xi^2 - 2[K_{1x}(0, t)K_2(0, t) - K_{2x}(0, t)K_1(0, t)]\xi\eta \\ & - [K_{2x}(l, t)K_1(0, t) - K_{1x}(l, t)K_2(0, t)]\eta^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи 1.

Выводы

В статье предложен и реализован метод доказательства существования единственного обобщенного решения задачи с нелокальными условиями первого рода для уравнения четвертого порядка. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, представленные в теореме 2.

Литература

- [1] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de41116>.
- [2] Bažant Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128, issue 11. P. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).

- [3] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. № 21. P. 155–160. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/160437>.
- [4] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf7694>.
- [5] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2993>.
- [6] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Solutions of Nonlocal Problems for One-dimensional Oscillations of the Medium // Mat. Modelir. 2000. Vol. 12, № 1. P. 94–103. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm832>.
- [7] Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S., Naumavets S.N. Classical Solution of a Problem with Integral Conditions of the Second Kind for the One-Dimensional Wave Equation // Differential Equations. 2019. Vol. 55, issue 3. P. 353–362. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266119030091>.
- [8] Moiseev E.I., Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Classical Solution of a Problem with an Integral Congition for the One-Dimensional Wave Equation // Partial Differential Equations. 2014. Vol. 50. P. 1364–1377. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266114100103>.
- [9] Pulkina L.S. Initial-boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation // Differential equations. 2008. Vol. 44. P. 1119–1125. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266108080090>.
- [10] Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$. // Доклады Академии наук. 1991. Т. 321, № 6. С. 1158–1163. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan5707>.
- [11] Ashyralyev A., Aggez N. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 6, № Suppl. P. 111–121. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20986386>. EDN: <https://elibrary.ru/rrgjmх>.
- [12] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Математические заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 254–268. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8626>.
- [13] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. Vol. 5, № 1. P. 31–37. URL: <http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf>.
- [14] Beilin S.A. On a mixed nonlocal problem for a wave equation // EJDE. 2006. Vol. 2006, № 103. P. 1–10. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2006/103/beilin.pdf>
- [15] Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2002. Vol. 31, issue 4. P. 201–213. DOI: <https://doi.org/10.1155/S0161171202005860>.
- [16] Иванчов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de11062>.
- [17] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. Vol. 4, no. 1. P. 35–45. DOI: <http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>.
- [18] Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434613070201>.
- [19] Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 139. С. 214–230. DOI: <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230>. EDN: <https://elibrary.ru/ahjfou>.
- [20] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1-го и 2-го рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17309554>. EDN: <https://elibrary.ru/ooukmt>.
- [21] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions // EJDE. 2020. Vol. 2020, no. 01-132. P. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.58997/ejde.2020.28>.
- [22] Pulkina L.S. Nonlocal Problems for Hyperbolic Equations // Parasidis, I.N., Providas, E., Rassias, T.M. (eds.) Mathematical Analysis in Interdisciplinary Research. Springer Optimization and Its Applications. 2021. Vol 179. Springer, Cham. P. 619–640. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-84721-0_28.
- [23] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник Самарского государственного университета. 2006. № 2 (42). С. 15–27. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/nelokalnaya-zadacha-s-integralnymi-usloviyami-dlya-volnovogo-uravneniya/viewer>.

- [24] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва: Изд-во иностранной литературы. 1961. 120 с. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Gording1961ru.pdf>.
- [25] Ладъженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 409 с. URL: <https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44

Submitted: 23.01.2024

Revised: 25.04.2024

Accepted: 15.05.2024

L.S. Pulkina

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

A PROBLEM WITH NONLOCAL INTEGRAL 1ST KIND CONDITIONS FOR 4TH ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

ABSTRACT

In this article, we consider a nonlocal problem with integral conditions for one-dimensional 4th order partial differential equation. A distinguishing feature of this problem is the presence of integral conditions of the 1st kind. Moreover, the kernels of these conditions depend on both spatial and time variables. We suggest a new approach which enables to overcome the difficulties arising from the form of nonlocal conditions and derive a priori estimates. Obtained estimates play a significant role when we prove the existence and uniqueness of the solution to the problem.

Key words: 4th-order partial differential equation; nonlocal problem; integral conditions of 1st and 2nd kind; generalized solution; Sobolev space; a priori estimates.

Citation. Pulkina L.S. A problem with nonlocal integral 1st kind conditions for 4th order partial differential equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 30–44. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Pulkina L.S., 2024

Ludmila S. Pulkina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Samarskii A.A. Some problems of the theory of differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de4116>. (In Russ.)
- [2] Bažant Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol. 128, issue 11, pp. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- [3] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, no. 21, pp. 155–160. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/160437>.
- [4] Kamynin L.I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, issue 6, pp. 33–59. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90080-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1). (In English; original in Russian)
- [5] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de2993>. (In Russ.)

- [6] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Solutions of Nonlocal Problems for One-dimensional Oscillations of the Medium. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/mm832>. (In Russ.)
- [7] Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S., Naumavets S.N. Classical Solution of a Problem with Integral Conditions of the Second Kind for the One-Dimensional Wave Equation. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, issue 3, pp. 353–362. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266119030091>.
- [8] Moiseev E.I., Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Classical Solution of a Problem with an Integral Condition for the One-Dimensional Wave Equation. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 10, pp. 1364–1377. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266114100103>.
- [9] Pulkina L.S. Initial-boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation. *Differential equations*, 2008, vol. 44, pp. 1119–1125. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266108080090>.
- [10] Skubachevskii A.L., Steblor G.M. On the spectrum of differential operators with domain that is not dense in $L_2(0,1)$. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1991, vol. 321, number 6, pp. 1158–1163. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan5707>. (In Russ.)
- [11] Ashyralyev A., Aggez N. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 6, no. Suppl., pp. 111–121. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20986386>. EDN: <https://elibrary.ru/rrgjmx>.
- [12] Kozhanov A.I. On the solvability of certain spatially nonlocal boundary-value problems for linear hyperbolic equations of second order. *Mathematical Notes*, 2011, vol. 90, Article number 238. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434611070236>. (In English; original in Russian)
- [13] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 31–37. Available at: <http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf>.
- [14] Beilin S.A. On a mixed nonlocal problem for a wave equation. *EJDE*, 2006, vol. 2006, no. 103, pp. 1–10. Available at: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2006/103/beilin.pdf>.
- [15] Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2002, vol. 31, issue 4, pp. 201–213. DOI: <https://doi.org/10.1155/S0161171202005860>.
- [16] Ivanchov N.I. Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, pp. 591–609. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44>. (In English; original in Russian).
- [17] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, number 1, pp. 35–45. DOI: <http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>.
- [18] Kamynin V.L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*, vol. 94, pp. 205–213. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434613070201>. (In English; original in Russian)
- [19] Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S. A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 214–230. DOI: <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230>. EDN: <https://elibrary.ru/ahjfou>. (In Russ.)
- [20] Pul'kina L.S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 4, pp. 62–69. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081>. EDN: <https://elibrary.ru/pdszmv>. (In English; original in Russian)
- [21] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equation from the viewpoint of strongly regular boundary conditions. *EJDE*, 2020, vol. 2020, no. 01-132, pp. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.58997/ejde.2020.28>.
- [22] Pulkina L.S. Nonlocal Problems for Hyperbolic Equations. In: *Parasidis, I.N., Providas, E., Rassias, T.M. (eds.) Mathematical Analysis in Interdisciplinary Research. Springer Optimization and Its Applications, vol 179*. Springer, Cham, 2021, pp. 619–640. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-84721-0_28.
- [23] Dmitriev V.B. A non-local problem with integral conditions for a wave equation. *Vestnik Samarskogo Universiteta*, 2006, no. 2 (42), pp. 15–27. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/nelokalnaya-zadacha-s-integralnymi-usloviyami-dlya-volnovogo-uravneniya/viewer>. (In Russ.)
- [24] Gōrding L. Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations. Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. Available at: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Gording1961ru.pdf>. (In Russ.)
- [25] Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 409 p. Available at: <https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE>. (In Russ.)

МЕХАНИКА

MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53

УДК 620.17

Дата: поступления статьи: 09.01.2024
после рецензирования: 27.02.2024
принятия статьи: 15.05.2024

А.В. Суслов

Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: a.v.suslov@inbox.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1076-1257>

Е.Е. Ярославкина

Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: yaroslavkina7@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7633-2154>

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН

АННОТАЦИЯ

Проведены исследования влияния температурных напряжений на частоты собственных колебаний прямоугольных пластин при различных условиях закрепления с помощью аналитического метода и компьютерного моделирования методом конечных элементов. Установлено, что с ростом температуры частота собственных колебаний уменьшается. Наличие температурных напряжений оказывает существенное влияние на изменение частоты колебаний. Сделан вывод, что наибольшее изменение претерпевают низшие частоты. Кроме этого, с ростом температуры меняется форма колебаний.

Ключевые слова: температурные напряжения; деформация; колебания; пластины; измерительное оборудование.

Цитирование. Суслов А.В., Ярославкина Е.Е. Исследование влияния температурных напряжений на собственные колебания пластин // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 45–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Суслов А.В., Ярославкина Е.Е., 2024

Антон Владимирович Суслов — старший преподаватель кафедры информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Екатерина Евгеньевна Ярославкина — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Введение

Одной из причин появления дополнительных погрешностей при проведении измерений выступает температура. Температурное расширение материалов приводит как к изменению самих объектов исследования, так и к изменению компонентов измерительного оборудования. Кроме этого, наличие

температурного расширения может приводить к неточности инженерных расчетов, например при оценке собственных колебаний конструкций.

Влияние температуры на частоту собственных колебаний проводилось в [1; 2]. В указанных работах установлено, что с ростом температуры идет уменьшение собственных частот колебаний балок за счет изменения упругих свойств исследуемых объектов, в частности снижения модуля упругости. В работе [3] проведены исследования влияния температуры на колебания шарнирно опертой пластины, а в [4] — влияние температуры на отклик защемленной пластины на динамическое воздействие в зависимости от температуры. Обе работы также указывают на наличие зависимости частоты колебаний пластины от температуры.

С целью изучения влияния температуры на собственные колебания пластин проведены аналитические расчеты и компьютерное моделирование прямоугольных пластин при различных условиях закрепления.

1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение свободных колебаний изотропной пластины постоянной толщины имеет вид [5]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

или

$$D \Delta \Delta w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где w — прогиб; m_0 — масса пластины на единицу площади; D — цилиндрическая жесткость пластины.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

где E — модуль упругости; h — толщина пластины; μ — коэффициент Пуассона.

$$m_0 = \rho h,$$

где ρ — плотность материала пластины.

Решение уравнения должно удовлетворять граничным условиям, зависящим от способа закрепления краев пластины [6; 7]. В настоящей статье рассматривается пластина с защемленными и свободными краями (рис 1.1). Граничные условия на краях $x = a$, $y = b$:

1. Защемленный край. Прогиб и угол поворота равны нулю:

$$\begin{cases} w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{при } x = a; \\ w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 & \text{при } y = b. \end{cases}$$

2. Свободный край. Момент и поперечная сила равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 & \text{при } x = a; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 & \text{при } y = b. \end{cases}$$

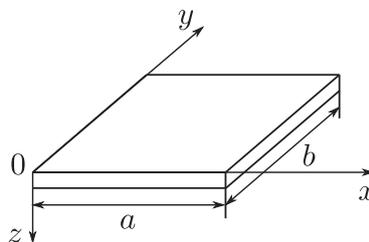


Рис. 1.1. Схема пластины
 Fig. 1.1. Plate diagram

Пластины со всеми возможными случаями краевых условий исследованы с помощью метода Релея—Ритца.

Решение для частоты собственных колебаний следующее [8]:

$$\omega = k_{mn}^2 \left(\frac{D}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left\{ \frac{A_m^4}{a^4} + \frac{A_n^4}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} [\mu B_m B_n + (1 - \mu) C_m C_n] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $A_m, A_n, B_m, B_n, C_m, C_n$ — коэффициенты, зависящие от условий закрепления и количества узловых точек колебаний m и n , включая края пластины; m — количество узловых точек вдоль оси x (вдоль стороны a), n — количество узловых точек вдоль оси y (вдоль стороны b) (см. рис. 1.1). Значения коэффициентов можно найти в [8; 9].

Повышение температуры приводит к изменению упругих свойств материала. У стали с повышением температуры снижаются модуль упругости и плотность, повышается коэффициент Пуассона. Кроме этого, повышение температуры приводит к температурному расширению материала. В случае наличия ограничения температурного расширения, например при жесткой заделке, появляется противодействующая сила со стороны опоры, которая приводит к появлению напряжений в самом материале.

Если в срединной плоскости пластины действуют продольные усилия N_{11}, N_{12}, N_{22} , уравнение колебаний выглядит как [9]:

$$D \Delta \Delta w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

В случае когда усилия N_{11}, N_{22} постоянны, а N_{12} равно нулю, частота свободных колебаний будет иметь вид:

$$\omega = k_{mn}^2 \left(\frac{D}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left\{ \frac{A_m^4}{a^4} + \frac{A_n^4}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} [\mu B_m B_n + (1 - \mu) C_m C_n] + 2 \left(\frac{q_1 C_m}{a^4} + \frac{q_2 C_n}{b^4} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$q_1 = \frac{N_{11} a^2}{2\pi D}, \quad q_2 = \frac{N_{22} b^2}{2\pi D}.$$

Таким образом, температурные изменения упругих свойств материала и наличие температурных напряжений будут влиять на частоту собственных колебаний пластины.

Расчеты влияния температуры на частоту собственных колебаний проводились на следующем объекте исследования: стальная пластина с геометрическими размерами: $a = 200$ мм, $b = 200$ мм, $h = 2$ мм; упругие свойства материала: $E = 200$ ГПа, $\rho = 7850$ кг/м³, $\mu = 0,3$, $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}$ 1/°С.

Аналитические решения найдены по вышеприведенным формулам, компьютерное моделирование проводилось методом конечных элементов в программе Ansys.

2. Результаты и обсуждения

1. Колебания пластины, защемленной по всему контуру.

В таблице 2.1 представлены данные аналитического расчета и компьютерного моделирования десяти мод свободных колебаний, а также свободных колебаний при изменении температуры на 10°С. Погрешность расхождения результатов аналитического расчета и компьютерного моделирования составляет менее 1%.

При условии жесткого закрепления пластины по всему контуру изменение температуры на 10°С, приводит к появлению в пластине напряжения $\sigma = 34,6$ МПа, что, в свою очередь, ведет к возникновению сжимающих продольных сил N_{11}, N_{22} . Наличие сжимающих сил уменьшает частоту собственных колебаний, что хорошо видно по результатам аналитического расчета и моделирования.

На рис. 2.1 построен график зависимости изменения частоты от моды колебания. По графику можно сделать вывод, что сильнее всего меняются низшие частоты.

Дальнейшее повышение температуры приводит к исчезновению низших частот, а также к изменению форм колебаний. Результаты отображены на рис. 2.2 и 2.3.

2. Колебания пластины с защемленными противоположными краями (защемление по стороне b).

В таблице 2.2 отражены данные аналитического расчета и компьютерного моделирования двадцати первых мод свободных колебаний, а также свободных колебаний при изменении температуры на 10°С.

На рис. 2.4 точками показаны степени изменения мод при изменении температуры на 10°С. По представленным данным видно, что изменение частоты идет неравномерно и зависит от порядкового номера моды. Кроме этого, замечено, что, поскольку одни моды с ростом температуры убывают быстрее других, при достижении определенных температур порядковые номера мод меняются.

Таблица 2.1

Table 2.1

| Мода | Расчетная частота, Гц | Частота модели Ansys, Гц | Расчетное изменение частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц | Изменение частоты модели Ansys при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц | Процент изменения частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, % |
|------|-----------------------|--------------------------|--|---|---|
| 2/2 | 439,48 | 438,83 | 353,46 | 353,81 | 19,37 |
| 3/2 | 896,99 | 894,31 | 801,98 | 800,25 | 10,52 |
| 3/3 | 1323,33 | 1317,60 | 1223,35 | 1219,40 | 7,45 |
| 4/2 | 1611,54 | 1601,50 | 1512,97 | 1502,60 | 6,18 |
| 4/3 | 2017,62 | 2006,80 | 1915,63 | 1906,10 | 5,02 |
| 5/2 | 2570,73 | 2558,80 | 2469,71 | 2458,00 | 3,94 |
| 4/4 | 2686,90 | 2673,20 | 2582,96 | 2570,50 | 3,84 |
| 5/3 | 2967,51 | 2940,90 | 2864,21 | 2837,90 | 3,50 |
| 5/4 | 3618,41 | 3595,20 | 3513,39 | 3491,20 | 2,89 |
| 5/5 | 4530,89 | 4498,90 | 4424,79 | 4393,80 | 2,34 |

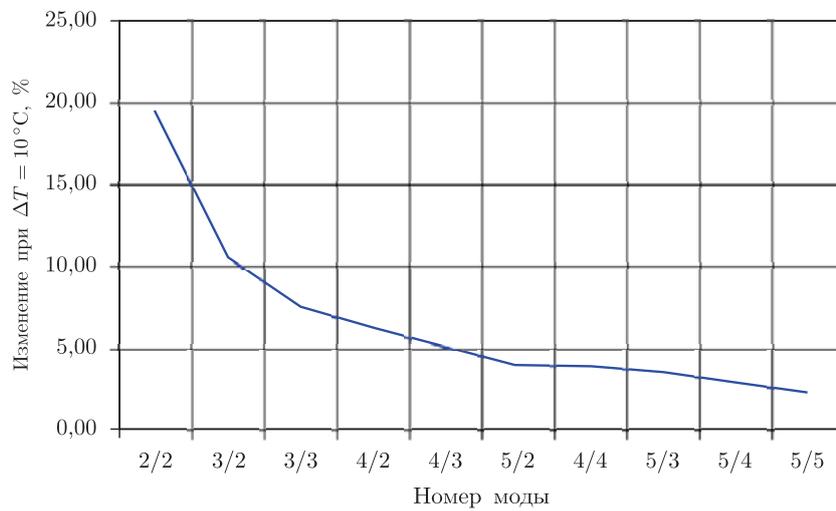


Рис. 2.1. График изменения мод при изменении температуры на 10°C
 Fig. 2.1. Graph of the mode change when the temperature changes by 10°C

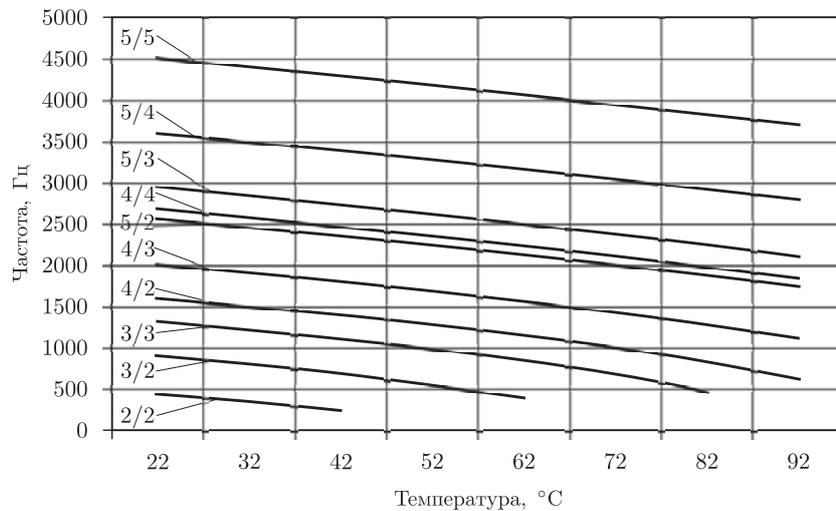


Рис. 2.2. Графики изменения частот мод колебаний с повышением температуры
 Fig. 2.2. Graphs of frequency changes of oscillation modes with increasing temperature

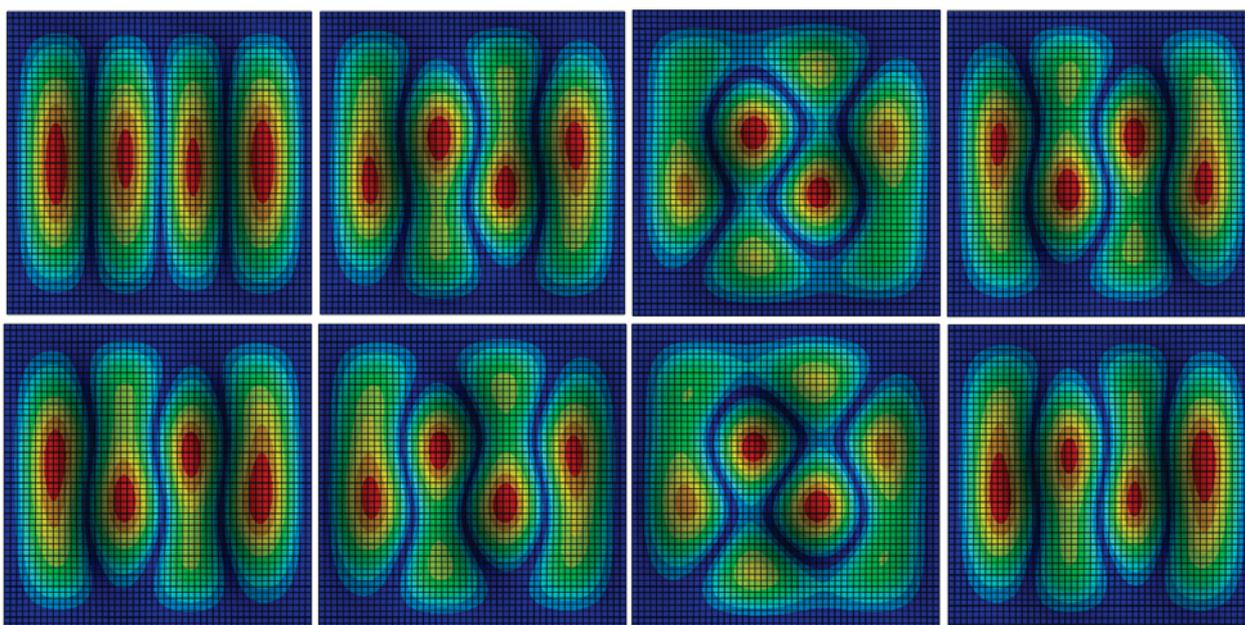


Рис. 2.3. Изменение формы колебаний моды 5/2 с повышением температуры
 Fig. 2.3. Changing the shape of the oscillation of the 5/2 mode with increasing temperature

Таблица 2.2

Table 2.2

| Мода | Расчетная частота, Гц | Частота модели Ansys, Гц | Расчетное изменение частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц | Изменение частоты модели Ansys при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц | Процент изменения частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, % |
|------|-----------------------|--------------------------|--|---|---|
| 2/0 | 272,26 | 270,32 | 215,11 | 215,65 | 20,22 |
| 2/1 | 323,65 | 321,42 | 277,31 | 279,77 | 12,96 |
| 2/2 | 536,69 | 529,29 | 510,09 | 499,69 | 5,59 |
| 3/0 | 750,27 | 745,35 | 677,46 | 676,15 | 9,28 |
| 3/1 | 822,93 | 817,45 | 757,14 | 758,49 | 7,21 |
| 2/3 | 982,30 | 968,00 | 968,02 | 946,96 | 2,17 |
| 3/2 | 1076,47 | 1063,80 | 1027,05 | 1012,70 | 4,80 |
| 4/0 | 1470,54 | 1461,60 | 1392,41 | 1387,90 | 5,04 |
| 3/3 | 1532,84 | 1508,40 | 1498,54 | 1466,80 | 2,76 |
| 4/1 | 1551,90 | 1540,70 | 1478,08 | 1474,50 | 4,30 |
| 2/4 | 1679,74 | 1659,00 | 1671,43 | 1641,80 | 1,04 |
| 4/2 | 1832,78 | 1812,70 | 1770,71 | 1751,00 | 3,40 |
| 3/4 | 2215,52 | 2181,40 | 2191,94 | 2146,50 | 1,60 |
| 4/3 | 2314,77 | 2279,60 | 2265,94 | 2225,60 | 2,37 |
| 5/0 | 2430,89 | 2415,10 | 2349,73 | 2338,60 | 3,17 |
| 5/1 | 2517,11 | 2496,50 | 2438,82 | 2426,20 | 2,82 |
| 2/5 | 2626,26 | 2597,20 | 2620,95 | 2582,20 | 0,58 |
| 5/2 | 2816,127 | 2784,9 | 2746,373 | 2716,70 | 2,45 |
| 4/4 | 3003,621 | 2959,8 | 2966,154 | 2913,10 | 1,58 |
| 3/5 | 3143,754 | 3095,8 | 3127,175 | 3064,70 | 1,00 |

Выдвинуто предположение о том, что данное неравномерное распределение зависимости частоты от температуры от номера моды обусловлено неравномерным распределением напряжений по осям пластины. Моды, имеющие форму колебаний преимущественно по оси напряжения (вдоль оси x), претерпевают большее изменение.

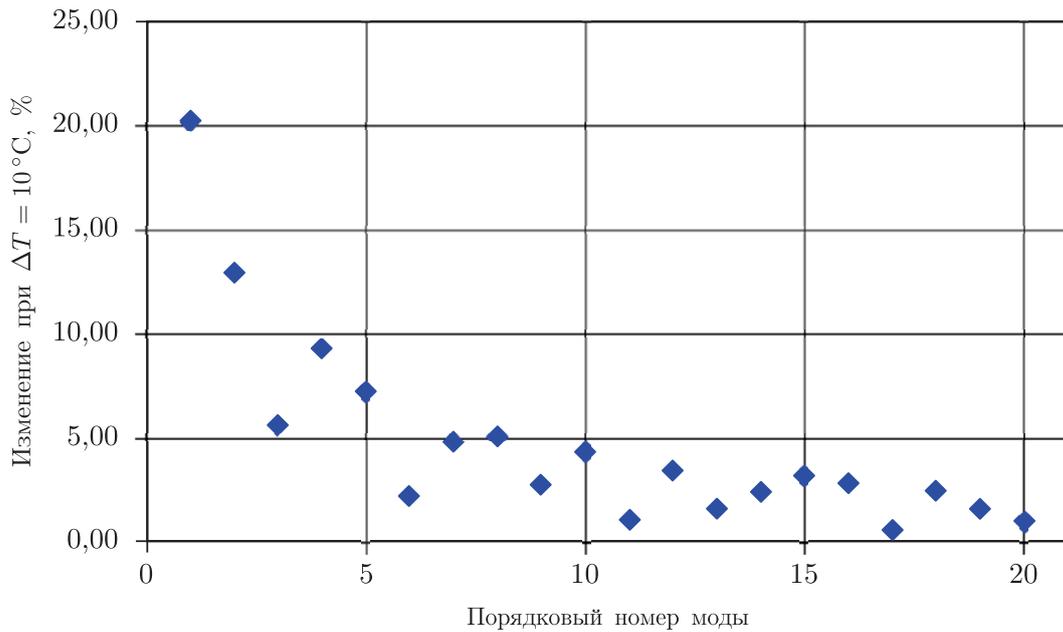


Рис. 2.4. Изменения мод при изменении температуры на 10°C
 Fig. 2.4. Mode changes when the temperature changes by 10°C

Для каждой моды вычислена скорость изменения в определенном диапазоне начальных и конечных значений в выделенной области температур. Далее проведен кластерный анализ методом k -средних, в результате которого было определено три кластера (рис. 2.5).

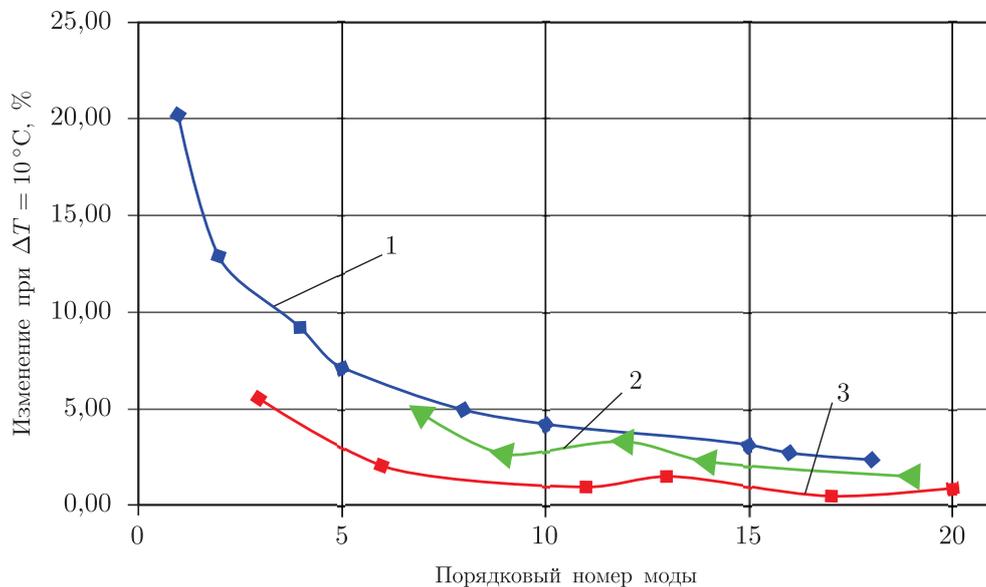


Рис. 2.5. Результаты кластерного анализа: 1—кластер 1; 2—кластер 2; 3—кластер 3
 Fig. 2.5. Results of cluster analysis: 1—cluster 1; 2—cluster 2; 3—cluster 3

Разложение форм колебаний согласно кластерному анализу (рис. 2.6) подтвердило выдвинутую гипотезу.

3. Колебания пластины, защемленной по одной стороне.

При защемлении пластины по одной стороне вследствие отсутствия ограничений теплового расширения и температурных напряжений на изменение частоты оказывает влияние только изменение упругих свойств материала. Изменение частоты при изменении температуры на 10°C составляет менее 1 %.

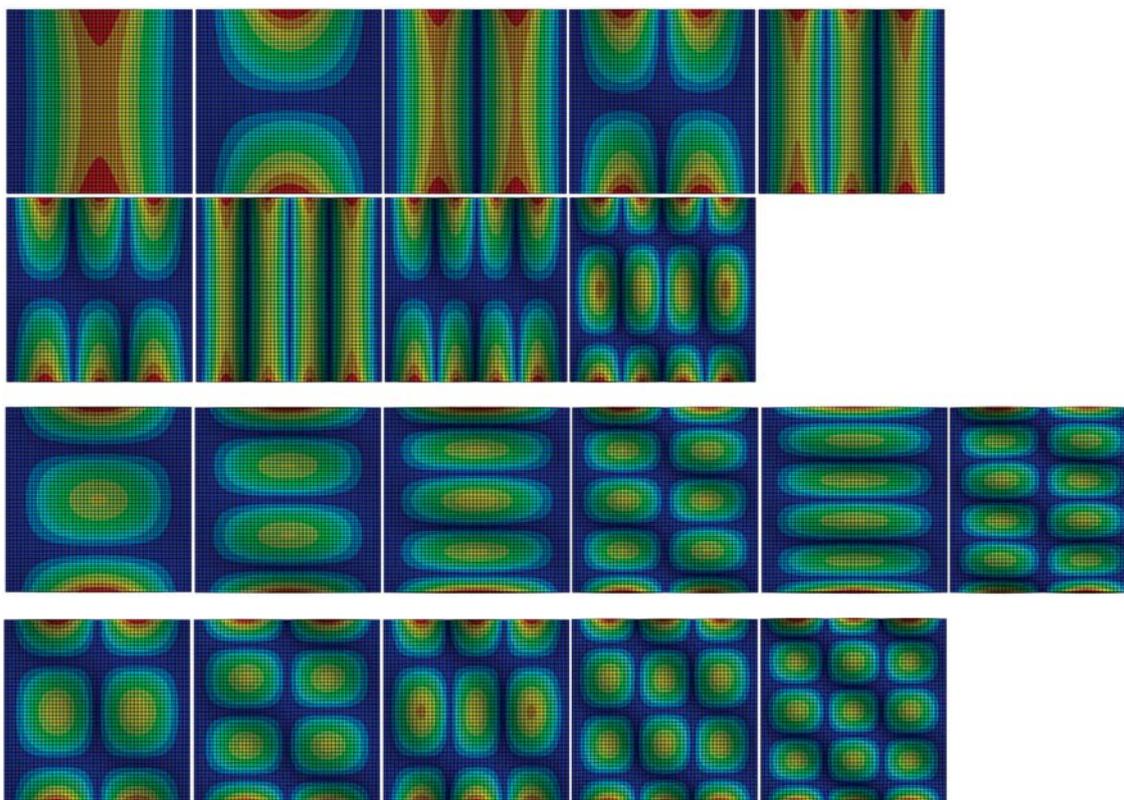


Рис. 2.6. Результаты кластерного анализа: сверху — кластер 1; в середине — кластер 2; снизу — кластер 3
Fig. 2.6. Results of cluster analysis: above is cluster 1; in the middle is cluster 2; below is cluster 3

Заключение

В результате проведенного математического и компьютерного моделирования установлено, что изменение температуры приводит к изменению частоты собственных колебаний.

Ограничение теплового расширения объекта ведет к возникновению внутренних напряжений, что, в свою очередь, оказывает сильное влияние на частоту собственных колебаний.

Наибольшее изменение претерпевают низшие частоты, которые пропадают с ростом температуры. Помимо изменения частот собственных колебаний, также меняются и формы колебаний.

При неравномерном распределении внутренних напряжений скорость изменения частоты зависит от порядкового номера моды колебаний.

Литература

- [1] The Coupled Effect of Temperature Changes and Damage Depth on Natural Frequencies in Beam-Like Structures / Tareq Al-hababi, Nizar Faisal Alkayem, Li Cui, Shixiang Zhang, Cong Liu and Maosen Cao // Structural Durability & Health Monitoring, 2022. Vol. 16, no. 1. P. 15–35. DOI: <http://doi.org/10.32604/sdhm.2022.020418>.
- [2] Influence of Temperature on the Natural Vibration Characteristics of Simply Supported Reinforced Concrete Beam / Yanxia Cai, Kai Zhang, Zhoujing Ye, Chang Liu, Kaiji Lu and Linbing Wang // Sensors 2021, Vol. 21, issue 12. Article number 4242. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21124242>.
- [3] Study of Temperature Influence on the Eigen Frequencies of a Flat Rectangular Plate with all Edges Simply Supported / C. Haiegan, C.O. Hamat, C. Popescu, C. Cocar // Annals of the “Constantin Brancusi” University of Targu Jiu, Engineering Series. No. 4/2023-4. P. 13–18. Available at: https://www.utgjiu.ro/rev_ing/pdf/2023-4/01_hatiegan.pdf.
- [4] Dynamic and Acoustic Response of a Clamped Rectangular Plate in Thermal Environments: Experiment and Numerical Simulation / Qian Geng, Huan Li, and Yueming Li // The Journal of Acoustical Society of America. May 2014. Vol. 135, issue 5. P. 2674–2682. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4870483>.
- [5] Справочник по динамике сооружений / под ред. В.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. Москва: Стройиздат, 1972. 511 с. URL: <https://djvu.online/file/5EhzRFNUJy727?ysclid=lw7j26i9sh919823794>.

- [6] Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Будівельник, 1970. 436 с. URL: <https://djvu.online/file/yuc9gFLxovy0I?ysclid=lw7lehebv1425824481>.
- [7] Филиппов А.П. Колебания упругих систем / А.П. Филиппов, чл.-корр. АН УССР проф.; Акад. наук Укр. ССР. Лаборатория гидравл. машин. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1956. 322 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/11240?ysclid=lw7o1n47e0211943409>.
- [8] Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник / под ред. чл.-корр. АН УССР. А.П. Филиппова. Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.
- [9] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: в 3 т. Т. 3 / под ред. д-ра техн. наук И.А. Биргера и чл.-корр. АН Латвийской ССР Я.Г. Пановко. Москва: Машинстроение, 1986. 567 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/2700?ysclid=lw7oeshp4p24924136>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53

Submitted: 09.01.2024

Revised: 27.02.2024

Accepted: 15.05.2024

A.V. Suslov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: a.v.suslov@inbox.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1076-1257>

E.E. Yaroslavkina

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: yaroslavkina7@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/yaroslavkina7@gmail.com>

STUDY OF THE INFLUENCE OF THERMAL STRESSES FOR NATURAL VIBRATIONS OF PLATES

ABSTRACT

Studies have been carried out of the influence of temperature stresses on the frequencies of natural oscillations rectangular plates under different fastening conditions using analytical methods and computer modeling using the finite element method. It has been established that with increasing temperature the frequency of natural oscillations decreases. The presence of temperature stresses has significant influence on the change in oscillation frequency. The lowest ones undergo the greatest change frequencies. In addition, the shape of the vibrations changes with increasing temperature.

Key words: temperature stress; deformation; fluctuations; plates; measuring equipment.

Citation. Suslov A.V., Yaroslavkina E.E. Study of the influence of temperature stresses to natural vibrations of the plates. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 45–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Suslov A.V., Yaroslavkina E.E., 2024

Anton V. Suslov — senior lecturer of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Ekaterina E. Yaroslavkina — Candidate of Technical Sciences, head of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

- [1] Tareq Al-hababi, Nizar Faisal Alkayem, Li Cui, Shixiang Zhang, Cong Liu, Maosen Cao. The Coupled Effect of Temperature Changes and Damage Depth on Natural Frequencies in Beam-Like Structures. *Structural Durability & Health Monitoring*, 2022, vol. 16, no. 1, pp. 15–35. DOI: <http://doi.org/10.32604/sdhm.2022.020418>.

- [2] Yanxia Cai, Kai Zhang, Zhoujing Ye, Chang Liu, Kaiji Lu, Linbing Wang. Influence of Temperature on the Natural Vibration Characteristics of Simply Supported Reinforced Concrete Beam. *Sensors*, 2021, vol. 21, issue 12, Article number 4242. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21124242>.
- [3] Haiegan C., Hamat C.O., Popescu C., Cocar C. Study of Temperature Influence on the Eigen Frequencies of a Flat Rectangular Plate with all Edges Simply Supported. *Annals of the «Constantin Brancusi» University of Targu Jiu, Engineering Series*, no. 4/2023, pp. 13–18. Available at: https://www.utgjiu.ro/rev_ing/pdf/2023-4/01_hatiegan.pdf.
- [4] Qian Geng, Huan Li, Yueming Li. Dynamic and Acoustic Response of a Clamped Rectangular Plate in Thermal Environments: Experiment and Numerical Simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, May 2014, vol. 135, issue 5, pp. 2674–2682. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4870483>.
- [5] Korenev B.G., Rabinovich I.M. (Eds.) Reference book on dynamics of structures. Moscow: Stroiizdat, 1972, 511 p. Available at: <https://djvu.online/file/5EhzRFNUJy727?ysclid=1w7j26i9sh919823794>. (In Russ.)
- [6] Vainberg D.V., Vainberg E.D. Calculation of plates. 2nd edition. Kyiv: Budivel'nik, 1970, 436 p. Available at: <https://djvu.online/file/yuc9gFLxovy0I?ysclid=1w7lehebv1425824481>. (In Russ.)
- [7] Filippov A.P. Vibrations of elastic systems. Kyiv: Izd-vo Akad. nauk USSR, 1956, 322 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/11240?ysclid=1w7o1n47e0211943409>. (In Russ.)
- [8] Gontkevich V.S. Natural vibrations of plates and shells: handbook; Philippov A.P. (Ed.). Kyiv: Naukova dumka, 1964, 288 p. (In Russ.)
- [9] Birger I.A., Panovko Ya.G. (Eds.) Strength, stability, fluctuations. Handbook: in three vols. Vol. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1986, 567 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/2700?ysclid=1w7oeshp4p24924136>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 11.02.2024
после рецензирования: 23.03.2024
принятия статьи: 15.05.2024

М.А. Фомченкова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Masha18072013@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3227-5433>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanova.l.v.@ssau.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ПРОЦЕДУРА ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОГО МЕТОДА НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЕЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ, ОСНОВАННАЯ НА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

В статье предложена и реализована процедура восстановления асимптотического разложения полей напряжений, деформаций и перемещений в анизотропных материалах, обобщающих решение Уильямса для линейно упругих изотропных материалов, на основании конечно-элементного решения задачи о деформировании образца с дефектом в анизотропном ортотропном материале в приближении плоской задачи теории упругости. Коэффициенты разложения поля напряжений вблизи вершины трещины в анизотропном материале определяются с помощью переопределенного метода, предложенного изначально для восстановления асимптотического разложения из экспериментальных данных фотоупругого исследования. В настоящей работе данный метод распространен на анизотропные материалы с различными видами симметрии, и новизна предлагаемого подхода заключается в реконструкции асимптотического разложения из конечно-элементного решения для компонент тензора напряжений в узлах конечно-элементной сетки, что позволяет не исключать их поля перемещений составляющие, отвечающие перемещениям тела как абсолютно твердого тела. В предлагаемом подходе можно непосредственно в схеме переопределенного метода использовать данные конечно-элементных вычислений. Показано, что коэффициенты высших приближений надежно определяются посредством переопределенного метода, основанного на поле напряжений, найденном из конечно-элементного анализа.

Ключевые слова: метод конечных элементов; анизотропные среды; трещина; поля напряжений у вершины трещины; асимптотическое решение.

Цитирование. Фомченкова М.А., Степанова Л.В. Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 54–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Фомченкова М.А., Степанова Л.В., 2024

Мария Александровна Фомченкова — магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Лариса Валентиновна Степанова — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Всестороннее исследование причин появления дефектов, трещин несплошностей и закономерностей их развития в анизотропных хрупких материалах представляет жизненно важный интерес для оценки прочности и живучести конструкций, выполненных из анизотропных материалов. Анизотропные хрупкие материалы (например, монокристаллический кремний) широко используются в качестве основных компонентов в полупроводниках, фотоэлектрической технике, инфракрасной оптике и т. д. благодаря своим выдающимся фотоэлектрическим возможностям. Вследствие хрупкости в анизотропных материалах с высокой прочностью и низкой вязкостью в процессе механической обработки возможны хрупкие разрушения, что снижает целостность элемента конструкции. Поэтому представляется особенно важным и актуальным аккуратное определение напряжений, связанных с вершиной трещины, ибо сформулированные и применяемые сейчас критерии разрушения используют поля напряжений и деформаций вблизи острия дефекта и могут дать направление его распространения. При построении поля упругих напряжений необходимо учитывать анизотропные характеристики, чтобы точно предсказать дальнейшее развитие трещины. В настоящее время для ортотропных анизотропных материалов построены аналитические решения задач о растяжении и комбинированном нагружении бесконечных пластин с центральной трещиной. Для смешанного нагружения данной геометрии образца с трещиной имеется аналитическое решение задачи, базирующееся на классическом формализме теории функции комплексного переменного [1]. В [1] получены асимптотические разложения полей напряжений, перемещений и деформаций, содержащие слагаемые высоких порядков, дающие возможность более точной и целостной оценки поля напряжений на больших расстояниях от вершины трещины, таким образом существенно расширяя зону доминирования асимптотического решения.

Хорошо известно, что первые, главные члены рядов напряжений и деформаций у кончика острой трещины в линейно упругом теле (ряд Уильямса) являются сингулярными, так же как и главные слагаемые ряда, обобщающего ряд Уильямса на анизотропные среды в плоской постановке задачи. Следовательно, данные слагаемые преобладают в непосредственной близости от вершины острой трещины, острого выреза или острого надреза. В силу этого в малой области сингулярного доминирования, примыкающей к вершине, первых (сингулярных) слагаемых вполне достаточно для математического описания и характеристики механических полей вокруг вершины трещины. Коэффициенты первых слагаемых в рядах, отвечающих эталонному нормальному отрыву (деформации типа I) и эталонному поперечному сдвигу (деформации типа II), полностью определяются и обуславливаются комплексом приложенных нагрузок и конфигурацией образца. Согласно классической механике разрушения данные коэффициенты именуется коэффициентами интенсивности напряжений (КИН), которые выполняют первостепенную роль в контексте классической линейной механики хрупкого разрушения, и их критические значения служат критериальными характеристиками состояния тела с трещиной. Ввиду этого многие исследования и в настоящее время посвящены исключительно определению либо КИН, либо КИН и T-напряжений. При этом, даже невзирая на то, что КИН являются ключевыми параметрами механики трещин, в многочисленных исследованиях [1–11] обнаружено, что слагаемые асимптотического ряда М. Уильямса или его обобщения на анизотропные материалы более высоких порядков, в свою очередь, также вносят весомый вклад в описание полевых величин, ассоциированных с вершиной острой трещины. Многочисленные исследования, проведенные представителями различных научных школ, показали [1–11], что при увеличении дистанции от вершины трещины регулярными слагаемыми пренебрегать нельзя. Путем сопоставления теоретического решения в рядах с экспериментально найденными значениями перемещений и напряжений, фиксируемыми современными и классическими поляризационно-оптическими техниками, в числе которых в последнее время преимущественно используются метод корреляции цифровых изображений (КЦИ) [2–5], наиболее часто применяемый сейчас; цифровая голографическая интерферометрия [6; 7]; методы спекл-интерферометрии [8] и метод цифровой фотоупругости, сегодня обращающий на себя пристальное внимание [9–11], выяснено, что с увеличением расстояния от кончика острой трещины (при расширении исследуемой зоны) особые (сингулярные) слагаемые уже не в полной мере характеризуют искомые поля у вершины трещины, поэтому существенность и вклад слагаемых более высокого порядка становятся бесспорными и очевидными. Для анизотропных материалов, таких как горные породы, древесина, есть много примеров, когда зона процесса разрушения находится за пределами сингулярной доминирующей зоны, что требует учета слагаемых более высокого порядка малости [12–14]. Для воз-

можно построения асимптотических решений, учитывающих неособые слагаемые ряда, в окрестности вершины острой трещины и выреза в образцах с заданными, конечными размерами в настоящей работе было проведено объемное компьютерное моделирование в конечно-элементном комплексе Simulia Abaqus, в котором выполнен большой цикл вычислений, направленных на определение напряженно-деформированного состояния в области, охватывающей вершину трещины в анизотропных ортотропных материалах, в частности с кубической симметрией их материальных свойств. Конечно-элементный анализ и вычисления нацелены на аккуратное определение полей напряжений в окрестности вершины острого разреза и использовании этих значений в алгоритме переопределенного метода. В вычислительных экспериментах варьировались два угла: угол наклона трещины к горизонтали, что позволяет рассмотреть все типы комбинированного нагружения от эталонного чистого отрыва до эталонного чистого сдвига, и угол между трещиной и осью симметрии упругих свойств материала.

1. Математическая постановка задачи

Хрупкое разрушение является частой причиной разрушения механических компонентов, особенно при наличии острых трещин. В условиях хрупкого разрушения область локализации неупругих деформаций вокруг вершины трещины оказывается относительной малой, и для исследования механического отклика образцов можно использовать концепцию и решения линейной механики хрупкого разрушения. Для образца с трещиной (рис. 1.1), подвергнутого произвольной нагрузке в плоскости, разложение в ряд М. Уильямса отражает упругие напряжения вокруг вершины трещины:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}(r, \theta) \\ \sigma_{22}(r, \theta) \\ \sigma_{12}(r, \theta) \end{array} \right\} = \\ & = 2Re \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{n/2-1} \left[\begin{array}{l} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{n/2-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{n/2-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{n/2-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{n/2-1} \\ -\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{n/2-1} + \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{n/2-1} \end{array} \right] \right\} + (1.1) \\ & + Re \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{n/2-1} \left[\begin{array}{l} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{n/2-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{n/2-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{n/2-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{n/2-1} \\ -\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{n/2-1} + \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{n/2-1} \end{array} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине математического разреза; μ_1, μ_2 — корни характеристического уравнения; a_n^1, a_n^2 — коэффициенты ряда, являющиеся функциями приложенной нагрузки и конфигурации образца и подлежащие определению.

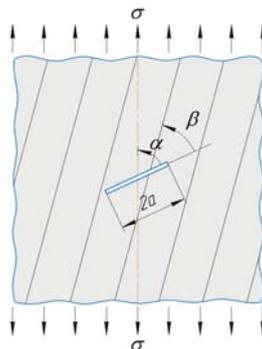


Рис. 1.1. Пластина с трещиной в анизотропном материале
 Fig. 1.1. Plate with a crack in an anisotropic material

В (1.1) μ_1 и μ_2 — корни характеристического уравнения, имеющего вид

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0, \quad (1.2)$$

где S_{ij} — компоненты тензора податливости.

Большинство анизотропных материалов, таких как горные породы, обладают одной или несколькими плоскостями симметрии, что уменьшает количество независимых упругих констант, необходимых для

их характеристики. Например, ортотропные материалы имеют три ортогональные плоскости симметрии, что приводит к сокращению числа упругих постоянных до девяти. Далее, число упругих модулей во многих случаях снижается за счет принятия гипотезы Сен-Венана [15]. В настоящем анализе используются исходные значения компонент тензора упругих модулей без каких бы то ни было упрощений. На сегодняшний день доступно использование базы данных Materials Project [16], являющейся общедоступной базой химических и механических свойств материалов, созданной для предоставления этих данных общественности с целью ускорения процесса обнаружения новых материалов, а также дополняющей сведениям о них. Используя возможности суперкомпьютеров и новейшие методы моделирования свойств материалов, Materials Project обеспечивает открытый веб-доступ к вычисленной информации об известных материалах, а также мощные инструменты анализа, которые помогут вдохновить и разработать новые материалы (рис. 1.2 и 1.3). В качестве примера рассмотрен материал $CsSnI_3$. Матрица упругих констант материала $CsSnI_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 17 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

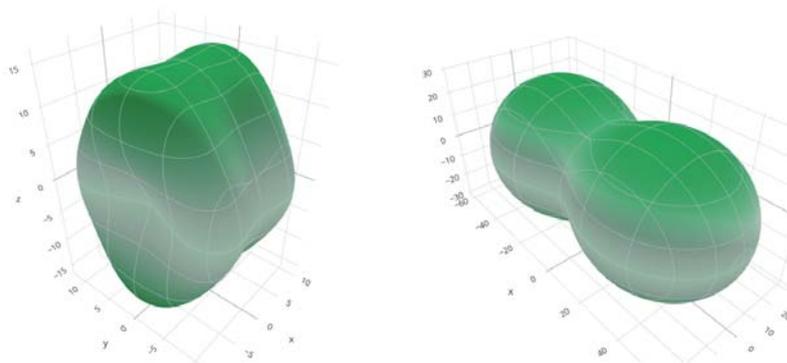


Рис. 1.2. Визуализация упругих свойств рассматриваемого материала: модуль Юнга (слева) и сжимаемость (справа)

Fig. 1.2. Visualization of the elastic properties of the material in question: Young's modulus (left) and compressibility (right)

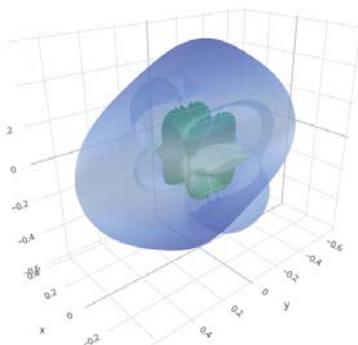


Рис. 1.3. Визуализация упругих свойств рассматриваемого материала: пространственное распределение коэффициента Пуассона

Fig. 1.3. Visualization of the elastic properties of the material in question: spatial distribution of Poisson's ratio

2. Конечно-элементное решение задачи о комбинированном нагружении пластины с горизонтальной и наклонной трещиной в анизотропном материале и его анализ

Для определения напряженно-деформированного состояния в образце с центральным разрезом из перовскита и последующего нахождения амплитудных множителей a_n^1 , a_n^2 проведена серия конечно-элементных вычислений, в ходе которой были определены поля напряжений и перемещений у вершины разреза. Все вычисления были выполнены в конечно-элементном пакете SIMULIA Abaqus. Для построения сетки в окрестности вершины трещины использовались сингулярные конечные элементы, количество узлов вдоль окружностей, охватывающих вершины трещины, равно 144. Таким образом, при экспортировании значений компонент тензора напряжений имеется возможность сформировать переопределенную систему уравнений, состоящую из 435 уравнений, если избирается один контур для анализа, 870 уравнений в случае выбора двух контуров и т. д.

Результаты вычислений представлены на рисунках.

На рис. 2.1 показаны распределения компонент тензора напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для различных углов наклона трещины и расположения осей симметрии упругих свойств материала.

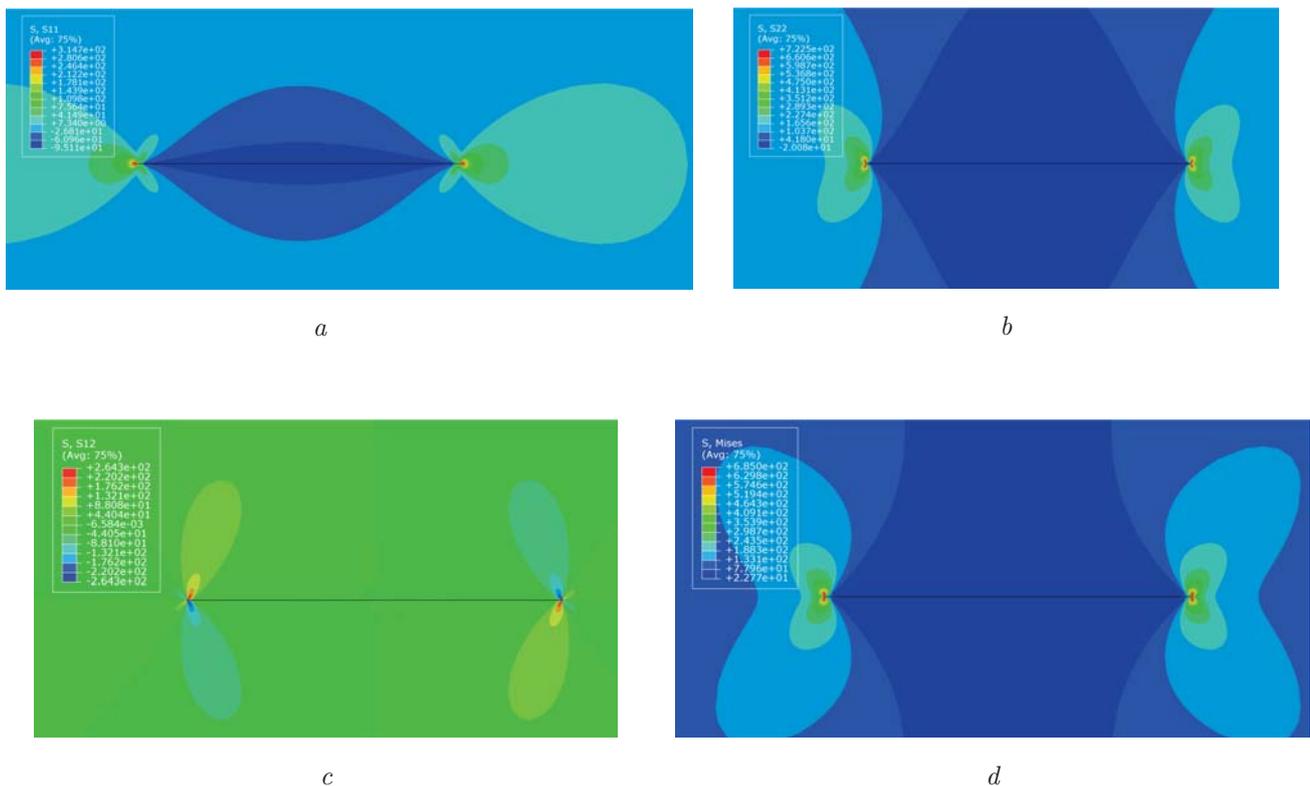


Рис. 2.1. Распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для углов $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ интенсивность касательных напряжений

Fig. 2.1. Distributions of stress tensor components and stress intensity for angles $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$:
 $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ tangential stress intensity

На рис. 2.2 приведены распределения напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для угла наклона трещины $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 30^\circ$; на рис. 2.3 показаны распределения напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для угла наклона трещины $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 0^\circ$; на рис. 2.4 — распределения напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для угла наклона трещины $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Полученные численные решения задач о комбинированном нагружении пластины с надрезом были использованы для воспроизведения аналитического решения вблизи кончика трещины в анизотропном материале с помощью переопределенного метода.

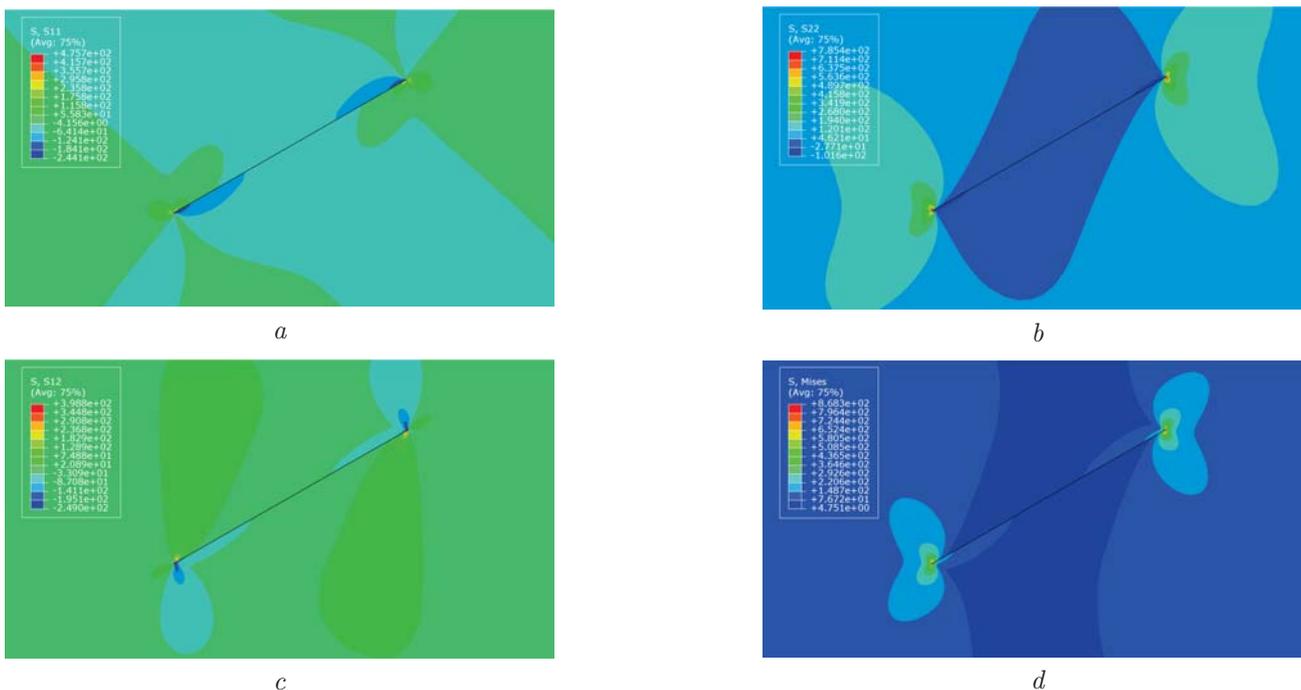


Рис. 2.2. Распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ интенсивность касательных напряжений

Fig. 2.2. Distributions of stress tensor components and stress intensity for angles $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$:
 $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ intensity of tangential stresses

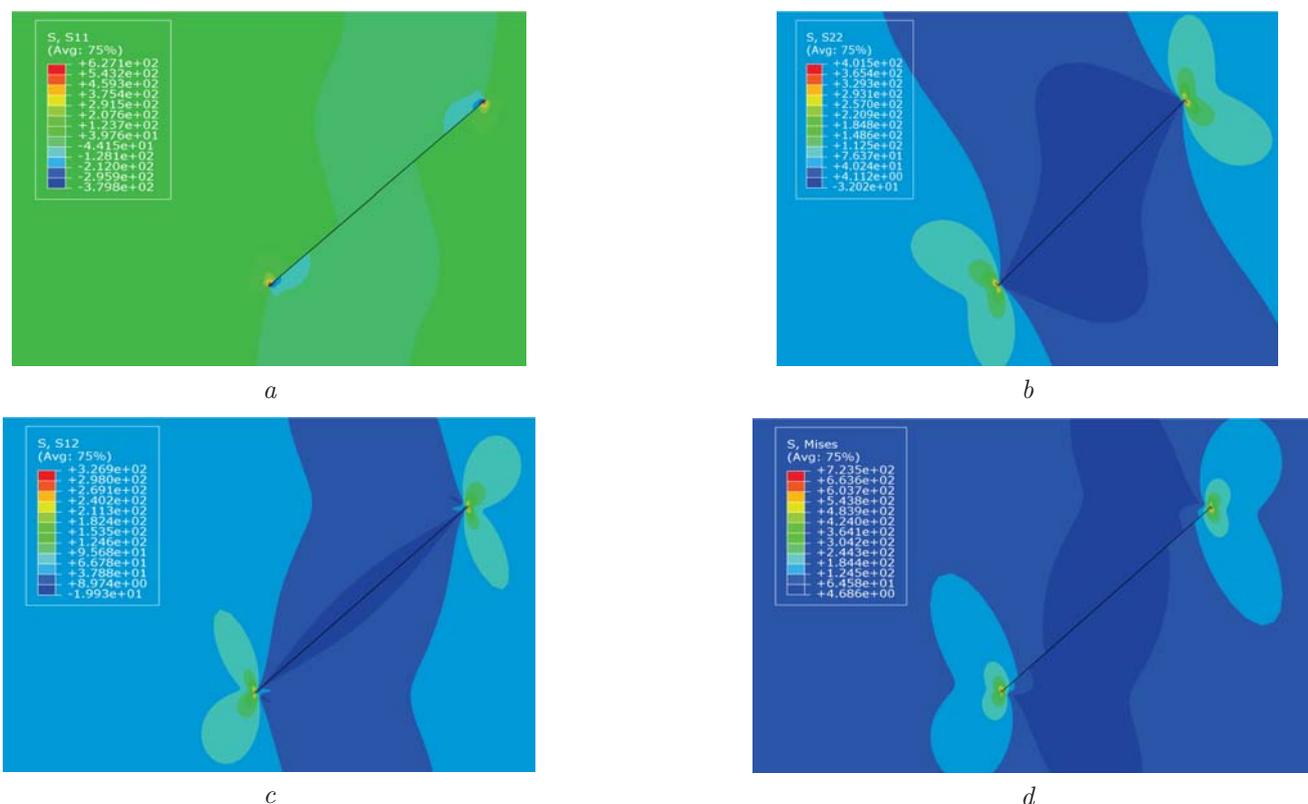


Рис. 2.3. Распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для углов $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ интенсивность касательных напряжений

Fig. 2.3. Distributions of stress tensor components and stress intensity for angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$:
 $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ intensity of tangential stresses

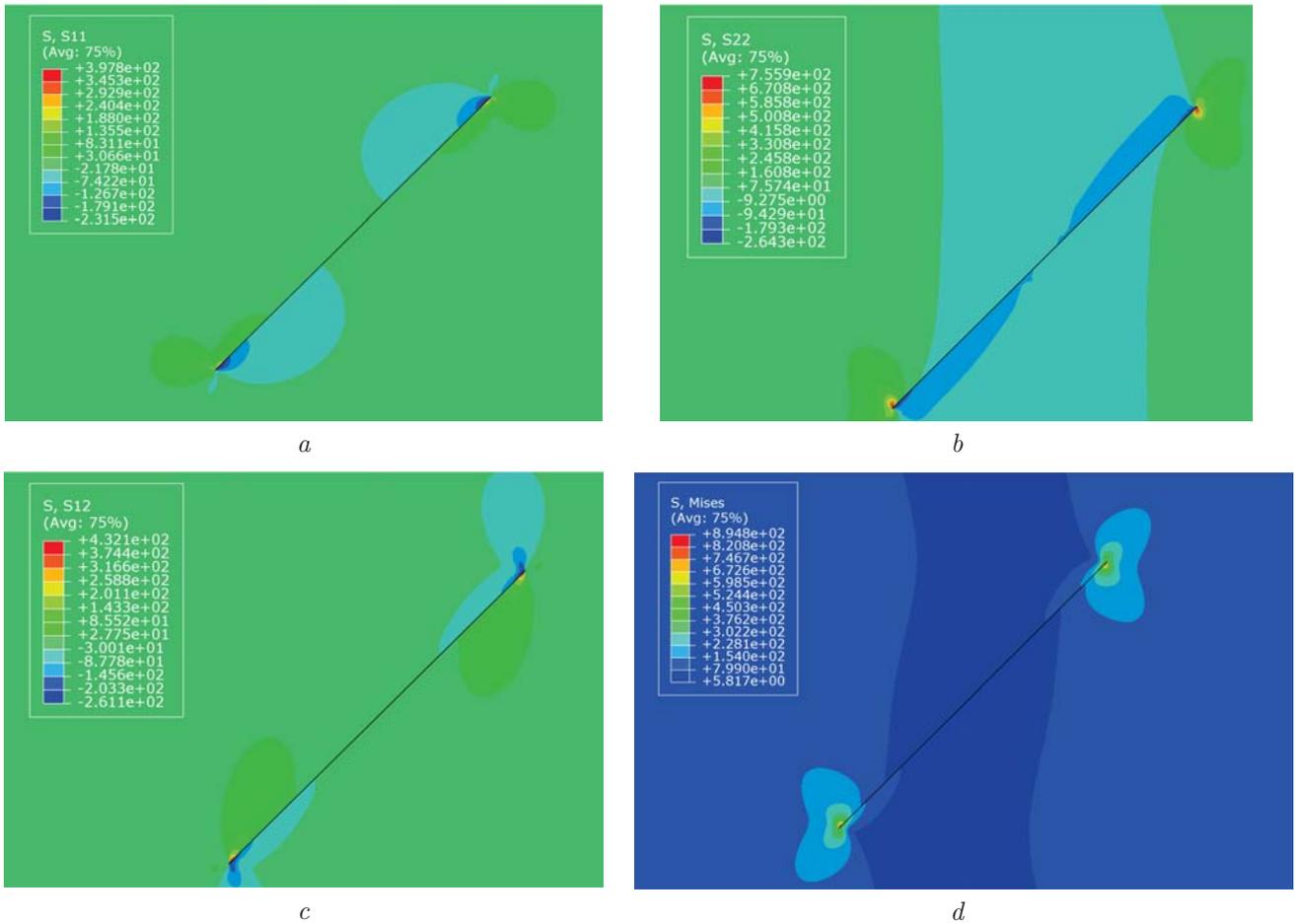


Рис. 2.4. Распределения напряжений и интенсивности напряжений при углах $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$:
 $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ интенсивность касательных напряжений
 Fig. 2.4. Distributions of stresses and stress intensity at angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$:
 $c - \sigma_{12}$, $d -$ tangential stress intensity

3. Техника переопределенного метода

В настоящее время переопределенный метод [17] нахождения коэффициентов ряда Уильямса или его обобщений на случай анизотропных сред стал основным способом определения значений коэффициентов [1–14]. В большинстве случаев алгоритм переопределенного метода основан на использовании значений компонент вектора перемещений у вершины трещины, что приводит к необходимости аккуратного исключения перемещения тела как абсолютно твердого тела. В настоящей работе используется подход, базирующийся на применении компонент тензора напряжений, что упрощает вычисления. С целью реконструкции асимптотического разложения полей напряжений у вершины трещины из конечно-элементного решения выбирались значения компонент тензора напряжений вдоль окружностей, охватывающих вершину трещины (рис. 3.1).

Для определения коэффициентов разложений (1.1), представляемых в кратком виде:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m r^{n/2-1} f_{m,ij}^{(n)}(\theta), \quad (3.1)$$

оно в может быть записано в матричной форме

$$\Sigma = CA, \quad (3.2)$$

где Σ — вектор-строка, состоящая из известных значений компонент тензора напряжений; C — матрица порядка, состоящая из известных радиальных и угловых распределений компонент тензора напряжений; A — вектор-столбец, состоящий из искоемых амплитудных множителей a_n^1 и a_n^2 .

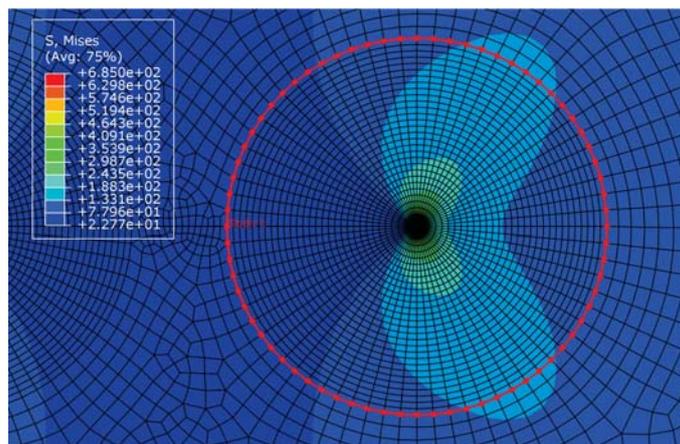


Рис. 3.1. Путь для извлечения значений компонент напряжений в окрестности вершины трещины
 Fig. 3.1. Path to extract stress component values in the vicinity of the crack tip

В раскрытой форме матрица C имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{1,11}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,11}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,11}^{(2)}(\theta_1) & f_{2,11}^{(2)}(\theta_1) & \cdots & f_{1,11}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,11}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,22}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,22}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,22}^{(2)}(\theta_1) & f_{2,22}^{(2)}(\theta_1) & \cdots & f_{1,22}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,22}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,12}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,12}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,12}^{(2)}(\theta_1) & f_{2,12}^{(2)}(\theta_1) & \cdots & f_{1,12}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,12}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,11}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,11}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,11}^{(2)}(\theta_2) & f_{2,11}^{(2)}(\theta_2) & \cdots & f_{1,11}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,11}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,22}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,22}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,22}^{(2)}(\theta_2) & f_{2,22}^{(2)}(\theta_2) & \cdots & f_{1,22}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,22}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,12}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,12}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,12}^{(2)}(\theta_2) & f_{2,12}^{(2)}(\theta_2) & \cdots & f_{1,12}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,12}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{1,11}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,11}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,11}^{(2)}(\theta_k) & f_{2,11}^{(2)}(\theta_k) & \cdots & f_{1,11}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,11}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,22}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,22}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,22}^{(2)}(\theta_k) & f_{2,22}^{(2)}(\theta_k) & \cdots & f_{1,22}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,22}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,12}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,12}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,12}^{(2)}(\theta_k) & f_{2,12}^{(2)}(\theta_k) & \cdots & f_{1,12}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,12}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Таким образом, Σ — матрица, имеющая одну строку и $3M$ столбцов, где M — число точек, извлеченных из конечно-элементного анализа, размерность матрицы C равна $3M \times 2K - 1$, где K — количество слагаемых, удерживаемых в асимптотическом разложении поля напряжений. В общем случае можно сохранять различное число слагаемых, соответствующих нормальному отрыву и поперечному сдвигу, но в данном случае сохранялось одинаковое число слагаемых.

В качестве тестового образца была выбрана квадратная пластина, длина стороны которой была много больше длины трещины. Результаты расчета алгоритма переопределенного метода сопоставлялись с аналитическим решением задачи о растяжении бесконечной плоскости с математическим разрезом. Результаты сравнения конечно-элементного решения и аналитического решения для большой пластины с малым дефектом приведены на рис. 3.2–3.5. Сплошными линиями изображены угловые распределения компонент тензора напряжений, определенные в соответствии с аналитическим решением задачи при сохранении различного числа слагаемых в разложении. Точками показаны результаты конечно-элементного анализа. Из представленных графиков следует, что конечно-элементное решение полностью совпадает с асимптотическим решением с коэффициентами ряда, найденными с помощью переопределенного метода. Таким образом, можно заключить, что переопределенный метод, основанный на конечно-элементном анализе напряженного состояния, позволяет с хорошей точностью воспроизвести коэффициенты обобщенного ряда и дать асимптотическое представление напряжений.

Далее, в конечно-элементном пакете Simula1 Abaqus была рассмотрена серия экспериментов для квадратной пластины со стороной $l = 10$ см и длиной трещины, равной $2a = 1$ см. Полученные коэффициенты ряда, обобщающего ряд Уильямса на случай ортотропных материалов, для растягиваемой пластины оказались следующими:

$$\begin{aligned} a_1 &= 18.755 \text{ Па}\sqrt{\text{см}}, a_2 = -4.211 \text{ Па}, a_3 = 13.7 \frac{\text{Па}}{\sqrt{\text{см}}}, a_4 = 0, \\ a_5 &= -3.162 \frac{\text{Па}}{\text{см}^{3/2}}, a_6 = 0.617 \frac{\text{Па}}{\text{см}^2}, a_7 = 0.629 \frac{\text{Па}}{\text{см}^{5/2}}, a_8 = 0, \\ a_9 &= 0.115 \frac{\text{Па}}{\text{см}^{7/2}}, a_{10} = 0.01 \frac{\text{Па}}{\text{см}^4}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

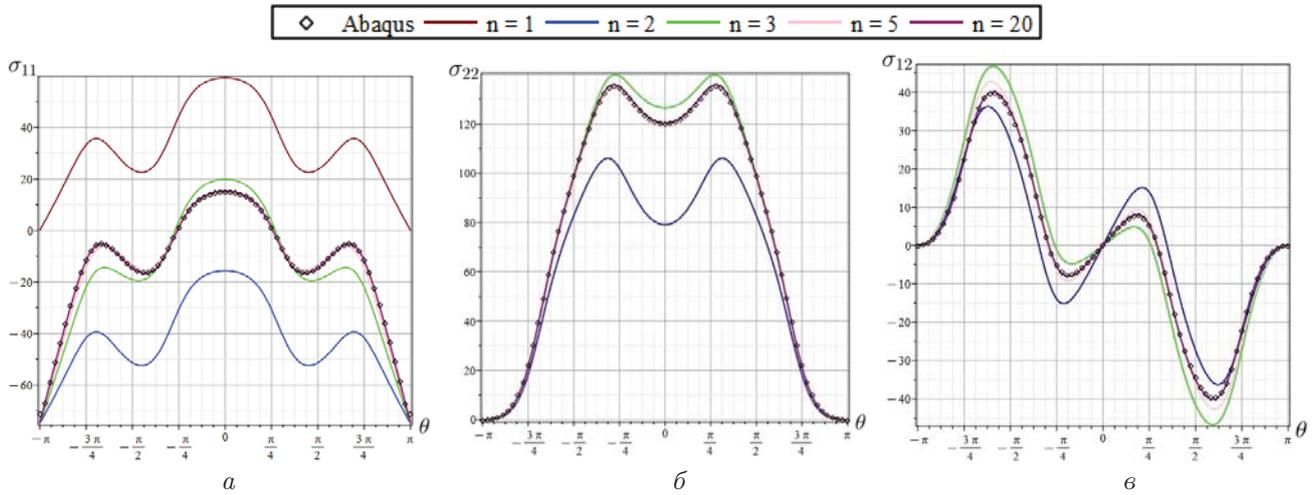


Рис. 3.2. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

Fig. 3.2. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

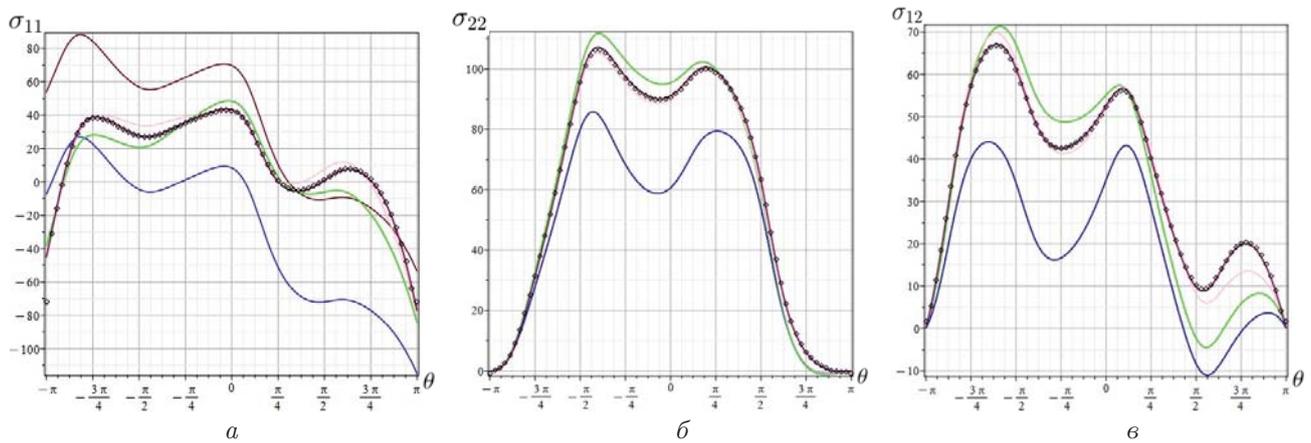


Рис. 3.3. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

Fig. 3.3. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

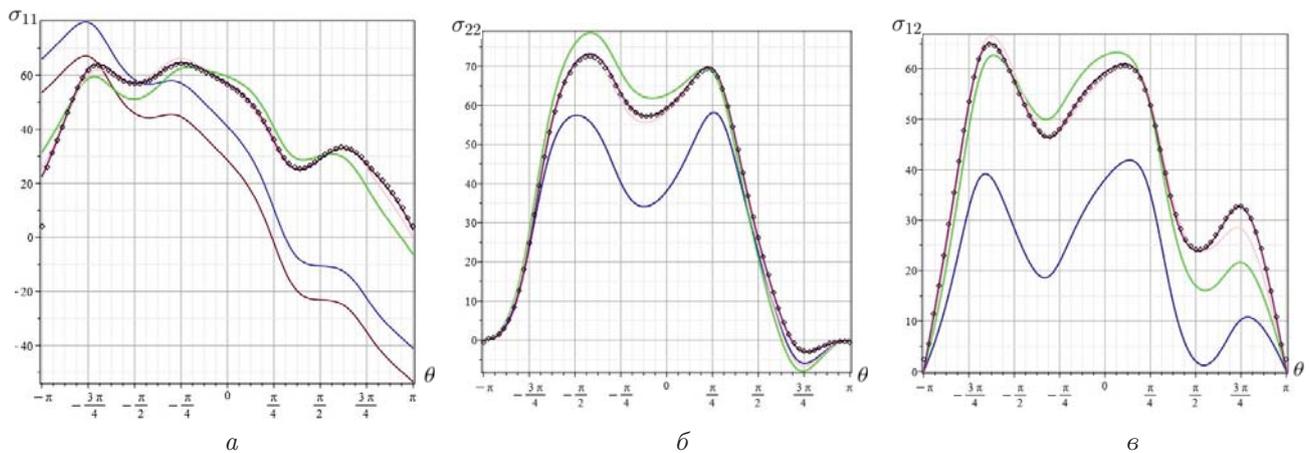


Рис. 3.4. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

Fig. 3.4. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

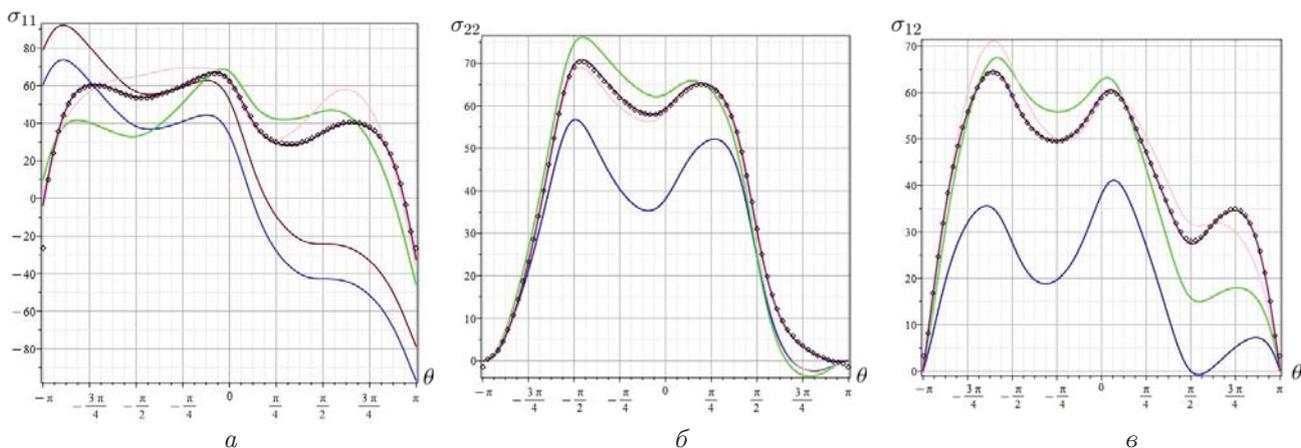


Рис. 3.5. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

Fig. 3.5. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

Подставив полученные коэффициенты (3.4) в асимптотическое представление для компонент тензора напряжений (1.1), можно получить следующие графики (рис. 3.6).

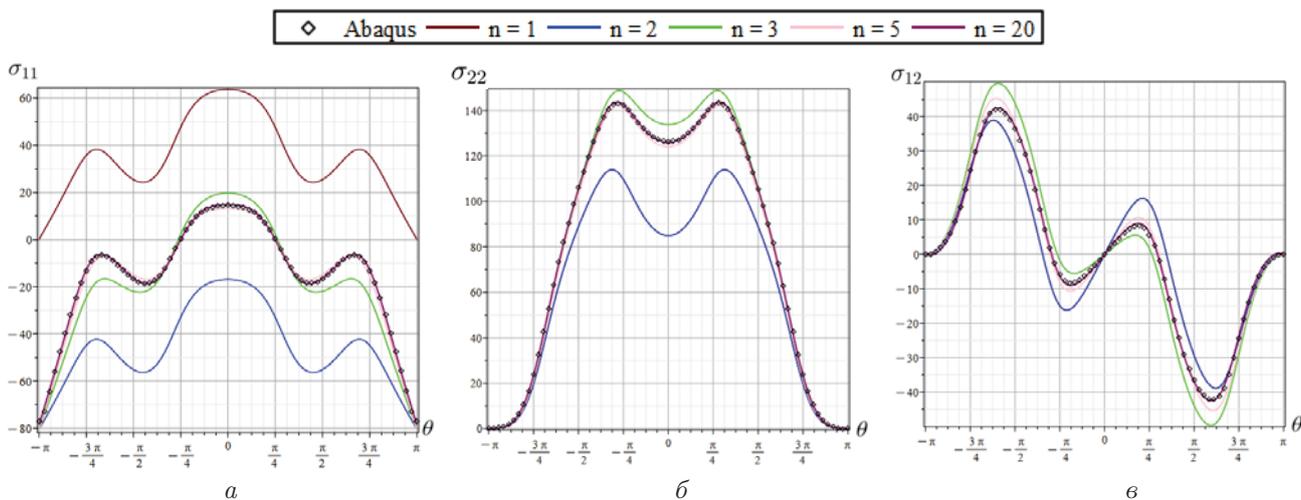


Рис. 3.6. Угловые распределения напряжений при углах $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$ для пластины с размерами $f = 10$ см, $b = 10$ см, $a = 1$ см: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

Fig. 3.6. Angular stress distributions at angles $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$ for a plate with dimensions $f = 10$ cm, $b = 10$ cm, $a = 1$ cm: $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$

Выводы

В работе дано обобщение переопределенного метода отыскания амплитудных множителей слагаемых высших порядков — коэффициентов ряда, обобщающего решение М. Уильямса на анизотропные среды. Представлены описание данного метода и опыт его применения на примере пластины, ослабленной центральным математическим разрезом, из анизотропного материала с кубической сингонией его свойств и в целом анизотропных ортотропных материалов. С помощью решения переопределенной системы уравнений вычислены коэффициенты членов разложения Уильямса более высокого порядка. Новизна рассматриваемого подхода заключается в использовании поля напряжений в расчетной схеме переопределенного метода. Процедура переопределенного метода, основанная на значениях компонент тензора напряжений, является более простой по сравнению с техникой, базирующейся на применении компонент вектора перемещений.

Литература

- [1] Nejati M., Ghouli S, Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. P. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Zhu C., Ren T., Zhang Q. Nonlinear optimization DIC method inspired by unsupervised learning for high order displacement measurement // *Optics and Lasers in Engineering*. 2024. Vol. 178. 108250.
- [3] Gonzales G.L.G., Antunes F.V., Sergio E.R., Vasco-Olmo J.M., Diaz F.A., Neto D.M. A comparison between FEM predictions and DIC results of crack tip displacement field in CT specimens made of titanium // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. Vol. 127. P. 104055. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104055>.
- [4] Lammens B., Portemont G., Berthe J., Seghir R., Rethore J. Determining singular and non-singular Williams' expansion terms from full-field measurements: Consideration of structural effects on fracture behavior. // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 130. P. 104304. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104304>.
- [5] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods // *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 296. P. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V. Holographic interferometry experiments and numerical analyses of the stress field on the Williams series expansion: higher – order terms // *Procedia Structural Integrity*. 2022. Vol 39. P. 761–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.150>.
- [7] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Crack tip monitoring by multiscale optical experimental techniques // *International Journal of Fatigue*. 2022. Vol. 155. P. 106610. DOI: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.29006.18244>.
- [8] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Electronic Speckle Pattern Interferometry for fatigue crack monitoring // *Procedia Structural Integrity*. 2022. Vol. 37. P. 873–879. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.021>.
- [9] Patil P.P., Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. 2017. Vol. 93. P. 182–194. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.
- [10] Belova O.N., Stepanova L.V., Kosygina L.N. Experimental study on the interaction between two cracks by digital photoelasticity method: construction of the Williams series expansion // *Procedia Structural Integrity*. 2022. Vol. 37. P. 888–899. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.023>.
- [11] Xu L.R. Experimental studies on the static sharp notch effects during dynamic crack kinking/nucleation at the material interfaces // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. P. 104476.
- [12] Hou C. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic // *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 242. P. 107455. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455>.
- [13] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods // *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 296. P. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [14] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 231. P. 106982. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [15] de Saint-Venant. Memoire sur la distribution des elasticites autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulierelement lorsqu'il est amorphe sans etre isotrope // *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*. 1863. Serie 2. Vol. 8. P. 353–430. URL: http://www.numdam.org/item/JMPA_1863_2_8_353_0.
- [16] The Materials Project. URL: <https://next-gen.materialsproject.org> (дата обращения: 10.01.2024).
- [17] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-Revisited // *Engineering Fracture Mechanics*. 1997. Vol. 56, issue 1. P. 25–41; 43–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66

Submitted: 11.02.2024

Revised: 23.03.2024

Accepted: 15.05.2024

M.A. Fomchenkova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: Masha18072013@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3227-5433>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: stepanova.l.v.@ssau.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

PROCEDURE OF THE OVERDETERMINISTIC METHOD FOR FINDING THE FIELD EXPANSION COEFFICIENTS AT THE CRACK TIP BASED ON A FINITE ELEMENT SOLUTION FOR THE STRESS TENSOR COMPONENTS

ABSTRACT

The article proposes and implements a procedure for reconstructing the asymptotic series expansion of stress, strain and displacement fields in anisotropic materials, generalizing the Williams solution for linearly elastic isotropic materials, based on a finite element solution to the problem of deforming a sample with a defect in an anisotropic orthotropic material in the approximation of a plane problem of elasticity theory. The stress field expansion coefficients near the crack tip in an anisotropic material are determined using an overdeterministic method originally proposed to reconstruct the asymptotic expansion from experimental data of a photoelastic study. In this paper, this method is extended to anisotropic materials with various types of symmetry and the novelty of the proposed approach lies in the reconstruction of the asymptotic expansion from the finite element solution for the stress tensor components in the nodes of the finite element grid, which allows us not to exclude their displacement fields components corresponding to the displacement of a body as an absolutely solid body. In the proposed approach, it is possible to use data from finite element calculations directly in the scheme of the overdeterministic method. It is shown that the coefficients of higher approximations are reliably determined by an overdeterministic method based on the stress field found from finite element analysis.

Key words: finite element method; anisotropic media; crack; stress fields at the crack tip; asymptotic solution.

Citation. Fomchenkova M.A., Stepanova L.V. Procedure of the overdeterministic method for finding the field expansion coefficients at the crack tip based on a finite element solution for the stress tensor components. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 54–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Fomchenkova M.A., Stepanova L.V., 2024

Maria A. Fomchenkova — Master's degree student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Nejati M., Ghouli S, Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 91, pp. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Zhu C., Ren T., Zhang Q. Nonlinear optimization DIC method inspired by unsupervised learning for high order displacement measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 2024, vol. 178, p. 108250.
- [3] Gonzales G.L.G., Antunes F.V., Sergio E.R., Vasco-Olmo J.M., Diaz F.A., Neto D.M. A comparison between FEM predictions and DIC results of crack tip displacement field in CT specimens made of titanium. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2023, vol. 127, p. 104055. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104055>.

- [4] Lammens B., Portemont G., Berthe J., Seghir R., Rethore J. Determining singular and non-singular Williams' expansion terms from full-field measurements: consideration of structural effects on fracture behavior. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, vol. 130, p. 104304. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104304>.
- [5] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 296, p. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V. Holographic interferometry experiments and numerical analyses of the stress field on the Williams series expansion: higher – order terms. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 39, pp. 761–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.150>.
- [7] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Crack tip monitoring by multiscale optical experimental techniques. *International Journal of Fatigue*, 2022, vol. 155, p. 106610. DOI: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.29006.18244>.
- [8] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Electronic Speckle Pattern Interferometry for fatigue crack monitoring. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 37, pp. 873–879. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.021>.
- [9] Patil P.P., Vyasrayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, vol. 93, pp. 182–194. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.
- [10] Belova O.N., Stepanova L.V., Kosygina L.N. Experimental study on the interaction between two cracks by digital photoelasticity method: construction of the Williams series expansion. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 37, pp. 888–899. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.023>.
- [11] Xu L.R. Experimental studies on the static sharp notch effects during dynamic crack kinking/nucleation at the material interfaces. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, p. 104476.
- [12] Hou C. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, vol. 242, p. 107455. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455>.
- [13] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 296, p. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [14] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 231, p. 106982. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [15] de Saint-Venant. Memoire sur la distribution des elasticites autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulierement lorsqu'il est amorphe sans etre isotrope. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 1863, serie 2, vol. 8, pp. 353–430. Available at: http://www.numdam.org/item/JMPA_1863_2_8_353_0.
- [16] The Materials Project. Available at: <https://next-gen.materialsproject.org> (accessed 10.01.2024).
- [17] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-Revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, vol. 56, issue 1, pp. 25–41; 43–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-67-80

УДК 532.5-1/-9

Дата: поступления статьи: 22.03.2024
после рецензирования: 25.04.2024
принятия статьи: 15.05.2024

А.Р. Агаев

Тюменский государственный университет,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: stud0000249324@study.utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-7128-9921>

А.Я. Гильманов

Тюменский государственный университет,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

А.П. Шевелёв

Тюменский государственный университет,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

РАСЧЕТ ВЕЛИЧИНЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ
ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕФТЯНОЙ ПЛАСТ

АННОТАЦИЯ

В настоящее время существует проблема истощения запасов легкодобываемой нефти. Для поддержания темпов добычи углеводородов в разработку вовлекаются трудноизвлекаемые запасы, значительную часть которых составляют сверхвысоковязкие нефти, добыча которых занимает относительно малую долю в мировом нефтепромысле в связи со сложностью процесса. Методы, существующие на данный момент, не позволяют с достаточной степенью эффективности производить извлечение тяжелой и сверхтяжелой нефти из пластов. Использование такого метода, как сверхвысокочастотное воздействие, не получило широкого распространения на нефтепромысле, так как для определения оптимальных параметров воздействия необходимо использовать моделирование, что вызывает затруднения с учетом ряда проблем, связанных с особенностью метода. В данной работе рассматривается моделирование процесса сверхвысокочастотного воздействия для повышения эффективности процесса добычи нефти. Статья посвящена моделированию процесса сверхвысокочастотного волнового воздействия на нефтяной пласт с учетом физико-химических параметров залежей в пласте, таких как теплопроводность, диэлектрическая проницаемость нефти и воды (с учетом ее солености) в пласте, в рамках метода с использованием сверхвысокочастотного воздействия впервые определяется величина экранирования материалом труб данного воздействия и оптимальные параметры источника излучения, параметры конструкций труб скважин для эффективного воздействия на залежи нефти с минимальными потерями. Цель работы состоит в определении оптимальных параметров источника сверхвысокочастотного воздействия для достижения рентабельных значений коэффициента извлечения нефти. Применяется физико-математическая модель сверхвысокочастотного воздействия на пласт, основанная на законах электродинамики и плотности объемного тепловыделения в уравнении теплопроводности. Получены зависимости величины экранирования сверхвысокочастотного излучения эксплуатационной трубой скважины от ее толщины, зависимость величины экранирования сверхвысокочастотного излучения эксплуатационной трубой скважины от толщины щели перфорации в данной трубе и зависимость радиуса проникновения электромагнитных волн в пласт от показателя поглощения электромагнитного излучения в пласте. Установлено существование минимального радиуса проникновения СВЧ-излучения в пласт для достижения рентабельных значений коэффициента извлечения нефти свыше 30 %, составляющего 57 м, а также определен показатель поглощения СВЧ-излучения пластом, позволяющий достичь указанного значения радиуса проникновения СВЧ-излучения в пласт.

Ключевые слова: трудноизвлекаемые запасы; коэффициент извлечения нефти; сверхвысокочастотное воздействие; диэлектрическая проницаемость; экранирование сверхвысокочастотного воздействия; поглощение излучения; нефтяной пласт; нефтяные залежи; электромагнитное излучение.

Цитирование. Агаев А.Р., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П. Расчет величины экранирования при высокочастотном воздействии на нефтяной пласт // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 67–80. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-67-80>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Агаев А.Р., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., 2024

Али Рустамзоа Агаев — студент Школы естественных наук, Тюменский государственный университет, группа 23Ф202-1, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Александр Янович Гильманов — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Александр Павлович Шевелёв — кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Введение

В настоящее время перспективным направлением для развития нефтедобывающей промышленности является разработка месторождений с тяжелыми нефтями и природными битумами. По причине истощения запасов традиционной легкой нефти, а также вследствие усовершенствования технологий разработки из ранее неиспользовавшихся источников углеводородов существует интерес к залежам высоковязких нефтей и природных битумов [1]. Разработка большего объема нефти по сравнению с «первичной добычей» — в данном режиме за счет внутренней энергии в пласте извлекается из этих самых пластов ископаемое топливо — это цель всех методов повышения нефтеотдачи [2].

В последнее время, исходя из геофизического строения пластов, физико-химических свойств флюидов в нем, имеющих запасов углеводородного сырья и их состояния, климатических и географических условий, а также технологических и экономических характеристик, используют различные способы для извлечения из залежей высоковязких нефтей и природных битумов [3]. Выделяют следующие способы разработки: термические методы, подразумевающие тепловое воздействие на пласт; холодные, заключающиеся в использовании растворителей, ненагретой воды, а также особенностей способов бурения скважин для разработки пластов; физико-химические, подразумевающие использование различных полимеров и поверхностно-активных веществ (ПАВ); газовые методы (закачка диоксида углерода для снижения вязкости нефти); гидродинамические (циклическое заводнение), волновое или плазменно-импульсное воздействие; комбинированные (сочетание вышеописанных методов).

Однако у этих способов нефтедобычи при использовании для извлечения тяжелых высоковязких нефтей из пластов имеется ряд недостатков: данные способы разработки приводят к увеличенным затратам на производство, малым коэффициентам извлечения нефти, низкому проценту светлых нефтепродуктов в общей массе переработанных углеводородов [4]. Сверхвысокочастотное воздействие (СВЧ-воздействие) как метод интенсификации нефтедобычи может являться эффективным. Его основные преимущества по сравнению с традиционными методами: объемный и избирательный нагрев пласта, большая скорость прогрева, низкая стоимость содержания оборудования, снижение загрязнения окружающей среды при использовании такой технологии. Технология СВЧ-воздействия заключается в следующем: СВЧ-излучатель спускают вглубь горизонтальной или вертикальной скважины. Далее посредством интервального излучения производится нагрев близлежащей части пласта, в частности высоковязкой нефти и природных битумов, с последующей остановкой нагрева для установления термодинамического равновесия в пласте и для предотвращения избыточного нагрева нефти, вследствие чего может произойти ее коксование. Для нагрева широкой области пласта необходимо будет использовать интервальное расположение СВЧ-установок по скважине с учетом распределения тепла в породе данного месторождения. Исходя из вышесказанного, необходимо будет произвести эксперименты по распределению тепла в пласте. От дру-

гих видов электромагнитного излучения, таких как рентгеновское, видимый свет, ИК- и УФ-излучение, СВЧ-излучение отличается большей длиной волны (от 1 мм до 1 м для СВЧ-излучения по сравнению с диапазоном от 1 нм до 1 мм для оптической области электромагнитного спектра) и более низкой энергией квантов.

Следовательно, одним из перспективных способов увеличения интенсификации добычи высоковязких нефтей и природных битумов (ВНПБ) является СВЧ-воздействие на пласт. Вода, нефть, смолопарафин и углеводороды представляют собой высоковязкие нефти и природные битумы. Лабораторные эксперименты с образцами горной породы подтверждают эффективность СВЧ-воздействия [5–9].

Для рассмотрения влияния СВЧ-воздействия на пласт в месторождениях ВНПБ необходимо использовать моделирование, так как значительно большие затраты, по сравнению с моделированием, необходимы для проведения экспериментов в лабораторных установках, а тем более при испытаниях непосредственно на нефтепромысле. Численное моделирование позволяет без существенных затрат рассмотреть разные варианты воздействия на залежи нефти с различными начальными параметрами (например, температуропроводность и теплопроводность, исходная вязкость, плотность, диэлектрическая проницаемость), что позволяет установить целесообразность для увеличения притока в скважину углеводородов применения СВЧ-метода и найти оптимальные параметры воздействия на пласт: размер генератора, частоту излучения, его мощность, а также возможность применения для увеличения эффективности воздействия на углеводороды нелинейных свойств веществ в среде.

1. Современное состояние моделирования СВЧ-воздействия на пласт

В работе [10] было проведено моделирование нагрева тяжелой нефти (плотность в градусах API около 10) с помощью воздействия электромагнитных волн (ЭМВ), генерируемых источником энергии мощностью 1 кВт, на продуктивный пласт, расположенный на глубине примерно 300 м. В данной работе используется предположение о линейной зависимости температуры нагрева пласта от мощности генератора микроволн. Результаты моделирования показали очень небольшой уровень нагрева (от 10 до 30 °С). Однако в данной работе считается, что СВЧ-излучение имеет удовлетворительные характеристики при нагреве пласта.

В статье [11] было представлено численное моделирование СВЧ-излучения для добычи тяжелых нефтей. Гидродинамическая модель позволяет моделировать многофазные тепловые потоки в залежах углеводородов. Исследуется различное расположение скважины с микроволновым излучателем, который моделируется точечным источником энергии. Хотя диэлектрическая проницаемость зависит от температуры и частоты микроволнового излучения, при моделировании не учитывается влияние температуры на диэлектрическую проницаемость. Моделируется слоисто-неоднородный пласт тяжелой нефти толщиной 6 м, состоящий из шести пропластков равной мощности. Как и в случае с парогравитационным дренажем, в пласте тяжелой нефти параллельно бурились две горизонтальные скважины. Нижняя скважина использовалась в качестве добывающей, но вместо закачки пара через верхнюю скважину в ней был установлен излучатель микроволновой энергии, представленный линейным источником. В данной работе было продемонстрировано, что от мощности СВЧ-антенны зависит скорость выделения тепла в пласте, однако лишь до некоторого предела. А также для преодоления проблем, связанных с использованием СВЧ-излучения, исследованы несколько методов, позволяющих повысить эффективность всего процесса. В этом исследовании подробно обсуждается каждое из предложенных решений (создание сети добывающих и нагнетательных скважин, использование циклического СВЧ-воздействия — подразумеваются циклический нагрев и добыча, цикл может быть повторен несколько раз, сочетание СВЧ-воздействия с закачкой воды, а также использование активированного угля для усиления СВЧ-воздействия на пласт, так как активированный уголь обладает более высокой диэлектрической проницаемостью по сравнению с водой) и показано, что в сочетании с источником микроволнового излучения они значительно бы увеличили извлечение тяжелой нефти [11].

В исследовании [12] используется модель излучателя с бесконечно длинным проводом, который служит цилиндрическим генератором радиоволн. Допускается, что источник генерирует цилиндрическое электромагнитное поле (ЭМП), зависящее только от радиального расстояния, и, следовательно, осесимметричную цилиндрическую диаграмму направленности нагрева. Данная модель является подходящей, если протяженный источник применяется для нагрева большого по мощности участка пласта, а в центре воздействия находится область, удаленная от краев излучателя. В этой работе для оценки генерируемых электромагнитных полей (ЭМП) используются уравнения Максвелла. Для оценки плотности рассеиваемой мощности вдали от источника электромагнитного излучения применяется асимптотическая аппроксимация. Авторы в работе рассмотрели возможность использования в будущем таких микровол-

новых поглотителей, как активированный уголь, оксиды нанометаллов и полярные растворители. Это считается необходимым, так как сама по себе нефть плохо поглощает микроволны. Однако авторы [12] не дают ответа на вопрос, как закачивать наночастицы в пласт через ствол скважины во время электромагнитного нагрева.

В [13] рассматривается действие микроволнового нагрева на пласт (рис. 1.1). Реализация микроволнового метода возможна в различных вариантах: применение высокочастотного (ВЧ) и СВЧ-излучения, воздействие непосредственно на призабойную зону при помощи помещенного на забое источника, прогрев может осуществляться через элементы проточной транспортировки оборудования. Для исследований в рамках данной работы было выбрано одно из месторождений, расположенное в Западной Сибири. Исходя из исследований, на данном месторождении возможно достичь сокращения вязкости нефти в призабойной зоне в 10 раз. Однако данные исследования проводились на дегазированном образце, что приводит к завышенным результатам, поэтому аналитически было получено сокращение вязкости в 4 раза. Технология подразумевает помещение источника ВЧ-излучения на поверхности и передачу энергии к забою скважины через систему коаксиальных труб — обсадная колонная — насосно-компрессорные трубы, изолированную диэлектрическими шайбами, вследствие чего за счет диэлектрических свойств породы происходит нагрев призабойной зоны пласта.

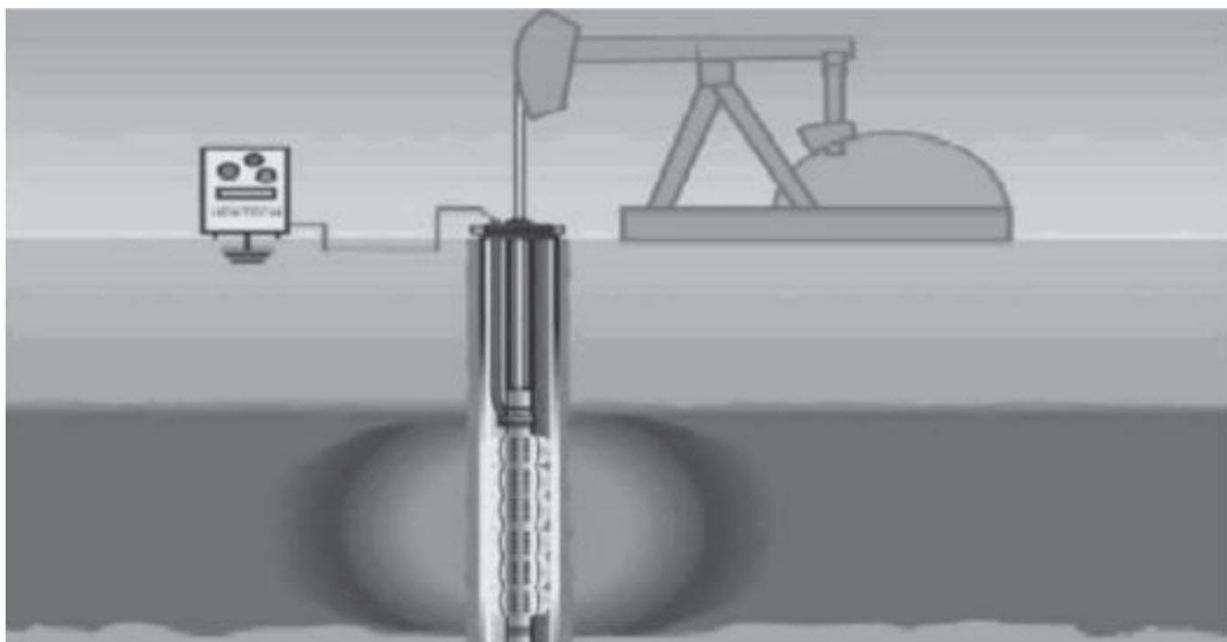


Рис. 1.1. Технология микроволнового нагрева [13]
Fig. 1.1. Technology of microwave heating [13]

В работе [14] рассматривается модель СВЧ-воздействия с закачкой растворителя в пласт. Основным уравнением, описывающим эти процессы, является уравнение конвективной диффузии. Скорость фильтрации в пласте задается законом Дарси, а распределения давления и температуры рассчитываются по уравнениям пьезопроводности и теплопроводности. В работе показано, что распределение давления и концентрации вдоль вертикальной оси не оказывает заметного влияния на результаты моделирования. На распределение температуры в пласте и по стволу скважины существенно влияет теплопередача в окружающую породу. Это обуславливает необходимость двумерного решения уравнения теплопроводности.

В статье [15] рассматриваются преимущества и недостатки приведенных выше методов, а именно нагрева микроволновым излучением пласта как в отдельности, так и с закачкой растворителя в пласт. В частности, утверждается, что в первом способе значительные потери энергии при передаче ее от устья к забою скважины являются недостатком. Указанный способ неприменим при разработке обводненных залежей, а так как во втором способе СВЧ-волны, излучаемые в залежи, от границы вода — нефть и вода — пустая порода будут отражаться, то эффективность при применении в залежах с высокой обводненностью на поздних стадиях разработки в скважинах с вязкой нефтью и битумом будет низкой — это является недостатком, который влечет за собой возможность выхода из строя оборудования для осуществления данного способа.

В следующей модели [16] введено предположение, что в залежи находятся только глина, нефть и вода, при равномерном нагреве залежи происходят образование пара, уменьшение вязкости высоковязких

нефтей и природных битумов, а также нагрев глины. Помимо этого, необходимо пренебречь движением нефти внутри пласта. Для описания процесса преобразования электромагнитной энергии СВЧ-излучения в тепловую, необходимо использовать дифференциальные уравнения Максвелла и закон Фурье. Распространение электромагнитных волн в пласте с помощью уравнений для плотности энергий электрического и магнитного полей сводится к уравнениям Гельмгольца. Количество энергии, переносимой электромагнитной волной, найдем по теореме Умова — Пойтинга. Преобразование последней формулы по теореме Гаусса в интеграл по объему позволит найти потери мощности излучения, которые будут определять собой закон Джоуля — Ленца. По формуле теплового потока определяется удельная мощность электромагнитного излучения, затрачиваемого на нагрев пласта за счет диэлектрических свойств воды и ВНПБ. Электромагнитная индукция возникает при воздействии на залежи ВНПБ ЭМП. Она описывается электродвижущей силой, наводимой в контуре, причем поглощение энергии ЭМП происходит на участке с активным сопротивлением, которое этот участок имеет благодаря процессу поляризации молекул пластовой смеси. На начальном этапе процесс приводит к появлению поверхностного тока, проникающего в объем пласта и приводящего к его нагреву. Далее в диэлектрик проникает образовавшийся вихревой ток, и выделяемая нагревательным элементом тепловая энергия превращается во внутрипластовую энергию — она определяется из уравнения закона Джоуля — Ленца. С использованием уравнения Лапласа можно определить мгновенное значение температуры в пласте.

На основе расчетов по математическим моделям и компьютерному моделированию в работах [16; 17] можно сделать вывод о перспективности применения СВЧ-обработки залежи для снижения вязкости ВНПБ и для интенсификации их добычи и транспортировки. Однако СВЧ-обработка имеет неоднозначное влияние на вязкость нефти различного состава.

Далее необходимо рассмотреть модель СВЧ-воздействия на пластовые залежи из работы [18]. В ней уже учитывается большее количество параметров — исходная вязкость, температуропроводность и теплопроводность, плотность, диэлектрическая проницаемость, а также фазовые переходы, движение границы раздела фаз, фильтрационное движение в насыщенной пористой среде, возникающее или усиливающееся из-за уменьшения вязкости и теплового расширения жидкой фазы, а также обратное влияние разогрева на поглощение электромагнитного излучения, связанное с изменением диэлектрических параметров среды. Процессы прогрева и фильтрации описываются системой двумерных взаимосвязанных уравнений теплопроводности и пьезопроводности, в которых учитывается конвективный перенос тепла движущейся жидкостью, объемное тепловыделение (вследствие поглощения электромагнитного излучения), зависимость вязкости жидкости от температуры, объемное расширение жидкости вследствие ее разогрева, а также неоднородность среды и скрытая теплота фазового перехода. Исследуемые задачи могут быть отнесены к классу нелинейных задач типа задачи Стефана, осложненных конвективным теплопереносом, объемным тепловыделением, неоднородностью среды и зависимостью физических параметров от температуры.

Модель рассматриваемого процесса, близкую к реальности, возможно построить с учетом всех вышеперечисленных особенностей. Для моделирования тепло- и электрофизические параметры среды являются исходными данными. Изучены достаточно хорошо теплоемкость, теплопроводность, теплота фазового перехода и другие теплофизические параметры многофазных сред и материалов в нефтяной технологии. Однако об электрофизических параметрах (диэлектрической проницаемости и тангенсе угла диэлектрических потерь) нельзя сказать то же самое, особенно в области высоких частот. Поэтому в работе [18] было исследовано поглощение ЭМП в зависимости от частоты излучения и температуры пласта. Выяснилось, что можно добиться того, чтобы в интервале температур вблизи температуры фазового перехода происходило интенсивное поглощение электромагнитной энергии, для этого необходимо подобрать частоту излучения определенным образом, так как для высоковязких и парафинистых нефтей в определенном диапазоне частот наблюдается синергетический эффект для показателя поглощения, приводящий к резкому изменению вязкости этих нефтей. Однако в данной работе вопрос об экранировании достаточно не исследован.

Вышеперечисленные модели имеют ряд недостатков: во-первых, в некоторых из них не учитывается такое физическое явление, как движение нефти внутри пласта (движение границы раздела фаз), и, как следствие, в таких моделях пренебрегается конвективным переносом тепла движущейся жидкостью; во-вторых, в большинстве приведенных выше моделей СВЧ-воздействия на нефтяной пласт не учтено влияние разогрева пласта на поглощение электромагнитного излучения, связанное с изменением диэлектрических параметров среды (в частности, с изменением коэффициента поглощения электромагнитных волн в зависимости от температуры). И в-третьих, ключевым недостатком всех вышеприведенных моделей является отсутствие учета экранирования электромагнитных волн (ЭМВ) трубами в скважинах.

2. Модель экранирования СВЧ-излучения эксплуатационной колонной

Исходя из вышенаписанного, необходимо применить новую модель, которая должна учитывать те факторы, которые не были рассмотрены в предыдущих моделях. Поэтому в рамках данной статьи ставится цель исследовать процесс воздействия ЭМП на пласт с учетом потерь в трубах скважины и зависимость глубины проникновения ЭМВ в пласт от показателя поглощения ЭМВ. Необходимо рассмотреть технологию воздействия на пласт с помощью помещенного на поверхности источника. Более подробно нужно осветить процесс прохождения ЭМВ по системе коаксиальных труб направления, кондуктора и промежуточных колонн. Сделать это необходимо для того, чтобы оценить потери ЭМВ при прохождении по системе труб и в дальнейшем в эксплуатационной колонне. При прохождении излучения по коаксиальным трубам можно рассматривать их в качестве конденсатора. То есть труба выступает в качестве экрана, препятствующего попаданию ЭМП в пласт сквозь трубу. В работе [19] эффективность электромагнитного экрана вводится как отношение напряженностей поля в защищаемой области пространства при отсутствии экрана E_0 и при его присутствии E :

$$E_k = \frac{E_0}{E} = \frac{H_0}{H}, \quad (2.1)$$

где H_0 и H — напряженности магнитного поля при отсутствии экрана и в его присутствии.

Эффективность экранирования сплошной металлической трубой толщиной даже 1 мм очень высока, не говоря уже о толщинах порядка сантиметра. Она определяется по формулам:

$$E_k = E_{k0} + 6,3 \frac{R}{\lambda} E_{kp}, \quad (2.2)$$

$$E_{k0} = 1 + \frac{0,5\mu d}{R}, \quad (2.3)$$

$$E_{kp} = 60\pi\sigma d \left| \frac{\text{sh} \left[(1+i) \frac{d}{\delta} \right]}{(1+i) \frac{d}{\delta}} \right|, \quad (2.4)$$

где E_{k0} — эффективность экранирования при нулевой частоте; R — радиус обсадной колонны; λ — длина волны электромагнитного излучения; E_{kp} — эффективность плоского экрана; μ — относительная магнитная проницаемость материала трубы; d — толщина трубы. Эффективность плоского экрана определяется формулой (2.4), где σ — удельная проводимость материала трубы; δ — толщина поверхностного слоя, то есть расстояние, при распространении на которое амплитуда электромагнитной волны ослабевает в e раз и получает поворот по фазе (отстает) на $\frac{\pi}{2}$, а i — это мнимая единица.

При длине волны электромагнитного излучения λ , равной 100 мм (при частоте излучения f , равной 3 ГГц), для стальной трубы с относительной магнитной проницаемостью μ , равной 200, при радиусе обсадной колонны R , равном 223 мм, и при толщине стальной трубы d 10 мм E_k будет порядка сотен тысяч и более.

Можно рассмотреть модель прохождения СВЧ-излучения сквозь эксплуатационную колонну в призабойную зону скважины, если рассматривать эксплуатационную колонну как металлический экран — металлическую сетку с перфорацией для добычи нефти, при прохождении которой ЭМП происходит потеря его энергии. Для оценки эффективности прохождения излучения сквозь перфорации в колонне необходимо рассчитать поглощение ЭМП эксплуатационной трубой. Из [19] известно, что если стенки экрана относительно толстые, а щели по своим размерам относительно велики, то поле за экраном (в защищаемой области, а в данном случае, наоборот, — в области, в которую должно попасть как можно больше ЭМВ) создается в основном за счет проникновения через эти отверстия. Для металлической сетки-экрана можно найти оптимальную эффективность (в данном случае минимальную эффективность), при которой через перфорации эксплуатационной колонны в призабойную зону будет проходить максимальное количество электромагнитных волн (потери на экранирование будут минимальными). В данной статье рассмотрен экран с одним отверстием с параметрами, заданными ниже (в случае перфорации многочисленными отверстиями при расчете экранирования необходимо учитывать интерференцию волн, которые проходят сквозь отверстия и накладываются друг на друга, однако этот случай в данной работе не рассматривается).

Анализ этих законов [19] приводит к следующей формуле для плоского экрана из сетки:

$$E_{kp} = 60\pi \frac{\lambda}{2a \left| \ln \left(\frac{2a}{D} \right) - 1,2 + \left(\frac{\lambda R_c}{120\pi} \right) [\beta_f(u) + i\alpha_f(u)] \right|}, \quad (2.5)$$

где a — шаг сетки перфорации; D — диаметр излучателя (диаметр проволоки для экрана из металлической сетки — подразумевается слой проволоки между перфорациями); R_c — сопротивление 1

м проволоки по постоянному току, где $\alpha_f(u), \beta_f(u)$ зависят от функций Кельвина 1-го рода (функции Бесселя — Кельвина), они необходимы при рассмотрении распространения электромагнитных волн сквозь щель в экране для определения величины экранирования, а коэффициент u определяется из формулы

$$u = \frac{D}{\sqrt{2}\delta}. \quad (2.6)$$

На практике для δ удобно применять формулу

$$\delta = \frac{A}{\sqrt{f}}, \quad (2.7)$$

где коэффициент A для стали равен $1,6 * 10^{-2} \text{ м} * \Gamma_{\text{ц}}^{1/2}$.

Шаг сетки перфорации

$$a = X + D, \quad (2.8)$$

так как толщина слоя металла X между перфорациями входит в шаг сетки, помимо ширины отверстия.

Из (2.7) $\delta = 0,29$ мкм.

В работе [19] установлено, что при $u > 50$ с большой точностью можно считать, что коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\alpha_f(u) = \beta_f(u) = \frac{u}{2\sqrt{2}}. \quad (2.9)$$

Возможно считать $u > 50$ в ниже написанных расчетах, так как уже при D , равном 1 мм, величина u примерно равна 2400, а при больших значениях D коэффициент u увеличивается.

3. Интегральный подход к расчету экранирования

Первый модельный случай расчета: $R = 10$ см, $f = 3$ ГГц, ширина перфорационных отверстий $y = 0,5$ мм, а длина перфорации $x = 100$ мм, $D = 25$ мм. Тогда $E_k \approx 68,3$.

Исходя из выше написанного, получается, что экранирование эксплуатационной колонной ослабляет дошедшее до забоя излучение в десятки раз, что существенно снижает эффективность воздействия ЭМВ на пласт. При этом двухстенный экран при $d \ll \delta$ из сетки в $E_1 \frac{4\pi d}{\lambda}$ раз эффективнее одностенного из той же сетки (при $E_1 \frac{4\pi d}{\lambda} > 1$, где $E_1 = E_p$ — эффективность одностенного экрана).

Стоит отметить, что в общем случае величина заряда и плотность тока в различных точках отверстия отличаются и эти величины взаимосвязаны. Лишь в случае, когда размеры щели много меньше четверти длины волны, можно рассматривать задачи проникновения электрической и магнитной составляющих поля через отверстие самостоятельно как квазистатические. Далее считая, что электромагнитная волна падает на экран под прямым углом, а ее электрическая составляющая перпендикулярна по направлению ширине трубы, и зная, что в нефтепромысле при прямоугольной перфорации используют щели с шириной порядка 1 мм и менее, можно утверждать, что ширина перфорации в трубе много меньше четверти длины волны, следовательно, ширина перфорации практически не влияет на величину экранирования электромагнитной волны эксплуатационной колонной. Теперь необходимо рассмотреть зависимости глубины проникновения ЭМП в пласт в зависимости от толщины трубы; глубину проникновения ЭМП в пласт в зависимости от длины щели перфорации. Эти зависимости рассматриваются при фиксированных прочих параметрах на тех же значениях, что и в первом модельном случае, они приведены на рис. 3.1 и 3.2.

Исходя из вида рис. 3.1, можно сделать вывод о практически линейной зависимости величины E_{kp} от толщины эксплуатационной трубы (в диапазоне от 0,005 до 0,25 м) при фиксированных частоте излучения, радиусе стальной трубы, длине и ширине перфорации в трубе. Исходя из рис. 3.2, можно сделать вывод об экспоненциальной зависимости величины E_{kp} от длины щели перфорации.

Теперь необходимо определить, с какой скоростью электромагнитные волны будут затухать при прохождении продуктивного пласта. В работе [18] приведено описание процесса разогрева с помощью уравнения теплопроводности:

$$c_r \rho \frac{\partial T}{\partial t} + m c_l \rho_l \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\alpha W \psi(z)}{2\pi r h} \exp[\alpha(b-r)], \quad (3.1)$$

где c_r, c_l — удельные теплоемкости насыщенной пористой среды и жидкости в пласте; ρ, ρ_l — плотности породы и жидкости в пласте; T — температура; t — время; r — радиальная координата; z — вертикальная координата; v_r и v_z — проекции скорости фильтрации на радиальную и вертикальную оси; λ — коэффициент теплопроводности пласта; α — показатель поглощения; W — мощность источника электромагнитного излучения; $\psi(z)$ — функция, описывающая распределение плотности электромагнитного излучения по вертикали; b — радиус скважины; h — мощность (толщина) пласта.

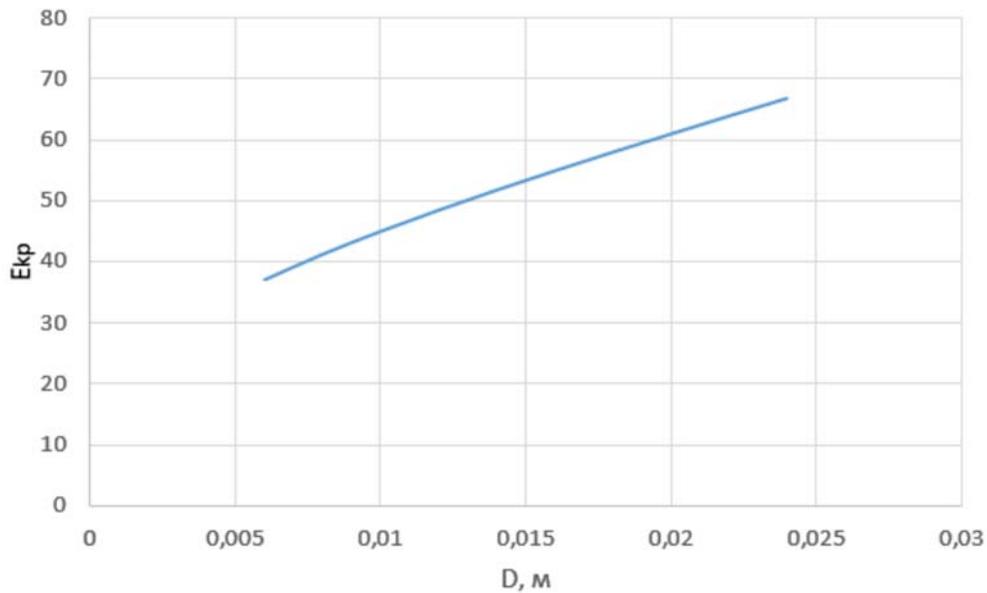


Рис. 3.1. Зависимость величины экранирования от толщины эксплуатационной трубы
 Fig. 3.1. Dependence of the shielding value on the thickness of the service pipe

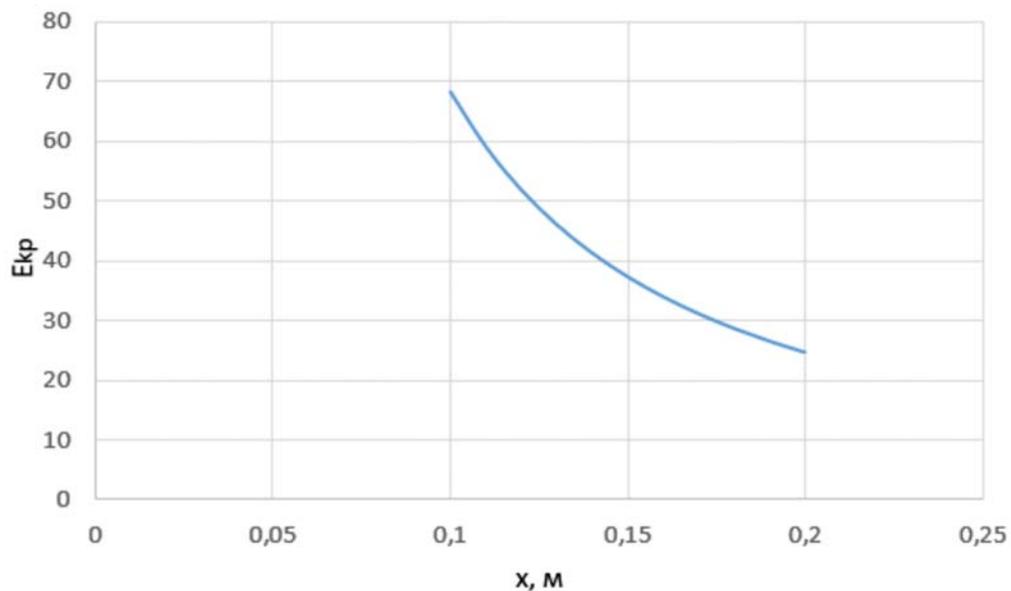


Рис. 3.2. Зависимость величины $E_{кр}$ от длины щели перфорации
 Fig. 3.2. Dependence of $E_{кр}$ value from length of perforation hole

В уравнении (3.1) последнее слагаемое выражает плотность объемного тепловыделения, возникающего вследствие поглощения электромагнитного излучения (закон Бугера — Ламберта с учетом геометрической расходимости излучения) в зависимости от высоты источника излучения. Необходимо ввести в описание процесса прохождения ЭМВ сквозь пласт такое понятие, как «радиус прогрева» — можно обозначить его r_T . Этот показатель является определением того, на каком расстоянии от трубы скважины (уже после проникновения ЭМВ сквозь щели) плотность объемного тепловыделения уменьшится в e раз, где e — число Эйлера. При этом в данном уравнении показатель поглощения электромагнитного излучения зависит от радиуса прогрева, что непосредственно наблюдается при поиске первой производной от плотности объемного тепловыделения по α :

$$\frac{\partial \left(\frac{\alpha W \psi(z)}{2\pi r h} \exp[\alpha(b-r)] \right)}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.2)$$

После раскрытия производной сложной функции и проведения математических преобразований получается, что

$$\alpha = \frac{1}{r - b}. \quad (3.3)$$

Однако при подстановке значения радиуса прогрева в формулу (3.3) искомое значение радиуса, зависящее от α , отличается от радиуса прогрева, что затрудняет количественную оценку поглощения ЭМВ при прохождении пласта. Поэтому необходимо ввести обозначение для искомого значения радиуса, отличающегося от радиуса прогрева, подставляемого в формулу (3.3). Эта величина будет называться радиусом проникновения ЭМВ в пласт — r_{in} , т. е. это расстояние от трубы скважины, при котором величина воздействия ЭМВ на пласт уменьшается в e раз. Необходимо вначале найти зависимость показателя поглощения от радиуса проникновения и найти такое значение r_{in} , при котором $r_{in} = r_T$. Зависимость радиуса проникновения от показателя поглощения приведена на рис. 3.3.

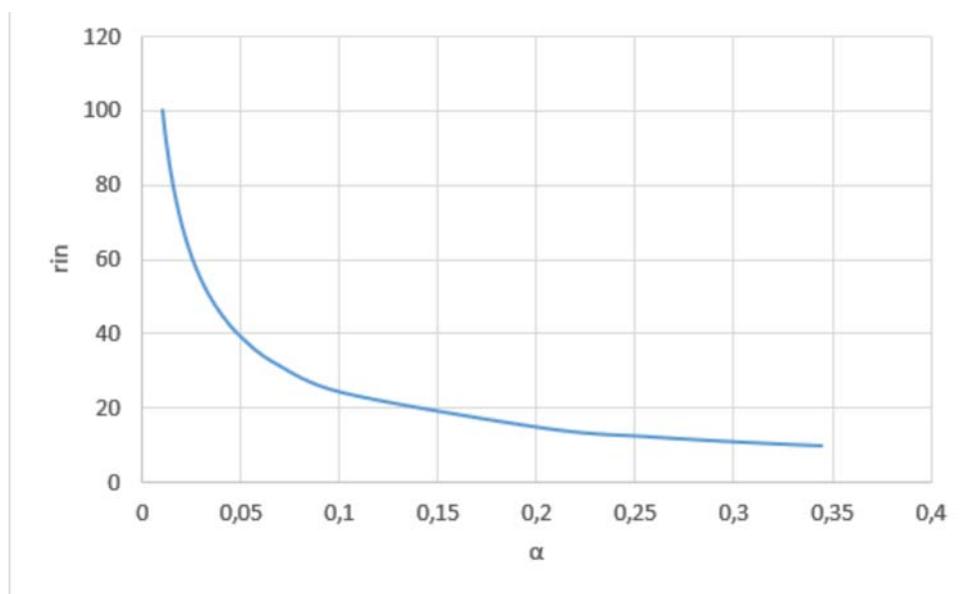


Рис. 3.3. Зависимость радиуса проникновения ЭМВ от показателя поглощения
 Fig. 3.3. Dependence of the electromagnetic wave penetration radius on the absorption factor

На рис. 3.3 представлена зависимость r_{in} от α . При определении необходимого радиуса проникновения для минимальной рентабельности разработки необходимо считать, что коэффициент извлечения нефти (КИН) больше или равен 30 %. Если считать поверхность продуктивного пласта имеющей форму цилиндра радиуса 100 м, то, исходя из минимально необходимого КИН, можно утверждать, что при $r_{in} = 57$ м коэффициент извлечения будет примерно равен 30 %. При таком r_{in} показатель поглощения $\alpha = 0,026$. Теперь важно понять, для каких нефтей показатель поглощения будет равен 0,026 или меньше. Так как коэффициент диэлектрической проницаемости воды больше почти в 40 раз, чем у чистой нефти, можно утверждать, что чем больше процентное содержание воды в нефтяном пласте, тем больше показатель поглощения нефти.

Статическая диэлектрическая проницаемость смесей воды и нефти (у воды $\epsilon = 81$, у нефти $\epsilon = 2 - 4$) зависит от их объемного соотношения, то есть от водонасыщенности нефти. Диэлектрическая проницаемость же воды зависит от концентрации и состава растворенных в ней солей. Для бинарных электролитов (это электролиты, у которых молекулы распадаются в электролите на два иона) можно использовать формулу Фалькенгагена [20]:

$$\epsilon = \epsilon_0 + 3,79\sqrt{C}, \quad (3.4)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость раствора; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость чистой воды; C — концентрация раствора в моль/дм³.

Также известно [18], что высокочастотный предел диэлектрической проницаемости стремится к единице, тогда можно рассмотреть этот случай и утверждать, что показатель поглощения будет даже меньше того, что рассчитан ниже. В таком случае формула изменяет вид. Ширина электромагнитного спектра β является параметром источника излучения, который заранее известен. Исходя из записанных утверждений, можно найти показатель поглощения:

$$\alpha = \frac{\omega(\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{c\sqrt{2(\epsilon_s + \epsilon_\infty)}} \operatorname{tg} \left[(1 - \beta) \frac{\pi}{4} \right], \quad (3.5)$$

где ε_s и ε_∞ — диэлектрическая проницаемость раствора при статическом пределе и при бесконечной частоте соответственно; c — скорость света в вакууме; ω — циклическая частота излучения.

Также можно найти действительную часть диэлектрической проницаемости из [18]. С увеличением частоты поля количество поляризующихся частиц уменьшается (отпадают наиболее медленные виды поляризации), поэтому действительная часть диэлектрической проницаемости с повышением частоты постепенно уменьшается и стремится к единице:

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (\omega\tau_0)^2}. \quad (3.6)$$

Высокочастотные электромагнитные поля взаимодействуют с задержкой во времени процессов поляризации вещества по сравнению с изменением параметров самого внешнего поля. В конечном счете процесс поляризации сопровождается интенсивным поглощением энергии поля в виде тепловой.

В силу всего вышесказанного, можно утверждать, что частоту $f = 3$ ГГц, можно считать относительно высокой и, соответственно, диэлектрическую проницаемость можно считать стремящейся к единице (в реальности, разумеется, эта величина больше, а это значит, что результаты будут еще более благоприятными, чем рассчитано ниже).

В таком случае при β источника излучения, равной 40, $\omega \approx 18,85 \cdot 10^9$ рад/с (из условия $\omega = 2\pi f$).

При вычислении количества солей в пластовых водах можно заменить все соли, растворенные в пластовой воде, эквивалентным количеством той, которая находится в наибольшем количестве в пластовой воде. Довольно часто такой солью является хлористый натрий. Если рассматривать соленую воду с соленостью 10 г/л, то будет получена соленость раствора воды и соли: $\varepsilon \approx 81,5$, где учтена диэлектрическая проницаемость NaCl 6,3. Если считать для смеси нефти и воды с водонасыщенностью 30 % и диэлектрическую проницаемость нефти без воды в месторождении равной 2, то $\varepsilon_\infty \approx 1$, $\varepsilon_s = 25,85$, тогда $\varepsilon' \approx 1$, $\alpha = 221,48$.

Заключение

Проведенное исследование эффективности проникновения СВЧ-излучения в пласт позволяет сделать следующие выводы.

Показано, что величина экранирования СВЧ-излучения линейно зависит от толщины эксплуатационной колонны скважины, причем при толщине 0,01 м напряженность электромагнитного поля уменьшается в 50 раз.

Выявлено, что зависимость экранирования СВЧ-излучения от длины щели перфорации является практически экспоненциальной.

Установлен минимальный радиус проникновения СВЧ-излучения в пласт для достижения рентабельных значений коэффициента извлечения нефти свыше 30 %, составляющий 57 м.

Определен показатель поглощения СВЧ-излучения пластом, позволяющий достичь указанного значения радиуса проникновения СВЧ-излучения в пласт.

Литература

- [1] Шагапов В.Ш., Юмагулова Ю.А., Гиззатуллина А.А. Моделирование динамики давления и температуры в пласте с высоковязкой нефтью при нагревании // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2016. № 1–2. С. 62–68. URL: <https://journals.ssau.ru/est/article/download/4266/4165?ysclid=lw4tkgdn8g660351312>.
- [2] Астафьев В.И., Касаткин А.Е. Задача о продвижении водонефтяного контакта при поршневом вытеснении нефти водой в двоякопериодической области // Вестник Самарского университета. Естественная серия 2014. № 10 (121). С. 116–129. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/vsgu456>.
- [3] Ишкинеев Д.А. Проблемы разработки мелких месторождений высоковязкой нефти Татарстана // Энергоэффективность. Проблемы и решения: материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции. Уфа: Институт проблем транспорта энергоресурсов РБ, 2014. С. 51–53.
- [4] Хасанов И.И., Шакиров Р.А., Леонтьев А.Ю., Полетаева О.Ю., Бабаев Э.Р., Мамедова П.Ш. Обзор современных методов воздействия на реологические свойства тяжелых высоковязких нефтей // НефтеГазХимия. 2018. № 3. С. 49–54. DOI: <https://doi.org/10.24411/2310-8266-2018-10305>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ytonvb>.
- [5] Абдуллина В.А., Фатыхов М.А. Расплавление твердых отложений в трубопроводах движущимся источником электромагнитного поля // Нефтегазовое дело. 2012. № 6. С. 60–68. URL: https://ogbus.ru/files/ogbus/authors/AbdullinaVA/AbdullinaVA_1.pdf.

- [6] Кислицын А.А. Численное моделирование высокочастотного электрического прогрева диэлектрической пробки, заполняющей трубу // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37, № 3. С. 75–82. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/fc4/fc4acdffd504d4093780dc085d72c859.pdf?ysclid=1w4us00717164093121>.
- [7] Ковалева Л.А., Зиннатуллин Р.Р., Муллаянов А.И., Мавлетов М.В., Благодичнов В.Н. Эволюция микроструктуры водонефтяных эмульсий в высокочастотных и сверхвысокочастотных электромагнитных полях // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 6. С. 952–955. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364413060173>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rekczl>.
- [8] Hasakir B., Acar C., Demiral B., Akin S. Microwave assisted gravity drainage of heavy oils // International Petroleum Technology Conference Paper IPTC 12536 presented at the International Petroleum Technology Conference held in Kuala Lumpur, Malaysia, 3–5 December 2008. Kuala Lumpur, 2008. P. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.2523/12536-MS>.
- [9] Alomair O., Alarouj M., Althenayyan A., Alsaleh A., Mohammad H., Altahoo Y., Alhaidar Y., Alansari S., Alshammari Y. Improving heavy oil recovery by unconventional thermal methods // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE 163311 presented at the SPE Kuwait International Petroleum Conference held in Kuwait City, Kuwait, 10–12 December 2012. Kuwait City, 2012. P. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.2118/163311-MS>.
- [10] Callarotti R.C., Paez E. Microwave dielectric properties of heavy oil and heating of reservoirs // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-169937-MS presented at the SPE Biennial Energy Resources Conference held in Port of Spain, Trinidad, 9–11 June 2014. 2014. P. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.2118/169937-MS>.
- [11] Othman H.A., Soliman M.Y., Settari A.T. Techniques to improve the use of microwave to produce heavy oil reservoirs: numerical study // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-188118-MS presented at the SPE Kingdom of Saudi Arabia Annual Technical Symposium and Exhibition held in Dammam, Saudi Arabia, 24–27 April 2017. Dammam, 2017. P. 1–24. DOI: <https://doi.org/10.2118/188118-MS>.
- [12] Bapat S., Akhter N. Optimization of heavy oil recovery by radio frequency heating: a theoretical approach with experimental modeling // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-197232-MS presented at the Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference held in Abu Dhabi, UAE, 11–14 November 2019. Abu Dhabi, 2019. P. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.2118/197232-MS>.
- [13] Березовский Ю.С., Тетерин В.С., Деева В.С., Слободян С.М. Перспективы применения технологии высокочастотного воздействия на добычу тяжелых углеводородов // Альтернативные источники энергии в транспортно-технологическом комплексе: проблемы и перспективы рационального использования. 2015. Т. 2, № 2. С. 356–360. DOI: <https://doi.org/10.12737/15083>.
- [14] Kovaleva L., Davletbaev A., Minnigalimov R. Recoveries of heavy oil and bitumen techniques with the radio frequency electromagnetic irradiation // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE 138086 presented at the SPE Russian Oil and Gas Technical Conference and Exhibition held in Moscow, Russia, 26–28 October 2010. Moscow, 2010. P. 1–11. DOI: <http://dx.doi.org/10.2118/138086-RU>.
- [15] Мусин А.А., Муллаянов А.И., Ковалева Л.А., Валиев Ш.М., Благодичнов В.Н., Зиннатуллин Р.Р. Способ разработки обводненных залежей нефти СВЧ электромагнитным воздействием (варианты). Башкирский государственный университет: заявка на изобретение 2013154455/03. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37434065>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ohhevj>.
- [16] Рузил А.С. Оценка эффективности СВЧ-воздействия как метода интенсификации нефтедобычи // Нефтегазовое дело. 2021. Т. 19, № 6. С. 134–143. DOI: <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2021-6-134-143>.
- [17] Леонтьев А.Ю., Полетаева О.Ю., Бабаев Э.Р., Мамедова П.Ш. Применение СВЧ-воздействия на высоковязкую тяжелую нефть // Нефтегазохимия. 2019. № 2. С. 13–17. DOI: <http://doi.org/10.24411/2310-8266-2019-10202>.
- [18] Кислицын А.А. Численное моделирование прогрева и фильтрации нефти в пласте под действием высокочастотного электромагнитного излучения // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 3. С. 97–103. URL: https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119948&ARTICLE_ID=133690&ysclid=1w4wfi3f8201266607.
- [19] Шапиро Д.Н. Электромагнитное экранирование: научное издание. Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2010. 120 с. URL: [http://publ.lib.ru/ARCHIVES/SH/SHAPIRO_David_Naumovich/Shapiro_D.N._Elektromagnitnoe_ekranirovanie.\(2010\).\[djv-fax\].zip](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/SH/SHAPIRO_David_Naumovich/Shapiro_D.N._Elektromagnitnoe_ekranirovanie.(2010).[djv-fax].zip).
- [20] Кочина Т.Б., Спиридонова В.Н., Родионцев Н.Н., Круглов И.А. Физика пласта. Нижневартовск: Издательство Нижневартовского государственного университета, 2017. 214 с. URL: https://nvsu.ru/ru/Intellekt/2097/Kochina_i_dr._Fizika_plasta_2017_okonch.pdf?ysclid=1w4wom1waz772934478; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37005300>. EDN: <https://www.elibrary.ru/poxfvv>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-67-80

Submitted: 22.03.2024

Revised: 25.04.2024

Accepted: 15.05.2024

A.R. Agaev

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: stud0000249324@study.utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-7128-9921>

A.Ya. Gilmanov

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

A.P. Shevelyov

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

CALCULATION OF THE SHIELDING AT MICROWAVE IMPACT ON OIL RESERVOIRS

ABSTRACT

Currently, there is a problem of depletion of easily produce oil. In order to maintain hydrocarbon production rates, hard-to-recover reserves are being brought into development, a significant part of which are extra-heavy oil, the production of which takes a relatively small share in the global oilfield due to the complexity of the process. The methods existing at the moment do not allow extracting heavy and extra-heavy oil from reservoirs with a sufficient degree of efficiency. The use of such a method as microwave impact has not been widely used in the oilfield, because modeling is necessary to determine the optimal parameters of the impact. It is difficult with the number of problems associated with the complexity of the method. This article deals with the modeling of the process of microwave impact to improve the efficiency of the oil production process. The article is devoted to modeling the process of ultra-high-frequency wave impact on the oil reservoir, considering the physical and chemical parameters of fluids in the reservoir, such as thermal conductivity, dielectric permeability of oil and water (considering its salinity) in the reservoir. In the framework of the method using microwave impact for the first time determined the amount of shielding by the pipe material of this impact and determined the optimal parameters of the radiation source and the parameters of well pipe structures for effective impact on oil reservoirs. The aim of the work is to determine the optimal parameters of the source of microwaves to achieve cost-effective values of oil recovery factor. In this work the physical and mathematical model of microwave impact on the reservoir, based on the laws of electrodynamics and the density of volumetric heat generation in this equation is applied. The dependence of the magnitude of screening of microwave radiation by the production well pipe on its thickness and the dependence of the magnitude of screening of radiation by the production well pipe on the thickness of the perforation slot in this pipe and the dependence of the radius of penetration of electromagnetic waves into the formation on the absorption factor of electromagnetic radiation in the formation are obtained. The paper establishes the existence of a minimum radius of penetration of microwave radiation into the formation to achieve cost-effective values of oil recovery factor over 30%, which is 57 m, and also determined the absorption factor of microwave radiation in the formation, which allows to achieve the specified value of the radius of penetration of microwave radiation into the formation.

Key words: hard-to-recover reserves; oil recovery factor; microwave impact; dielectric permittivity; microwave shielding; radiation absorption; oil reservoir; oil deposits; electromagnetic radiation.

Citation. Agaev A.R., Gilmanov A.Ya., Shevelyov A.P. Calculation of the shielding at microwave impact on oil reservoirs. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 67–80. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-67-80>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Agaev A.R., Gilmanov A.Ya., Shevelyov A.P., 2024

Ali R. Agaev — student of the School of Natural Sciences, group 23F202-1, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

Alexander Ya. Gilmanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

Alexander P. Shevelyov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, professor of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

References

- [1] Shagapov V.Sh., Yumagulova Y.A., Gizzatullina A.A. Modeling the dynamics of pressure and temperature in the reservoir with heavy oil when heated. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, no. 1–2, pp. 62–68. Available at: <https://journals.ssau.ru/est/article/download/4266/4165?ysclid=1w4tkgdn8g660351312>. (In Russ.)
- [2] Astafiev V.I., Kasatkin A.E. Waterflooding front moving task in dual periodical area: piston-like displacement case. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2014, no. 10(121), pp. 116–129. Available at: <https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/download/4517/4415.pdf?ysclid=1w4tvmf98h181012641>. (In Russ.)
- [3] Ishkineev D.A. Problems of development of small fields of high-viscosity oil in Tatarstan. In: *Energy efficiency. Problems and solutions: materials of the XIV All-Russian research and practical conference*. Ufa: Institut problem transporta energoresursov RB, 2014, pp. 51–53. (In Russ.)
- [4] Khasanov I.I., Shakirov R.A., Leontyev A.Yu., Poletaeva O.Yu., Babayev E.R., Mamedova P.Sh. Review of modern methods of influence on the rheological properties of heavy highly viscous oils. *Oil and Gas Chemistry*, 2018, no. 3, pp. 49–54. DOI: <https://doi.org/10.24411/2310-8266-2018-10305>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ytonvb>. (In Russ.)
- [5] Abdullina V.A., Fatykhov M.A. Fusion of firm depositions in pipelines by the electromagnetic field moving source. *Petroleum Engineering*, 2012, no. 6, pp. 60–68. Available at: https://ogbus.ru/files/ogbus/authors/AbdullinaVA/AbdullinaVA_1.pdf. (In Russ.)
- [6] Kislitsyn A.A. Numerical modeling of high-frequency electric heating of dielectric plug filling a pipe. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1996, vol. 37, no. 3, pp. 75–82. Available at: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/fc4/fc4acdffd504d4093780dc085d72c859.pdf?ysclid=1w4us007i7164093121>. (In Russ.)
- [7] Kovaleva L.A., Zinnatullin R.R., Mullayanov A.I., Mavletov M.V., Blagochinnov V.N. Microstructure evolution of water-oil emulsions in high-frequency and microwave electromagnetic fields. *High temperature*, 2013, vol. 51, no. 6, pp. 870–872. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X13060175>. EDN: <https://www.elibrary.ru/slhbuh>. (In English; original in Russian)
- [8] Hasakir B., Acar C., Demiral B., Akin S. Microwave assisted gravity drainage of heavy oils. In: *International Petroleum Technology Conference Paper IPTC 12536 presented at the International Petroleum Technology Conference*, Kuala Lumpur, Malaysia, December 3–5, 2008. Kuala Lumpur, 2008, pp. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.2523/12536-MS>.
- [9] Alomair O., Alarouj M., Althenayyan A., Alsaleh A., Mohammad H., Altaf Y., Alhaidar Y., Alansari S., Alshammari Y. Improving heavy oil recovery by unconventional thermal methods. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE 163311 presented at the SPE Kuwait International Petroleum Conference*, Kuwait City, Kuwait, December 10–12. Kuwait City, 2012, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.2118/163311-MS>.
- [10] Callarotti R.C., Paez E. Microwave dielectric properties of heavy oil and heating of reservoirs. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-169937-MS presented at the SPE Biennial Energy Resources Conference*, Port of Spain, Trinidad, June 9–11, 2014. Port of Spain, 2014, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.2118/169937-MS>.
- [11] Othman H.A., Soliman M.Y., Settari A.T. Techniques to improve the use of microwave to produce heavy oil reservoirs: numerical study. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-188118-MS presented at the SPE Kingdom of Saudi Arabia Annual Technical Symposium and Exhibition*, Dammam, Saudi Arabia, April 24–27, 2017. Dammam, 2017, pp. 1–24. DOI: <https://doi.org/10.2118/188118-MS>.
- [12] Bapat S., Akhter N. Optimization of heavy oil recovery by radio frequency heating: a theoretical approach with experimental modeling. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-197232-MS presented at the Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference*, Abu Dhabi, UAE, November 11–14, 2019. Abu Dhabi, 2019, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.2118/197232-MS>.
- [13] Berezovskiy Yu.S., Teterin V.S., Deeva V.S., Slobodyan S.M. Prospects of application of high frequency microwave heating on high viscosity hydrocarbons production. *Alternative energy sources in the transport-technological complex: problems and prospects of rational use*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 356–360. DOI: <https://doi.org/10.12737/15083>. (In Russ.)

- [14] Kovaleva L., Davletbaev A., Minnigalimov R. Recoveries of heavy oil and bitumen techniques with the radio frequency electromagnetic irradiation. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE 138086 presented at the SPE Russian Oil and Gas Technical Conference and Exhibition*, Moscow, Russia, October 26–28, 2010. Moscow, 2010, pp. 1–11. DOI: <http://dx.doi.org/10.2118/138086-RU>.
- [15] Musin A.A., Mullayanov A.I., Kovaleva L.A., Valiev Sh.M., Blagochinnov V.N., Zinnatullin R.R. Method of development of water-flooded oil reservoir with microwave electromagnetic effect (versions). Bashkir State University: application for invention 2013154455/03. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37434065>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ohhevj>. (In Russ.)
- [16] Safiullin R.A. Efficiency estimation of microwave impact as a method for oil production intensification. *Petroleum Engineering*, 2021, vol. 19, no. 6, pp. 134–143. DOI: <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2021-6-134-143>. (In Russ.)
- [17] Leontiev A.Yu., Poletaeva O.Yu., Babaev E.R., Mamedova P.Sh. Application of microwave irradiation on extra-heavy crude oil. *Oil and Gas Chemistry*, 2019, no. 2, pp. 13–17. DOI: <http://doi.org/10.24411/2310-8266-2019-10202>. (In Russ.)
- [18] Kislitsyn A.A. Numerical modeling of petroleum heating and filtration in a plate under the action of high-frequency electromagnetic radiation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1993, vol. 34, pp. 382–387. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00864790>. (In English; original in Russian).
- [19] Shapiro D.N. Electromagnetic shielding: scientific edition. Dolgoprudny: Izdatel'skii dom "Intellekt", 2010, 120 p. Available at: [http://publ.lib.ru/ARCHIVES/SH/SHAPIRO_David_Naumovich/Shapiro_D.N._Elektromagnitnoe_ekranirovaniye.\(2010\).\[d\]jv-fax.zip](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/SH/SHAPIRO_David_Naumovich/Shapiro_D.N._Elektromagnitnoe_ekranirovaniye.(2010).[d]jv-fax.zip). (In Russ.)
- [20] Kochina T.B., Spiridonova V.N., Rodiontsev N.N., Kruglov I.A. Reservoir physics. Nizhnevartovsk: Izdatel'stvo Nizhnevartovskogo gosudarstvennogo universiteta, 2017, 214 p. Available at: https://nvsu.ru/ru/Intellekt/2097/Kochina_i_dr._Fizika_plasta_2017_okonch.pdf?ysclid=lw4womlwaz772934478; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37005300>. EDN: <https://www.elibrary.ru/poxfvv>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-81-94

УДК 532.5-1/-9

Дата: поступления статьи: 15.01.2024
после рецензирования: 22.02.2024
принятия статьи: 15.05.2024

К.М. Федоров

Тюменский государственный университет,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0347-3930>

А.Я. Гильманов

Тюменский государственный университет,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

А.П. Шевелёв

Тюменский государственный университет,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

А.А. Изотов

ООО «Тюменский нефтяной научный центр»,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: aaizotov@tnnc.rosneft.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8492-9865>

А.В. Кобяшев

ООО «Тюменский нефтяной научный центр»,
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: avkobyashev@tnnc.rosneft.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7431-0353>

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИНДИКАТОРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТОВ ПРИ НАЛИЧИИ КАНАЛОВ НИЗКОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Индикаторные исследования нефтяных пластов получили широкое распространение для оценки параметров каналов низкого фильтрационного сопротивления, приводящих к преждевременному обводнению продукции. Существующие аналитические методики их интерпретации не учитывают диссипацию трассера. В работе предлагается методика интерпретации результатов индикаторных исследований при наличии каналов низкого фильтрационного сопротивления, в которой учитывается конфигурация оторочки трассера на выходе в добывающую скважину. Разработанная методика основана на решении обратной задачи фильтрации трассера в канале низкого фильтрационного сопротивления и впервые учитывает его диссипацию. Приведена постановка обратной задачи фильтрации трассера в канале низкого фильтрационного сопротивления, основанной на использовании уравнения переноса трассера в канале, соотношения для расхода индикатора в канале и пласте, закона Дарси и связи объема оторочки трассера с ее линейным размером. Приводится алгоритм численного определения коэффициента диссипации трассера путем решения оптимизационной задачи по минимизации среднеквадратичного отклонения расчетных значений концентрации трассера от промысловых данных методом градиентного спуска. Разработанный алгоритм решения обратной задачи апробирован на примере интерпретации индикаторных исследований по двум добывающим скважинам одного из месторождений Западной Сибири. Определены длины каждого канала низкого фильтрационного сопротивления для выбранных скважин. Показано, что погрешность сопоставления расчетных и промысловых данных не превышает 7 %. Установлено, что длина самого короткого канала

низкого фильтрационного сопротивления практически соответствует расстоянию между нагнетательной и добывающей скважинами, другие каналы имеют большую длину и могут формироваться позднее.

Ключевые слова: индикаторные исследования; обратная задача; оптимизационная задача; метод градиентного спуска; каналы низкого фильтрационного сопротивления; концентрация трассера; диссипация трассера; длина канала.

Цитирование. Федоров К.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., Изотов А.А., Кобяшев А.В. Решение обратной задачи интерпретации результатов индикаторных исследований нефтяных пластов при наличии каналов низкого фильтрационного сопротивления // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 81–94. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-81-94>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Федоров К.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., Изотов А.А., Кобяшев А.В., 2024

Константин Михайлович Федоров — доктор физико-математических наук, научный руководитель Физико-технического института, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Александр Янович Гильманов — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Александр Павлович Шевелёв — кандидат физико-математических наук, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Алексей Александрович Изотов — директор по науке и инновациям, ООО “Тюменский нефтяной научный центр”, 625002, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Осипенко, 79/1.

Александр Вячеславович Кобяшев — главный менеджер, ООО “Тюменский нефтяной научный центр”, 625002, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Осипенко, 79/1.

Введение

Индикаторные или трассерные исследования пластов являются достаточно распространенным в России методом исследования межскважинного пространства продуктивных пластов [1]. Основная идея применения этого метода сводится к анализу распространения специальных реагентов от нагнетательных к добывающим скважинам. Три основных требования к этим реагентам сводятся к их растворимости только в водной фазе, минимизации адсорбции и осадкообразования в пористом скелете пласта, а также наличию быстрых и простых способов регистрации их малых концентраций. После закачки этих реагентов в нагнетательную скважину начинается отбор и анализ проб попутной воды из ближайших добывающих скважин. Появление индикатора в добывающих скважинах позволяет оценить гидропроницаемость пласта в соответствующем направлении [2].

Однако практика индикаторных исследований продемонстрировала совсем другой результат. Малые концентрации индикатора по сравнению с исходными значениями появляются в добывающих скважинах в течение дней, что не согласуется с принятыми фильтрационно-емкостными свойствами и результатами определения абсолютной проницаемости пласта по данным геофизических и гидродинамических исследований [3]. Очевидным выводом из результатов исследований является наличие в пласте так называемых каналов низкого фильтрационного сопротивления (НФС). Были предложены ряд умозрительных моделей природы этих каналов: от «ручeyков» в теле пласта [4] до трещиноватых каналов [5] или трещин автогидро разрыва пласта (автоГРП) [6; 7]. Наибольшую поддержку получили представления о каналах НФС как трещин автоГРП, хотя факты наличия нескольких каналов между нагнетательной и добывающей скважинами, каналов, связывающих нагнетательную и добывающие скважины в разных направлениях, вступают в противоречия с традиционными представлениями геомеханики о двукрылой трещине, создаваемой при автоГРП [8]. А наличие каналов НФС в объектах разработки без системы поддержания пластового давления и вовсе не укладываются в них [9].

Традиционные методы интерпретации индикаторных исследований строятся на определении времени прорыва трассера в добывающую скважину, расчете скорости движения флюида по трещине и замере перепада давления между нагнетательной и добывающими скважинами для определения проницаемости

канала НФС [10; 11]. Замер массы попавшего трассера в добывающую скважину позволяет определить долю потока воды, фильтрующегося через канал [12]. Таким образом, интерпретация дает ответы на главные вопросы: объем, проницаемость канала и доля потока воды, идущего в добывающую скважину через канал НФС. По результатам этих исследований сложилось целое направление геолого-технических мероприятий по регулированию заводнения – потокоотклоняющие технологии (ПОТ). В случае если объем каналов и доля воды, поступающая в продукцию через них, велики, то производится закачка осадко-гелеобразующих реагентов в объеме, сопоставимом с объемом канала НФС для блокирования последнего [13; 14].

Для развития методики интерпретации и уточнения длины канала, его размеров необходимо решить прямую задачу о фильтрации трассера через пласт и канал НФС. Численные методы для решения прямой задачи, предложенные, например, в работе [15], к сожалению, значительно усложняют алгоритм интерпретации и, соответственно, удорожают и без того не дешевые индикаторные исследования. Прямая задача конкретизирует динамику движения оторочки трассера по каналу НФС и позволяет сформулировать дополнительные соотношения, позволяющие оценить более полно параметры канала НФС. В предыдущей работе авторов [16] были получены полуаналитические решения прямой задачи, использующие выделение малых параметров. Эти решения позволяют получить аналитические соотношения для определения параметров канала НФС, что существенно упрощает методику интерпретации индикаторных исследований.

При интерпретации результатов трассерных исследований по известным динамике выхода индикатора в добывающей скважине, его расходу и массе определяются проницаемость, длина и объем канала НФС. Диссипация оторочки индикатора, наблюдаемая в промысловых данных, осложняет их интерпретацию. В простейших методиках эта диссипация не учитывается [17].

В рамках одномерной линейной постановки задачи массопереноса трассера возможно получение аналитического решения для динамики концентрации индикатора [18; 19]. Алгоритм интерпретации, предложенный в работе [18], основывается на решении прямой задачи массопереноса трассера в гидродинамическом симуляторе CMG STARS. Это позволяет путем настройки аналитического решения на результаты моделирования определить коэффициент диссипации. В таком подходе на значение этого коэффициента влияют численные эффекты, получаемые в результате гидродинамического моделирования. С использованием полученного значения коэффициента диссипации проводится сопоставление расчетной динамики концентрации индикатора с промысловыми данными. При несовпадении этих данных корреляция между ними достигается за счет корректировки коэффициента диссипации (полученного ранее) и фактора Ковалева. Последний фактор позволяет провести эти расчеты для неоднородного пласта как однородного с усреднением фильтрационно-емкостных свойств. Наличие сразу двух настроечных параметров вносит существенную неопределенность в итоговые результаты. В другом подходе, где динамика концентрации трассера содержит несколько локальных максимумов, принимается, что прорыв трассера происходит по высокопроницаемым пропласткам (суперколлекторам), и данные исследований интерпретируются как результат суперпозиции решения прямых задач для отдельных пропластков [20].

Проблема интерпретации состоит не только в количестве параметров, определяющих модель канала НФС, но и в количестве параметров оторочки трассера, пришедшего в добывающую скважину, регистрируемых в исследовании. Авторы предлагают использовать для интерпретации новую характеристику – конфигурацию оторочки, фиксируемой в добывающей скважине. Целью работы является решение обратной задачи интерпретации результатов трассерных исследований для определения параметров канала НФС с учетом диссипации трассера.

1. Индикаторные исследования и исходная информация для решения обратной задачи

Можно начать с рассмотрения простейшей ситуации, когда имеется только один канал НФС, связывающий нагнетательную и одну из окружающих ее добывающих скважин. При проведении индикаторных исследований замеряются дебит продукции в добывающей скважине Q_p и разница забойных давлений в нагнетательной и добывающих скважинах в течение всего исследования Δp , рассчитывается средняя по участку проницаемость пласта k , по результатам геофизических исследований пласта и пластовой жидкости или из геологической модели выбирается его продуктивная толщина h и эффективная мощность (за вычетом глинистых пропластков) h_e , относительная фазовая проницаемость по воде при остаточной нефтенасыщенности $k_r(S_{or})$, средняя вязкость пластового флюида μ или гидропроводность пласта χ (отношение проницаемости, умноженной на мощность пласта, к вязкости пластового флюида), вязкость закачиваемой воды в пластовых условиях μ_w . После закачки оторочки трассера в нагнетательную скважину с концентрацией c_0 и расходом Q_{in} в течение времени t_0 в ближайших добывающих сква-

жинах проводятся периодические отборы проб воды с их дальнейшим исследованием для определения наличия и концентрации трассера c^* .

При интерпретации индикаторных исследований замеряется время от закачки до прорыва трассера по каналам НФС t^* (оно определяется как среднее по интервалу выхода трассера по каналу $t^* = (t_1 + t_2)/2$, где t_1 и t_2 — время от начала закачки до прорыва и снижения концентрации трассера до нуля), подсчитывается накопленная добыча трассера в скважине M^* . Пример таких замеров приведен на рис. 1.1.

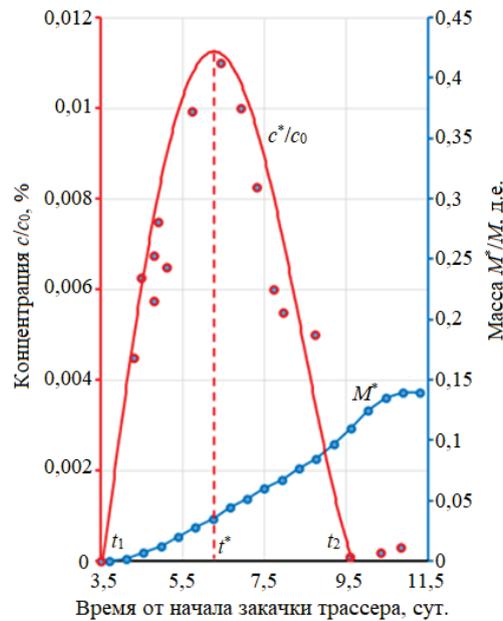


Рис. 1.1. Пример обработки индикаторного исследования в одной из добывающих скважин с определением величин t^* , c^* , M^*

Fig. 1.1. An example of processing the tracer test in one of the producers with the determination of t^* , c^* , M^* values

Для понимания процедуры интерпретации следует остановиться на случае исследования концентрации трассера в воде в одной добывающей скважине на участке с четырехточечной системой расстановки скважин и одним каналом НФС, связывающим нагнетательную и исследуемую добывающую скважину, с длиной l , проницаемостью k_f , объемом V , средней площадью поперечного сечения A и длиной боковой грани H (необходимой для определения потоков в канал и из него).

Традиционный алгоритм интерпретации [6; 15] позволяет рассчитать важные параметры канала НФС. Проницаемость канала определяется из уравнений для определения среднемассовой скорости фильтрации раствора трассера по каналу v_{av} :

$$v_{av} = \frac{k_f \Delta p}{m \mu_w l}, \quad v_{av} = \frac{l}{t^*} \rightarrow k_f = \frac{m \mu_w l^2}{t^* \Delta p}, \quad (1.1)$$

где m — пористость. Следует отметить, что величины пористости канала, его длины должны быть выбраны из дополнительных умозаключений, т. е. из модели канала НФС, интерпретация не позволяет их определить.

Оценка объема канала НФС и потока Q_f либо доли потока Q_f/Q_{in} через него определяются из очевидных соотношений сохранения массы:

$$V = Q_f t^*, \quad \frac{Q_f}{Q_{in}} = \frac{M^*}{M}, \quad (1.2)$$

где Q_{in} и M — расход жидкости и масса трассера, закачанного в нагнетательную скважину. Следует подчеркнуть, что три параметра канала V , k_f и Q_f определяются однозначно, но заключения о длине, пористости и площади поперечного сечения являются априорными и зависят от принимаемой модели канала НФС.

2. Модели каналов НФС

Как следует из обзора, природу канала НФС обычно связывают с трещинообразованием за счет автоГРП. Трещина автоГРП образуется в процессе закачки воды за счет достижения на забое скважины величины давления раскрытия трещин [21].

При проектировании системы поддержания пластового давления обосновываются целевые приемистости и режимы воздействия, исключая негативное влияние на выработку. Однако в процессе эксплуатации возможны остановки, например на период проведения геолого-технических мероприятий и последующий кратковременный периоды форсированной закачки воды, создающие предпосылки для автоГРП. Также наличие примесей в закачиваемой воде (чешуйки глины, ржавчина, песок) [6] приводит к загрязнению призабойной зоны, что при постоянном расходе закачиваемой воды ведет к росту забойного давления и опасности формирования трещин автоГРП [22].

В этом случае используют классическую теорию трещинообразования в пористом пласте. В рамках такого подхода трещину представляют в виде эллипса или прямоугольника с вертикальным размером, равным толщине продуктивного интервала h и раскрытием (максимальной шириной) w . Течение жидкости через трещину моделируется формулой Пуазейля для канала эллиптического сечения [22], которая по структуре совпадает с линейным законом Дарси, если принять, что проницаемость трещины для ламинарного потока равна $k_f = w^2/16$.

Для расчета потока жидкости в трещине необходимо знать площадь ее поперечного сечения A , а для перетоков жидкости между трещиной и пластом – огибающую ее боковой поверхности H . Эти параметры однозначно связаны с высотой и раскрытием трещины: $A = \pi hw/4$, $H \approx 0,3175\pi h$ (при $H \gg w$). Таким образом, согласно модели канала НФС типа трещины автоГРП, определение ее проницаемости в результате даже стандартной интерпретации позволяет рассчитать раскрытие трещины, ее поперечное сечение и огибающую боковой поверхности (при допущении, что высота трещины не выходит за размеры продуктивного интервала).

Если рассматривать канал НФС как систему магистральных трещин, то для оценки связи пористости и проницаемости всего канала можно использовать основные выводы теории Козени – Кармана [23], в которой обосновывается однозначная связь проницаемости и пористости среды. Эта зависимость $k_f(m)$ определяется в результате статистической обработки экспериментов в лабораториях исследования кернов. Тогда пористость канала можно определить после оценки его проницаемости.

В результате параметры канала НФС в модели трещины автоГРП определяются однозначно после применения традиционной интерпретации индикаторных исследований. Необходимо отметить, что для рассмотренных моделей длина канала также неизвестна, но обычно оценивается как кратчайшее расстояние между нагнетательной и добывающей скважинами.

3. Диссипация оторочки трассера при движении по каналу НФС

Практика анализа результатов индикаторных исследований показала, что времена закачки оторочки трассера объемом $10 \div 15 \text{ м}^3$ составляют $2 \div 8$ часов и зависят от приемистости скважины. При движении по каналу оторочка подвержена значительной диссипации, в результате которой вместо П-образной конфигурации наблюдается ее трансформация в колоколообразный вид со значительным снижением максимальной концентрации и расширением ее продольных размеров.

Для анализа процесса диссипации оторочки при движении по каналу НФС следует рассмотреть вспомогательную задачу о движении оторочки примеси с первоначальным линейным размером L и исходной концентрацией c_0 в канале длиной l . Пусть оторочка движется с постоянной среднемассовой скоростью v_{av} и подвержена диссипации с характерным коэффициентом D . Исходный линейный размер оторочки определяется через скорость ее движения и время ее закачки t_0 : $L = v_{av}t_0$.

Ось z направлена вдоль канала НФС. Математическая формулировка задачи приведена ниже в виде уравнения переноса концентрации:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_{av} \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \quad t = 0, z > 0: c = 0; \quad 0 < t \leq t_0, z = 0: c = c_0; \quad t > t_0, z = 0: c = 0, \quad (3.1)$$

где t — время.

Необходимо найти зависимость концентрации примеси на выходе из канала $z = l$ от времени. Для общности уравнение (3.1) приводится к безразмерному виду с введением следующих безразмерных переменных:

$$\frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial C}{\partial Z} = \bar{D} \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2}, \quad T = 0, Z > 0: C = 0; \quad 0 < T \leq T_0, Z = 0: C = 1; \quad T > T_0, Z = 0: C = 0,$$

$$C = \frac{c}{c_0}, T = \frac{t}{t^*}, Z = \frac{z}{l}, \bar{D} = \frac{Dt^*}{l^2}, \bar{L} = \frac{L}{l}, \quad (3.2)$$

где T_0 — безразмерное время закачки трассера. Следует отметить, что концентрация реагента рассчитывается в потоке в канале, а замеряется в дебите жидкости добывающей скважины, которая работает в зависимости от системы разработки и от других нагнетательных скважин.

Переход к автомодельной переменной ξ позволяет получить общее решение задачи (3.2) как суперпозицию частных решений о распространении переднего и заднего фронтов оторочки в виде [24]:

$$\xi = \frac{Z - T}{\sqrt{T}}, \quad C = \frac{1}{2}(\operatorname{erf}(\frac{1 + \bar{L} - T}{2\sqrt{\bar{D}T}}) - \operatorname{erf}(\frac{1 - T}{2\sqrt{\bar{D}T}})). \quad (3.3)$$

Как видно из решения, приведенная концентрация трассера на выходе зависит от двух безразмерных параметров \bar{D} и \bar{L} и трех размерных параметров D , L и l . При этом в выражении (3.3) \bar{L} является известным параметром, поскольку с учетом выражения $\bar{L} = v_{av}t_0$ и определения среднemasсовой скорости

$$\bar{L} = \frac{t_0}{t^*}. \quad (3.4)$$

Приведенная концентрация C должна быть пересчитана через общий дебит добывающей скважины. С учетом сохранения интегральной массы реагента в добывающей скважине можно получить соотношение расчетной и реальной концентрации реагента:

$$C^* = aC, \quad a = \frac{Q_f}{Q_p}, \quad (3.5)$$

где C — расчетная, а C^* — реальная концентрация; a — коэффициент перевода концентрации в канале на ее значение в дебите скважины.

Таким образом, настроечным параметром в решении (3.3) является лишь соотношение D/l^2 . Под «настройкой» здесь понимается минимизация среднего относительного отклонения расчетных значений концентрации трассера от промысловых замеров. Для определения этого параметра использовался метод градиентного спуска [25] со следующим алгоритмом

1. На первом этапе из промысловых данных определяется коэффициент a перевода концентрации в канале на ее значение в дебите скважины по формуле (3.5).

2. Для «настройки» пересчитанных значений концентрации трассера на промысловые данные задаются начальное приближение $\bar{D}_1 = 10^{-8}$ и второе значение \bar{D}_2 , на порядок отличающееся от начального, например $\bar{D}_2 = 10^{-7}$.

3. Эти значения закладываются в решение (3.3) и вычисляются соответствующие среднеквадратичные отклонения расчетных значений концентрации от промысловых значений, определяемых как

$$R_n(\bar{D}_n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C_i(\bar{D}_n) - C_{pi})^2}, \quad n = 1, 2. \quad (3.6)$$

В (3.6) N — количество замеров концентрации; i — номер замера и соответствующего ему расчетного значения; n — номер значения безразмерного коэффициента диссипации.

4. В соответствии с методом градиентного спуска рассчитывается следующее значение \bar{D}_{n+1} и соответствующее решение $C(\bar{D}_{n+1})$:

$$\bar{D}_{n+1} = \bar{D}_n - \alpha \frac{\partial R_n(\bar{D}_n)}{\partial \bar{D}_n}, \quad (3.7)$$

где производная от среднеквадратичного отклонения расчетных значений концентрации от промысловых значений аппроксимируется соответствующими разностями, α — шаг спуска.

5. Далее, после расчета (3.7), проверяется условие близости значений коэффициента диссипации в двух последовательных итерациях:

$$\left| \frac{\bar{D}_{n+1} - \bar{D}_n}{\bar{D}_n} \right| \leq \epsilon. \quad (3.8)$$

Если условие (3.8) не выполняется, то осуществляется переход к следующему значению \bar{D}_{n+2} и возврат на шаг 3, в противном случае коэффициент диссипации принимается равным \bar{D}_{n+1} с погрешностью ϵ

Реализация такого алгоритма проиллюстрирована на примере интерпретации индикаторных исследований для добывающей скважины 179 месторождения X на рис. 3.1. Данные, использованные для интерпретации исследований, сведены в таблице 3.1. Погрешность ϵ определения параметра \bar{D} задавалась значением 1 %.

Скорость сходимости предложенного алгоритма проиллюстрирована на рис. 3.2, как и следует из метода градиентного спуска, по мере приближения к точному значению искомого параметра сходимость замедляется. Искомое значение безразмерного коэффициента диссипации для рассмотренного случая $\bar{D} = 0,0202$. Среднеквадратичное отклонение для такой «настройки» составляет 7 %.

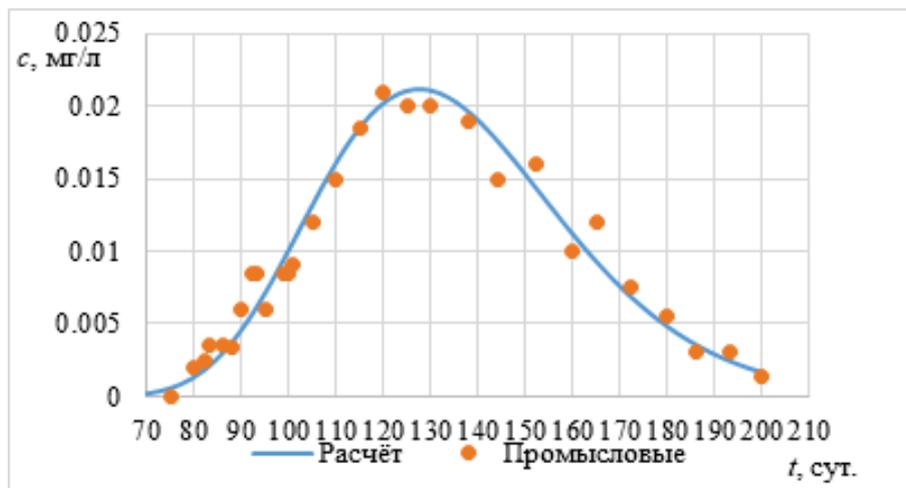


Рис. 3.1. Сопоставление расчетной динамики концентрации трассера на выходе в добывающую скважину 179 с промышленными данными
 Fig. 3.1. Comparison of the calculated dynamics of tracer concentration at the outlet of production well 179 with field data

Таблица 3.1

Промысловые данные, использованные в расчетах по предложенному алгоритму интерпретации по добывающей скважине 179 месторождения X

Table 3.1

Field data used in calculations based on the proposed interpretation algorithm for the production well 179 of the field X

| Параметр | t_0 , с | t^* , сут. | M^* , кг | M , кг | Q_{in} , м ³ /с | Q_p , м ³ /с | c_0 , д.е. |
|----------|-----------|--------------|------------|----------|------------------------------|---------------------------|--------------|
| Значение | 10800 | 130 | 2 | 1000 | $9,26 \cdot 10^{-5}$ | $2,01 \cdot 10^{-5}$ | 0,0012 |

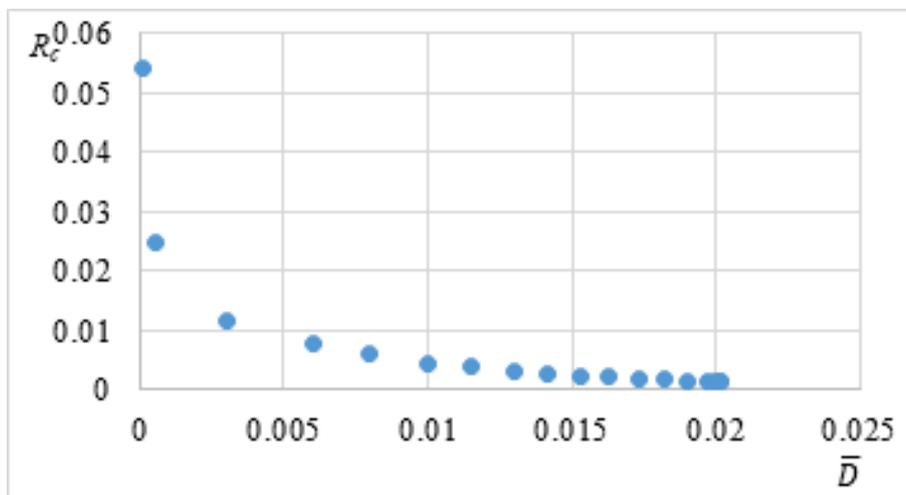


Рис. 3.2. Процесс оптимизации среднеквадратичного отклонения расчетной концентрации от промышленных данных по скважине 179
 Fig. 3.2. Process of optimizing the standard deviation of the calculated concentration from the field data for well 179

4. Решение обратной задачи для интерпретации результатов трассерных исследований

Для определения других параметров канала НФС необходимо использовать результаты численно-аналитического решения прямой задачи о движении оторочки трассера по каналу, которое было получено в предыдущей работе авторов [16]. Согласно этому решению, расход жидкости по каналу практически

не меняется (с точностью до малого параметра $F = 2kk_r(S_{or})/k_f$) и равен

$$Q_f = \frac{k_f(w)A(w)\Delta p}{\mu_w l}. \quad (4.1)$$

Далее используется модель канала в виде трещины автоГРП или другого происхождения, тогда проницаемость канала НФС и его площадь поперечного сечения являются функциями от ширины.

Объем оторочки связан с ее линейным размером по следующему соотношению:

$$A(w)L = Q_f t_0. \quad (4.2)$$

Доля расхода жидкости по каналу, как и в случае традиционного алгоритма интерпретации, имеет вид

$$\frac{Q_f}{Q_{in}} = \frac{M^*}{M}. \quad (4.3)$$

Поскольку из «настройки» рассчитано значение \bar{D} , а с учетом (3.4) известно \bar{L} , то можно записать:

$$D = \frac{\bar{D}l^2}{t^*}, \quad (4.4)$$

$$L = \bar{L}l. \quad (4.5)$$

Система уравнений (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) содержит в качестве неизвестных пять величин, что позволяет однозначно определить все неизвестные. Простые выкладки приводят к следующим значениям искомых параметров:

$$Q_f = Q_{in} \frac{M^*}{M}, \quad w = \sqrt[4]{\frac{Q_f^2 t_0 \mu_w}{\pi^2 h_2 \Delta p \bar{L}}}, \quad l = \frac{\pi h w^3 \Delta p}{64 Q_f \mu_w}, \quad D = \frac{\bar{D}l^2}{t^*}, \quad L = \frac{t_0 l}{t^*}. \quad (4.6)$$

Разработанная методика интерпретации апробирована для расчета параметров каналов НФС (с принятой моделью трещин) для двух добывающих скважин одного из месторождений Западной Сибири при закачке трассера в ближайшую нагнетательную скважину. Динамика концентрации трассера в этих скважинах приведена на рис. 4.1 и рис. 4.2. Как видно из рисунков, в первой скважине выделяются два пика концентрации трассера, а во второй — три пика, что указывает на наличие нескольких каналов НФС. Данные по условиям проведения индикаторных исследований в указанных трех скважинах приведены в таблице 4.1, где l^* — расстояние от добывающей до нагнетательной скважины. Результаты настройки диссипации трассера в каналах-трещинах также приведены на рис. 4.1 и рис. 4.2. Сопоставление промысловых и расчетных данных указывает на хорошую предсказательную способность алгоритма интерпретации.

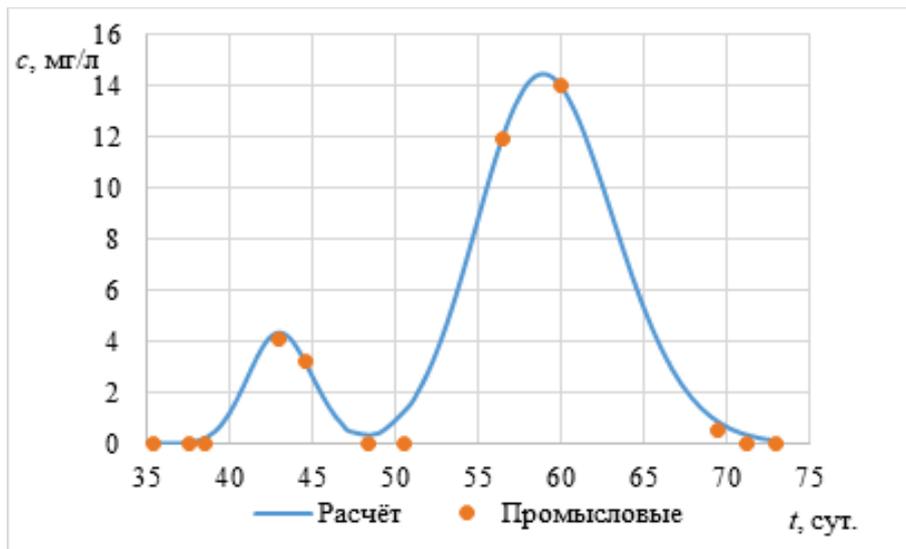


Рис. 4.1. Данные по выходу трассера в добывающей скважине 1076 при его закачке в ближайшую нагнетательную скважину 1074

Fig. 4.1. Data on tracer output in production well 1076 when it is injected into the nearest injection well 1074

Результаты расчетов по формулам (4.6) параметров каналов-трещин сведены в таблице 4.2. Объем канала НФС вычислялся как $V = Al$. Следует отметить, что расчет объема канала и потока жидкости

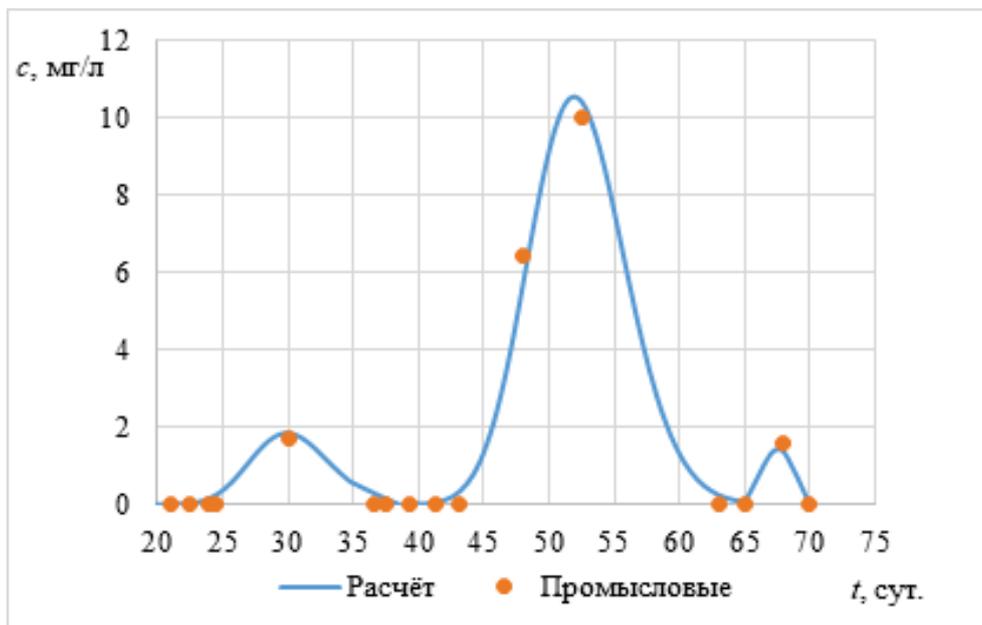


Рис. 4.2. Данные по выходу трассера в добывающей скважине 1078 при его закачке в ближайшую нагнетательную скважину 1074

Fig. 4.2. Data on tracer output in production well 1078 when it is injected into the nearest injection well 1074

Таблица 4.1

Промысловые данные по индикаторным исследованиям на участке с тремя скважинами, использованные в расчетах по предложенному алгоритму интерпретации

Table 4.1

Field data from indicator studies in an area with three wells, used in calculations using the proposed interpretation algorithm

| Параметр | Значение по нагнетательной скважине 1074 | Значение по скважине 1076 | Значение по скважине 1078 |
|------------------------------|--|---------------------------|---------------------------|
| t_0 , с | 10800 | – | – |
| M^* , кг | – | 5,954 | 6,469 |
| M , кг | 1000 | – | – |
| Q_{in} , м ³ /с | $9,26 \cdot 10^{-5}$ | – | – |
| Q_p , м ³ /с | – | $2,44 \cdot 10^{-5}$ | $2,70 \cdot 10^{-5}$ |
| c_0 , д.е. | 0,09 | – | – |
| Δp , атм | – | 160 | 170 |
| μ_w , сП | 1 | 1 | 1 |
| h , м | – | 30 | 30 |
| l^* , м | – | 644 | 431 |

через него осуществляется по одинаковым формулам как в традиционной (1.1), (1.2), так и в разработанной методике интерпретации, а их величины совпадают соответственно.

Как и ожидалось, первый пик концентрации проходит по каналу, близкому по длине к минимальному расстоянию до нагнетательной скважины. Длина траектории канала не обязательно возрастает по мере запаздывания пика, на скважине 1078 третий канал короче второго. Это может быть связано с тем, что этот канал-трещина растущий и имеет меньшую проницаемость-раскрытие. Предположительно, по мере закачки воды образуются сначала короткие трещины, затем более длинные. Это предположение объясняет, почему сформировавшиеся ранее каналы имеют меньшую проницаемость. По ним проходит больший объем воды, содержащей твердые и жидкие частицы, и происходит стабилизация их размеров за счет частиц, содержащихся в закачиваемой воде.

Коэффициент диссипации изменяется в относительно небольшом диапазоне $10^{-4} \div 10^{-3}$ м²/с. Его значения намного больше коэффициента диффузии, что указывает на недиффузионный характер диссипации. Набор статистики интерпретации индикаторных исследований позволит оценить, является данный коэффициент постоянным или меняется от трещины к трещине.

Результаты интерпретации индикаторных исследований по выбранным скважинам по разработанному алгоритму

Table 4.2

Results of interpretation of indicator studies for selected wells using the developed algorithm

| Параметр | Значение по скважине 1076 | | Значение по скважине 1078 | | |
|---------------------------|---------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|----------------------|
| | Первый канал | Второй канал | Первый канал | Второй канал | Третий канал |
| w , мм | 0,0109 | 0,0312 | 0,0084 | 0,0254 | 0,0093 |
| l , м | 665 | 2229 | 438 | 1750 | 733 |
| k_f , Д | 7,43 | 60,94 | 4,36 | 40,20 | 5,37 |
| Q_f , м ³ /с | $4,59 \cdot 10^{-8}$ | $3,22 \cdot 10^{-7}$ | $3,33 \cdot 10^{-8}$ | $2,33 \cdot 10^{-7}$ | $2,72 \cdot 10^{-8}$ |
| D , м ² /с | $1,21 \cdot 10^{-4}$ | $2,34 \cdot 10^{-3}$ | $3,72 \cdot 10^{-4}$ | $1,71 \cdot 10^{-3}$ | $1,10 \cdot 10^{-4}$ |
| A , м ² | $2,57 \cdot 10^{-4}$ | $7,35 \cdot 10^{-4}$ | $1,97 \cdot 10^{-4}$ | $5,97 \cdot 10^{-4}$ | $2,18 \cdot 10^{-4}$ |
| L , м | 1,93 | 4,72 | 1,83 | 4,21 | 1,35 |
| a | $1,88 \cdot 10^{-3}$ | $1,32 \cdot 10^{-2}$ | $1,23 \cdot 10^{-3}$ | $8,64 \cdot 10^{-3}$ | $1,01 \cdot 10^{-3}$ |
| V , м ³ | 0,171 | 1,638 | 0,086 | 1,047 | 0,160 |

Заключение

На основе решения обратной задачи движения оторочки трассера по каналу-трещине разработан новый алгоритм интерпретации результатов индикаторных исследований, позволяющий определить, помимо параметров, определяемых по традиционной методике, длину и раскрытие трещины.

Валидация расчетных значений концентрации трассера с учетом определения коэффициента диссипации по методу градиентного спуска показала хорошее согласование с промысловыми данными (среднеквадратичные отклонения не превышают 7 %).

Установлено, что длина самого короткого канала НФС практически соответствует расстоянию между нагнетательной и добывающей скважинами, другие каналы имеют большую длину и могут формироваться позднее.

Показано, что проницаемость самого короткого канала НФС/раскрытие соответствующей трещины являются наименьшей/наибольшим среди более длинных каналов в пласте, поскольку по ним проходит больший объем воды, содержащей твердые и жидкие частицы.

Диссипация трассера при движении по каналу-трещине изменяется в небольшом диапазоне, что указывает на единую физическую природу данного явления.

Литература

- [1] Соколовский Э.В., Соловьев Г.Б., Тренчиков Ю.И. Индикаторные методы изучения нефтеносных пластов. Москва: Недра, 1986. 157 с. URL: <https://www.geokniga.org/books/33015?ysclid=1w4l4isq9k183065397>.
- [2] Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 736 с. URL: <https://www.geokniga.org/books/4851?ysclid=1w4l7c18a6815565073>.
- [3] Морозов О.Н., Андриянов М.А., Колода А.В., Мухаметшин И.Р., Нухаев М.Т., Прусаков А.В. Опыт внедрения индикаторов притока на Приразломном месторождении для исследования горизонтальных добывающих скважин // Экспозиция Нефть Газ. 2017. № 7 (60). С. 24–29. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30692445>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zvqsgn>.
- [4] Медведский Р.И. Ручейковая теория вытеснения нефти водой // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 1997. № 6. С. 69. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21967024>. EDN: <https://www.elibrary.ru/smshzj>.
- [5] Булыгин Д.В., Николаев А.Н., Елесин А.В. Гидродинамическая оценка эффективности потокоотклоняющих технологий в условиях образования техногенных каналов фильтрации // Георесурсы. 2018. Т. 20, № 3, Ч. 1. С. 172–177. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2018.3.172-177>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lzspyl>.
- [6] Изотов А.А., Афонин Д.Г. О техногенной трансформации продуктивных пластов вследствие повышенного давления нагнетания при заводнении // Нефтепромысловое дело. 2021. № 5 (629). С. 18–25. DOI: [https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-5\(629\)-18-25](https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-5(629)-18-25).
- [7] Федоров К.М., Ганопольский Р.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П. Процедура оптимизации технологии выравнивания профиля приемистости // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 74–88. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-74-88>. EDN: <https://www.elibrary.ru/vethrn>.

- [8] Anderson T.L. Fracture mechanics. Fundamental and application. New York: Publisher Taylor and Francis, 2005. 610 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315370293>.
- [9] Хисамов Р.С., Файзуллин И.Н., Кубарев П.Н., Антонов Г.П., Галимов И.Ф. Результаты исследований фильтрационных свойств трещиноватых коллекторов 303 залежи, разрабатываемой на естественном водонапорном режиме // Нефтяное хозяйство. 2011. № 7. С. 36–39. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16516371>. EDN: <https://www.elibrary.ru/nxldaj>.
- [10] Morales V.A., Ramirez L.K., Garnica S.V., Rueda L.A., Gomez V., Gomez A., Bejarano M.A., Shook G.M. Inter well tracer test results in the mature oil field La Cira Infantas // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-190315-MS presented at the SPE Improved Oil Recovery Conference held in Tulsa, USA, 14–18 April 2018. Tulsa, 2018. P. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.2118/190315-MS>.
- [11] Bahamon C.C.T., Mora G., Acosta T.J., Manrique G.A., Quintero D.F. Understanding flow through interwell tracers // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-195251-MS presented at the SPE Western Regional Meeting held in San Jose, USA, 23–26 April 2019. San Jose, 2019. P. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.2118/195251-MS>.
- [12] РД 39-0147428. Методическое руководство по технологии проведения индикаторных исследований и интерпретации их результатов для регулирования и контроля процесса заводнения нефтяных залежей. Москва: Министерство нефтяной промышленности СССР, 1988. 87 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50393035>. EDN: <https://www.elibrary.ru/prcxkt>.
- [13] Земцов Ю.В., Баранов А.В., Гордеев А.О. Обзор физико-химических МУН, применяемых в Западной Сибири, и эффективности их использования в различных геолого-физических условиях // Нефть. Газ. Новации. 2015. № 7. С. 11–21. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24041422>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ugcoit>.
- [14] Ручкин А.А., Ягафаров А.К. Оптимизация применения потокоотклоняющих технологий на Самотлорском месторождении. Тюмень: Вектор Бук, 2005. 148 с. URL: http://eues.ru/sites/default/files/2022-02/Ручкин%20Ягафаров%20Оптимизация%20применения%20потокоотклоняющих%20технологий_2005...pdf?ysclid=lw4o4ukhh6356894841.
- [15] Киреев Т.Ф., Булгакова Г.Т. Интерпретация трассерных исследований с помощью дискретной модели трещины // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11, № 3. С. 252–262. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.19>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ylbuzf>.
- [16] Федоров К.М., Шевелёв А.П., Гильманов А.Я., Изотов А.А., Кобяшев А.В. Новая методика интерпретации индикаторных исследований скважин // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. 2023. Т. 65, № 6. С. 41–52. DOI: <https://doi.org/10.32454/0016-7762-2023-65-6-41-52>.
- [17] Doorwar S., Tagavifar M., Dwarakanath V. A 1D analytical solution to determine residual oil saturations from single-well chemical tracer test // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-200420-MS presented at the SPE Improved Oil Recovery Conference held in Tulsa, USA, 31 August–4 September 2020. Tulsa, 2020. P. 1–16 DOI: <https://doi.org/10.2118/200420-MS>.
- [18] Shen T., Moghanloo R.G., Tian W. Decoupling of channeling and dispersion effects by use of multiwell tracer test // SPE Reservoir Evaluation and Engineering. 2017. Vol. 21, issue 01. P. 54–72. DOI: <https://doi.org/10.2118/187960-PA>.
- [19] Samaniego V.F., Pulido B.H., Rivera R.J., Camacho V.R., Perez R.V.H., Martinez G.B. A tracer injection-test approach to reservoir characterization: theory and practice // International Petroleum Technology Conference Paper IPTC 11038 presented at the International Petroleum Technology Conference held in Doha, Qatar, 21–23 November 2005. Doha, 2005. P. 1–13. DOI: <https://doi.org/10.2523/IPTC-11038-MS>.
- [20] Eldaoushy A.S., Al-Ajmi M., Ashkanani F. Utilization of interwell water tracer to study subsurface flow of the injected water and optimize waterflood in Mauddud carbonate reservoir, Raudjataan Field, North Kuwait // Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-175200-MS presented at the SPE Kuwait Oil and Gas Show and Conference held in Mishref, Kuwait, 11–14 October 2015. Mishref, 2015. P. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.2118/175200-MS>.
- [21] Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. Москва: ПетроАльянс Сервисис Компани Лимитед, 2004. 316 с.
- [22] Гильманов А.Я., Федоров К.М., Шевелёв А.П. Задача о блокировании техногенной трещины в пласте суспензионной смесью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. Т. 57, № 6. С. 26–33. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0568528122600230>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rpeblq>.
- [23] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 211 с. URL: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-dvizhenie-zhidkostey-i-gazov-v-prirodnih-plastah-gibarenblatt-vmentov-vmryzhik.pdf?ysclid=lw4sf0whxi987996750>.
- [24] Ентов В.М., Зазовский А.Ф. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. Москва: Недра, 1989. 231 с.
- [25] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва: Лаборатория знаний, 2020. 636 с.



K.M. Fedorov

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0347-3930>

A.Ya. Gilmanov

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

A.P. Shevelyov

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

A.A. Izotov

“Tyumen Petroleum Research Center” LLC, Tyumen, Russian Federation

E-mail: aaizotov@tmmc.rosneft.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8492-9865>

A.V. Kobyshev

“Tyumen Petroleum Research Center” LLC, Tyumen, Russian Federation

E-mail: avkobyshev@tmmc.rosneft.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7431-0353>

SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF TRACER TESTS INTERPRETATION RESULTS FOR OIL RESERVOIRS IN THE PRESENCE OF LOW RESISTANCE CHANNELS

ABSTRACT

Tracer tests of oil reservoirs have become widely used to assess the parameters of low resistance channels, leading to premature increasing of production water cut. The existing analytical methods of their interpretation do not consider the dissipation of the tracer. The article proposes a methodology of tracer tests interpretation in the presence of low resistance channels, which considers the configuration of the tracer slug in the producer. The developed method is based on solving the inverse problem of tracer filtration in the low resistance channel and for the first time considers its dissipation. The formulation of the inverse problem of tracer filtration in the low resistance channel is based on the use of the tracer transfer equation in the channel, the ratio for the reagent flow in the channel and the reservoir, Darcy's law and the relationship of the volume of the tracer slug with its linear size. The algorithm of numerical determination of the tracer dissipation coefficient by solving the optimization problem by the gradient descent is given. The developed algorithm has been tested on the example of the tracer tests interpretation for two producers of one of the Western Siberia fields. The lengths of each channel for the selected wells are determined. It is shown that the error of comparison of calculated and field data does not exceed 7%. It was found that the length of the shortest channel corresponds to the distance between injector and producer, other channels have a longer length and can be formed later.

Key words: tracer tests; inverse problem; optimization problem; gradient descent; low resistance channels; tracer concentration; tracer dissipation; channel length.

Citation. Fedorov K.M., Gilmanov A.Ya., Shevelyov A.P., Izotov A.A., Kobyshev A.V. Solution of the inverse problem of tracer tests interpretation results for oil reservoirs in the presence of low resistance channels. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 81–94. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-81-94>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Fedorov K.M., Gilmanov A.Ya., Shevelyov A.P., Izotov A.A., Kobyshev A.V., 2024

Konstantin M. Fedorov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, scientific supervisor of the Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

Alexander Ya. Gilmanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation

Alexander P. Shevelyov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

Aleksey A. Izotov — Director for Science and Innovations, “Tyumen Petroleum Research Center” LLC, 79/1, Osipenko Street, Tyumen, 625002, Russian Federation.

Alexander V. Kobayshchev — head manager, “Tyumen Petroleum Research Center” LLC, 79/1, Osipenko Street, Tyumen, 625002, Russian Federation.

References

- [1] Sokolovsky E.V., Solovyov G.B., Trenchikov Yu.I. Indicator methods for studying oil saturated reservoirs. Moscow: Nedra, 1986, 157 p. Available at: <https://www.geokniga.org/books/33015?ysclid=1w4l4isq9k183065397>. (In Russ.)
- [2] Shchelkachev V.N., Lapuk B.B. Underground hydraulics. Moscow-Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2001, 736 p. Available at: <https://www.geokniga.org/books/4851?ysclid=1w4l7c18a6815565073>. (In Russ.)
- [3] Morozov O.N., Andriyanov M.A., Koloda A.V., Mukhametshin I.R., Nukhaev M.T., Prusakov A.V. Use of intelligent tracer technology for inflow monitoring in horizontal producers of the Prirazlomnoye oilfield. *Exposition Oil Gas*, 2017, no. 7 (60), pp. 24–29. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30692445>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zvqsgn>. (In Russ.)
- [4] Medvedsky R.I. Stream theory of oil displacement by water. *Oil and Gas Studies*, 1997, no. 6, p. 69. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21967024>. EDN: <https://www.elibrary.ru/smszhj>. (In Russ.)
- [5] Bulygin D.V., Nikolaev A.N., Elesin A.V. Hydrodynamic evaluation of the efficiency of flow deflecting technologies in conditions of formation of man-made filtration channels. *Georesources*, 2018, vol. 20, no. 3, part 1, pp. 172–177. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2018.3.172-177>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lzspyl>. (In Russ.)
- [6] Izotov A.A., Afonin D.G. The technogenic transformation of productive formations due to the increased discharge pressure during flooding. *Oilfield Engineering*, 2021, no. 5 (629), pp. 18–25. DOI: [https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-5\(629\)-18-25](https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-5(629)-18-25). (In Russ.)
- [7] Fedorov K.M., Ganopolsky R.M., Gilmanov A.Ya., Shevelev A.P. Optimization procedure for conformance control. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 74–88. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-74-88>. EDN: <https://www.elibrary.ru/vethrn>. (In Russ.)
- [8] Anderson T.L. *Fracture mechanics. Fundamental and application*. New York: Publisher Taylor and Francis, 2005. 610 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315370293>.
- [9] Khisamov R.S., Faizullin I.N., Kubarev P.N., Antonov G.P., Galimov I.F. Tracer tests to study properties of fractured reservoirs developed by water drive with forced fluid withdrawal. *Oil Industry*, 2011, no. 7, pp. 36–39. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16516371>. EDN: <https://www.elibrary.ru/nxldaj>. (In Russ.)
- [10] Morales V.A., Ramirez L.K., Garnica S.V., Rueda L.A., Gomez V., Gomez A., Bejarano M.A., Shook G.M. Inter well tracer test results in the mature oil field La Cira Infantas. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-190315-MS presented at the SPE Improved Oil Recovery Conference*, Tulsa, USA, April 14–18. Tulsa, 2018, pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.2118/190315-MS>.
- [11] Bahamon C.C.T., Mora G., Acosta T.J., Manrique G.A., Quintero D.F. Understanding flow through interwell tracers. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-195251-MS presented at the SPE Western Regional Meeting*, San Jose, USA, April 23–26, 2019. San Jose, 2019, pp. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.2118/195251-MS>.
- [12] RD 39-0147428. Methodological guidance on the technology of conducting tracer tests and interpreting their results to regulate and control the process of waterflooding oil deposits. Moscow: Ministerstvo neftyanoi promyshlennosti SSSR, 1988, 87 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50393035>. EDN: <https://www.elibrary.ru/prcxkt>. (In Russ.)
- [13] Zemtsov Yu.V., Baranov A.V., Gordeev A.O. Review of chemical EOR methods used in Western Siberia and the effectiveness of their use in various geological and physical conditions. *Neft. Gas. Novacii*, 2015, no. 7, pp. 11–21. (in Russ.)
- [14] Ruchkin A.A., Yagafarov A.K. Optimization of the use of conformance control technologies at the Samotlor field. Tyumen: Vektor Buk, 2005, 148 p. Available at: http://eues.ru/sites/default/files/2022-02/Ручкин%20Ягафаров%20Оптимизация%20применения%20потокотключающих%20технологий_2005....pdf?ysclid=1w4o4ukhh6356894841. (In Russ.)
- [15] Kireev T.F., Bulgakova G.T. Interpretation of interwell tracer tests using discrete fracture model. *Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 252–262. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.19>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ylbuzf>. (In Russ.)

- [16] Fedorov K.M., Gilmanov A.Ya., Shevelev A.P., Izotov A.A., Kobyashev A.V. New interpretation technique for tracer well tests. *Proceedings of higher educational establishments. Geology and Exploration*, 2023, vol. 65, no. 6, pp. 41–52. DOI: <https://doi.org/10.32454/0016-7762-2023-65-6-41-52>. (In Russ.)
- [17] Doorwar S., Tagavifar M., Dwarakanath V. A 1D analytical solution to determine residual oil saturations from single-well chemical tracer test. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-200420-MS presented at the SPE Improved Oil Recovery Conference*, Tulsa, USA, 31 August–4 September 2020. Tulsa, 2020, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.2118/200420-MS>.
- [18] Shen T., Moghanloo R.G., Tian W. Decoupling of channeling and dispersion effects by use of multiwell tracer test. *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*, 2017, vol. 21, issue 01, pp. 54–72. DOI: <https://doi.org/10.2118/187960-PA>.
- [19] Samaniego V.F., Pulido B.H., Rivera R.J., Camacho V.R., Perez R.V.H., Martinez G.B. A tracer injection-test approach to reservoir characterization: theory and practice. In: *International Petroleum Technology Conference Paper IPTC 11038 presented at the International Petroleum Technology Conference*, Doha, Qatar, November 21–23, 2005. Doha, 2005, pp. 1–13. DOI: <https://doi.org/10.2523/IPTC-11038-MS>.
- [20] Eldaoushy A.S., Al-Ajmi M., Ashkanani F. Utilization of interwell water tracer to study subsurface flow of the injected water and optimize waterflood in Mauddud carbonate reservoir, Raudjataan Field, North Kuwait. In: *Society of Petroleum Engineers Conference Paper SPE-175200-MS presented at the SPE Kuwait Oil and Gas Show and Conference*, Mishref, Kuwait, October 11–14, 2015. Mishref, 2015, pp. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.2118/175200-MS>.
- [21] Economides M., Oligney R., Valko P. *Unified Fracture Design*. Moscow: PetroAl'yans Servisis Kompani Limited, 2004, 316 p. (In Russ.)
- [22] Gil'manov A.Ya., Fedorov K.M., Shevelev A.P. Problem of blocking a technogenic fracture in the reservoir using a suspension mixture. *Fluid Dynamics*, 2022, vol. 57, no. 6, pp. 720–728. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0015462822600936>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ntqelo>. (In English; original in Russian)
- [23] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Movement of liquids and gases in natural formations*. Moscow: Nedra, 1984, 211 p. Available at: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-dvizhenie-zhidkostey-i-gazov-v-prirodnih-plastah-gibarenblatt-vmentov-vmryzhik.pdf?ysclid=lw4sf0whxi987996750>. (In Russ.)
- [24] Entov V.M., Zazovsky A.F. *Hydrodynamics of enhanced oil recovery processes*. Moscow: Nedra, 1989, 231 p. (In Russ.)
- [25] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods*. Moscow: Laboratoriya znanii, 2020, 636 p. (In Russ.)

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <https://journals.ssau.ru/est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимает редколлегия журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются через сайт <https://journals.ssau.ru/est>.
2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.
3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.
4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.
5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.
6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.
7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.
8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы \LaTeX_ϵ с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций \TeX 'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами \LaTeX 'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.
9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:
 - а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("."), двойной дефис ("—")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;
 - б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;
 - в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;
 - г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;
 - д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подбором шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недоступны.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала