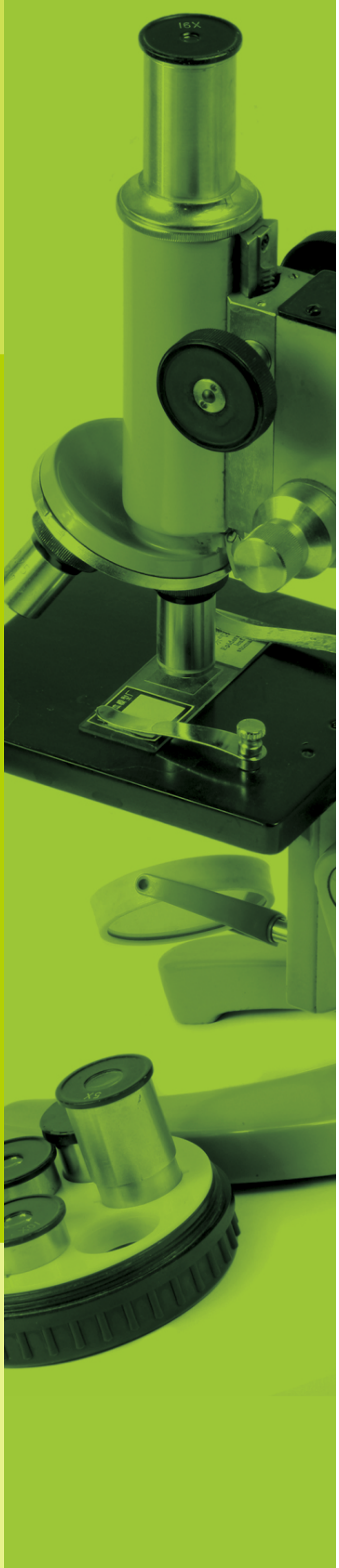
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES



ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

ТОМ 29 • №3 • 2023 ГОД

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Подписной индекс 80307

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES

- *Математика*
- *Математическое моделирование*

ТОМ 29 • № 3 • 2023 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНИТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series»

Т. 29, № 3, 2023

Издатель: Самарский университет
Адрес издателя:
443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Центр периодических изданий Самарского университета
Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

Подписной индекс в Объединенном интернет каталоге «Пресса России» 80307
ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 24.11.2023. Дата выхода в свет 30.11.2023
Формат $60 \times 84/8$.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Печ. л. 12,75.
Тираж 200 экз. (первый завод — 30 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета
443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.
www: http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Subscription Index 80307

VESTNIK
SAMARSKOGO UNIVERSITETA
ESTESTVENNONAUCHNAYA SERIYA

VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES

- *Mathematics*
- *Mathematical Modelling*

VOL. 29 • № 3 • 2023

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)
eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation
The journal is piblished since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
"Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series"
V. 29, № 3, 2023

Publisher: Samara National Research University
Adress publisher:
312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University
Adress of editorial stuff: 1, Academika Pavlova Street, Samara, 443011, Samara region, Russian Federation.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Certificate of registration of means of mass media **ПИ № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the United catalog of Internet «Press of Russia» 80307
ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 24.11.2023.
Format 60 × 84/8.
Litho paper. Instant print.
Print. sheets 12,75.
Circulation 200 copies (first printing – 30 copies).
Order №

Printed on the printing house of Samara University
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian Federation
www: http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Всероссийская научная конференция "Математика и математическое моделирование"

С 28 по 30 августа 2023 г. в Самарском университете проходила Всероссийская научная конференция "Математика и математическое моделирование", организованная Самарским подразделением регионального научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа. Сайт конференции: https://mmm-samara.ssau.ru.

Конференция проходила в очном и онлайн-режимах по следующим трем направлениям: фундаментальная математика и приложения, математическое моделирование, проблемы математического образования. В ее работе участвовало около 50 человек, более половины из которых — молодые исследователи. За время работы трех секций был сделан 31 доклад, из которых 7 пленарных. Пленарными докладчиками выступали ведущие ученые российских научных центров.

1. Белишев Михаил Игоревич (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова), название доклада "Волновой спектр полуограниченного оператора".

2. Бикчентаев Айрат Мидхатович (Казанский (Приволжский) федеральный университет), название доклада "Топология локальной сходимости по мере на измеримых операторах".

3. Бондаренко Наталья Павловна (Самарский университет), название доклада "Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями".

4. Капустин Владимир Владимирович (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова), название доклада "Парные корреляции для последовательностей и возмущения самосопряженных операторов".

5. Мусин Ильдар Хамитович (Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН), название доклада "О пространстве периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье в R^n".

6. Насыров Семен Рафаилович (Казанский (Приволжский) федеральный университет), название доклада "Внешние конформные модули".

7. Хабибуллин Булат Нурмиевич (Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН), название доклада "Субгармонические и плюрисубгармонические нижние огибающие функций в областях".

В рамках работы секции "Проблемы математического образования" приняли участие преподаватели математики и информатики высших учебных заведений и школ Самарской и Пензенской областей.

Все пленарные и секционные заседания транслировались онлайн.

Настоящий выпуск журнала "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия", посвященный итогам работы конференции, содержит расширенные версии некоторых докладов ее участников.

Сопредседатель оргкомитета конференции
С.В. Асташкин

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 24.07.2023
после рецензирования: 31.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

Я.С. Бунтова
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ynbuntova@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0003-7786-8019

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается задача с интегральными нелокальными условиями первого рода. Основной целью является доказательство однозначной разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями 1 рода, если ядра этих условий зависят не только от пространственной переменной, но и от времени. Показана эквивалентность нелокальной задачи с интегральными условиями 1 рода и нелокальной задачи с интегральными условиями 2 рода. Получены ограничения на входные данные, обеспечивающие единственность обобщенного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение; нелокальная задача; интегральные условия; обобщенное решение.

Цитирование. Бунтова Я.С. Нелокальная задача с интегральными условиями первого рода для уравнения колебания струны // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 8–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Яна Сергеевна Бунтова — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$, уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t), \int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t). \tag{3}$$

Будем считать, что $a(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_T$.

Особенность поставленной задачи заключается не только в том, что условия (3) являются нелокальными интегральными условиями первого рода, но и в том, что их ядра $K_i(x,t)$ зависят и от переменной t.

Напомним, что нелокальными условиями принято называть соотношения, связывающие значения искомого в области Ω решения на некотором внутреннем многообразии и в точках границы области Ω.

В случае одной пространственной переменной нелокальные интегральные условия могут быть представлены следующим соотношением:

$$\alpha u(x,t) + \beta u_x(x,t) + \lambda \int_0^l K(x,t)u(x,t)dx = 0. \tag{$*$}$$

Если α и β не обращаются в ноль одновременно, то условие называется интегральным условием второго рода.

Если $\alpha = \beta = 0$, то условие называется интегральным условием первого рода. [3]

К настоящему времени имеется значительное количество статей, посвященых исследованию нелокальных задач с интегральными условиями [5–8; 11]. Разработаны методы исследования разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями второго рода [2; 5; 10]. Если в ($*$) $\beta \neq 0$, то эффективным оказался метод, впервые реализованный в [4] для многомерного уравнения. Если же в ($*$) $\alpha = \beta = 0$, то есть нелокальные условия первого рода, при обосновании рассуждения возникает много трудностей, отмеченных и в статьях [2; 6; 9]. Одним из способов преодолеть возникающие трудности является сведение условий первого рода к условиям второго рода, причем так, чтобы они оказались эквивалентными. Условия на входные данные, обеспечивающие возможность этой процедуры, отражены в следующей лемме.

Лемма. Пусть

$$K_i(x,t) \in C^2(\overline{Q}_T), \phi(x) \in W_2^1(0,l), \psi(x) \in L_2(0,l), h_i(t) \in C^2(0,T),$$
$$f(x,t) \in L_2(Q_T), \quad a(x,t), a_x(x,t) \in C(Q_T),$$
$$\triangle \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t)) \neq 0, \forall t \in [0,T]$$

и выполняются условия согласования

$$\begin{gathered}\int_0^l K_i(x,0)\phi(x)dx = h_i(0),\\ \int_0^l [K_i(x,0)\psi(x) + K_{it}(x,0)\phi(x)]dx = h_i'(0).\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда нелокальные условия первого рода (3) эквивалентны нелокальным условиям второго рода

$$\begin{aligned}u_x(0,t) = \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx + 2\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dx + G_1(t),\\ u_x(l,t) = \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_3(x,t)u(x,t)dx + 2\int_0^l P_4(x,t)u_t(x,t)dx + G_2(t),\end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha_{ij}, P_i(x,t), G_i(x,t)$ выражаются через $K_i(x,t), a(x,t), f(x,t), h_i(t)$ и их производные.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Дифференцируя равенство (3) дважды по t, получим

$$\begin{aligned}\int_0^l (K_1(x,t)u_{tt}(x,t) + 2K_{1t}(x,t)u_t(x,t) + K_{1tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_1(t),\\ \int_0^l (K_2(x,t)u_{tt}(x,t) + 2K_{2t}(x,t)u_t(x,t) + K_{2tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_2(t).\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь выразим из уравнения (1) $u_{tt}(x,t)$ и подставим в (6), получим

$$\begin{aligned}\int_0^l (K_1(x,t)(f + (a(x,t)u_x)_x) + 2K_{1t}(x,t)u_t(x,t) + K_{1tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_1(t),\\ \int_0^l (K_2(x,t)(f + (a(x,t)u_x)_x) + 2K_{2t}(x,t)u_t(x,t) + K_{2tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_2(t).\end{aligned} \tag{7}$$

Проинтегрируем теперь слагаемые, содержащие u_{xx} дважды, и получим

$$\begin{gathered}\int_0^l K_1(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = K_1(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_1(0,t)a(0,t)u_x(0,t)+\\ +K_{1x}(0,t)a(0,t)u(0,t) - K_{1x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{1x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx,\\ \int_0^l K_2(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = K_2(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_2(0,t)a(0,t)u_x(0,t)+\\ +K_{2x}(0,t)a(o,t)u(0,t) - K_{2x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{2x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx.\end{gathered} \tag{8}$$

Подставим (8) в (7)

$$\begin{gathered}\int_0^l K_1(x,t)fdx + K_1(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_1(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_{1x}(0,t)a(0,t)u(0,t)-\\ -K_{1x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{1x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx + 2\int_0^l K_{1t}(x,t)u_t(x,t)dx+\\ +\int_0^l K_{1tt}(x,t)u(x,t)dx = h"_1(t),\\ \int_0^l K_2(x,t)fdx + K_2(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_2(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_{2x}(0,t)a(0,t)u(0,t)-\\ -K_{2x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l K_{2x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx + 2\int_0^l K_{2t}(x,t)u_t(x,t)dx+\\ +\int_0^l K_{2tt}(x,t)u(x,t)dx = h"_2(t).\end{gathered} \tag{9}$$

Так как

$$\triangle \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t)) \neq 0,$$

то (9) можно разрешить относительно $u_x(0,t)$ и $u_x(l,t)$. Выразим их из (9) и получим нелокальные условия второго рода:

$$\begin{gathered}u_x(0,t) = \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx+\\ +2\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dx + G_1(t),\\ u_x(l,t) = \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_3(x,t)u(x,t)dx+\\ +2\int_0^l P_4(x,t)u_t(x,t)dx + G_2(t),\end{gathered}$$

где

$$\alpha_{11} := \frac{1}{\triangle}[K_{1x}(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2x}(0,t)],$$

$$\alpha_{12} := -\frac{a(l,t)}{a(0,t)\triangle}[K_{1x}(l,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2x}(l,t)],$$

$$\begin{gathered}P_1(x,t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}[a(x,t)K_{1x}(x,t))_x K_2(l,t) - (a(x,t)K_{2x}(x,t))_x K_2(l,t)+\\ +K_{1tt}(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2tt}(x,t)],\end{gathered}$$

$$P_2(x,t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}[K_{1t}(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2t}(x,t)],$$

$$\begin{gathered}G_1(t) := -\tfrac{1}{a(0,t)\triangle}(\textstyle\int_0^l [K_1(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(x,t)]fdx+\\ +h_{1tt}(t)K_2(l,t) - K_1(l,t)h_{2tt}(t)),\end{gathered}$$

$$\alpha_{21} := \frac{a(0,t)}{a(l,t)\triangle}[K_{1x}(0,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2x}(0,t)],$$

$$\alpha_{22} := -\tfrac{1}{\triangle}[K_{1x}(l,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2x}(l,t)],$$

$$P_3(x,t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}[(a(x,t)K_{1x}(x,t))_x K_2(0,t) - (a(x,t)K_{2x}(x,t))_x K_1(0,t)+$$
$$+K_{1tt}(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2tt}(x,t)],$$

$$P_4(x,t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}[K_{1t}(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2t}(x,t)],$$

$$G_2(t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}(\int_0^l [K_1(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_2(x,t)]f dx -$$
$$-h_{1tt}(t)K_2(0,t) + K_1(0,t)h_{2tt}(t)).$$

Пусть теперь $u(x,t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (5). Домножим уравнение (1) на $K_1(x,t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,l]$. Аналогичную процедуру проделаем с ядром $K_2(x,t)$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_1(x,t)u_{tt}(x,t)dx - \int_0^l K_1(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = \int_0^l K_1(x,t)f dx,\\
&\int_0^l K_2(x,t)u_{tt}(x,t)dx - \int_0^l K_2(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = \int_0^l K_2(x,t)f dx.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставим (8) в (10). Но тогда выполняются и равенства (6), из которых получены условия (5). Равенства (6) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (K_1(x,t)u(x,t))_{tt}dx - h''_1(t) = 0,\\
&\int_0^l (K_2(x,t)u(x,t))_{tt}dx - h''_2(t) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Эти условия можно свернуть таким образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx - h_1(t)\right] = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx - h_2(t)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Из условий согласования (4) вытекают начальные условия

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_i(x,0)u(x,0)dx = h_i(0),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx|_{t=0} = h_i'(0), \forall i = 1,2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Задача Коши (12), (13) имеет единственное решение

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t),\\
&\int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t),
\end{aligned}$$

что и означает выполнение условий (3).

2. Единственность решения задачи

Теперь рассмотрим частный случай этой задачи (1)–(3), в которой ядро представлено в виде $K_i(x,t) = \Phi_i(x)\Psi_i(t)$. Тогда условия (3) можно записать таким образом:

$$\int_0^l \Phi_i(x)\Psi_i(t)u(x,t)dx = h_i(t), i = 1,2. \tag{14}$$

Будем считать, что $\Psi_i(t) \neq 0$ всюду в $[0,T]$ и обозначим $\dfrac{h_i(t)}{\Psi_i(t)} = T_i(t)$, тогда (14) можно представить так:

$$\begin{aligned} &\int_0^l \Phi_1(x)u(x,t)dx = T_1(t),\\ &\int_0^l \Phi_2(x)u(x,t)dx = T_2(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Условия (5) для этого частного случая выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx + G_1(t),\\ u_x(l,t) &= \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_2(x,t)u(x,t)dx + G_2(t), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_{11} := \frac{1}{\triangle}[\Phi_1'(0)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2'(0)],\\ \alpha_{12} := -\frac{a(l,t)}{a(0,t)\triangle}[\Phi_1'(l)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2'(l)],\\ P_1(x,t) := \frac{a_x}{a(0,t)\triangle}[\Phi_1''\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2''],\\ G_1(t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}(\int_0^l [\Phi_1(l)\Phi_2(x) - \Phi_1(x)\Phi_2(l)]fdx-\\ -T_1''(t)\Phi_2(l) + \Phi_1(l)T_2''(t)),\\ \alpha_{21} := \frac{a(0,t)}{a(l,t)\triangle}[\Phi_1'(0)\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2'(0)],\\ \alpha_{22} := -\frac{1}{\triangle}[\Phi_1'(l)\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2'(l)],\\ P_2(x,t) := \frac{a_x}{a(l,t)\triangle}[\Phi_1''\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2''],\\ G_2(t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}(\int_0^l [\Phi_1(0)\Phi_2(x) - \Phi_1(x)\Phi_2(0)]fdx-\\ -T_1''(t)\Phi_2(0) + \Phi_1(0)T_2''(t)),\\ \triangle := \Phi_1(0)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2(0) \neq 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Введем понятие обобщенного решения. Следуя известной процедуре [1], считая что u — классическое решение, умножим равенство (1) на гладкую функцию, проинтегрируем по области Q_T и, подставляя краевые условия, получим равенство:

$$\begin{gathered} \int_0^T \int_0^l [-u_tv_t + au_xv_x]dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21}v(l,t)a(l,t)v_t(0,t)dt+\\ + \int_0^\tau \alpha_{22}v(l,t)a(l,t)v_t(l,t)dt + \int_0^\tau \int_0^l P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)dxdt-\\ - \int_0^\tau \alpha_{11}v(0,t)a(0,t)v_t(0,t)dt - \int_0^\tau \alpha_{12}v(0,t)a(0,t)v_t(l,t)dt-\\ - \int_0^\tau \int_0^l P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)dxdt =\\ = \int_0^l v(x,0)\psi(x)dx + \int_0^T \int_0^l v(x,t)fdxdt. \end{gathered} \tag{18}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1),(2), (16) будем называть функцию $u(x,t) \in \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \phi(x)$ и тождеству

$$\begin{gathered} \int_0^T \int_0^l [-u_tv_t + au_xv_x]dxdt - \int_0^T v(l,t)a(l,t)u_x(l,t)dt + \int_0^T v(0,t)a(0,t)u_x(0,t)dt =\\ = \int_0^l v(x,0)\psi(x)dx + \int_0^T \int_0^l v(x,t)fdxdt \end{gathered} \tag{19}$$

для любой функции $v(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$,

где $\widehat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1(Q_T), v(x,T) = 0\}$.

Теорема. Если выполнены условия

$$a(x,t), a_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T),$$
$$\Phi_i \in C^2[0,l], \Psi_i(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [0,T]$$
$$\alpha_{12}a(0,t) + \alpha_{21}a(l,t) = 0,$$
$$\alpha_{11}a(0,0)\xi_1^2 + 2\alpha_{12}a(0,0)\xi_1\xi_2 - \alpha_{22}a(l,0)\xi_2^2 \geqslant 0,$$

то существует не более одного обобщенного решения поставленной задачи.

Доказательство. Покажем, что существует не более одного решения задачи. Предположим, что существует два решения u_1 и u_2. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству:

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_0^l[-u_tv_t + au_xv_x]dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21}v(l,t)a(l,t)v_t(0,t)dt+\\ +\int_0^\tau \alpha_{22}v(l,t)a(l,t)v_t(l,t)dt + \int_0^\tau\int_0^l P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)dxdt-\\ -\int_0^\tau \alpha_{11}v(0,t)a(0,t)v_t(0,t)dt - \int_0^\tau \alpha_{12}v(0,t)a(0,t)v_t(l,t)dt-\\ -\int_0^\tau\int_0^l P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)dxdt = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Выберем в тождестве (18) с $f(x,t) = 0$ и $\psi(x) = 0$

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{21}$$

Проинтегрируем по частям некоторые слагаемые:

$$-\int_0^\tau\int_0^l u_tudxdt = -\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)dx,$$
$$\int_0^\tau\int_0^l au_xv_xdxdt = -\frac{1}{2}(\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt + \int_0^l a(x,0)v_x^2(x,0)dx).$$

Подставляя в (20), получим:

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2}\int_0^l[u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx = \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21}v(l,t)a(l,t)v_t(0,t)dt+\\ +\int_0^\tau \alpha_{22}v(l,t)a(l,t)v_t(l,t)dt + \int_0^\tau\int_0^l P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)dxdt-\\ -\int_0^\tau \alpha_{11}v(0,t)a(0,t)v_t(0,t)dt - \int_0^\tau \alpha_{12}v(0,t)a(0,t)v_t(l,t)dt-\\ -\int_0^\tau\int_0^l P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{22}$$

Проинтегрируем по частям и подставим в (22) такие интегралы:

$$\begin{gathered}\int_0^\tau \alpha_{11}v(0,t)a(0,t)v_t(0,t)dt = -\frac{1}{2}\alpha_{11}a(0,0)v^2(0,0) - \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt,\\ \int_0^\tau \alpha_{12}v(0,t)a(0,t)v_t(l,t)dt = -\alpha_{12}a(0,0)v(0,0)v(l,0) - \int_0^\tau \alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt-\\ -\int_0^\tau \alpha_{12}a(0,t)v_t(0,t)v(l,t)dt,\\ \int_0^\tau \alpha_{22}v(l,t)a(l,t)v_t(l,t)dt = -\frac{1}{2}\alpha_{22}a(l,0)v^2(l,0) - \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt.\end{gathered}$$

Учитывая условия теоремы $\alpha_{12}a(0,t) + \alpha_{21}a(l,t) = 0$, получим:

$$\begin{gathered}\int_0^l[u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx = -\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt + [\alpha_{11}a(0,0)v^2(0,0)+\\ +2\alpha_{12}a(0,0)v(0,0)v(l,0) - \alpha_{22}a(l,0)v^2(l,0)] + \int_0^\tau \alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt-\\ -\int_0^\tau \alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt + 2\int_0^\tau \alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt - 2\int_0^\tau\int_0^l[-P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)+\\ +P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)]u(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{23}$$

Из равенства (23) вытекает неравенство и, если учесть условие теоремы $\alpha_{11}a(0,0)\xi_1^2+2\alpha_{12}a(0,0)\xi_1\xi_2-$ $-\alpha_{22}a(l,0)\xi_2^2\geqslant 0$, получим:

$$\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx\leqslant\left|\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt\right|+\left|\int_0^\tau\alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt\right|+$$
$$+\left|\int_0^\tau\alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt\right|+2\left|\int_0^\tau\alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt\right|+ \tag{24}$$
$$+2\left|\int_0^\tau\int_0^l[-P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)+P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)]u(x,t)dxdt\right|.$$

Обратимся теперь к правой части (24) Коши, Коши — Буняковского и

$$v^2(x_i,t)\leqslant 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx+\frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,$$

вывод которой показан в [3, с. 107]. Учитывая сказанное выше, получим оценки для таких слагаемых правой части неравенства (24):

$$\left|\int_0^\tau\alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt\right|\leqslant\int_0^\tau\left|\alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)\right|dt\leqslant\int_0^\tau|\alpha_{11}||a_t(0,t)|v^2(0,t)dt\leqslant$$
$$\leqslant A_1\int_0^\tau v^2(0,t)dt\leqslant 2lA_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2A_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,$$

где $A_1:=b_1\cdot a_2$,

$$2\left|\int_0^\tau\alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt\right|\leqslant 2\int_0^\tau|\alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\tau|\alpha_{12}||a_t(0,t)||v(0,t)||v(l,t)|dt\leqslant A_2\int_0^\tau[v^2(0,t)+v^2(l,t)]dt,$$

где $A_2:=b_2\cdot a_2$,

$$\left|\int_0^\tau\alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt\right|\leqslant\int_0^\tau\left|\alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)\right|dt\leqslant\int_0^\tau|\alpha_{22}||a_t(l,t)|v^2(l,t)dt\leqslant$$
$$\leqslant A_3\int_0^\tau v^2(l,t)dt\leqslant 2lA_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2A_3}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,$$

где $A_3:=c_2\cdot a_2$,

$$2\left|\int_0^\tau\int_0^l[-P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)+P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)]u(x,t)dxdt\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\tau\int_0^l|P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)|dxdt+2\int_0^\tau\int_0^l|P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)|dxdt\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\tau\int_0^l|P_1(x,t)||v(0,t)||a(0,t)||u(x,t)|dxdt+2\int_0^\tau\int_0^l|P_2(x,t)||v(l,t)||a(l,t)||u(x,t)|dxdt\leqslant$$
$$\leqslant D_1l\int_0^\tau v^2(l,t)dt+D_2l\int_0^\tau v^2(0,t)dt+(D_1+D_2)\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt,$$

где $D_1:=d_1\cdot a_1, D_2:=d_2\cdot a_1$.

Преобразуем (24), учитывая оценки, написанные выше:

$$\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx\leqslant\left|\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt\right|+2lA_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+$$
$$+\frac{2A_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt+A_2\int_0^\tau[v^2(0,t)+v^2(l,t)]dt+2lA_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+ \tag{25}$$
$$+\frac{2A_3}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt+D_1l\int_0^\tau v^2(l,t)dt+D_2l\int_0^\tau v^2(0,t)dt+$$
$$+(D_1+D_2)\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt.$$

Введем некоторые обозначения:

$$C_1=2l(A_1+A_3),C_2=A_2+D_2l,C_3=A_2+D_1l,C_4=D_1+D_2,C_5=\frac{2}{l}(A_1+A_3).$$

Преобразуем (25):

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \left|\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2 dxdt\right| + C_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+ \\ +C_2\int_0^\tau v^2(0,t)dt + C_3\int_0^\tau v^2(l,t)dt + C_4\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt+ \\ +C_5\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt. \tag{26}$$

Используя неравенство, полученное в [2], получим:

$$\int_0^\tau v^2(0,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,$$
$$\int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,$$
$$\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt \leqslant \tau^2\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt.$$

Учитывая оценки, написанные выше, получим:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[(a_2+B_1)v_x^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt, \tag{27}$$

где

$$B_1 := C_1 + 2l(C_2+C_3),\ \ B_2 := \max_{[0,T]}\{\frac{2}{l}(C_2+C_3)\tau^2 + C_4 + C_5\tau^2\}.$$

Теперь введем функцию $w(x,t) = \int_0^t u_x d\eta$. Тогда, используя преставления функции v, получим

$$v_x^2(x,0) = w^2(x,\tau),\ \ v_x(x,0) = -w(x,\tau),\ \ v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau).$$

Тогда в (27) $v_x^2(x,t) \leqslant 2w^2(x,t) + 2w^2(x,\tau)$. Подставляя это неравенство, получим:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[2(a_2+B_1)(w^2(x,t)+w^2(x,\tau))+B_2u^2(x,t)\right]dxdt. \tag{28}$$

Заметим, что $w^2(x,\tau)$ не зависит от t и $a(x,t) \geqslant a_0 > 0 \quad \forall x,t \in \overline{Q}_T$. Тогда

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a_0w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[2(a_2+B_1)w^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt+ \\ +2\tau(a_2+B_1)\int_0^l w^2(x,\tau)dx. \tag{29}$$

Выберем τ так, чтобы $a_0 - 2\tau(a_2+B_1) > 0$. Тогда последнее слагаемое в (29) можно перенести в левую часть:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+\nu w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[2(a_2+B_1)w^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt, \tag{30}$$

где $\nu = a_0 - 2\tau(a_2+B_1)$. Выберем в (30) $m = min\{1;\nu\}$ и $M = max\{2(a_2+B_1);B_2\}$, получим

$$m\int_0^l [u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)]dx \leqslant M\int_0^\tau\int_0^l \left[w^2(x,t)+u^2(x,t)\right]dxdt. \tag{31}$$

Применив к последнему неравенству лемму Гроноулла, получим $u(x,t) = 0$ в $[0,\tau]$, где $\tau < \dfrac{a_0}{2(a_2+B_1)}$. Так же, как и в [1, с. 212], повторяя рассуждения для $t \in [\tau,\tau_1]$, убедимся, что $u(x,t) = 0$ на этом промежутке $(\tau \leqslant \tau_1 < T)$. И так в конечное число шагов докажем обращение в нуль для всех $t \in [0,T]$.

Таким образом, доказано утверждение о том, что не может существовать более одного решения поставленной задачи.

Литература

[1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с. URL: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE?ysclid=lntxmubmb390280080.

[2] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74—83. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm8596.

[3] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений: монография. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2012. 194 с.

[4] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 2 (42). С. 15–27. URL: http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2006web2/math/200620002.pdf.

[5] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 21. Pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/QAM/160437.

[6] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de2993.

[7] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024. URL: https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf7694.

[8] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de10101.

[9] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2012. № 10. С. 32–44. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm8743.

[10] Пулькина Л.С., Савенкова А.Е. Нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2016. № 1–2. С. 33–45. URL: https://www.mathnet.ru/rus/vsgu499; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345215. EDN: https://www.elibrary.ru/wfyota.

[11] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de11100.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17

Submited: 24.07.2023
Revised: 31.08.2023
Accepted: 30.10.2023

Y.S. Buntova
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: ynbuntova@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0003-7786-8019

A NON-LOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS OF THE FIRST KIND FOR THE STRING VIBRATION EQUATION

ABSTRACT

The article considers a problem with integral nonlocal conditions of the first kind. The main goal is to prove the unique solvability of a nonlocal problem with integral conditions of the 1st kind, if the kernels of these conditions depend not only on the spatial variable, but also on time. The equivalence of a nonlocal problem with integral conditions of the 1st kind and a nonlocal problem with integral conditions of the 2nd kind is shown. Restrictions on the input data are obtained to ensure the uniqueness of a generalized solution to the problem posed.

Key words: hyperbolic equation; nonlocal problem; integral conditions; generalized solution.

Citation. Buntova Y.S. A non-local problem with integral conditions of the first kind for the string vibration equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 8–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Yana S. Buntova — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE?ysclid=lntxmubmb390280080. (In Russ.)

[2] Pul'kina L.S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 4, pp. 62-–69. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081. (In English; original in Russian)

[3] Pul'kina L.S. Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations: monograph. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii universitet", 2012, 194 p. (In Russ.)

[4] Dmitriev V.B. A non-local problem with integral conditions for a wave equation. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2006, no. 2 (42), pp. 15–27. Available at: http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2006web2/math/200620002.pdf. (In Russ.)

[5] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, vol. 21, pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/QAM/160437.

[6] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/de2993. (In Russ.)

[7] Kamynin L.I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, issue 6, pp. 33—59. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1. (In English; original in Russian)

[8] Pulkina L.S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, issue 2, pp. 316-–318. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754219. (In English; original in Russian)

[9] Pulkina L.S. A non-local problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 10, pp. 26–37. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12100039. (in English; original in Russian)

[10] Pulkina L.S., Savenkova A.E. A problem with second kind integral conditions for hyperbolic equation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, no. 1-2, pp. 33–45. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/vsgu499; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345215. EDN: https://www.elibrary.ru/wfyota. (In Russ.)

[11] Pulkina L.S. A Nonlocal Problem with Integral Conditions for a Hyperbolic Equation. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 887–892. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16 (In English; original in Russian)

Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-18-23

УДК 372.851; 372.853

Дата: поступления статьи: 10.07.2023
после рецензирования: 15.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

Е.В. Галиева
Самарский государственный социально-педагогический университет,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: galieva@pgsga.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7011-5115
Л.Н. Евелина
Самарский государственный социально-педагогический университет,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: evelina@pgsga.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0147-6839

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ — КАКОВА ЕЕ РОЛЬ В ОБРАЗОВАНИИ И КАК ЕЕ ОЦЕНИТЬ

АННОТАЦИЯ

В статье описан опыт проведения демонстрационного экзамена для студентов педагогических вузов на примере двух дисциплин — методики обучения математике и методики обучения физике. Авторы делают акцент на значимость такой формы экзамена для демонстрации студентом возможности решения практических задач, максимально приближенных к реальным условиям будущей трудовой деятельности.

Ключевые слова: педагогическое образование, предметная подготовка будущих учителей, профессиональный стандарт педагога, компетентностный подход, демоэкзамен.

Цитирование. Галиева Е.В., Евелина Л.Н. Методика обучения — какова ее роль в образовании и как ее оценить // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 18–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-18-23.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Елена Владимировна Галиева — кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физики, заведующий кафедрой физики, математики и методики обучения, Самарский государственный социально-педагогический университет, 443099, Российская Федерация, г. Самара, ул. Максима Горького, 65/67.
Любовь Николаевна Евелина — кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физики, математики и методики обучения, Самарский государственный социально-педагогический университет, 443099, Российская Федерация, г. Самара, ул. Максима Горького, 65/67.

Введение

Образование трактуется как освоение накопленных человечеством фактов об окружающем мире и формирование собственного опыта по их применению, совершенствованию и развитию. Человек сначала приобретает знания и формирует умения пользоваться ими в процессе взаимодействия с природой и обществом и лишь затем вырабатывает в себе готовность создавать новые формы познания мира для других. А значит, передача опыта как первооснова образования не может оставаться без внимания в данной системе, прежде всего, среди учителей и воспитателей. Педагогические вузы играют в этой системе главную роль и подготовка квалифицированных учителей во многом зависит от уровня профессиональных компетенций преподавателей вузов, которые с полной отдачей передают свои знания и опыт будущим учителям. Оценка уровня подготовки студентов — будущих учителей осуществляется в педагогических вузах систематически через различные виды и формы аттестации (текущая, промежуточная, итоговая) [1; 2]. И если текущую и промежуточную аттестацию, как правило, организует каждый преподаватель в рамках своей дисциплины, то итоговая аттестация переходит в ранг обязанностей независимой аттестационной комиссии. Для этого разрабатывают программы итоговых испытаний для обучающихся, создают экзаменационные материалы. Для проведения итоговых испытаний в состав комиссии приглашают опытных учителей, руководителей из образовательных учреждений — будущих работодателей, чтобы оценить уровень подготовки выпускника не только с позиции требований образовательного стандарта, с позиции преподавателей вуза, но и выявления уровня их соответствия современным требованиям образовательных организаций, профессионального стандарта педагога.

1. Ход исследования

Предметная подготовка будущих учителей начинается с первых дней обучения в вузе и продолжается вплоть до его окончания. Учебные планы и программы подготовки учителей содержат в себе перечень всех необходимых дисциплин с учетом их предметного наполнения всеми разделами изучаемых дисциплин. Методика раскрытия особенностей предметного содержания играет в профессиональной подготовке будущих учителей огромную роль. Всем известно, что в методике обучения предмету всегда выделяют раздел общей методики (применимый к изучению особенностей любого раздела дисциплины в силу логики его содержания: понятия, их свойства и признаки, правила, примеры) и множество частных методик, относящихся к особенностям предметных разделов.

Обучаясь в педагогическом вузе, будущие учителя сначала расширяют и углубляют свой уровень предметной подготовки через содержание предметных дисциплин и различных разделов в них. Так, будущие учителя математики в рамках предметной подготовки изучают такие разделы математики, как математический анализ, геометрия, теория чисел, числовые системы, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика и другие. Каждый из разделов базируется на начальных сведениях из курса математики средней школы, но постепенно наполняется новым содержанием, уровень строгости изложения материала и задач возрастает [2; 3]. Важно, чтобы этот новый пласт содержания имел прочную базу, в противном случае присвоение новых знаний не происходит или становится очень поверхностным [1]. Таким образом, мы наблюдаем круговорот в системе математических знаний: начав изучение математики на уровне школьного курса, будущий учитель непременно поднимается на новый уровень — уровень преподавателя-профессионала, обладающего не только формальными знаниями, но и практическими навыками его применения и передачи своим воспитанникам. В этом смысле методика обучения становится тем важным связующим звеном, который помогает каждому будущему учителю математики выбирать для этого наиболее рациональные и эффективные в конкретных условиях методы и технологии, средства и приемы [2, с. 21].

Таким образом, начиная изучать методику обучения на третьем курсе при пятилетнем сроке обучения, студент не только готов к самостоятельному изложению теоретических сведений из каждого содержательного раздела, но и способен предвидеть возможные трудности их понимания и усвоения благодаря собственному опыту. Согласно учебному плану педагогического вуза изучение курса методики обучения длится два года и завершается экзаменом. Этот экзамен можно считать итоговым для методики обучения. С сентября 2023 года Самарский государственный социально-педагогический университет принимает участие в совместном с Министерством образования и науки Самарской области проекте, направленном на обеспечение непрерывной практической подготовки студентов выпускных курсов. Для этого в учебные планы по направлениям подготовки 44.03.01 и 44.03.05 *Педагогическое образование* включена годичная практическая подготовка на базе образовательных учреждений. И экзамен по методическому модулю становится возможностью оценить готовность студента к практической работе в школе. Каким должен быть итог изучения курса методики обучения?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо обратиться к разным источникам. Во-первых, профессиональный стандарт педагога [4] предъявляет требования к профессиональным качествам учителя, касающимся общепедагогических и трудовых функций, а также связанных с предметным обучением. Каждая из прописанных функций базируется на сформированных в период вузовской подготовки универсальных и общепрофессиональных компетенциях [5]. А значит, каждой из них необходимо уделять в период обучения специальное внимание, составляя для этого нужные задания, подбирая соответствующие материалы и формы взаимодействия [6].

Нельзя забывать о значимой в системе педагогического образования концепции профессионально-педагогической направленности обучения, разработанной А.Г. Мордковичем [7] и обязывающей каждого преподавателя педагогического вуза в рамках своей дисциплины уделять внимание не только деятельности по усвоению предметного содержания дисциплины, но и процессу по его трансформации и переносу на более высокий уровень изложения [1–3; 6]. Среди мероприятий подобного значения можно выделить составление блок-схем и ментальных карт по каждому из изучаемых предметных разделов, составление аннотированных списков источников по изложению темы с учетом индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся, подборка списка опорных задач по каждой теме, разработка презентационных материалов по теме, установление межпредметных связей для каждой изучаемой темы курса, разработка контрольных вопросов и заданий в устной и письменной форме и многое другое [1–3; 6].

ФГОС ВО по направлению подготовки *Педагогическое образование* для любого уровня содержит в себе требования к результатам освоения программ бакалавриата и магистратуры, суть которых заключается в необходимости достижения каждым выпускником определенных универсальных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций [5]. Формирование каждого вида обеспечивается через самостоятельную познавательную деятельность будущих учителей, организованную в рамках вузовской подготовки. От каждого преподавателя вуза зависит уровень успешности будущего учителя. А значит, учебный процесс должен быть построен с учетом актуальных направлений предметной подготовки и воспитания школьников на уроках и во внеурочное время. Методика обучения здесь становится приоритетной дисциплиной. Именно методика обучения объединяет в себе все аспекты формирования профессиональных качеств будущего учителя: психолого-педагогические, предметные и общекультурные. С этой целью преподаватели методики обучения разрабатывают различные виды заданий для студентов, включающие в себя: набор проблемных ситуаций, соответствующих будущей профессиональной деятельности; задания практического характера (разработка конспектов уроков и внеурочных мероприятий, наглядного сопровождения, плана итогового повторения в рамках подготовки к ОГЭ и ЕГЭ, описание системы задач и т. д.); сценарии деловых игр; программы элективных курсов и т. п. [1–3; 6].

Не менее значимым этапом в профессиональной подготовке будущих учителей является производственная практика, в рамках которой будущим учителям предоставляется возможность практически реализовать все разработанные на аудиторных занятиях материалы и подготовить множество других с учетом сформированных компетенций. Таким образом, развитие и совершенствование профессиональных качеств будущих учителей происходит непрерывно, если преподавателям вуза, прежде всего преподавателям методических дисциплин, удается обеспечить единство всех учебных задач на протяжении всего периода обучения. Формальная методическая подготовка в педагогическом вузе завершается экзаменом.

В этом учебном году на кафедре физики, математики и методики обучения Самарского государственного социально-педагогического университета такой экзамен впервые был организован в новом необычном формате демонстрационного экзамена. Это стало возможным в связи с созданием в вузе новых пространств Педагогического технопарка, появилась специальная зона для организации и проведения демонстрационного экзамена. В его рамках студент решает практические задачи в условиях, максимально приближенных к реалиям будущей трудовой деятельности. Суть заключалась в следующем: студент заранее получал билет, в котором на примере одной темы по математике/физике предлагалось продемонстрировать решение конкретной учебной проблемы. Для этого студенту разрешалось использовать любые источники (учебник, методические и дидактические пособия, средства ИКТ, лабораторное оборудование и т. п.). Другими словами, будущий учитель, опираясь на сформированный у него методический опыт, должен был продумать в деталях свой фрагмент урока и провести его со студентами-волонтерами (в качестве волонтеров были привлечены студенты 1-го курса). Приведем содержание одного из экзаменационных билетов.

Задание 1. На примере фрагмента урока математики по теме "Векторы" продемонстрируйте возможности формирования мотивации к учению и расширение кругозора учащихся 9 класса.

Задание 2. На примере фрагмента урока физики по теме "Кинематика равноускоренного движения" продемонстрируйте возможности реализации технологии поэтапного формирования умственных действий.

Все задания были направлены на проверку сформированности у студентов общепрофессиональных компетенций: способен осуществлять профессиональную деятельность в соответствии с нормативными правовыми актами в сфере образования и нормами профессиональной этики (ОПК-1); способен проектировать основные и дополнительные образовательные программы и разрабатывать научно-методическое обеспечение их реализации (ОПК-2); способен разрабатывать программы мониторинга результатов образования обучающихся, разрабатывать и реализовывать программы преодоления трудностей в обучении (ОПК-5); способен проектировать педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний и результатов исследований (ОПК-8) [5]. Исходя из обозначенных компетенций формулировка заданий была направлена на выявление уровня готовности студента к выполнению своих профессиональных обязанностей в контексте обозначенной проблемы.

Среди актуальных проблем, подлежащих проверке на демоэкзамене, были выделены следующие: формирование мотивации к учению и расширение кругозора; формирование критического мышления у школьников; современные методики, технологии и методы диагностирования достижений обучающихся; значение исторических аспектов развития математики и физики в повышении познавательной активности; организация проектной деятельности учащихся; приемы реализации принципа индивидуального подхода в обучении; формирование коммуникативной компетентности у школьников; формирование познавательных универсальных учебных действий и навыков рефлексии у учащихся; формирование исследовательских способностей; место демонстрационного эксперимента в процессе обучения физике; формирование логического мышления у школьников; сущность принципа цикличности при обучении физике; формирование теоретических обобщений при обучении физике; формирование пространственного мышления; возможности становления экспериментальных умений школьников; формы реализации дополнительного математического образования с учащимися; формирование у школьников метапредметных образовательных результатов и другие.

При подготовке к каждому фрагменту урока студенты руководствовались следующими общими указаниями:

— составить фрагмент конспекта урока/внеурочного занятия с использованием одной из обозначенных технологий для иллюстрации эффективности выбранных методов;

— показать роль и функции педагога в управлении познавательной деятельностью школьников;

— раскрыть особенности восприятия учащимися учебного материала по теме с учетом возрастных и индивидуальных различий;

— разработать инструменты оценочной деятельности для проведения текущего оценивания, рефлексии обучающихся;

— раскрыть воспитательный потенциал учебного занятия.

В каждом билете помимо вышеобозначенной учебной проблемы были выделены содержательные аспекты и указан класс, для которого следовало разработать фрагмент урока. Каждый студент подготовил для демонстрации фрагмента урока презентацию, раздаточные материалы, вопросы и задания для диагностики результатов, оборудование и материалы для проведения опытов. Во время демонстрации фрагмента студент-учитель обращался к учебной аудитории с вопросами, предлагал совместно обсудить и оценить информацию. После окончания фрагмента эксперты могли задавать вопросы.

Сама процедура сдачи такого экзамена для каждого студента занимала 25–30 минут. Оценку профессиональных компетенций в процессе проведения фрагмента урока давали приглашенные независимые эксперты из образовательных учреждений г.о. Самара.

В выступлениях независимых экспертов по результатам проведенных испытаний отмечен высокий уровень готовности будущих учителей к осуществлению своих трудовых профессиональных обязанностей: знание фактического материала по предмету, умения взаимодействовать с аудиторией, используя для этого необходимые дидактические ресурсы (презентации, таблицы и схемы, учебное оборудование и др.), продемонстрировали все студенты.

Ученики-волонтеры также высказались о своих впечатлениях от участия в эксперименте по проведению демонстрационного экзамена: "Было очень классно посмотреть, как ребята старшего курса проводят уроки, ведь это опыт, который поможет нам в дальнейшем, так как нам тоже предстоит это всё пройти"; "мне очень понравились работы каждого экзаменуемого, они все необычны и отличаются друг от друга. Я уверен, что их наработки помогут им в их будущей работе. Также я думаю, что детям по их методикам будет легко работать и понимать такие сложные науки, как математика и физика".

Отношение самих студентов-учителей к данной форме экзамена совпадает с мнением экспертов и обучающихся: "Волнительно. Интересно. Демонстрационный экзамен — отличный индикатор профессиональной подготовки. В процессе подготовки фрагмента урока были использованы все знания, рекомендации и опыт, полученный на лекциях и практических занятиях по методике обучения. Поддержка и совет преподавателей были самой главной опорой при подготовке к выступлению"; "демонстрационный экзамен было сдавать намного интереснее, чем в традиционном формате. Ведь здесь мы показываем и проверяем свои навыки будущей профессии — учителя. Хотелось, чтобы формат сдачи экзамена сохранился в дальнейшем!"; "в данном формате проведения экзамена можно продемонстрировать свои педагогические навыки и умения, проявить свое творческое начало, а также показать свои знания по дисциплинам. Очень понравилось проведение урока по математике и физике в объединенном формате в один день. Спасибо за предоставленный опыт".

Заключение

Анализируя опыт проведения демонстрационного экзамена по методическим дисциплинам, мы приходим к выводу о целесообразности такого формата с различных позиций. Студенты демонстрируют сформированный опыт переработки учебного содержания и его представления с учетом не только содержания учебного предмета, но и его интеллектуальной, общекультурной и воспитательной значимости. Преподаватели методических дисциплин в реальности оценивают сформированные у студентов в рамках аудиторных занятий компетенции, намечают перспективы дальнейшего совершенствования учебного процесса. Независимые эксперты на различных конкретных примерах наблюдают ситуации, в которых будущие учителя демонстрируют способность к разрешению методических вопросов и проблем, оценивают их с практической, профессиональной точки зрения, дают рекомендации.

В завершение нельзя не сказать о мнении руководителей Учебно-методического управления университета о признании демоэкзамена по методическому модулю положительным опытом, рекомендованным к его продолжению. Такой вид экзамена повышает у студентов мотивацию к обучению, ориентирует преподавателей на разработку новых оценочных материалов в связи с изменением организационных подходов к обучению. Важно и то, что сотрудничество с профессионалами помогает студентам, преподавателям и самому учебному заведению в целом более точно представлять себе требования, предъявляемые к программе обучения и его результатам.

Литература

[1] Ахтамова С.С. Оценка качества педагогического образования как условие его совершенствования: На материале естественно-математических дисциплин: дис. ... канд. пед. наук. Красноярск, 2002. 191 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15999413. EDN: https://elibrary.ru/nmczsj.

[2] Бодряков В.Ю., Воронина Л.В. Проблемы качества математического образования в педагогическом вузе и пути их решения // Педагогическое образование в России. 2018. № 2. С. 15–27. DOI: https://doi.org/10.26170/po18-02-02. EDN: https://elibrary.ru/yqdfrw.

[3] Аллагулова И.Н. Современные тенденции развития математического образования будущего педагога в вузе. // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=12558; https://elibrary.ru/item.asp?id=21471198. EDN: https://elibrary.ru/sbwfhb.

[4] Профессиональный стандарт "Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)". Приказ Минтруда России от 18.10.2013 № 544н. URL: https://fgosvo.ru/uploadfiles/profstandart/01.001.pdf?ysclid=lnrenmgd10172135738.

[5] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования — бакалавриат по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 22.02.2018 г. № 125. URL: https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/440305_B_3_16032018.pdf?ysclid=lnrev1tf8g619104568.

[6] Евелина Л.Н., Казеев А.Е. Об основных направлениях формирования оценки результатов деятельности студентов в условиях вузовской подготовки учителя математики // Самарский научный вестник. 2020. Т. 9, № 2 (31). С. 233–237. DOI: https://doi.org/10.17816/snv202303. EDN: https://elibrary.ru/gbmfyh.

[7] Мордкович А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: дис. ... д-ра пед. наук. Москва, 1986. 358 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=16160711. EDN: https://elibrary.ru/npqtub.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-18-23

Submited: 10.07.2023
Revised: 15.08.2023
Accepted: 30.10.2023

Galieva E.V.
Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russian Federation
E-mail: galieva@pgsga.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7011-5115
Evelina L.N.
Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russian Federation
E-mail: evelina@pgsga.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0147-6839

TEACHING METHODOLOGY — WHAT IS ITS ROLE IN EDUCATION AND HOW TO EVALUATE

ABSTRACT

The article describes the experience of conducting a demonstration exam for students of pedagogical universities on the example of two disciplines - methods of teaching mathematics and methods of teaching physics. The authors emphasize the importance of this form of examination to demonstrate to the student the possibility of solving practical problems as close as possible to the real conditions of future employment.

Key words: pedagogical education; subject training of future teachers; professional standard of a teacher; competence approach; demo exam.

Citation. Galieva E.V., Evelina L.N. Teaching methodology — what is its role in education and how to evaluate. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 18–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-18-23. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Elena V. Galieva — Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor, assistant professor of the Department of Physics, Mathematics and Methods of Teaching, Samara State University of Social Sciences and Education, 65/67, Maxim Gorky Street, Samara, 443099, Russian Federation.

Lyubov N. Evelina — Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor, assistant professor of the Department of Physics, Mathematics and Methods of Teaching, Samara State University of Social Sciences and Education, 65/67, Maxim Gorky Street, Samara, 443099, Russian Federation.

References

[1] Akhtamova S.S. Evaluation of the quality of pedagogical education as a condition for its improvement: based on the material of natural and mathematical disciplines: Candidate's of Pedagogical Sciences thesis. Krasnoyarsk, 2002, 191 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=15999413. EDN: https://elibrary.ru/nmczsj. (In Russ.)

[2] Bodryakov V.Yu., Voronina L.V. Problems of quality of mathematics education in pedagogical university and their solution. *Pedagogical Education in Russia*, 2018, no. 2, pp. 15–27. DOI: https://doi.org/10.26170/po18-02-02. EDN: https://elibrary.ru/yqdfrw. (In Russ.)

[3] Allagulova I.N. Modern trends in mathematical education of future teachers in high school. *Modern problems of science and education*, 2014, no. 2. Available at: https://science-education.ru/ru/article/view?id=12558; https://elibrary.ru/item.asp?id=21471198. EDN: https://elibrary.ru/sbwfhb. (In Russ.)

[4] Professional standard "Educator (pedagogical activity in the field of preschool, primary general, basic general, secondary general education) (educator, teacher)". Order of the Ministry of Labor of Russia as of 18.10.2013 № 544н. Available at: https://fgosvo.ru/uploadfiles/profstandart/01.001.pdf?ysclid=lnrenmgd10172135738. (In Russ.)

[5] Federal State Educational Standard of Higher Education — bachelor's degree program in the direction of 44.03.05 Pedagogical Education (with two training profiles). Order of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as of 22.02.2018 № 125. Available at: https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/440305_B_3_16032018.pdf?ysclid=lnrev1tf8g619104568. (In Russ.)

[6] Evelina L.N., Kazeev A.E. The main ways of students' activity assessment while training prospective math teachers at a university. *Samara Journal of Science*, 2020, vol. 9, no. 2 (31), pp. 233–237. DOI: https://doi.org/10.17816/snv202303. EDN: https://elibrary.ru/gbmfyh. (In Russ.)

[7] Mordkovich A.G. Professional and pedagogical orientation of special training of a mathematics teacher at a pedagogical institute: Doctoral of Pedagogical Scinces thesis. Moscow, 1986, 358 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=16160711. EDN: https://elibrary.ru/npqtub. (In Russ.)

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30

УДК 512.6

Дата: поступления статьи: 19.07.2023
после рецензирования: 21.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

М.В. Долгополов
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
К.Р. Жувонов
Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства", г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: qamariddin.j@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7561-0862

О ГОМОТОПИЧЕСКИ ПЛОТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ПОЛНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматриваются топологические и геометрические свойства множества сцепленных систем ξ и свойства его подпространств, являющихся гомотопически плотными. Представлены теоремы для метризуемого невырожденного континуума, определены условия для гомотопически плотного множества компакта и условия определения многообразия для конечномерного множества в зависимости от того, что оно не содержит гильбертов куб.

Ключевые слова: подпространство; топологические свойства множества; геометрические свойства множества; топологическое многообразие; гомотопически плотное подпространство; метризуемый невырожденный континуум; конечномерное множество; гильбертов куб.

Цитирование. Долгополов М.В., Жувонов К.Р. О гомотопически плотных подпространствах пространства полных сцепленных систем // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 24–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Михаил Вячеславович Долгополов — доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Камариддин Ризокулович Жувонов — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства", 100000, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39.

Введение

Хорошо известно, что многие замечательные топологические пространства возможно охарактеризовать с помощью краткого перечня их топологических свойств [1–9]. С начала 70-х годов прошлого века и по настоящее время были доказаны многие знаменитые теоремы о характеристиках многообразий гильбертова пространства и многообразий куба Гильберта. По сути методы доказательства были основаны на полноте рассматриваемых пространств. Доказательства некоторых теорем были реализованы различными методами в работах М. Бествины, Дж. Могильски, Дж. Уэста, Андерсона, Бессаги и Пельчинского [5], они кристаллизовали понятие поглощающего множества в многообразии гильбертова пространства. В недавних исследованиях также отмечается возросший интерес к теории кардинальных инвариантов и их поведению при различных ковариантных функторах.

В данной статье рассматриваются топологические и геометрические свойства множества сцепленных систем ξ и свойства его подпространств, являющихся гомотопически плотными. Введены определения, доказан ряд утверждений и сформулированы результаты в виде теорем для гомотопически плотного множества компакта и условия определения многообразия для конечномерного множества, не содержащего гильбертов куб.

1. Постановка задачи и вводные определения

Пусть X – топологическое пространство. Рассмотрим систему $\xi = \{F_\alpha : F_\alpha \subseteq X, \overline{F_\alpha} = F_\alpha, \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства.

Будем использовать ряд предварительных вводных определений, которые представим ниже.

Система ξ называется сцепленной, если любые два ее элемента имеют непустое пересечение.

Сцепленная система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется максимальной, если она обладает следующим свойством:

Если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ, то $A \in \xi$ [1]. (*)

Сцепленную систему ξ замкнутых подмножеств назовем полной [3], если для всякого замкнутого множества верно следующее условие:

Любая окрестность OF множества F содержит множество $\Phi \in \xi$ [3]. (**)

Заметим, что для всякой сцепленной системы ξ существует наименьшая полная сцепленная система (коротко, п.с.с.) ξ_f, содержащая ξ. Систему ξ_f, которую будем называть пополнением ξ, которая может быть построена путем присоединения к ξ всех замкнутых подмножеств $F \in X$, удовлетворяющих условию (**).

Пусть ξ – максимальная сцепленная система (м.с.с.) замкнутых подмножеств X. Подсистему $\xi' \subset \xi$ назовем базой ξ, если для любого $F \in \xi$ существует такое $\Phi \in \xi'$, что $\Phi \subset F$.

Нетрудно показать, что система ξ_H наименьших (по включению) элементов м.с.с. ξ является наименьшей базой ξ. Носителем м.с.с. ξ будем называть множество $H(\xi) = \bigcup \xi_H$.

Напомним, что суперрасширением топологического пространства X называется множество $\lambda(X)$, состоящее из всех максимальных сцепленных систем замкнутых подмножеств пространства X, а множество всех полных сцепленных систем (п.с.с.) замкнутых подмножеств пространства обозначается через $N(X)$.

Отметим, что всякая максимальная (по включении) сцепленная система замкнутых подмножеств (м.с.с.) является полной. Отсюда можем писать суперрасширение $\lambda(X)$ — это подпространство $N()$, т. е. $\lambda(X) \in N()$.

Пусть X – бесконечный компакт. Положим

$$\lambda_n X = \{\xi : \xi \in \lambda X, \, |H(\xi)| \leqslant n\}.$$

Заметим прежде всего, что $\lambda_1 X \sim X$ (отождествляем м.с.с. ξ с ее одноточечным носителем) и $\lambda_2 X = \lambda_1 X$, поскольку не существует м.с.с., носитель которой состоял бы ровно из двух точек. Однако при $n \geqslant 3$ все подмножества $\lambda_n X$ различны.

В самом деле, для любого $n \geqslant 3$ нетрудно построить м.с.с. $\xi \in \lambda X$, носитель которой состоит из n точек $x_1, ..., x_n$. Например, ξ можно задать с помощью такой базы:

$$\xi' = \{x_2, ..., x_n\} \bigcup \{\{x_1, x_k\} : k = 2, ..., n\}.$$

Нетрудно показать, что все подмножества $\lambda_n X$, $n \geqslant 3$, замкнуты в λX, следовательно, пространства $\lambda_n X$ являются компактами.

Множество всех полных сцепленных систем (п.с.с.) замкнутых подмножеств пространства X обозначается через $N(X)$.

Систему замкнутых подмножеств m пространства X назовем K-сцепленной, если пересечение любых K элементов системы m непусто.

Через $N_K(X)$ обозначим множество всех полных K-сцепленных систем (коротко, $n_k cc$) пространства X. Заметим, что пополнение x_f всякой K-сцепленной системы является $n_k CC$ и пространство $N_K(X)$ замкнуто в $N_(X)$. Следовательно, $N_K(X)$ является компактом [3].

В работе [3] показано, что для K-сцепленной системы континуума Пеано X пространства $N_K(X)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q. Для всякой полной сцепленной системы определим ее носитель как объединение минимальных по включению элементов. Следовательно, для любого натурального числа n можно определить подпространство $N^n(X)$ пространства $N(X)$, состоящее из всех п.с.с., носитель которых состоит не более чем из n точек, т. е. $N^n(X) = \{xON(x) : |\text{supp}x|Jn\}$.

Отметим, что всякая максимальная (по включении) сцепленная система замкнутых подмножеств (м.с.с.) является полной. Отсюда, можем писать суперрасширение $\lambda(X)$ – это подпространство $N(X)$, т. е. $\lambda(X) \subset N(X)$.

Заметим, что существует полная с.с. ξ, которая не является м.с.с.

Пример 1 [4]. Пусть $X = [-10, 10]$ и $\xi = \{[0, 2], [1, 3]\}$ — сцепленная система. Рассмотрим сцепленную систему $m = \{F \in \exp X : [0, 1] \subset F$ или $[1, 3] \subset F\}$. Сцепленная система m является полной, но не является максимальной сцепленной системой.

Из этого примера следует, что разность $N(X) \backslash \lambda(X) \neq \emptyset$.

Пусть X нормальное T_1-пространство. Для множества A пространства X положим $A^+ = \{m \in \in \lambda(X)$: для некоторого $M \in m$, $M \subset A\}$. Обозначим $L = A^+ : A$ замкнуто в $X\}$. Семейство всех объединений вверх направленных пересекающихся подсемейств в L порождает выпуклость в X. Эта выпуклость называется канонической выпуклостью в $\lambda(X)$, где X — хаусдорфовое компактное пространство.

Общая выпуклость определяется полутопами и выпуклыми оболочками каждых конечных множеств. Значит, в пространстве $\lambda(X)$ выпуклость порождается следующим образом: для м.с.с., $m_1, m_2, ..., m_k$. Эта выпуклость в $\lambda(X)$, положим $m \in co\{m_1, ..., m_k\}$, если $m \subset m_1 \bigcup m_2 \bigcup ... \bigcup m_k$. Эта выпуклость в $\lambda(X)$ удовлетворяет аксиоме отделимости S_4 и для нее верно следующее бинарное свойство:

Если D — конечное семейство попарно пересекающихся выпуклых множеств, то $\bigcap D \neq \emptyset$.

Это выпуклое семейство обозначим через $K\lambda(X)$. Очевидно, что $K\lambda(X)$ есть подпространство $\exp(\lambda X)$, состоящее из выпуклых подмножеств суперрасширения $\lambda(X)$, которое впервые определено Ван де Велом [2]. По определению, $K\lambda(X)$ состоит из точек $\xi^+ = \{\eta \in \lambda(X) : \xi \subset \eta\}$, где ξ — сцепленная система замкнутых подмножеств X.

В работе [3] А.В. Иванов доказал, что пространства $N(X)$ и $K\lambda(X)$ гомеоморфны. Гомеоморфизм $H : N(X) \to K\lambda(X)$ задается формулой $H(\xi_\lambda) = \xi^+$, т. е. $N(X) \cong K\lambda(X)$.

Пространство X естественно вкладывается в $\lambda(X)$: точка $x \in X$ отождествляется в м.с.с. $\xi_x = \{F \subset \subset X : x \in F\}$.

Как уже отмечалось, множество $\lambda(X)$ содержится в $N(X)$. Пусть $U_1, ..., U_k$, $V_1, V_2, ..., V_n$ — набор открытых подмножеств X.

Положим $O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n) \bigcap \lambda(X) = \ = O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n)$, где $O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n) = \{\xi \in \in N(X) :$ для любого $i = \overline{1, k}$ существует $F_i \in \xi$ такое, что $F_i \subset U_i$, и для любого $j = \overline{1, k}$ и любого $\Phi \in \xi$ пересечение $\Phi \bigcap V_j$. непусто$\}$. Совокупность подмножеств $N(X)$ вида $O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n)$ является открытой базой некоторой топологии на $N(X)$.

Таким образом, суперасширение $\lambda(X)$ – это подпространство $N(X)$. Из гомеоморфности $N(X)$ и $K\lambda(X)$ вытекает, что $\lambda(X) \subset K\lambda(X)$ и $K\lambda(X) \subset \exp \lambda(X)$.

В работе [2] доказано, что $K\lambda(X)$ – бикомпакт. Следовательно, $N(X)$ тоже бикомпактно.

В силу работы Ван де Вела [2] и А.В. Иванова [3] вытекает, что для любого метризуемого континуума X, пространства $N(X)$ и $K\lambda(X)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q.

Приведем следующие обозначения [5]:

$Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1; 1]_i$ — гильбертов куб, где отрезок

$W_i^{\pm} = \{(g_j)\} \in Q : g_j = \pm 1\}$ — I грань куба Q;

$BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$ — псевдограница куба Q;

$S = Q \backslash BdQ$ — псевдовнутренность куба Q; $S = (-1, 1)^{\omega}$

$S \approx \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство;

$\sum$ — линейная оболочка стандартного кирпича в гильбертовом пространстве ℓ_2;

$rintQ = \{x = (x_n) \in Q : |x_n| < t < 1$ для произвольного $n \simeq \bigcup\{[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]^{\omega} : n \in N\} \subset S$,

$BdQ \approx \sum$ (Андерсон в [5]);

$rintQ \approx BdQ$ (Бессага–Пелчинский [5]);

Q^f – подпространство куба Q, состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля.

ℓ_2^f – линейное подпространство гильбертова пространства ℓ_2 , состоящее из всех точек лишь конечного числа координат, которые отличны от нуля.

Пусть на компакте X имеется метрика p. Тогда топология суперрасширения $\lambda(X)$ порождается следующей метрикой $\bar{\rho}$:

$\bar{\rho}(\xi, n) = \sup\limits_{M \in \xi}\{\inf\limits_{N \in \eta} \rho_H(M, N)\}$, где ρ_H – расстояние Хаусдорфа в $\exp X$.

Напомним метрику ρ_H Хаусдорфа на компакте X: для $F_1, F_2 \in \exp X$ положим $\alpha(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0,\ F_1 \subset O_\varepsilon(F_2)$ или $F_2 \subset O_\varepsilon(F_1)\}$ $\rho_H(F_1, F_2) = \max\{\alpha(F_1, F_2); \alpha(F_2, F_1)\}$ — метрика Хаусдорфа.

Легко видеть, что $\bar{\rho}(\xi, \eta) \leqslant \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $B(F, \varepsilon) \in \eta$ для любого $F \in \xi$ и $B(X, \varepsilon) \in \eta$ для любого $\Phi \in \eta$, где $B(F, \varepsilon) = \{x : \rho(X, F) \leqslant \varepsilon\}$ – замкнутая ε-окрестность множества F в пространстве X.

Пусть $\bar{\rho}_H$ – метрика Хаусдорфа на $\exp \lambda(X)$, и $\bar{\rho}_H$ — ограничение $\bar{\rho}_H$ на подпространстве $K\lambda(X)$, которое мы отождествляем по сказанному, гомеоморфизму *с N(X).*

Для метризуемого континуума X по теореме Ван Милла [6] $\lambda(X)$ гомеоморфно Q. Следовательно, $\exp \lambda(X)$ тоже гомеоморфно Q. Заметим, что во всяком континууме Пеано существует выпуклая метрика, т. е. для любого замкнутого $F \subset X$ справедливо равенство

$$B(B(F, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = B(F, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon).$$

2. Предложение и теоремы

В работе [6] имеется следующее предложение.

Предложение [6]. Пусть $\mu = \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$ – конечная сцепленная система замкнутых множеств компакта X. Тогда система $M = \{F \in \exp X$: существует $\Phi_i \subset \mu, \Phi_i \subset F\}$ является полной сцепленной системой в X.

Для компакта X через $\lambda_\omega(X)$ обозначим ответственно подмножества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(X)$. Очевидно, что это подмножество – σ-компакт и всюду плотно в пространствах $\lambda(X)$.

Для бикомпакта X через $\lambda_\omega(X)$, $N_\omega(X)$ и $N^\omega(X)$ обозначим соответственно подмножества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(X)$, $\bigcup_{K=1}^{\infty} N_K(X)$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n(X)$. Очевидно, что эти подмножества σ-компакты и всюду плотны в пространствах $\lambda(X)$ и $N(X)$ соответственно.

Определение [7; 9]. Множество $B(Q)$ называется граничным множеством в Q, если $Q \backslash B(Q) \approx \ell_2$.

Заметим, что псевдограница BdQ гильбертова куба Q является граничным множеством куба Q. Используем обозначения, введенные в конце предыдущего п. 1.

Дополнительное определение [10]. Пространство X называется слабосчетномерным, если X является счетным объединением своих замкнутых конечномерных подпространств.

Определение [7]. Топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y, или Y-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Заметим, что для любого метризуемого невырожденного компакта X пространства $\lambda(X)$ и $N(X)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q. Для каждого $n \geqslant 3$ подпространства $\lambda_n(X)$ замкнуты в $\lambda(X)$. Пространства $\lambda(X) \backslash \lambda_n(X)$ $(n \geqslant 3)$ есть открытые подмножества компакта $\lambda(X)$.

С другой стороны, нами было замечено, что в этих случая компакт $\lambda(X)$ есть подмножество компакта $N(X)$, т. е. $N(X) \backslash \lambda(X)$ открыто в $N(X)$. Открытые подмножества гильберотова куба Q есть Q-многообразия. Следовательно, имеют место представленные ниже теоремы.

Теорема 1. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеем:
а) $N(X) \backslash \lambda_n(X)$ является Q-многообразием для любого $n \geqslant 2$,
б) $\lambda(X) \backslash \lambda_n(X)$ является Q-многообразием для любого $n \geqslant 2$.

Теорема 2. Для любого метризуемого невырожденного континуума имеет место:
а) $N(X) \backslash \lambda(X)$ является Q-многообразием;
б) $K\lambda(X) \backslash N(X)$ является Q-многообразием.

Напомним, что для компакта X непустой компакт $G \subseteq \exp X$ называется гиперпространством роста, если то, что $A \in G$, $B \in \exp X$, $A \subset B$ и каждая компонента связности множества B пересекается с А, это далее влечет $B \in G$ [7; 8].

Это пространство обозначается через $G(X)$. Если в этом определении опущены требования компоненты связности так, что соответствующее пространство называется гиперпространством вложения и обозначается через $G(X)$, то имеет место утверждение:
$G(X) \simeq Q \Leftrightarrow X -$ метризуемый континуум.

Пусть $\xi_1, \xi_2 \in N(X)$ и $\xi_1 \neq \xi_2$. Тогда без ограничения можно считать, что существует $F \in \xi_1$ и окрестность $OF \supset F$ такие, что ни один элемент ξ_2 не лежит в OF, т. е. для любого $\Phi \in \xi_2$ имеет место $\Phi \bigcap X \backslash OF \neq \emptyset$.

Таким образом, система $\xi_2' = \xi_2 \bigcup (X \backslash OF)$ сцепленная. Пусть η – м.с.с., содержащая ξ_2'. Имеем $\eta \in \xi_1^+$ и $\eta \notin \xi_2^+$, поскольку $F \in \xi_1$ и $F \in \eta$. Итог $\xi_1^+ \neq \xi_2^+$.

Замечание [8]. Для любых точек $\xi, \eta \in N(X)$ эквивалентны условия:
1) $\rho_H(\xi, \eta) \leqslant \varepsilon$;
2) $B(F, \varepsilon) \in \eta$ для любого $F \in \xi$ и $B(\Phi, \varepsilon) \in \xi$ для любого $\Phi \in \eta$.

Пусть X — метризуемый континуум. $A \subset X$, $intA \neq \emptyset$, $\bar{A} = A$. Тогда $A^+ = \{\xi \in \lambda(X) : A \in \xi\}$ есть Z-множество в $\lambda(X)$ [5], т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists f : \lambda(X) \to \lambda(X) \backslash A^+$ такое, что $\rho(\xi, f(\xi)) < \varepsilon$ для любого $\xi \in \lambda(X)$.

Множество $A \subset X$ называется гомотопически плотным в X [9], если существует гомотопия $h(x,t) : X \times [0,1] \to X$ такая, что $h(x,0) = id_X$ и $h(X,(0,1]) \subset A$.

Теорема 3. Для любого пеановского континуума X подпространство $N(X) \backslash \lambda_\omega(X)$ гомотопически плотно в $N(X)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \lambda(X)$. Для числа $t \in [0,1]$ и замкнутого множества $A \in \exp X$ положим $D(A,t) = \{x \in X : \rho(x,A) \leqslant t\}$. Мы будем считать, что $diam_\rho X \leqslant 1$. Очевидно, что для любого $t \in [0,1]$ множество $D(A,t) \in \exp X$.

Известно, что ξ есть м.с.с., состоящих из замкнутых множеств, т. е. $\xi = \{A_\alpha : A_\alpha \in \exp X,\ \alpha-$ индекс$\}$. Для ξ положим $\xi(t) = \{D(A_\alpha, t) : A_\alpha \in \xi\}$. Теперь построим гомотопию $h(\xi,t) : N(X) \times [0,1] \to N(X)$, полагая $h(\xi,t) = \xi(t)$.

Заметим, что:

а) если $\xi \in N(X)$, то $\xi(t) \in N(X)$;

б) если $\xi \in \lambda(X)$, $\xi(t) \in N(X)$ и $\xi(t) \bar{\in} \lambda_\omega(X)$;

в) если $\xi \in \lambda(X)$, то $\xi(0) \in \lambda(X)$.

Значит, подмножество $\lambda_{\nabla\omega}(X) \subset N(X)$ гомотопически плотно в $N(X)$. Теорема 3 доказана.

Используя результаты работ [7–9], доказываются следующие теоремы 4 и 5.

Теорема 4. Для любого метризуемого невырожденного компакта X подпространство $\lambda_\omega(X)$ является граничным множеством компакта $\lambda(X)$.

Теорема 5. Для любого метризуемого невырожденного компакта X подпространство $\lambda(X) \backslash \lambda_\omega(X)$ является полным сепарабельным бесконечной размерности метрическим AR-пространством.

3. Результаты для метризуемого невырожденного континуума

В результате для метризуемого невырожденного континуума сформулированы следующие теоремы.

Теорема 6. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

а) $\lambda_\omega(X)$ является гомотопически плотным множеством компакта $\lambda(X)$;

б) $N_\omega(X)$ является гомотопически плотным множеством компакта $N(X)$;

в) $N_\omega(X)$ является гомотопически плотным множеством компакта $K\lambda(X)$.

Для любого слабосчетномерного компакта X пространств $\lambda_\omega(X)$ слабосчетномерно. Пространства ℓ_2^f и Q^f слабосчетномерны [5].

Теорема 7. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеем:

а) $N(X) \backslash N_n(X)$ — гомотопически плотное подмножество для любого $n \geqslant 2$;

б) $\lambda(X) \backslash \lambda_n(X)$ является гомотопически плотным подмножеством для любого $n \geqslant 2$;

в) $N(X) \backslash N^n(X)$ является гомотопически плотным подмножеством для любого $n \geqslant 2$.

Теорема 8. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

а) пространство $N^\omega(X)$ является $\sum$-многообразием;

б) пространство $N_\omega(X)$ является $\sum$-многообразием, если $N_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q;

в) пространство $\lambda_\omega(X)$ является $\sum$-многообразием, если $\lambda_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q.

Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

а) пространство $N^\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если X конечномерно;

б) пространство $\lambda_\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если X конечномерно;

в) пространство $\lambda_\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если $\lambda_\omega(X)$ не содержит гильбертов куб Q;

г) пространство $N_\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если $N_\omega(X)$ не содержит гильбертов куб Q.

Заключение

В заключение подведем итог, что на основе доказательства свойств топологических и геометрических подпространств множеств сцепленных систем, являющихся гомотопически плотными, сформулированы теоремы для метризуемого невырожденного континуума, определены условия для гомотопически плотного множества компакта и условия определения многообразия для конечномерного множества в зависимости от того, что оно не содержит гильбертов куб.

В доказательствах и теоремах использованы следующие утверждения. Для любого метризуемого невырожденного континуума подпространства полных сцепленных систем гомеоморфны гильбертову кубу. При этом открытые подмножества гильбетрова куба есть Q-многообразия. Следовательно, определяются теоремы о соответствии подмножеств подпространств полных сцепленных систем Q-многообразию для любого количества точек носителя от двух.

Для любого пеановского континуума подпространство полных сцепленных систем гомотопически плотно во введенном классе множества всех полных сцепленных систем замкнутых подмножеств топологического пространства. Определены теоремами подпространство – граничное множество компакта и подпространство – полное сепарабельное бесконечной размерности метрическое пространство.

Литература

[1] Van Mill J. Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes // *Fundamenta Mathematicae*. 1980. Vol. 107, Number 3. Pp. 201–224. Available at: https://bibliotekanauki.pl/articles/1363946.

[2] Van de Vel M. Convex Hilbert cubes in superextensions // Topology and its Applications. 1986. Vol. 22, Issue 3, pp. 255–266. DOI: https://doi.org/10.1016/0166-8641(86)90024-6.

[3] Иванов А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сибирский математический журнал. 1986, Т. 27, № 6, С. 95–110. URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj7212.

[4] Beshimov R.B., Mukhammadiyev F.G. Some cardinal properties of complete linked systems with compact elements and absolute regular spaces // Mathematica Aeterna. 2013. Vol. 3, No. 8. Pp. 625–633. URL: https://www.longdom.org/articles/some-cardinal-properties-of-complete-linked-systems-with-compact-elements-and-absolute-regular-spaces.pdf.

[5] Bessaga C., Pelczynski A. Selected Topics in Infinite-dimensional Topology. Monografie matematyczne. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publisher, 1975, Vol. 58, 353 p. URL: https://onlybooks.org/selected-topics-in-infinite-dimensional-topology-monografie-matematyczne-no-58.

[6] Makhmud T. Cardinal-valued invariants of spaces of linked systems. Candidate thesis in Physics and Mathematics. Moscow State University, Moscow, 1993, 87 p.

[7] Богатый С.А., Федорчук В.В. Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия // Итоги науки и техники. Сер.: Алгебра. Топология. Геометрия. 1986. Т. 24. С. 195–270. URL: https://www.mathnet.ru/rus/inta115.

[8] Жураев Т.Ф. Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями некоторых ковариантных функторов: дис. ... д-ра физ-мат. наук. Ташкент: Институт математики АН Республики Узбекистан, 2022. 198 с.

[9] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[10] Федорчук В.В. Слабо бесконечномерные пространства // Успехи математических наук. 2007, Т. 62, Вып. 2 (374). С. 109–164. DOI: https://doi.org/10.4213/rm6212.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30

Submited: 19.07.2023
Revised: 21.08.2023
Accepted: 30.10.2023

M.V. Dolgopolov
Samara State Technical University , Samara, Russian Federation
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
K.R. Zhuvonov
Tashkent National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers", Tashkent, Uzbekistan
E-mail: qamariddin.j@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7561-0862

ON HOMOTOPICALLY DENSE SUBSPACES OF THE SPACE OF COMPLETE LINKED SYSTEMS

ABSTRACT
This article discusses the topological and geometric properties of the set of coupled systems and the properties of its subspaces that are homotopically dense. Theorems for a metrizable nondegenerate continuum are presented, conditions for a homotopically dense set of a compact set and conditions for determining a manifold for a finite-dimensional set depending on the fact that it does not contain a Hilbert cube are determined.

Key words: subspace; topological properties of a set; geometric properties of a set; topological variety; homotopy dense subspace; metrizable non-degenerate continuum; finite-dimensional set; Hilbert cube.

Citation. Zhuvonov K.R., Dolgopolov M.V. On homotopically dense subspaces of the space of complete linked systems. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 24–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Mikhail V. Dolgopolov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.
Qamariddin R. Zhuvonov — senior lecturer of the Department of Higher Mathematics, Tashkent National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers", 39, Kari Niyazov Street, Tashkent, 100000, Republic of Uzbekistan.

References

[1] Van Mill J. Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes. *Fundamenta Mathematicae*, 1980, vol. 107, no. 3, pp. 201–224. Available at: https://bibliotekanauki.pl/articles/1363946.

[2] Van de Vel M. Convex Hilbert cubes in superextensions. *Topology and its Applications*, 1986, vol. 22, issue 3, pp. 255–266. DOI: https://doi.org/10.1016/0166-8641(86)90024-6.

[3] Ivanov A.V. A space of complete linked systems. *Siberian Mathematical Journal*, 1986, vol. 27, issue 6, pp. 863–875. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00970004. (In English; original in Russian)

[4] Beshimov R.B., Mukhammadiyev F.G. Some cardinal properties of complete linked systems with compact elements and absolute regular spaces. *Mathematica Aeterna*, 2013, vol. 3, no. 8, pp. 625–633. Available at: https://www.longdom.org/articles/some-cardinal-properties-of-complete-linked-systems-with-compact-elements-and-absolute-regular-spaces.pdf.

[5] Bessaga C., Pelczynski A. Selected Topics in Infinite-dimensional Topology. Monografie matematyczne. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publisher, 1975, Vol. 58, 353 p. URL: https://onlybooks.org/selected-topics-in-infinite-dimensional-topology-monografie-matematyczne-no-58.

[6] Makhmud T. Cardinal-valued invariants of spaces of linked systems. Candidate thesis in Physics and Mathematics. Moscow State University, Moscow, 1993, 87 p.

[7] Bogatyi S.A., Fedorchuk V.V. Theory of retracts and infinite-dimensional manifolds. *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 44, issue 3, pp. 372–423. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01676870. (In English; original in Russian)

[8] Zhuraev T.F. Geometric and topological properties spaces which value some covariant functors: Doctoral of Physical and Mathematical Sciences thesis. Tashkent: Institut matematiki imeni V.I. Romanovskogo AN Respubliki Uzbekistan, 198 p. (In Russ.)

[9] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[10] Fedorchuk V.V. Weakly infinite-dimensional spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 2007, vol. 62, issue 2, pp. 109–164. DOI: https://doi.org/10.1070/RM2007v062n02ABEH004397. (In English; original in Russian)

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36

УДК 514.76; 517.1

Дата: поступления статьи: 24.07.2023
после рецензирования: 31.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

М.В. Долгополов
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
Т.Ф. Жураев
Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-5379-3862

О ЕВКЛИДОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПОДПРОСТРАНСТВОМ ПРОСТРАНСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С КОНЕЧНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОМ КОМПАКТЕ РАЗМЕРНОСТИ НУЛЬ

АННОТАЦИЯ

В статье доказывается, что подпространство $P_{n,n-1}(X)$ всех вероятностных мер $P(X)$, носители которых состоят ровно из n точек, является $(n-1)$-мерным топологическим многообразием. Выделяется ряд подпространств пространства всех вероятностных мер, имеющих бесконечную размерность в смысле dim, являющихся многообразиями. Рассмотрены отдельные подмножества бесконечного компакта X, на котором пространство вероятностных мер гомотопически плотно во всем пространстве. Сформулированы и доказаны три теоремы о топологических свойствах многообразий — подпространств гомотопически плотных в пространстве вероятностных мер с конечными носителями на компакте, рассмотрены частные случаи конечного и бесконечного компакта.

Ключевые слова: подпространство; вероятностная мера; носитель; топологическое многообразие; компакт; функтор; симплекс; гомотопия; подпространство гомотопически плотное; размерность.

Цитирование. Долгополов М.В., Жураев Т.Ф. О евклидовых многообразиях, являющихся подпространством пространства вероятностных мер с конечными носителями на бесконечном компакте размерности нуль // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. T. 29, № 3. С. 31–36. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Михаил Вячеславович Долгополов — доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, Российская Федерация, 443100, Самара ул. Молодогвардейская, 244.
Турсунбой Файзиевич Жураев — доктор физико-математических наук, и. о. профессора, кафедра общей математики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 700100, Узбекистан, г. Ташкент, пр. Бунедкор, 27.

Введение

Настоящее исследование авторов и данная статья посвящены изучению топологии пространств вероятностной меры. Эта тема находится на стыке двух областей — бесконечномерной топологии и теории меры [1; 2]. Причина, по которой бесконечномерная топология представляет интерес при изучении пространств вероятностных мер, заключается в том, что пространства мер, которые имеют дополнительную выпуклую структуру, являются идеальными "естественно" возникающими бесконечномерными объектами для применения мощных методов бесконечномерной топологии [2]. С 1990-х годов пространства вероятностных мер изучались в рамках категории компактов, где проблемы топологической классификации проявлялись весьма элементарно: пространство вероятностных мер компакта рассматривалось гомеоморфно либо конечномерному для компакта конечного, либо бесконечно-мерному объемному кубу. Помимо компактности было даже не всегда ясно, что следует рассматривать как пространство вероятностных мер на компакте. Исследования последних лет показывают развитие некоторых новых подходов. В [3] отождествили евклидовы пространства с подпространствами счетного бесконечного произведения системы подпространств. Тогда объединенное множество имеет две естественные топологии, а именно: слабую топологию (прямой предел) относительно последовательных включений подпространств и относительную топологию, унаследованную от топологии счетного бесконечного произведения системы подпространств. Также в [3] приведено несколько характеристик топологических многообразий, смоделированных на (R^∞, σ)- или (Q^∞, Σ)- многообразиях, которые применяются к битопологическим группам, битопологическим линейным пространствам, пространствам мер, пространствам отображений, гиперпространствам.

В работе [4] развита теория классов бесконечномерных банаховых многообразий мер в абстрактном измеримом пространстве, используя диаграммы, которые “сбалансированы” между функциями плотности и логарифмической плотности. Отмечено, что многообразия сохраняют многие особенности конечномерной информационной геометрии. Важен выбор меры μ. Работа [5] рассматривает сохранение подфункторами функтора вероятностных мер пространств счетной размерности и экстензорные свойства подпространств пространства вероятностных мер. В [6] изучены гомотопически плотные подпространства пространства вероятностных мер, определяемых бесконечным метрическим компактным множеством, которые являются конечномерными и бесконечномерно-размерными топологическими многообразиями. Рассматривая различные свойства подпространств пространства вероятностных мер, доказан ряд свойств соответствия и ряд условий эквивалентности.

Также в работе [7] авторы доказали ряд утверждений, что действие компактной группы G, определяемой стратифицированным пространством X, непрерывно для пространства $Z(X)$, являющегося стратифицированным пространством, содержащим самостратифицированное пространство X как замкнутое подмножество. Доказан эквивариантный аналог некоторых результатов Р. Коти относительно $A(N)R(S)$-пространств. Также показано, что орбитальное пространство $Z(X)/G$ под действием группы G является пространством S.

В работе [8] рассмотрены гомотопически плотные свойства и топологические и экстензорные свойства одноточечной компактификации и компактификации по Александрову для локально компактного пространства и для некоторых подпространств пространства вероятностных мер.

В данной статье сформулированы и доказаны теоремы о топологических свойствах многообразий, являющихся подпространством пространства вероятностных мер, — подпространств гомотопически плотных в пространстве вероятностных мер с конечными носителями на компакте, рассмотрены частные случаи конечного и бесконечного компакта.

1. Подпространства пространства вероятностных мер с конечными носителями на компакте

Для компактов X имеется простая топологическая классификация пространств $P(x)$ всех вероятностных мер. В случае конечного n-точечного пространства $X = \{n\}$ точки μ пространства $P(n) = P_n(n)$ являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака:

$$\mu = m_0\delta(0) + m_1\delta(1) + ... + m_{n-1}\delta(n-1).$$

Поэтому они естественно отождествляются с точками $(n-1)$-мерного симплекса σ^{n-1}. При этом меры Дирака $\delta(i)$ образуют вершины симплекса, а массы m_i, помещенные в точки i, являются барицентрическими координатами меры μ. Таким образом, компакт $P(n)$ аффинно гомеоморфен симплексу σ^{n-1} [9].

В случае бесконечного компакта X пространство $P(X)$ также является компактом (функтор P сохраняет вес). Далее, оно содержит симплексы сколь угодно большого числа измерений, поэтому оно бесконечномерно. По теореме Кэли [1] выпуклый компакт $P(X) \subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в ℓ_2. Следовательно, по теореме Келлера компакт $P(X)$ как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в ℓ_2, гомеоморфен гильбертову кубу $Q = I^{\chi_0}$.

С другой стороны, пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на компакте X называется множеством всех регулярных борелевских вероятностных мер на X, снабженным слабейшей из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u : C(X) \to R$, переводящей меру μ в $\mu(U)$ (U — открытое в X множество).

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $supp(\mu)$ — это наименьшее из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$, т. е. $supp(\mu) = \bigcap\{A : A = \bar{A}, \mu \in P(A)\}$;

$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp\mu| \leqslant n\}-$ множество всех мер μ с не более чем n носителями.

Определение [1]. Топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y, или Y-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Определение [1]. Подмножество $A \subset X$ пространства X называется гомотопически плотным в X, если существует гомотопия $h(x,t) : X \times [0,1] \to X$ такая, что $h(x,0) = id_X$ и $h(x,(0,1]) \subset A$.

Для бесконечного (любого) компакта X и любого $n \in N$ функтора P_n положим $P_{n,n-1}(X) = P_n(X)\ P_{n-1}(X)$, где $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\mathrm{supp}\mu| \leqslant n\}$ [10].

Теорема 1. Для любого компакта X подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$ является $(n-1)$-мерным многообразием и гомотопически плотным в $P_n(X)$.

Доказательство. Пусть X — произвольный компакт. Возможны два случая.

1^0. X — конечное множество. Для определенности пусть X состоит из n точек. Тогда $P_n(X) = P_n(\tilde{n}) = \sigma^{n-1} - (n-1)$-мерный стандартный симплекс, т. е. $T(x_1, x_2, ..., x_n) = \sigma^{n-1}$ симплекс с вершинами в точках x_i. А подпространство $P_{n,n-1}(\tilde{n}) = T(x_1, x_2, ..., x_n) \backslash F_r(T(x_1, x_2, ..., x_n)) = intT(x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е. $P_{n,n-1}(\bar{n}) = T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ — внутренность симплекса. Внутренность $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ гомеоморфна пространству R^{n-1} [11], т. е. $P_{n,n-1}(\bar{n})$ есть $(n-1)$-мерное многообразия R^{n-1}.

2^0. X — бесконечной компакт. Известно, что пространство $P_n(X)$ состоит из линейной комбинации мер Дирака следующего вида:

$$\mu = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n, \tag{1.1}$$

где δ_{x_i} — меры Дирака, $x_i \in X$, $0 \leqslant m_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$.

Рассмотрим подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$. Очевидно, что $P_{n,n-1}(X)$ открыто в $P_n(X)$. Возьмем произвольную точку $\mu \in P_{n,n-1}(X)$, тогда

$$\mu = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n,$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ — взаимно различны, т. е. $|x_1, x_2, ..., x_n| = n$ и $m_i > 0$, $m_i < 1$. Отсюда $\mu \in T^0(x_1, x_2, ..., x_n) = intT(x_1, x_2, ..., x_n)$ — внутренность симплекса. Известно, что $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ гомеоморфно пространству R^{n-1}. В качестве $O(\mu)$ отождествляем множеству $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е. каждая точка пространства $P_{n,n-1}(X)$ имеет окрестность, гомеоморфную R^{n-1}. Значит, пространство $P_{n,n-1}(X)$ есть $(n-1)$-мерное многообразие.

Теперь покажем, что подпространство $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Искомую гомотопию $h(\mu,t) : P_n(X) \times [0,1] \to P_n(X)$ построим, полагая $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu)$, где $t \in [0,1]$, $\mu \in P_n(X)$ и $r(\mu) : P(X) \to P(supp\mu)$ — барицентрически открытое отображение [11]. Если $t = 0$, то $h(\mu,0) = (1-0)\mu + 0 \cdot r(\mu) = \mu$, т. е. $h(\mu,0) = id_{P_n(X)}$.

Если $t \in (0,1]$, то $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu) \in P_n(X)$ $supph(\mu,t)$ состоит ровно из n-различных точек, т. е. $h(\mu,t) \in P_{n,n-1}(X)$. Это означает, что $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Теорема 1 доказана.

Если X — бесконечный компакт, тогда для компакта X существует счетное собственное всюду плотное подмножество, т. е. $|A_0| = \chi_0$ и $\bar{A} = X$.

Пусть A имеет вид $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ т.е. $A = \{x_i : i \in N, x_i \in X\}$.

Для любого $n \in N$ положим

$$A_n = \{x_i : x_i \in A,\ i = \overline{1,n}\}.$$

В этом случае имеется следующая цепочка подпространств A_i, для которых имеют место:

а) A_i={точка};

б) A_n состоит из n точек компакта X, т.е. $|A_n| = n$;

в) $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$;

г) $\bar{A}_n = A_n$ т.е. A_n замкнуто и компактно;

д) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Из свойств всюду плотных подмножеств бесконечных компактов и свойств функтора P вероятностных мер подпространство $P(A)$ всюду плотно в $P(X)$ и $P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

С другой стороны, множество $P_n(A)$ тоже всюду плотно в $P_n(X)$ и $P_n(A) = P_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_n(A_k)$. Рассмотрим множество

$$P_n(X)\backslash P_n(A) = P_n(X)\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} P_n(A_k).$$

Для нормального функтора P_n, компакта X и любого непустого $A \subset X, A \neq X$ из замкнутого подмножества $A \subset X$ имеет место равенство:

$$P_n(X\backslash A) = P_n(X)\backslash S_{P_n}(A). \tag{1.2}$$

Здесь через $S_{P_n}(A)$ обозначаем множество $\{\mu \in P_n(X) : supp_{P_n}(\mu)\bigcap A \neq \emptyset\}$.

Пусть X — бесконечный компакт и $x_0 \in X$. Рассмотрим подмножество $S_P(x_0) = \{\mu \in P(X) : supp\mu\bigcap x_0 \neq \emptyset\}$. Очевидно, что $S_P(x_0)$ всюду плотно в $P(X)$. Это подмножество является ℓ_2 многообразием. Следовательно, в силу выпуклости $S_P(x_0)$ гомеоморфно ℓ_2. Заметим, что любое компактное подмножество $S_P(x_0)$ является Z-множеством в $S_P(x_0)$ [11].

Для различных точек x_0 и x_1 компакта X пересечение $S_P(x_0)$ и $S_P(x_1)$ тоже гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2. Если мы рассмотрим счетное подмножество $\{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$ бесконечного компакта X, то пересечение $\bigcap_{i=0}^{\infty} S_P(x_i)$ является всюду плотным выпуклым подмножеством компакта $P(X)$. Следовательно, подпространство $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_P(x_i)$ тоже гомеоморфно в ℓ_2 [9].

С другой стороны, для любого замкнутого подмножества $A \subset X$, отличного от X, подпространство $S_P(A)$ гомеоморфно ℓ_2 [11]. Очевидно, что $P(A) \subset S_P(A)$. Следовательно, $P(A)$ есть Z-множество в $S_P(A)$ и $S_P(A)\backslash P(A)$ гомеоморфно ℓ_2.

Теорема 2. Для любого компакта X и любого замкнутого подмножества $A \subset X$, отличного от X, подпространство $S_{P_n}(A)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$.

Доказательство. Пусть X — произвольный компакт и $A \subset X$,A замкнуто в X, $A \neq X$.
Возможны два случая:
1. Компакт X конечен;
2. Компакт X бесконечен.

Рассмотрим отдельно 1. Если X конечное n-элементное множество, то $P_n(X)$ аффинно гомеоморфно симплексу σ^{n-1}.

В этом случае множеств $S_{P_n}(A)$ не пусто и выпукло. Следовательно, является гомотопически плотно в $S_{P_n}(A)$.

2. Пусть X бесконечно и $A \neq X$. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P_n(X) \times [0, 1] \to P_n(X)$ строим, полагая $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0$, где μ_0 — фиксированная точка множества $P_n(X\backslash A)$. Например, мера Дира δ_{x_0} в точке $x_0 \in X\backslash A,\ t \in [0, 1]$.

Если $t = 0$, то $h(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu$, т. е. $h(\mu, 0) = id_{P_n(X)}$.

Если $t \in (0, 1)$, то $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \mu_0$. В этом случае носитель меры $h(\mu, t)$ содержит точки $\mathrm{supp}\mu$ и точки $\mathrm{supp}\mu$, т. е. $\mathrm{supp}h(\mu, t) \supseteq \mathrm{supp}\mu \bigcup \mathrm{supp}\mu_0$. Это означает, что $h(\mu, t) \in S_{P_n}(A)$.

Следовательно, множество $S_{P_n}(A)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для любого бесконечного компакта X и его замкнутого подмножества A, отличного от X, подпространство $P(X)\backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Доказательство. Пусть X — бесконечный компакт и $A \subset X$, $A = \bar{A}$, $A \neq X$. В этом случае $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу $Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1, 1]_i$, т. е. $P(X) \simeq Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1, 1]_i$, где $[-1, 1]$ отрезок в R. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P(X) \times [0, 1] \to P(X)$ строим, полагая

$$h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0,$$

где $\mu \in P(X)$, $\mu_0 \in P(X)\backslash P(A)$.
Если $\mu \in P(X)$ и $t = 0$, то $h(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu$, т. е. $h(\mu, 0) = id_{P_n(X)}$.
Если $t \in (0, 1]$, тогда $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \mu_0$. Носитель меры $h(\mu, t)$ содержит целиком отрезок $[0; 1]$ и не лежит в множестве A. Следовательно, мера $h(\mu, t)\bar{\in} P(A)$. Отсюда, мера $h(\mu, t) \in P(X)\backslash P(A)$. Это означает, что подпространство $P(X)\backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$. Теорема 3 доказана.

Следствие. Для любого компакта X и любой точки $x_0 \in X$ верно:
а) $S_{P_n}(x_0)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$;
б) подпространство $P(X)\backslash \delta_{x_0}$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Заключение

В заключение отметим сформулированные и доказанные в данной статье теоремы о топологических свойствах многообразий — подпространств гомотопически плотных в пространстве вероятностных мер с конечными носителями на компакте.

1. Для любого компакта X подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$ является $(n-1)$-мерным многообразием и гомотопически плотным в $P_n(X)$.

2. Для любого компакта X и любого замкнутого подмножества $A \subset X$, отличного от X, подпространство $S_{P_n}(A)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$.

3. Для любого бесконечного компакта X и его замкнутого подмножества A, отличного от X, подпространство $P(X) \backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Литература

[1] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[2] Banakh T.O., Radul T.N. Topology of spaces of probability measures // Sbornik: Mathematics, 1997. Vol. 188, Issue 7, Pp. 973–995. DOI: http://doi.org/10.1070/sm1997v188n07ABEH000241.

[3] Banakh T., Sakai K. Characterizations of (R^∞, σ)- or (Q^∞, Σ)-manifolds and their applications // Topology and its Applications. 2000. Vol. 106, Issue 2. Pp. 115–134. DOI: https://doi.org/10.1016/S0166-8641(99)00081-4.

[4] Newton Nigel J. Infinite-dimensional statistical manifolds based on a balanced chart // Bernoulli. 2016. Vol. 22, № 2. Pp. 711–731. DOI: https://doi.org/10.3150/14-BEJ673.

[5] Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O. Some values subfunctors of functor probalities measures in the categories Comp. // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2018, Т. 24, № 2. С. 28–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-28-32.

[6] Zhuraev T.F. [et al.]. On Some Homotopically Dense Subspaces of the Space P(X) of Probability Measures Defined by an Infinite Metric Compact Set X // Journal of Pharmaceutical Negative Results. Volume 13 (Special Issue 3). 2022. Pp. 1768–1773. DOI: http;//doi.org/10.47750/pnr.2022.13.S03.270.

[7] Zhuraev T.F., Dolgopolov M.V. Equivariant properties of the space Z(X) for a stratifiable space X // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2023. Т. 29, № 2. С. 40–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47.

[8] Zhuraev T.F., Zhuvonov K.R., Gaimnazarov O.G., Anorboev M.M., Saitmuratov U.N. Homotopically dense properties of the Alexandrov compactification of some subspaces of the space of probability measures // European Chemical Bulletin. 2023, Vol. 12, Special Issue 6, Pp. 2343–2355. URL: https://www.eurchembull.com/uploads/paper/5d4861149c35a43d2bb1a6a141330bea.pdf.

[9] Жураев Т.Ф., Турсунова З.О. О некоторых геометрических и топологических свойствах вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте // *Uzbek Mathematical journal*. 2016. № 1. С. 39–48. URL: https://drive.google.com/file/d/1K2CCKVaxGc-Q7F8zHxSeVIIHRbXfVgV2/view.

[10] Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: МГУ, 1989. 90 с.

[11] Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успехи математических наук. 1991. Т. 46, Вып. 1 (277). С. 41–80. URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm4568.

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36

Submited: 24.07.2023
Revised: 31.08.2023
Accepted: 30.10.2023

M.V. Dolgopolov
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
T.F. Zhuraev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-5379-3862

ON EUCLIDEAN MANIFOLDS BEING A SUBSPACE OF THE SPACE OF PROBABILITY MEASURES WITH FINITE SUPPORTS TO A CERTAIN INFINITE COMPACT SET OF DIMENSION ZERO

ABSTRACT

In this short communication we prove that the subspace $P_{n,n-1}(X)$ of all probability measures $P(X)$, whose supports consist of exactly n points is an $(n-1)$-dimensional topological manifold. A number of subspaces of the space of all probability measures having infinite dimension in the sense of dim, which are manifolds, are identified. We also consider individual subsets of the infinite compact set X, on which the space of probability measures is homotopy dense in the entire space. Three theorems on the topological properties of manifolds—subspaces of homotopy dense probability measures in the space of probability measures with finite supports on a compactum—are formulated and proven, and special cases of finite and infinite compactums are considered.

Key words: subspace; probability measure; carrier; topological manifold; compact; functor; simplex; homotopy; homotopically dense subspace; dimension.

Citation. Dolgopolov M.V., Zhuraev T.F. On euclidean manifolds being a subspace of the space of probability measures with finite supports to a certain infinite compact set of dimension zero. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 31–36. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Mikhail V. Dolgopolov — associate professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Tursunboy F. Zhuraev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, 27, Bunyodkor Street, Tashkent,700100, Uzbekistan.

References

[1] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[2] Banakh T.O., Radul T.N. Topology of spaces of probability measures. *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, issue 7, pp. 973–995. DOI: http://doi.org/10.1070/sm1997v188n07ABEH000241.

[3] Banakh T., Sakai K. Characterizations of (R^∞, σ)- or (Q^∞, Σ)-manifolds and their applications. *Topology and its Applications*, 2000, vol. 106, issue 2, pp. 115–134. DOI: https://doi.org/10.1016/S0166-8641(99)00081-4.

[4] Newton Nigel J. Infinite-dimensional statistical manifolds based on a balanced chart. *Bernoulli*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 711–731. DOI: https://doi.org/10.3150/14-BEJ673.

[5] Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O. Some values subfunctors of functor probalities measures in the categories Comp. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 28–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-28-32.

[6] Zhuraev T.F. et al. On Some Homotopically Dense Subspaces of the Space P(X) of Probability Measures Defined by an Infinite Metric Compact Set X. *Journal of Pharmaceutical Negative Results. Volume 13 (Special Issue 3)*, 2022, pp. 1768–1773. DOI: http;//doi.org/10.47750/pnr.2022.13.S03.270.

[7] Zhuraev T.F., Dolgopolov M.V. Equivariant properties of the space Z(X) for a stratifiable space X. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 40–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47.

[8] Zhuraev T.F., Zhuvonov K.R., Gaimnazarov O.G., Anorboev M.M., Saitmuratov U.N. Homotopically dense properties of the Alexandrov compactification of some subspaces of the space of probability measures. *European Chemical Bulletin*, 2023, vol. 12, special issue 6, pp. 2343–2355. Available at: https://www.eurchembull.com/uploads/paper/5d4861149c35a43d2bb1a6a141330bea.pdf.

[9] Zhuraev T.F., Tursunova Z.O. On some geometric and topological properties of probability measures defined in an infinite compact. *Uzbek Mathematical Journal*, 2016, no. 1, pp. 39–48. Available at: https://drive.google.com/file/d/1K2CCKVaxGc-Q7F8zHxSeVIIHRbXfVgV2/view. (In Russ.)

[10] Zhuraev T.F. Some geometric properties of the functor of probabilistic measures and its subfunctors: Candidate of Physical and Mathematical Sciences thesis. Moscow: MGU, 1989, 90 p. (In Russ.)

[11] Fedorchuk V.V. Probability measures in topology. *Russian Mathematical Surveys*, 1991, vol. 46, issue 1, pp. 45–93. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1991v046n01ABEH002722. (In English; original in Russian)

Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56

УДК 517.588; 517.589

Дата: поступления статьи: 12.07.2023
после рецензирования: 15.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

С.В. Подклетнова
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: podkletnova.sv@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7849-2513

РЕКУРРЕНТНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ДВУХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

АННОТАЦИЯ

В статье представлены вывод и доказательства тождеств типа тождеств Гаусса для двух известных функций гипергеометрического типа. Для вывода и обоснования формул используются представление функций в виде ряда, а также интегральное представление рассматриваемых функций. Используются определение и свойства гамма- и бета-функций, гипергеометрической функции Гаусса, а также известные тождества для них. Гипергеометрические функции широко используются при решении различных типов дифференциальных уравнений. Наличие тождеств, связывающих функции, участвующих в результирующих формулах решений, значительно упрощает как итоговые формулы, так и промежуточные вычисления во многих задачах, связанных с решением уравнений гиперболического, эллиптического и смешанного типов.

Ключевые слова: специальные функции; гамма-функция; бета-функция; функция Гаусса; тождество; гипергеометрическая функция; формула; решение.

Цитирование. Подклетнова С.В. Рекуррентные тождества для двух специальных функций гипергеометрического типа // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 37–56. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Светлана Владимировна Подклетнова — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим некоторые функции и их свойства, которые понадобятся в этой статье.

Определение 1. Функция вида $\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, где $a>0$, называется гамма-функцией от параметра a или эйлеровым интегралом второго рода [1; 4; 7]:

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx. \tag{1.1}$$

В настоящей статье мы будем использовать известное свойство эйлерова интеграла второго рода, называемое первым функциональным уравнением [1; 4; 7]:

$$\Gamma\left(a+1\right)=a\cdot\Gamma\left(a\right). \tag{1.2}$$

Определение 2. Интеграл вида $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, где $a>0$, $b>0$, называется бета-функцией или эйлеровым интегралом первого рода [1; 4; 7]:

$$\mathrm{B}\left(a,b\right)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx. \tag{1.3}$$

Ниже нами будут использованы следующие свойства бета-функции [1; 4; 7]:

$$\mathrm{B}\left(a+1,b\right)=\frac{a}{a+b}\mathrm{B}\left(a,b\right). \tag{1.4}$$

$$\mathrm{B}\left(a,b+1\right)=\frac{b}{a+b}\mathrm{B}\left(a,b\right). \tag{1.5}$$

а также формула связи бета- и гамма-функций [1; 4; 7]:

$$\mathrm{B}\left(a,b\right)=\frac{\Gamma\left(a\right)\cdot\Gamma\left(b\right)}{\Gamma\left(a+b\right)}, a>0, b>0. \tag{1.6}$$

Определение 3. Функция

$$F\left(a,b;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\cdot(b)_n}{(c)_n\cdot n!}\cdot z^n, \tag{1.7}$$

где $|z|<1$, параметры a, b и c принадлежат пространству действительных чисел, параметр c отличен от нуля и целых отрицательных чисел, называется гипергеометрической функцией Гаусса [1; 4; 6].

Здесь

$$(\alpha)_n=\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1) \tag{1.8}$$

является символом Похгаммера [5] или убывающим факториалом,

$$n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n. \tag{1.9}$$

Ниже нам понадобятся следующие рекуррентные формулы Гаусса, связывающие значения гипергеометрической функции Гаусса с различными параметрами [4]:

1. $\gamma\left[\gamma-1-\left(2\gamma-\alpha-\beta-1\right)z\right]F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)zF\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)+$
$+\gamma\left(\gamma-1\right)\left(z-1\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma-1;z\right)=0.$
2. $\left(2\alpha-\gamma-\alpha z+\beta z\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha-1,\beta;\gamma;z\right)+\alpha\left(z-1\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma;z\right)=0.$
3. $\left(2\beta-\gamma-\beta z+\alpha z\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\beta\right)F\left(\alpha,\beta-1;\gamma;z\right)+\beta\left(z-1\right)F\left(\alpha,\beta+1;\gamma;z\right)=0.$
4. $\gamma F\left(\alpha,\beta-1;\gamma;z\right)-\gamma F\left(\alpha-1,\beta;\gamma;z\right)+\left(\alpha-\beta\right)zF\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)=0.$
5. $\gamma\left(\alpha-\beta\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\alpha\left(\gamma-\beta\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z\right)+\beta\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
6. $\gamma\left(\gamma+1\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma\left(\gamma+1\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)-\alpha\beta zF\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z\right)=0.$
7. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z\right)-\alpha\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
8. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\beta-\gamma\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z\right)-\beta\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
9. $\gamma\left(\gamma-\beta z-\alpha\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha-1,\beta;\gamma;z\right)+\alpha\beta z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
10. $\gamma\left(\gamma-\alpha z-\beta\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma\left(\gamma-\beta\right)F\left(\alpha,\beta-1;\gamma;z\right)+\alpha\beta z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
11. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma F\left(\alpha,\beta+1;\gamma;z\right)+\alpha z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
12. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma F\left(\alpha+1,\beta;\gamma;z\right)+\beta z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
13. $\gamma\left[\alpha-\left(\gamma-\beta\right)z\right]F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\alpha\gamma\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)zF\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)=0.$

14. $\gamma\left[\beta-(\gamma-\alpha)z\right]F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\beta\gamma(1-z)F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\beta;\gamma+1;z)=0.$

15. $\gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z)+\alpha(\gamma-\beta)zF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z)=0.$

16. $\gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\gamma(\gamma+1)F(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z)+\beta(\gamma-\alpha)zF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z)=0.$

17. $\gamma F(\alpha,\beta;\gamma;z)-(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta;\gamma+1;z)-\beta F(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z)=0.$

18. $\gamma F(\alpha,\beta;\gamma;z)-(\gamma-\alpha)F(\alpha,\beta;\gamma+1;z)-\alpha F(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z)=0.$

Определение 4. Функция

$$ {}_3F_2(a,b,c;d,e;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\cdot(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n\cdot n!}\cdot z^n, \tag{1.10}$$

где $|z|<1$, параметры a, b, c, d и e принадлежат пространству действительных чисел, причём параметры d и e отличны от нуля и целых отрицательных чисел, называется функцией ${}_3F_2$ или функцией Клаузена [4; 6; 10]. Заметим, что функция ${}_3F_2$ широко применима при исследовании уравнений движения в практических задачах [5].

Определение 5. Функция вида $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m$, где $|x|<1,\ y<1$, параметры α, β, β', δ, γ и δ' принадлежат пространству действительных чисел, а параметры γ и δ' отличны от нуля и целых отрицательных чисел, называется гипергеометрической функцией R_1 двух аргументов [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m. \tag{1.11}$$

Указанная функция появляется в результате решения некоторых краевых задач.

Функция R_1 связана с гипергеометрической функцией Гаусса соотношением [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^nF(\alpha+n,\beta';\gamma+n;y). \tag{1.12}$$

Если $\gamma>\alpha>0$, то справедливо интегральное выражение [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt. \tag{1.13}$$

Функции Клаузена и R_1 связывает формула [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')}\,{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta';x), \tag{1.14}$$

справедливая при $\gamma-\alpha-\beta'>0$.

2. Рекуррентные тождества для функции R_1

Суть решения задачи покажем на нескольких примерах. Для вывода первой части тождеств для функции R_1 была использована формула (1.12). Возьмём, например, последнюю из рекуррентных формул Гаусса:

$$cF(a,b;c;z)-(c-a)F(a,b;c+1;z)-aF(a+1,b;c+1;z)=0.$$

Чтобы привести гипергеометрические функции, участвующие в этой формуле, к тому виду, который функция Гаусса имеет в (1.12), обозначим

$$a=\alpha+n, b=\beta', c=\gamma+n, z=y. \tag{2.1}$$

Будем иметь:

$$(\gamma+n)F(\alpha+n,\beta';\gamma+n;y)-(\gamma-\alpha)F(\alpha+n,\beta';\gamma+n+1;y)-$$
$$-(\alpha+n)F(\alpha+n+1,\beta';\gamma+n+1;y)=0.$$

Умножим обе части полученного равенства на

$$\frac{1}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n \tag{2.2}$$

и просуммируем по n от нуля до бесконечности. В результате придем к следующему равенству:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n F\left(\alpha+n,\beta';\gamma+n;y\right)-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n F\left(\alpha+n,\beta';\gamma+n+1;y\right)-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n F\left(\alpha+n+1,\beta';\gamma+n+1;y\right)=0.$$

Воспользовавшись представлением (1.7), перепишем все функции Гаусса в последнем равенстве через суммы ряда. Получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_m(\beta')_m}{(\gamma+n)_m m!}y^m-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_m(\beta')_m}{(\gamma+n+1)_m m!}y^m-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n+1)_m(\beta')_m}{(\gamma+n+1)_m m!}y^m=0.$$

Или

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m-$$
$$-\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\left(\gamma+n\right)\left(\gamma+n+1\right)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m- \qquad (2.3)$$
$$-\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\left(\alpha+n\right)\left(\alpha+n+1\right)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\left(\gamma+n\right)\left(\gamma+n+1\right)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m=0.$$

Отметим, что, согласуясь с формулой (1.8), можно упростить:

$$(\alpha)_n(\alpha+n)_m=\alpha\left(\alpha+1\right)...\left(\alpha+n-1\right)\left(\alpha+n\right)\left(\alpha+n+1\right)...\left(\alpha+n+m-1\right)=(\alpha)_{n+m}, \qquad (2.4)$$

$$(\alpha)_n\left(\alpha+n\right)\left(\alpha+n+1\right)_m=$$
$$=\alpha\left(\alpha+1\right)...\left(\alpha+n-1\right)\left(\alpha+n\right)\left(\alpha+n+1\right)\left(\alpha+n+2\right)...\left(\alpha+n+m\right)= \qquad (2.5)$$
$$=\alpha(\alpha+1)_{n+m},$$

$$(\gamma)_n(\gamma+n)_m=\gamma\left(\gamma+1\right)...\left(\gamma+n-1\right)\left(\gamma+n\right)\left(\gamma+n+1\right)...\left(\gamma+n+m-1\right)=(\gamma)_{n+m}, \qquad (2.6)$$

$$(\gamma)_n\left(\gamma+n\right)\left(\gamma+n+1\right)_m=$$
$$=\gamma\left(\gamma+1\right)...\left(\gamma+n-1\right)\left(\gamma+n\right)\left(\gamma+n+1\right)\left(\gamma+n+2\right)...\left(\gamma+n+m\right)= \qquad (2.7)$$
$$=\gamma(\gamma+1)_{n+m}.$$

Подставим полученные выражения в равенство (2.3):

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m-\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m-$$
$$-\frac{\alpha}{\gamma}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_n(\delta')_n n!m!}x^n y^m=0.$$

Умножим обе части на γ и воспользуемся формулой (1.11), чтобы записать суммы, стоящие в левой части тождества, через функцию R_1. Получим рекуррентное тождество:

$$\gamma R_1\left(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y\right)-$$
$$-\left(\gamma-\alpha\right)R_1\left(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y\right)- \qquad (2.8)$$
$$-\alpha R_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y\right)=0.$$

Чтобы проверить справедливость тождества (2.8), разложим каждую гипергеометрическую функцию в ряд по формуле (1.11):

$$\gamma\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m-(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m-$$

$$-\alpha\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_n(\delta')_n n!m!}x^ny^m=0.$$

Отсюда

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma(\alpha)_{n+m}}{(\gamma)_{n+m}}-(\gamma-\alpha)\frac{(\alpha)_{n+m}}{(\gamma+1)_{n+m}}-\frac{\alpha(\alpha+1)_{n+m}}{(\gamma+1)_n}\right)\frac{(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n x^ny^m}{(\delta')_n n!m!}=0.$$

Левая часть уравнения равна нулю только в том случае, когда равно нулю каждое из выражений, стоящих в скобках при любых допустимых значениях n и m, то есть

$$\frac{\gamma(\alpha)_{n+m}}{(\gamma)_{n+m}}-(\gamma-\alpha)\frac{(\alpha)_{n+m}}{(\gamma+1)_{n+m}}-\frac{\alpha(\alpha+1)_{n+m}}{(\gamma+1)_n}=0.$$

Распишем все символы Похгаммера в левой части по формуле (1.8):

$$\frac{\gamma\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n+m-1)}{\gamma\,(\gamma+1)\,(\gamma+2)\ldots(\gamma+n+m-1)}-$$

$$-(\gamma-\alpha)\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n+m-1)}{(\gamma+1)\,(\gamma+2)\ldots(\gamma+n+m-1)\,(\gamma+n+m)}-$$

$$-\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n+m-1)\,(\alpha+n+m)}{(\gamma+1)\,(\gamma+2)\ldots(\gamma+n+m-1)\,(\gamma+n+m)}=0.$$

В первом слагаемом сократим общий множитель γ в числителе и знаменателе, затем вынесем за скобку общие множители в левой сумме:

$$\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n+m-1)}{(\gamma+1)\,(\gamma+2)\ldots(\gamma+n+m-1)}\left(1-\frac{\gamma-\alpha}{(\gamma+n+m)}-\frac{\alpha+n+m}{(\gamma+n+m)}\right)=0.$$

Очевидно, для того чтобы полученное тождество было справедливо, необходимо, чтобы выражение в скобках было тождественным нулем. Чтобы это проверить, приведем его к общему знаменателю и упростим полученный числитель:

$$\frac{\gamma+n+m-\gamma+\alpha-\alpha-n-m}{(\gamma+n+m)}=0.$$

Как видим, при любых допустимых значениях n, m и γ (напомним, что по определению функции R_1 параметр γ отличен от нуля и целых отрицательных чисел) последнее равенство, а значит и тождество (1.8), верно.

Вывод этого тождества достаточно прост, поскольку множители при функциях Гаусса в использованном рекуррентном тождестве не содержат независимой переменной. Попробуем теперь произвести те же действия, например, с четырнадцатым тождеством. Так же, как и раньше, воспользуемся обозначениями (2.1), умножим обе части тождества на (2.2) и просуммируем от нуля до бесконечности, затем представим функции Гаусса в виде рядов. В результате всех этих действий придём к следующему равенству:

$$\begin{gathered}[\beta'-(\gamma-\alpha)\,y]\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)_m(\delta')_n n!}x^ny^m-\\ -\beta'\,(1-y)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)_m(\delta')_n n!}x^ny^m+\\ +(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!}x^ny^m\,(\gamma+n-\beta')\,y=0.\end{gathered}\tag{2.9}$$

Первые две суммы легко преобразуются с помощью формул (1.8) и (1.11). Рассмотрим отдельно последнее слагаемое из (2.5). Обозначим его через S и разобьем на две части следующим образом:

$$S = (\gamma-\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m\,(\gamma+n-\beta')\,y =$$

$$=(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')\,y\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m+$$

$$+(\gamma-\alpha)\,y\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m.$$

Применим формулы (1.4) и (1.7), во второй сумме распишем суммирование по n:

$$S=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')\,y}{\gamma}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m+$$

$$+\frac{(\gamma-\alpha)\,y}{\gamma}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta')_m}{m!}y^m\left(0+\frac{(\alpha)_{1+m}(\beta)_1(\delta)_1}{(\gamma+1)_{1+m}(\delta')_1}x+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha)_{2+m}(\beta)_2(\delta)_2 2}{(\gamma+1)_{2+m}(\delta')_2 2!}x^2+...+\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\delta)_n n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!}x^n+...\right).$$

В первом слагаемом заменим сумму на соответствующее значение функции R_1 по формуле (1.11), во втором слагаемом вынесем за скобку, стоящую под знаком суммы, множитель $\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma+1)\delta'}x$, а затем произведем его упрощение:

$$S=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$+(\gamma-\alpha)\,y\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_m(\beta')_m}{(\gamma+2)_m m!}y^m\left(1+\frac{(\alpha+m+1)_1(\beta+1)_1(\delta+1)_1}{(\gamma+m+2)_1(\delta'+1)_1 1!}x+...+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha+m+1)_{n-1}(\beta+1)_{n-1}(\delta+1)_{n-1}}{(\gamma+m+2)_{n-1}(\delta'+1)_{n-1}\,(n-1)!}x^{n-1}+\frac{(\alpha+m+1)_n(\beta+1)_n(\delta+1)_n}{(\gamma+m+2)_n(\delta'+1)_n n!}x^n+...\right)=$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$\frac{\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}xy\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_m(\beta')_m}{(\gamma+2)_m m!}y^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+m+1)_n(\beta+1)_n(\delta+1)_n}{(\gamma+m+2)_n(\delta'+1)_n n!}x^n=$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$\frac{\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}xy\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta+1)_n(\beta')_m(\delta+1)_n}{(\gamma+2)_{n+m}(\delta'+1)_n n!m!}x^n y^m=$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$\frac{\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}xyR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)\,.$$

Подставив полученное выражение в формулу (2.9), умножим обе части на $(\gamma+1)\,\delta'$ и придем к рекуррентному тождеству:

$$\begin{gathered}\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'\,[\beta'-(\gamma-\alpha)\,y]\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-\\ -\gamma\beta'\delta'\,(\gamma+1)\,(1-y)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y)+\\ +(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')\,(\gamma+1)\,\delta' yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+\\ +\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)\,xyR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.\end{gathered}\tag{2.10}$$

Приведём доказательство полученного тождества. Для этого так же, как и в предыдущем случае, используя формулу (1.11), представим все участвующие в тождестве функции R_1 в форме бесконечных гипергеометрических рядов:

$$\gamma\left(\gamma+1\right)\delta'\left[\beta'-\left(\gamma-\alpha\right)y\right]\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m-$$

$$-\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\left(1-y\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m+$$

$$+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta'\right)\left(\gamma+1\right)\delta'y\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m+$$

$$+\alpha\beta\delta\left(\gamma-\alpha\right)xy\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta+1)_n(\beta')_m(\delta+1)_n}{(\gamma+2)_{n+m}(\delta'+1)_n n!m!}x^ny^m=0.$$

Запишем выражение, стоящее слева так, чтобы было понятно, в каких степенях находятся независимые переменные x и y:

$$\gamma\left(\gamma+1\right)\beta'\delta'\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m-$$

$$-\gamma\left(\gamma+1\right)\delta'\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^{m+1}-$$

$$-\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m+$$

$$+\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^{m+1}+$$

$$+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta'\right)\left(\gamma+1\right)\delta'\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^{m+1}+$$

$$+\alpha\beta\delta\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta+1)_n(\beta')_m(\delta+1)_n}{(\gamma+2)_{n+m}(\delta'+1)_n n!m!}x^{n+1}y^{m+1}=0.$$

Во втором, четвёртом и пятом слагаемых положим $k=m+1$, в шестом слагаемом $k=m+1$, $l=n+1$:

$$\gamma\left(\gamma+1\right)\beta'\delta'\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m-$$

$$-\gamma\left(\gamma+1\right)\delta'\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+k-1}(\beta)_n(\beta')_{k-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+k-1}(\delta')_n n!\,(k-1)!}x^ny^k-$$

$$-\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m+$$

$$+\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+k-1}(\beta)_n(\beta'+1)_{k-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+k-1}(\delta')_n n!\,(k-1)!}x^ny^k+$$

$$+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta'\right)\left(\gamma+1\right)\delta'\sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+k-1}(\beta)_n(\beta')_{k-1}(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+k-1}(\delta')_n n!\,(k-1)!}x^ny^k+$$

$$+\alpha\beta\delta\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{l,k=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{l+k-2}(\beta+1)_{l-1}(\beta')_{k-1}(\delta+1)_{l-1}}{(\gamma+2)_{l+k-2}(\delta'+1)_{l-1}\,(l-1)!\,(k-1)!}x^ly^k=0.$$

Положим теперь $l = n$, $k = m$ и перепишем суммы так, чтобы и n, и m в символе суммирования начинались с единицы:

$$\gamma(\gamma+1)\beta'\delta'\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta')_m}{(\gamma)_m m!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m\right)-$$

$$-\gamma(\gamma+1)\delta'(\gamma-\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta')_{m-1}}{(\gamma)_{m-1}(m-1)!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta')_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m-1}(\delta')_n n!(m-1)!}x^ny^m\right)-$$

$$-\gamma\beta'\delta'(\gamma+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta'+1)_m}{(\gamma)_m m!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m\right)+$$

$$+\gamma\beta'\delta'(\gamma+1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta'+1)_{m-1}}{(\gamma)_{m-1}(m-1)!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta'+1)_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m-1}(\delta')_n n!(m-1)!}x^ny^m\right)+$$

$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')(\gamma+1)\delta'\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta')_{m-1}}{(\gamma+1)_{m-1}(m-1)!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta')_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m-1}(\delta')_n n!(m-1)!}x^ny^m\right)+$$

$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m-2}(\beta+1)_{n-1}(\beta')_{m-1}(\delta+1)_{n-1}}{(\gamma+2)_{n+m-2}(\delta'+1)_{n-1}(n-1)!(m-1)!}x^ny^m=0.$$

Сгруппируем соответствующие суммы и вынесем за скобки общие множители:

$$(\gamma(\gamma+1)\beta'\delta'-\gamma\beta'\delta'(\gamma+1))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n+$$

$$+\delta'\gamma(\gamma+1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta')_{m-1}}{(\gamma)_m m!}y^m\left[\beta'(\alpha+m-1)(\beta'+m-1)-(\gamma-\alpha)(\gamma+m-1)m-\right.$$

$$\left.-(\alpha+m-1)(\beta'+m-1)(\beta'+m)+(\beta'+m-1)(\gamma+m-1)m+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')\right]+$$

$$+\gamma\delta'(\gamma+1)\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta')_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m\left[\beta'(\alpha+n+m-1)(\beta'+m-1)-\right.$$

$$-(\gamma-\alpha)(\gamma+n+m-1)m-(\alpha+n+m-1)(\beta'+m-1)(\beta'+m)+$$

$$\left.+(\beta'+m-1)(\gamma+n+m-1)m+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')m+(\gamma-\alpha)nm\right]=0.$$

Упростив выражения в скобках, получим тождественный нуль при выполнении заданных на параметры условий, а именно того, что α, β, β', δ, γ и δ' принадлежат пространству действительных чисел, а параметры γ и δ' отличны от нуля и целых отрицательных чисел. Таким образом, выполнение тождества (2.10) доказано.

Подобным образом из восемнадцати тождеств Гаусса получаем следующие восемнадцать рекуррентных формул для функции R_1, справедливых для действительных параметров α, β, β', δ, γ, δ' и отличных от нуля и целых отрицательных числах γ и δ', в первой формуле $\gamma \neq 1$:

1. $\gamma\delta'(\gamma+1)[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta'-1)y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$
$+\gamma\delta'\left(\gamma^2-1\right)(y-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma-1,\delta';x,y)=0.$

2. $\gamma\delta'[2\alpha-\gamma-(\alpha-\beta')y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\gamma\delta'(\gamma-\alpha)R_1(\alpha-1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\beta\delta(\gamma-\alpha)xR_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\gamma\delta'(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=0.$

3. $\gamma\delta'[2\beta'-\gamma+(\alpha-\beta')y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\gamma\delta'(\gamma-\beta')R_1(\alpha,\beta,\beta'-1,\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'-1,\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\beta'\gamma\delta'(1-y)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y)=0.$

4. $\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta'-1,\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha-1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+(\alpha-\beta')(\gamma+1)\delta' yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.$

5. $\gamma(\gamma+1)(\alpha-\beta')\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha(\gamma+1)(\gamma-\beta')\delta' R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta(\alpha+1)xR_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$
$+\beta'\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

6. $\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\beta'\delta' yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+2,\delta';x,y)=0.$

7. $\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-(\gamma-\alpha)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

8. $\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-(\gamma+1)(\gamma-\beta')\delta' R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\beta\delta(\alpha+1)xR_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)-$
$-\beta'\delta'(\gamma+1)(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

9. $\gamma\delta'(\gamma-\alpha-\beta' y)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma-\alpha)R_1(\alpha-1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\beta\delta(\gamma-\alpha)xR_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\beta'\delta' y(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

10. $\gamma\delta'(\gamma-\beta'-\alpha y)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma-\beta')R_1(\alpha,\beta,\beta'-1,\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'-1,\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\beta'\gamma\delta' y(1-y)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y)=0.$

11. $\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

12. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\delta' R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\beta'\delta' yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

13. $\gamma\delta'(\gamma+1)[\alpha-(\gamma-\beta')y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\gamma\delta'(\gamma+1)(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'+1,\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.$

14. $\gamma\delta'(\gamma+1)[\beta'-(\gamma-\alpha)y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\beta'\gamma\delta'(\gamma+1)(1-y)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.$

15. $\gamma\delta'(\gamma+1)(\gamma+2)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma+1)(\gamma+2)\,R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta(\gamma+2)\,x\cdot R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'+1,\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\delta'(\gamma+2)(\gamma-\beta')\,y\cdot R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+2,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\alpha+1)\,\beta\delta xy\cdot R_1(\alpha+2,\beta+1,\beta'+1,\delta+1;\gamma+3,\delta'+1;x,y)=0.$

16. $\gamma\delta'(\gamma+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\beta\delta(\gamma+1)\,xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma+1)\,R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\beta\delta(\alpha+1)\,xR_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$
$+\beta'\delta'(\gamma-\alpha)\,yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+2,\delta';x,y)=0.$

17. $\gamma\delta'(\gamma+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\delta'(\gamma+1)(\gamma-\beta')\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)-$
$-\beta'\delta'(\gamma+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

18. $\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-(\gamma-\alpha)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

Для вывода второй части тождеств для функции R_1 используем формулу (1.13). Для примера воспользуемся первым из рекуррентных тождеств Гаусса:

$$c\,[c-1-(2c-a-b-1)\,z]\,F(a,b;c;z)+(c-a)(c-b)\,zF(a,b;c+1;z)+$$
$$+c\,(c-1)(z-1)\,F(a,b;c-1;z)=0.$$

Для параметров и переменной введём следующие обозначения: $a=\beta,\ b=\delta,\ c=\delta',\ z=xt$. Затем умножим обе части тождества на

$$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\,t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}$$

и проинтегрируем по переменной t от нуля до единицы. В результате придем к следующему равенству:

$$\frac{\delta'}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}\,[\delta'-1-(2\delta'-\beta-\delta-1)\,xt]\,F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt+$$
$$+\frac{(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}tF(\beta,\delta;\delta'+1;xt)\,dt+$$
$$+\frac{\delta'(\delta'-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}\,(xt-1)\,F(\beta,\delta;\delta'-1;xt)dt=0.$$

Преобразуем выражения, стоящие под знаком интеграла так, чтобы под интегралом находились только произведение степеней $t,\ 1-t,\ 1-yt$ и гипергеометрическая функция Гаусса:

$$\begin{gathered}\frac{\delta'(\delta'-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt-\\
-\frac{\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\,x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt+\\
+\frac{(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta'+1;xt)\,dt+\\
+\frac{\delta'(\delta'-1)x}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta'-1;xt)dt-\\
-\frac{\delta'(\delta'-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta'-1;xt)dt=0.\end{gathered}\tag{2.11}$$

Обозначим слагаемые в левой части I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 соответственно и вычислим их отдельно. К первому слагаемому I_1 фактически просто применим формулу (1.13). Во втором слагаемом под интегралом в показателе степени t стоит α, а не $\alpha-1$. Поэтому, чтобы привести его к формуле (1.13), требуются некоторые преобразования. Для упрощения бета-функцию распишем через гамма-функции по формуле (1.6) и преобразуем подынтегральное выражение:

$$I_2=-\frac{\delta'\left(2\delta'-\beta-\delta-1\right)}{\mathrm{B}\left(\alpha,\gamma-\alpha\right)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F\left(\beta,\delta;\delta';xt\right)dt=$$

$$=-\delta'\left(2\delta'-\beta-\delta-1\right)x\cdot\frac{\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\gamma-\alpha\right)}\int\limits_0^1 t^{(\alpha+1)-1}(1-t)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1}(1-yt)^{-\beta'}F\left(\beta,\delta;\delta';xt\right)dt.$$

Преобразования гамма-функций осуществим при помощи формулы (1.2), после чего снова сконструируем из них бета-функцию по формуле (1.6):

$$\frac{\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\gamma-\alpha\right)}=\frac{\alpha\cdot\left(\gamma\cdot\Gamma\left(\gamma\right)\right)}{\gamma\cdot\left(\alpha\cdot\Gamma\left(\alpha\right)\right)\Gamma\left(\gamma-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\alpha\cdot\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\gamma\cdot\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(\left(\gamma+1\right)-\left(\alpha+1\right)\right)}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}\left(\alpha+1,\left(\gamma+1\right)-\left(\alpha+1\right)\right)}.$$

Теперь можем применить к интегралу I_2 формулу (1.13):

$$I_2=-\frac{\delta'\left(2\delta'-\beta-\delta-1\right)}{\mathrm{B}\left(\alpha,\gamma-\alpha\right)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F\left(\beta,\delta;\delta';xt\right)dt=$$

$$=-\delta'\left(2\delta'-\beta-\delta-1\right)\frac{\alpha}{\gamma}x\frac{1}{\mathrm{B}\left(\alpha+1,\left(\gamma+1\right)-\left(\alpha+1\right)\right)}\int\limits_0^1 t^{(\alpha+1)-1}(1-t)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1}(1-yt)^{-\beta'}F\left(\beta,\delta;\delta';xt\right)dt=$$

$$=-\frac{\alpha\delta'\left(2\delta'-\beta-\delta-1\right)}{\gamma}xR_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y\right)\cdot$$

Аналогично

$$I_3=\frac{\alpha\left(\delta'-\beta\right)\left(\delta'-\delta\right)}{\gamma}xR_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y\right).$$

$$I_4=\frac{\alpha\delta'\left(\delta'-1\right)}{\gamma}x\cdot R_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y\right).$$

$$I_5=-\delta'\left(\delta'-1\right)R_1\left(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y\right).$$

Подставим значения интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 в равенство (2.11):

$$\delta'\left(\delta'-1\right)R_1\left(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y\right)-$$
$$-\frac{\alpha\delta'\left(2\delta'-\beta-\delta-1\right)}{\gamma}R_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y\right)+$$
$$+\frac{\alpha\left(\delta'-\beta\right)\left(\delta'-\delta\right)}{\gamma}xR_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y\right)+$$
$$+\frac{\alpha\delta'\left(\delta'-1\right)}{\gamma}x\cdot R_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y\right)-$$
$$-\delta'\left(\delta'-1\right)R_1\left(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y\right)=0,$$

умножим обе части на γ и получим новое тождество:

$$\begin{gathered}\gamma\delta'\left(\delta'-1\right)R_1\left(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y\right)-\\-\alpha\delta'\left(2\delta'-\beta-\delta-1\right)xR_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y\right)+\\+\alpha\left(\delta'-\beta\right)\left(\delta'-\delta\right)xR_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y\right)+\\+\alpha\delta'\left(\delta'-1\right)x\cdot R_1\left(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y\right)-\\-\gamma\delta'\left(\delta'-1\right)R_1\left(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y\right)=0.\end{gathered}\tag{2.12}$$

Доказательство справедливости тождества (2.12) подобно тем, что даны для тождеств (2.8) и (2.10), поэтому приводить его здесь не будем. Аналогично предыдущему выводим оставшиеся семнадцать тождеств. Выпишем полученные тождества (начиная с девятнадцатого номера), которые имеют место при α, β, β', δ, γ, δ' и отличных от нуля и целых отрицательных числах γ и δ', в первой формуле $\delta'\neq 1$:

19. $\gamma\delta'(\delta'-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\delta'(\delta'-1)x\cdot R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y)-$
$-\gamma\delta'(\delta'-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y)=0,$

20. $\gamma(2\beta-\delta')R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)\ -$
$-\alpha(\beta-\delta)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\gamma(\delta'-\beta)R_1(\alpha,\beta-1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\beta\gamma R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=0.$

21. $\gamma(2\delta-\delta')R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)\ -$
$-\alpha(\beta-\delta)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\gamma(\delta'-\delta)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta-1;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\delta xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\delta\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y)=0.$

22. $\gamma\delta'R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta-1;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'R_1(\alpha,\beta-1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\beta-\delta)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

23. $\delta'(\beta-\delta)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\beta(\delta'-\delta)R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\delta(\delta'-\beta)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)=0.$

24. $\gamma\delta'(\delta'+1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\delta'+1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

25. $\gamma\delta'R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma(\delta'-\beta)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\beta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

26. $\gamma\delta'R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\gamma(\delta-\delta')R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\delta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

27. $\delta'\gamma(\gamma+1)(\delta'-\beta)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha(\gamma+1)\delta'\delta xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\delta'\gamma(\gamma+1)(\delta'-\beta)R_1(\alpha,\beta-1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\gamma+1)\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha(\alpha+1)\beta\delta x^2R_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)\ =0.$

28. $\gamma\delta'(\gamma+1)(\delta'-\delta)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta'(\gamma+1)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma+1)(\delta'-\delta)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta-1;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\beta\delta(\alpha+1)x^2R_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.$

29. $\gamma\delta'R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

30. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\delta x R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

31. $\gamma\beta\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\delta'(\delta'-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\gamma\beta\delta' R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta' xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

32. $\gamma\delta\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\delta'(\delta'-\beta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\delta\delta' xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

33. $\gamma\delta'(\delta'+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\delta'+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\beta(\delta'-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y)=0.$

34. $\gamma\delta'(\delta'+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\delta'+1)\,R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\delta(\delta'-\beta)\,xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y)=0.$

35. $\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-(\delta'-\delta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\delta R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)=0.$

36. $\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-(\delta'-\beta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)=0.$

Таким образом, нами получены 36 рекуррентных формул для функции R_1. В каждой из них присутствуют от 3 до 5 слагаемых. Отметим, что в практических целях удобнее применять тождества, состоящие из трёх или четырёх слагаемых, поскольку чаще всего преобразовывают именно две или три функции с разными параметрами в одну.

3. Рекуррентные тождества для функции Клаузена

Для вывода тождеств для функции Клаузена воспользуемся соотношением (1.14) и теми 36 формулами, которые были выведены в предыдущем разделе для функции R_1. Возьмём, например, первое из них:

$$\gamma\delta'(\gamma+1)\left[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta'-1)\,y\right]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$$
$$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)\,x(1-y)\,R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$$
$$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')\,yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$
$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)\,xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$$
$$+\gamma\delta'\left(\gamma^2-1\right)(y-1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma-1,\delta';x,y)=0.$$

Положим $y=1$:

$$\gamma\delta'(\gamma+1)(\alpha+\beta'-\gamma)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,1)+$$
$$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,1)+$$
$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)\,xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,1)=0$$

и к каждой функции R_1 внутри полученного тождества применим выражение (1.14):

$$\gamma\delta'(\gamma+1)(\alpha+\beta'-\gamma)\,\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta')}\,{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta';x)+$$

$$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\beta'+1)}{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta'+1;x)+$$

$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)x\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\beta'+2)}{}_3F_2(\alpha+1,\beta+1,\delta+1;\delta'+1,\gamma-\beta'+2;x)=0.$$

Согласно формуле (1.2), в первом слагаемом левой части перепишем выражение

$$\gamma(\gamma+1)\Gamma(\gamma)=(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1)=\Gamma(\gamma+2),$$

во втором слагаемом

$$(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1)=\Gamma(\gamma+2),$$

в первом и втором слагаемом

$$\frac{\gamma-\alpha}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}=\frac{\gamma-\alpha}{(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Затем вынесем за скобку

$$\frac{\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

и сократим на это выражение обе части тождества:

$$\delta'(\alpha+\beta'-\gamma)\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\beta')}{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta';x)+$$

$$+\delta'(\gamma-\beta')\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\beta'+1)}{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta'+1;x)+$$

$$+\alpha\beta\delta x\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\beta'+2)}{}_3F_2(\alpha+1,\beta+1,\delta+1;\delta'+1,\gamma-\beta'+2;x)=0.$$

Обозначим $\alpha=a,\ \beta=b,\ \delta=c,\ \delta'=d,\ \gamma-\beta'=e$:

$$-d(e-a)\frac{\Gamma(e-a)}{\Gamma(e)}{}_3F_2(a,b,c;d,e;x)+$$

$$+de\frac{\Gamma(e-\alpha+1)}{\Gamma(e+1)}{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x)+$$

$$+abcx\frac{\Gamma(e-a+1)}{\Gamma(e+2)}{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x)=0.$$

Преобразуем по формуле (1.2)

$$(e-a)\Gamma(e-a)=\Gamma(e-a+1),$$

$$\frac{1}{\Gamma(e+1)}=\frac{1}{e\Gamma(e)},$$

$$\frac{1}{\Gamma(e+2)}=\frac{1}{e(e+1)\Gamma(e)},$$

вынесем за скобку дробь

$$\frac{\Gamma(e-a+1)}{\Gamma(e)}$$

и сократим на нее обе части последнего тождества:

$$-d{}_3F_2(a,b,c;d,e;x)+$$

$$+d{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x)+$$

$$+abcx\frac{1}{e(e+1)}{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x)=0.$$

Умножим обе части на $-e(e+1)$:

$$de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x)-$$

$$-de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x)-$$

$$-abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x)=0.$$

Для упрощения формулы положим $e = e - 1$ и окончательно получим

$$\begin{gathered} de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e-1;x) - \\ -de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - \\ -abcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Заметим, что эта формула справедлива при действительных параметрах a, b, c, d и e, кроме того, параметр d должен быть отличен от нуля и целых отрицательных чисел, а параметр e не должен равняться единице, нулю и целым отрицательным числам. Проведем доказательство справедливости тождества (3.1). Для этого, воспользовавшись формулой (1.10), разложим функции Клаузена в гипергеометрические ряды:

$$\begin{gathered} de\,(e-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e-1)_n n!}x^n - de\,(e-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n n!}x^n - \\ -abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

В первом слагаемом выражения (3.2) преобразуем символ Похгаммера. Для этого воспользуемся формулой (1.8). Здесь

$$\frac{e-1}{(e-1)_n} = \frac{(e-1)\,(e+n-1)}{(e-1)\,(e)_{n-1}\,(e+n-1)} = \frac{e+n-1}{(e)_n}.$$

Далее в первых двух слагаемых в левой части выражения (3.2) вынесем общие множители за скобку, поставив их под один знак суммы:

$$de\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n n!}x^n\left((e+n-1)-(e-1)\right) - abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0.$$

После упрощения первого слагаемого придем к уравнению

$$de\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n n}{(d)_n(e)_n n!}x^n - abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0.$$

Заметим, что первое слагаемое первой суммы (то есть выражение под знаком суммы при $n = 0$) равно нулю, поэтому можно начать суммирование с $n = 1$, то есть предыдущее выражение эквивалентно следующему:

$$de\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n n}{(d)_n(e)_n n!}x^n - abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0. \tag{3.3}$$

Преобразуем первое слагаемое выражения (3.3), воспользовавшись для этого формулами (1.8) и (1.9):

$$\begin{gathered} de\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n n}{(d)_n(e)_n n!}x^n = \frac{abcdex}{de}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}}{(d+1)_{n-1}(e+1)_{n-1}\,(n-1)!}x^{n-1} = \\ = abcx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}}{(d+1)_{n-1}(e+1)_{n-1}\,(n-1)!}x^{n-1} = abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n\,(n)!}x^n. \end{gathered}$$

В конце заменили все $n - 1$ на n, тогда суммирование начинается с нуля. Подставив полученное выражение в равенство (3.3), приходим к тождеству, что и доказывает справедливость формулы (3.1).

Подобным образом выводим оставшиеся рекуррентные тождества для функции Клаузена, справедливые при действительных значениях параметров a, b, c, d, e и отличных от нуля и целых отрицательных числах параметров d и e. Кроме того, $e \neq 1$ в формулах 1, 6, 7, 8, 17, 18, 19 и $d \neq 1$ в формулах 2, 9, 10, 11, 14, 15, 16:

1. $de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e-1;x) - de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) -$
   $- abcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

2. $de\,(d-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d-1,e;x) - de\,(d-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) -$
   $- abcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

3. $de{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2\,(a+1,b,c;d,e;x) + bcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

4. $de{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2\,(a,b+1,c;d,e;x) + acx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

5. $de_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) + abx_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

6. $(e-a-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e-1;x) + a_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) = 0.$

7. $(e-b-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e-1;x) + b_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) = 0.$

8. $(e-c-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e-1;x) + c_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) = 0.$

9. $(d-a-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d-1,e;x) + a_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) = 0.$

10. $(d-b-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d-1,e;x) + b_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) = 0.$

11. $(d-c-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d-1,e;x) + c_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) = 0.$

12. $de\,(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de\,(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) -$
$- abcx_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

13. $de\,(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de\,(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) -$
$- abcx_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

14. $de\,(d-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d-1,e;x) - de\,(d-1)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) +$
$+ ab\,(d-c-1)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

15. $de\,(d-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d-1,e;x) - de\,(d-1)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) +$
$+ ac\,(d-b-1)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

16. $de\,(d-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d-1,e;x) - de\,(d-1)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) +$
$+ bc\,(d-a-1)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

17. $de\,(e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e-1;x) - de\,(e-1)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) +$
$+ ab\,(e-c-1)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

18. $de\,(e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e-1;x) - de\,(e-1)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) +$
$+ ac\,(e-b-1)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

19. $de\,(e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e-1;x) - de\,(e-1)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) +$
$+ bc\,(e-a-1)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

20. $de_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) - de_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) +$
$+ a\,(b-c)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

21. $de_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) - de_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) +$
$+ c\,(b-a)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

22. $de_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) - de_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) +$
$+ b\,(c-a)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

23. $d\,(b-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - b\,(d-c)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) +$
$+ c\,(d-b)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$

24. $d\,(a-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - a\,(d-c)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) +$
$+ c\,(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$

25. $d\,(a-b)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - a\,(d-b)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) +$
$+ b\,(d-a)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) = 0.$

26. $de\,(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - de\,(e+1)\,{}_3F_2(a-1,b,c;d,e;x) -$
$- bc\,(e+1)\,x_3F_2(a,b+1,c+1;d+1,e+1;x) + abcx_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

27. $de\,(e+1)\,(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - abc\,(e+1)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) -$
$- de\,(e+1)\,(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - abc\,(e-a)\,x_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

28. $de_3F_2(a,b,c;d,e;x) - e\,(d-b)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) -$
$- be_3F_2(a,b+1,c+1;d+1,e;x) + abx_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

29. $de_3F_2(a,b,c;d,e;x) + e\,(c-d)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) -$
$- ce_3F_2(a,b+1,c+1;d+1,e;x) + acx_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

30. $d\,(d-1)\,e_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - ad\,(2d-b-c-1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) +$
$+\,a\,(d-b)\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d+1,e+1;x) +$
$+\,ad\,(d-1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d-1,e+1;x) - d\,(d-1)\,e_3F_2\,(a,b,c;d-1,e;x) = 0,$

31. $e\,(2b-d)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x)\ - \alpha\,(b-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) +$
$+\,e\,(d-b)\,{}_3F_2\,(a,b-1,c;d,e;x) + abx_3F_2\,(a+1,b+1,c;d,e+1;x) - be_3F_2\,(a,b+1,c;d,e;x) = 0.$

32. $e\,(2c-d)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x)\ + a\,(b-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) +$
$+\,(d-c)\,(\gamma-\beta')\,{}_3F_2\,(a,b,c-1;d,e;x) + acx_3F_2\,(a+1,b,c+1;d,e+1;x) - ce_3F_2\,(a,b,c+1;d,e;x) = 0.$

33. $d\,(d-b)\,e\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - acd\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) -$
$-\,d\,(d-b)\,e\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b-1,c;d,e;x) + abc\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) -$
$-\,abc\,(a+1)\,x^2{}_3F_2\,(a+2,b+1,c+1;d+1,e+2;x)\ = 0.$

34. $de\,(d-c)\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - abd\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) -$
$-\,de\,(d-c)\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b,c-1;d,e;x) + abc\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) -$
$-\,abc\,(a+1)\,x^2{}_3F_2\,(a+2,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

35. $bde_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - ad\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) - bde_3F_2\,(a,b+1,c;d,e;x) +$
$+\,abdx_3F_2\,(a+1,b+1,c;d,e+1;x) + a\,(d-b)\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d+1,e+1;x) = 0.$

36. $cde_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - adex_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) - cde_3F_2\,(a,b,c+1;d,e;x) +$
$+\,acdx_3F_2\,(a+1,b,c+1;d,e+1;x) + a\,(d-b)\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d+1,e+1;x) = 0.$

Выводы

В настоящей статье были выведены рекуррентные тождества для двух специальных функций гипергеометрического типа. Производя арифметические действия над выведенными тождествами, можно прийти к новым формулам. Как уже было сказано выше, удобнее всего пользоваться тождествами, состоящими из трёх или четырёх слагаемых. Поэтому в заключение запишем тождества, состоящие из трёх слагаемых вместе с выведенными в результате действий над записанными ранее.

Если параметры α, β, β', δ, γ, δ' принадлежат пространству действительных чисел, параметры γ и δ' не равны нулю и целым отрицательным числам, то справедливы рекуррентные формулы для функции R_1:

1. $\gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\gamma-\alpha)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\,\alpha\,(1-y)\,R_1\,(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

2. $\gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y) + \alpha y R_1\,(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

3. $\gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\gamma-\alpha)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) - \alpha R_1\,(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

4. $\gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\,\alpha\,(\beta-\delta)\,xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

5. $\delta'\,(\beta-\delta)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \beta\,(\delta'-\delta)\,R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\,\delta\,(\delta'-\beta)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$

6. $\gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) -$
$-\,\alpha\beta\delta xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

7. $\gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\,\alpha\beta xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

8. $\gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\,\alpha\delta xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

9. $\gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\,\alpha\beta\,(\delta'-\delta)\,xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y) = 0.$

10. $\gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\,\alpha\delta\,(\delta'-\beta)\,xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y) = 0.$

11. $\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\delta'-\delta)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) - \delta R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$

12. $\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\delta'-\beta) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) - \beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$

13. $(\delta-\beta) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \delta R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y) + \beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) = 0.$

Если a, b, c, d и e принадлежат множеству действительных чисел, и при этом d и c не равны нулю и целым отрицательным числам, то

1. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) -$
$- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

2. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) -$
$- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$

3. $de{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) +$
$+ bcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0$

4. $de{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) + acx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

5. $de{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) + abx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

6. $e{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - a{}_3F_2(a+1,b,c;d,e+1;x) = 0.$

7. $(e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-b)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - b{}_3F_2(a,b+1,c;d,e+1;x) = 0.$

8. $e{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - c{}_3F_2(a,b,c+1;d,e+1;x) = 0.$

9. $d{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) - a{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) = 0.$

10. $d{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-b)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) - b{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) = 0.$

11. $d{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) - c{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$

12. $de(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) -$
$- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

13. $de(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) -$
$- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

14. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) +$
$+ ab(d-c)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$

15. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) +$
$+ ac(d-b)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$

16. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) +$
$+ bc(d-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$

17. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d,e+1;x) +$
$+ ab(e-c)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

18. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d,e+1;x) +$
$+ ac(e-b)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

19. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d,e+1;x) +$
$+ bc(e-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

20. $de{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) +$
$+ a(b-c)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

21. $de{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) + c(b-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

22. $de{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) - de{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) + b(c-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

23. $d(b-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - b(d-c)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) + c(d-b)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$

24. $d(a-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - a(d-c)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) + c(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$

25. $d(a-b)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - a(d-b)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) + b(d-a)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) = 0.$

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / пер. с англ. Н.Я. Виленкина. Москва: Наука, 1973. Т. 1. 296 с. URL: https://djvu.online/ file/yJMgdNZWJk89f?ysclid=lnshot5bvp870349708.

[2] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Москва: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с. URL: https://reallib.org/reader?file=1487895&ysclid=lnshtgbaq2207563473.

[3] Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. Об одной специальной функции двух аргументов, встречающейся при решении краевых задач // Аналитические методы решения дифференциальных уравнений. Куйбышев: Куйбышевский государственный университет, 1986. С. 42–46.

[4] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1963. 1100 с. URL: http://www.vixri.ru/?p=991.

[5] Доброславский А.В. Исследование усредненных движений КА в ограниченной задаче трех тел с учетом сил светового давления: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2021. URL: https://mai.ru/upload/iblock/926/bu2e4woh7fvx78ovuyi9juam6pqyu3hx/dobroslavskiy_dissertation.pdf.

[6] Кузнецов Д.С. Специальные функции. Москва: Высшая школа, 1965. 423 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kuznecov1962ru.pdf.

[7] Петросян Н.С. Специальные функции: учеб. пособие. Москва: ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН», 2015. 88 с. URL: https://studfile.net/preview/16389627/.

[8] Подклетнова С.В. О новых тождествах для функции R_1. Куйбышев: КГПИ, 4 с. Деп. в ВИНИТИ, 21.04.92, № 1336-B92.

[9] Подклетнова С.В. О тождествах типа тождеств Гаусса для функции R_1 (часть I) // Евразийский Союз ученых. 2015. № 9-5 (18). С. 140–145. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=26723653. EDN: https://elibrary.ru/wmuqib.

[10] Функции математической физики / Ж.К. де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петьо, Т. Фогель. Москва: Физматгиз, 1963. 102 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/KampeDeFereKempbellPetoFogel1963ru.pdf.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56

Submited: 12.07.2023
Revised: 15.08.2023
Accepted: 30.10.2023

S.V. Podkletnova
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: podkletnova.sv@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7849-2513

RECURRENT IDENTITIES FOR TWO SPECIAL FUNCTIONS OF HYPERGEOMETRIC TYPE

ABSTRACT

The article presents conclusions and proofs of Gauss-type identities for two known hypergeometric type functions. For the derivation and justification of formulas, the representation of functions in the form of a series is used, as well as an integral representation of the functions under consideration. The article uses the definition and properties of gamma and beta functions, the hypergeometric Gauss function, as well as known identities for these functions. Hypergeometric functions are widely used in solving various types of differential equations. The presence of identities connecting the functions involved in the resulting formulas of solutions greatly simplifies both the final formulas and intermediate calculations in many problems related to solving hyperbolic, elliptic and mixed types of equations.

Key words: special functions; gamma function; beta function; Gaussian function; identity; hypergeometric function; formula; solution.

Citation. Podkletnova S.V. Recurrent identities for two special functions of hypergeometric type. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 37–56. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Svetlana V. Podkletnova — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Higher Mathematics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Moscow: Nauka, 1973, vol. 1, 296 p. Available at: https://djvu.online/file/yJMgdNZWJk89f?ysclid=lnshot5bvp870349708. (In Russ.)

[2] Bitsadze A.V. Mixed type equations. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959, 164 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=1487895&ysclid=lnshtgbaq2207563473. (In Russ.)

[3] Volkodavov V.F., Nikolaev N.Ya. On one special function of two arguments encountered in solving boundary value problems. In: *Analytical methods for solving differential equations.* Kuibyshev: Kuibyshevskii gosudarstvennyi universitet, 1986, pp. 42–46. (In Russ.)

[4] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p. Available at: http://www.vixri.ru/?p=991. (In Russ.)

[5] Dobroslavsky A.V. Investigation of averaged spacecraft motions in a limited three-body problem taking into account light pressure forces: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Moscow, 2021. Available at: https://mai.ru/upload/iblock/926/bu2e4woh7fvx78ovuyi9juam6pqyu3hx/dobroslavskiy_dissertation.pdf. (In Russ.)

[6] Kuznetsov D.S. Special functions. Moscow: Vysshaya shkola, 1965, 423 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kuznecov1962ru.pdf. (In Russ.)

[7] Petrosyan N.S. Special functions: textbook. Moscow: FGBOU VO MGTU «STANKIN», 2015, 88 p. Available at: https://studfile.net/preview/16389627/. (In Russ.)

[8] Podkletnova S.V. On new identities for a function R_1. Kuibyshev: KGPI, 4 p. In VINITI, 21.04.92, no. 1336-B92. (In Russ.)

[9] Podkletnova S.V. On Gauss type identities for a function R_1 (Part I). *Eurasian Union of Scientists*, 2015, no. 9–5 (18), pp. 140–145. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=26723653. EDN: https://elibrary.ru/wmuqib. (In Russ.)

[10] Ferriet J. Kampe de, Campbell R., Petyo G., Vogel T. Functions of mathematical physics. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 102 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/KampeDeFereKempbellPetoFogel1963ru.pdf. (In Russ.)

 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-57-63

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 14.07.2023
после рецензирования: 21.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

М.А. Сметанников
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ssmetannikoff@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6744-2222

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДЕКОМПОЗИЦИИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ К СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ КИНЕТИКИ СУИЦИДНОГО СУБСТРАТА

АННОТАЦИЯ

Целью данной статьи является редукция сингулярно возмущенной системы кинетики суицидного субстрата. Применяются методы декомпозиции и интегральных многообразий. Понижается размерность исходной задачи. Проводится анализ полученных уравнений на интегральном многообразии на устойчивость. Приводится пример сравнения численных решений исходной системы и полученной после понижения размерности вышеуказанными методами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; метод декомпозиции; интегральное многообразие; кооперативное явление; энзимная кинетика; суицидный субстрат.

Цитирование. Сметанников М.А. Применение методов декомпозиции и интегральных многообразий к сингулярно возмущенной задаче кинетики суицидного субстрата // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 57–63. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-57-63.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Михаил Андреевич Сметанников — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

В моделях химической кинетики наличие малого параметра связано с тем, что в химической системе одновременно происходят существенно разнящиеся скоростью процессы. Значительное число публикаций по теории и приложениям как методов упрощения моделей макроскопической кинетики, так и моделирования критических явлений включает в себя большое разнообразие задач, сочетающихся со сравнительно небольшим арсеналом применяемых средств анализа и довольно распространенным мнением, что эти задачи не имеют ничего общего как по своей постановке, так и по методам решения. Понижение размерности моделей является важнейшим приемом исследования сложных систем любой природы, разумеется, не только в области энзимной кинетики, а критические явления исключительно важны и сами по себе, и как инструмент познания сложных процессов. Основываясь на геометрической теории сингулярных возмущений, появился подход, позволяющий с единых позиций этой теории рассматривать и методы редукции кинетических систем, и методы математического моделирования критических явлений в таковых. В статье описывается применение метода интегральных многообразий к редукции [1] системы [2] из раздела "Кинетика суицидного субстрата". Работа [3] подробно описывает обоснование алгоритма декомпозиции задачи энзимной кинетики для динамических систем с быстрыми и медленными переменными и построения интегральных многообразий [4–8], основные результаты теории интегральных многообразий содержатся в [9], источники [10–11] также относятся к вышеупомянутым категориям. Для указанных выше систем данные субстраты важны, поскольку они обеспечивают способ нацеливания на определенный фермент для инактивации. Они особенно полезны при введении лекарственных средств, поскольку они не вредны в своей обычной форме, и только определенный фермент может преобразовать их в форму ингибитора. Например, субстраты самоубийства были исследованы для использования при лечении депрессии, эпилепсии и некоторых опухолей.

2. Постановка задачи. Исходная система и ее матричная форма

В данной работе рассматривается система уравнений кинетики суицидного субстрата с безразмерными коэффициентами и переменными:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -s((\epsilon p+1) - \epsilon p\xi - (\epsilon p+1)\zeta - (\epsilon p+1)e_i) + \frac{\rho}{1+\rho}\xi, \tag{2.1}$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} = \omega\zeta, \tag{2.2}$$

$$\epsilon\frac{d\xi(t)}{dt} = s((\epsilon p+1) - \epsilon p\xi - (\epsilon p+1)\zeta - (\epsilon p+1)e_i) - \xi, \tag{2.3}$$

$$\epsilon\frac{d\zeta(t)}{dt} = \frac{\epsilon p}{(1+\epsilon p)(1+\rho)}\xi - \psi\zeta \tag{2.4}$$

с начальными условиями:

$$s(0) = 1, \xi(0) = 0, \zeta(0) = 0, e_i(0) = 0. \tag{2.5}$$

В фундаментальной монографии [2] описан алгоритм сведения кооперативного явления к данной обезразмеренной системе (2.1)–(2.5). Коэффициенты системы (2.1)–(2.5) и малый параметр ϵ определяются формулами:

$$K_m = \frac{k_{-1}+k_2}{k_1}, \sigma = \frac{s_0}{K_m}, \epsilon = \frac{e_0}{e_0+K_m}, \rho = \frac{k_{-1}}{k_2}, p = \frac{\sigma}{\epsilon}, \psi = \frac{k_3+k_4}{k_{-1}+k_2}, \omega = \frac{\phi}{1+\epsilon p}, \phi = \frac{k_4}{k_{-1}+k_2}.$$

Здесь e_0 — начальная концентрация фермента, s_0 — начальная концентрация субстрата, k_{-1}, k_1, k_2, k_3 и k_4 — постоянные положительные параметры скоростей реакций.

Поскольку $0 < \epsilon \ll 1$, система (2.1)–(2.4) содержит разнотемповые переменные. Непосредственное численное интегрирование таких систем связано с вычислительной жесткостью, что продиктовано наличием малого параметра в знаменателе правой части дифференциального уравнения. Поэтому в данной статье к решению и анализу системы (2.1)–(2.5) применяются методы декомпозиции и интегральных многообразий [3; 4; 8; 12–18].

Обозначим через $x = \begin{pmatrix} s(t) \\ e_i(t) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} \epsilon ps + \frac{\rho}{\rho+1} & (\epsilon p+1)s \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$,
$f = \begin{pmatrix} (\epsilon p+1)(e_i-1)s \\ 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} -\epsilon sp - 1 & -s(\epsilon p+1) \\ \frac{p\epsilon}{(1+\epsilon p)(1+\rho)} & -\psi \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} (\epsilon p+1)s - (\epsilon p+1)se_i \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда система (2.1)–(2.4) в матричной форме примет вид:

$$\dot{x} = f(x,t,\epsilon) + F(x,t,\epsilon)y, \tag{2.6}$$

$$\epsilon\dot{y} = g(x,t,\epsilon) + G(x,t,\epsilon)y. \tag{2.7}$$

Начальные условия (2.5) тоже запишем в векторной форме:

$$x(0) = \begin{pmatrix} s(0) \\ e_i(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y(0) = \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \zeta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Полученная система (2.6), (2.7) является сингулярно возмущенной системой дифференциальных уравнений, линейной по быстрым переменным.

Вопросы существования интегрального многообразия систем типа (2.6)–(2.8), алгоритм построения асимптотики подробно описаны в работах [1–4].

3. Существование, построение и устойчивость интегрального многообразия

Для (2.1)–(2.4) вырожденная система (при $\epsilon = 0$) имеет вид:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -s(1-\zeta-e_i) + \frac{\rho}{1+\rho}\xi, \tag{3.1}$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} = \omega\zeta, \tag{3.2}$$

$$0 = s(1-\zeta-e_i) - \xi, \tag{3.3}$$

$$0 = -\psi\zeta. \tag{3.4}$$

Отметим, что:

I. Уравнения (3.3) и (3.4) дают единственное решение $\xi = s(1-\zeta-e_i)$, $\zeta = 0$.

II. Функции правых частей уравнений (2.6), (2.7) и их частные производные по всем переменным до третьего порядка включительно равномерно непрерывны и ограничены.

III. Определитель матрицы $\det G_0(x,t) = \begin{vmatrix} -1 & -s \\ 0 & -\psi \end{vmatrix} = \psi$ и след матрицы $-G_0(x,t)$, равный $1+\psi$, положительны.

Из [1; 4] следует, что система (2.1)–(2.4) имеет устойчивое интегральное многообразие медленных движений вида $y = h(t,x,\epsilon)$, движение по которому описывается уравнениями (опускаем промежуточные преобразования):

$$\dot{s} = -\frac{1}{\rho+1} - \epsilon\frac{p+p\rho-\rho}{(\rho+1)^2}s + \frac{1}{\rho+1}e_i s + \epsilon P(s,e_i) \tag{3.5}$$

$$\dot{e_i} = \epsilon T(s,e_i), \tag{3.6}$$

где $P(s,e_i) = \frac{p\rho+p-2\rho}{(\rho+1)^2}e_i s + \frac{p\rho\psi+p\psi+p}{\psi(\rho+1)^2}s^2 - \frac{p\rho\psi+p\psi+p}{\psi(\rho+1)^2}e_i s^2 + \frac{\rho}{(\rho+1)^2}e_i^2 s$,
$T(s,e_i) = \frac{p\omega}{\psi(\rho+1)}s - \frac{p\omega}{\psi(\rho+1)}e_i s$, где медленное инвариантное многообразие — это:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = h(s,e_i,\epsilon) = h_0(s,e_i) + \epsilon h_1(s,e_i) + O(\epsilon^2) =$$

$$= \begin{pmatrix} -e_i s + s \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \frac{1+p\rho+p}{\rho+1}s - \frac{p(\psi\rho+\psi+1)}{\psi(\rho+1)}s^2 - \frac{p\rho+p+2}{\rho+1}se_i + \frac{1}{\rho+1}e_i^2 s + \frac{p(\psi\rho+\psi+1)}{\psi(\rho+1)}e_i s^2 \\ \frac{p}{\psi(\rho+1)}s - \frac{p}{\psi(\rho+1)}e_i s \end{pmatrix} + O(\epsilon^2). \tag{3.7}$$

Следуя [1; 4], выполним замену переменных в системе (2.9), (2.10) по формулам $x = w + \epsilon H(t,w,z,\epsilon), y = h(t,x,\epsilon) + z$, где $H = H_0 + O(\epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\rho+1} & -\frac{w_1\rho}{(1+\rho)\psi} + \frac{w_1}{\psi} \\ 0 & \frac{\omega}{\psi} \end{pmatrix} z + O(\epsilon)$ и запишем ее результат:

$$\dot{w_1} = -\frac{1}{\rho+1} - \epsilon\frac{p+p\rho-\rho}{(\rho+1)^2}w_1 + \frac{1}{\rho+1}w_1 w_2 + \epsilon P(w_1,w_2), \tag{3.8}$$

$$\dot{w_2} = \epsilon T(w_1,w_2), \tag{3.9}$$

Начальные условия примут вид:

$$w_1(0,\epsilon) = 1 - \epsilon\frac{\rho}{\rho+1}, w_2 = 0. \tag{3.10}$$

Получили систему специального вида (3.8), (3.9), описывающую движение по интегральному многообразию, с начальными условиями (3.10).

Для исследования (3.8), (3.9) на устойчивость перепишем систему (2.1)–(2.4) в виде:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -(\epsilon p+1)s + S(s,e_i,\xi,\zeta), \tag{3.11}$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} = E_i(s,e_i,\xi,\zeta), \tag{3.12}$$

$$\epsilon\frac{d\xi(t)}{dt} = -\xi + \Xi(s,e_i,\xi,\zeta), \tag{3.13}$$

$$\epsilon\frac{d\zeta(t)}{dt} = \frac{\epsilon p}{(1+\epsilon p)(1+\rho)}\xi - \psi\zeta, \tag{3.14}$$

где $S(s,e_i,\xi,\zeta) = \epsilon ps\xi + (\epsilon p+1)s\zeta + (\epsilon p+1)se_i + \frac{\rho}{1+\rho}\xi$, $E_i(s,e_i,\xi,\zeta) = \omega\zeta$ $\Xi(s,e_i,\xi,\zeta) = (\epsilon p+1)s - \epsilon ps\xi - (\epsilon p+1)s\zeta - (\epsilon p+1)se_i$. Находим: $S(0,e_i,0,0) = 0, E_i(0,e_i,0,0) = 0, \Xi(0,e_i,0,0) = 0$. Система (2.1)–(2.4) имеет многообразие стационарных положений, а также устойчивое интегральное многообразие (3.7), для которого справедлив обобщенный принцип сведения [4]. Движение по этому многообразию описывается системой дифференциальных уравнений (3.8), (3.9), которая тоже имеет многообразие стационарных положений. Перепишем (3.8), (3.9) в виде:

$$\dot{w_1} = Kw_1 + S(w_1, w_2, t, \epsilon), \tag{3.15}$$

$$\dot{w_2} = \epsilon E_i(w_1, w_2, t, \epsilon) \tag{3.16}$$

где

$$K = -\frac{1}{\rho+1} - \epsilon\frac{p+p\rho-\rho}{(\rho+1)^2},$$

$$S(w_1, w_2, t, \epsilon) = \frac{1}{\rho+1}w_1w_2 + \epsilon\frac{p\rho+p-2\rho}{(\rho+1)^2}w_1w_2 + \epsilon\frac{p\rho\psi+p\psi+p}{\psi(\rho+1)^2}w_1^2 - \epsilon\frac{p\rho\psi+p\psi+p}{\psi(\rho+1)^2}w_1^2w_2 + \epsilon\frac{\rho}{(\rho+1)^2}w_1w_2^2,$$

$$E_i(w_1, w_2, t, \epsilon) = \epsilon\left(\frac{p\omega}{\psi(\rho+1)}w_1 - \frac{p\omega}{\psi(\rho+1)}w_1w_2\right).$$

Согласно [4], многообразие стационарных положений устойчиво по отношению к переменным e_i, ξ, η, ζ в том и только в том случае, если устойчиво по отношению к переменной w_1, а на это влияет коэффициент $K = -\frac{1}{\rho+1} - \epsilon\frac{p+\rho(p-1)}{(\rho+1)^2}$. Так как k_i — коэффициенты скоростей реакций, $\rho = \frac{k_{-1}}{k_2} > 0$, а ϵ малый положительный параметр, $K < 0$ и решение уравнения (3.15) устойчиво относительно w_1. Отсюда следует, что многообразие стационарных положений устойчиво относительно w_1 и решение (3.8), (3.9) устойчиво.

4. Пример и численное сравнение решений

Пусть в исходной системе (2.1)–(2.4) $\rho = \frac{1}{3}$, $\sigma = \frac{1}{16}$, $\psi = \frac{3}{4}$, $\omega = \frac{1}{8}$,$p = 1$. После применения вышеописанных методов и подстановки коэффициентов система на интегральном многообразии примет вид:

$$\dot{w_1} = (w_2 - 1)(\frac{15}{9}w_1^3 - \frac{25}{9}w_1^2 + \frac{5}{9}w_2w_1^2 + 2w_1 - \frac{1}{4}), w_1(0, \epsilon) = 1 - \epsilon\frac{1}{4},$$

$$\dot{w_2} = \frac{-w_1(w_2 - 1)}{8}, w_2(0, \epsilon) = 0.$$

Рисунки 4.1, 4.2 отображают численные сравнения решений исходной и конечной систем, то есть до преобразований и после применения методов, при значении малого параметра $\epsilon = 0.1$.

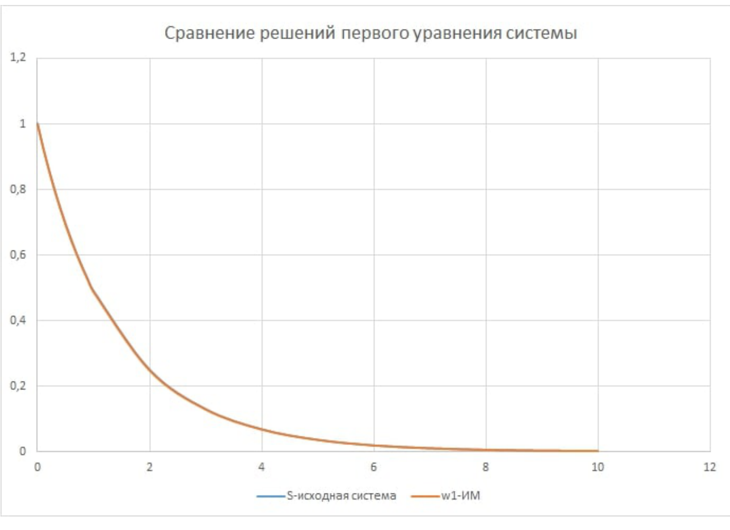


Рис. 4.1. Сравнение решений для первого уравнения задачи до и после построения интегрального многообразия при $\epsilon = 0,1$

Fig. 4.1. Comparison of solutions for the first equation of the problem before and after constructing the integral varieties for $\epsilon = 0,1$

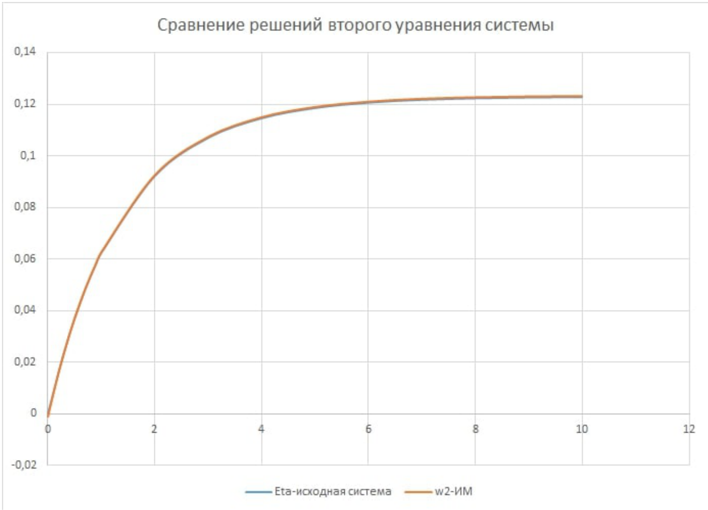


Рис. 4.2. Сравнение решений для второго уравнения задачи до и после построения интегрального многообразия при $\epsilon = 0,1$

Fig. 4.2. Comparison of solutions for the second equation of the problem before and after constructing the integral varieties for $\epsilon = 0,1$

Заключение

Данная статья включает в себя применение методов декомпозиции и интегральных многообразий к модели из второго случая, описанного в фундаментальной монографии Mathematical Biology. Метод декомпозиции сокращает размерность исходной системы, метод интегральных многообразий вводит так называемые многообразия, существенно упрощающие сложность вычислительных операций. Сравнение численных решений задач при значении малого параметра $\epsilon = 0,1$ приводится графически.

Литература

[1] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 320 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259. EDN: https://elibrary.ru/ryrtfh.

[2] Murray J.D. Mathematical Biology I. An Introduction. New York: Springer. 2001. 551 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b98868.

[3] Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 256 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15211477. EDN: https://elibrary.ru/muwrwb.

[4] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. Москва: Наука, 1988. 256 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30130147. EDN: https://elibrary.ru/zjiugb.

[5] Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно возмущённых систем. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР, Сиб. отд-ние, 1988. 154 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=48397980. EDN: https://elibrary.ru/ruopbm.

[6] Щепакина Е.А. Интегральные многообразия, траектории-утки и тепловой взрыв // Вестник Самарского государственного университета. 1995. Спец. вып. С. 10–19.

[7] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2001. Vol. 44, Issue 7. Pp. 897–908. DOI: https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0.

[8] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singulary perturbed system // Systems & Control Letters. 1984. Vol. 5, Issue 3. Pp. 169–179. DOI: https://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.

[9] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. Москва: Наука, 1973. 512 с. URL: https://reallib.org/reader?file=789024&ysclid=lnslze77hh615738.

[10] Knobloch H.-W., Aulbach B. Singular perturbations and integral manifolds // Journal of Mathematical and Physical Sciences. 1984. Vol. 18, Issue 5. Pp. 415–424. URL: https://zbmath.org/0587.34044.

[11] Seiler N., Jung M.J., Koch-Weser J. Enzyme-activated Irreversible Inhibitors. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 1978. 426 p.

[12] Walsh C.T. Suicide substrates, mechanism-based enzyme inactivators: recent developments. // Annual Review of Biochemistry. 1984. Vol. 53. Pp. 493-–535. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev.bi.53.070184.002425.

[13] Berding C., Keymer A.E., Murray J.D., Slater A.F.G. The population dynamics of acquired immunity to helminth infections // Journal of Theoretical Biology, 1986, vol. 122, issue 4, pp. 459–471. DOI: https://doi.org/10.1016/S0022-5193(86)80186-2.

[14] Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. Москва: Магистр, 1998. 658 с.

[15] Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г. Структурные преобразования и пространственная декомпозиция дискретных регулируемых систем – метод квазирасщепления // Техническая кибернетика, 1986. № 6, С. 118–128.

[16] Коровин С.К., Мамедов И.Г., Мамедова А.П. Равномерная по малому параметру устойчивость и стабилизация дискретных сингулярно возмущенных динамических систем // Техническая кибернетика, 1989. № 1. С. 21–29.

[17] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математ. сборник (новая серия). 1952. Т. 31 (73). С. 575–586. URL: https://www.mathnet.ru/rus/sm5548.

[18] Задирака К.В. О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Украинский математический журнал. 1965. Т. 17, № 1. С. 47–63.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-57-63

Submited: 14.07.2023
Revised: 21.08.2023
Accepted: 30.10.2023

M.A. Smetannikov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: ssmetannikoff@gmal.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6744-2222

APPLICATION OF DECOMPOSITION AND INTEGRAL MANIFOLDS TO THE SINGULARLY PERTURBED PROBLEM OF KINETICS OF SUICIDE SUBSTRATE

ABSTRACT

The purpose of this work is to reduce the singularly perturbed system of kinetics of a suicidal substrate. Methods of decomposition and integral manifolds are used. The dimension of the original problem is reduced. The obtained equations on the integral manifold are analyzed for stability. An example is given of comparing the numerical solutions of the original system and those obtained after reducing the dimensionality using the above methods.

Key words: differential equations; decomposition method; integral manifolds; cooperative phenomenon; enzyme kinetics; suicide substrate.

Citation. Smetannikov M.A. Application of decomposition and integral manifolds to the singularly perturbed problem of kinetics of suicide substrate. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 57–63. DOI: http:/doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-57-63. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Mikhail A. Smetannikov — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Conrol Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Reduction of models and critical phenomena in macrokinetics. Moscow: FIZMATLIT, 2010, 320 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259. EDN: https://elibrary.ru/ryrtfh. (In Russ.)

[2] Murray J.D. Mathematical Biology I. An Introduction. New York: Springer, 2001, 551 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b98868.

[3] Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometric decomposition of singularly perturbed systems. Moscow: FIZMATLIT, 2009, 256 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=15211477. EDN: https://elibrary.ru/muwrwb. (In Russ.)

[4] Strygin V.V., Sobolev V.A. Separation of motions by the method of integral manifolds. Moscow: Nauka, 1988, 256 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=30130147. EDN: https://elibrary.ru/zjiugb. (In Russ.)

[5] Goldshtein V.M., Sobolev V.A. Qualitative analysis of singularly perturbed systems. Novosibirsk: In-t matematiki AN SSSR, Sib. otd-nie, 1988, 154 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=48397980. EDN: https://elibrary.ru/ruopbm. (In Russ.)

[6] Shchepakina E.A. Integral manifolds, duck trajectories and heat explosion. *Vestnik of Samara University*, 1995. Special edition. P. 10–19. (In Russ.)

[7] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2001, vol. 44, issue 7, pp. 897–908. DOI: https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0.

[8] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singulary perturbed system. *Systems & Control Letters*, 1984, vol. 5, issue 3, pp. 169–179. DOI: https://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.

[9] Mitropolskiy U.A., Lykova O.B. Integral manifolds in nonlinear mechanics. Moscow: Nauka, 1973, 512 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=789024&ysclid=lnslze77hh615738. (In Russ.)

[10] Knobloch H.-W., Aulbach B. Singular perturbations and integral manifolds. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 1984, vol. 18, issue 5, pp. 415–424. Available at: https://zbmath.org/0587.34044.

[11] Seiler N., Jung M.J., Koch-Weser J. Enzyme-activated Irreversible Inhibitors. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 1978, 426 p.

[12] Walsh C.T. Suicide substrates, mechanism-based enzyme inactivators: recent developments. *Annual Review of Biochemistry*, 1984, vol. 53, pp. 493–535. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev.bi.53.070184.002425.

[13] Berding C., Keymer A.E., Murray J.D., Slater A.F.G. The population dynamics of acquired immunity to helminth infections. *Journal of Theoretical Biology*, 1986, vol. 122, issue 4, pp. 459–471. DOI: https://doi.org/10.1016/S0022-5193(86)80186-2.

[14] Bobylev N.A., Emelyanov S.V., Korovin S.K. Geometric methods in variational problems. Moscow: Magistr, 1998, 658 p. (In Russ.)

[15] Emelyanov S.V., Korovin S.K., Mamedov I.V. Structural transformations and spatial decomposition of discrete controlled systems: quasi-decoupling method. *Tekhn. kibern.*, 1986, no. 6, pp. 118–128. (In Russ.)

[16] Korovin S.K., Mamedov I.G., Mamedova A.P. Uniform over a small parameter stability and stabilization of discrete singularly perturbed dynamic systems. *Tekhn. kibern.*, 1989, no. 1, pp. 21–29. (In Russ.)

[17] Tikhonov A.N. Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1952, vol. 31 (73), pp. 575–586. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/sm5548. (In Russ.)

[18] Zadiraka K.V. On the nonlocal integral manifold of an irregularly perturbed differential system. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1965, vol. 17, no. 1, pp. 47–63. (In Russ.)

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71

УДК 517.574; 517.982.1; 517.55; 517.987.1

Дата: поступления статьи: 03.08.2023
после рецензирования: 06.09.2023
принятия статьи: 30.10.2023

Б.Н. Хабибуллин

Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук, Уфа, Российская Федерация
E-mail: khabib-bulat@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1308-4461

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ОГИБАЮЩИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НА ОБЛАСТИ[1]

АННОТАЦИЯ

Одна из распространенных задач в различных областях вещественного и комплексного анализа — вопросы существования и построения для заданной функции огибающей ее снизу или сверху функции из специального класса H. Рассматривается случай, когда H — выпуклый конус всех субгармонических функций на области D из конечномерного евклидова пространства над полем вещественных чисел. Для пары субгармонических функций u и M из этого выпуклого конуса H устанавливаются двойственные необходимые и достаточные условия, при которых найдется субгармоническая функция $h \not\equiv -\infty$, «гасящая рост» функции u в том смысле, что значения суммы $u+h$ в каждой точке из D не больше значения функции M в той же точке. Эти результаты предполагается применить в дальнейшем в вопросах нетривиальности весовых классов голоморфных функций, к описанию нулевых множеств и множеств единственности для этих классов, к проблемам аппроксимации в теории функций и т. д.

Ключевые слова: субгармоническая функция; нижняя огибающая; упорядоченное пространство; векторная решетка; проективный предел; линейное выметание; мера Йенсена; голоморфная функция.

Цитирование. Хабибуллин Б.Н. Субгармонические огибающие для функций на области // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 64–71. DOI: http://doi.org/ 10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Булат Нурмиевич Хабибуллин — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела теории функций и функционального анализа, Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

1. Формулировка основного результата

Множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ соответственно *натуральных, вещественных, комплексных чисел,* $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ и *расширенная вещественная прямая* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \emptyset$, $+\infty := = \sup \mathbb{R} = \inf \emptyset$ для *пустого множества* $\emptyset$, рассматриваются с их естественными алгебраическими, геометрическими, топологическими структурами.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ размерности $d \in \mathbb{N}$ рассматривается с *евклидовой нормой*

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}, \quad (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

и *d-мерной мерой Лебега* $\mathfrak{m}_d$.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Для пары *расширенных вещественных функций* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ пишем $f \leqslant g$ *на* D, если $f(x) \leqslant g(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Через $C(X)$ обозначаем *векторное пространство над* $\mathbb{R}$ *непрерывных функций* на топологическом пространстве X со значениями в $\mathbb{R}$.

Всюду далее буквой $D \subset \mathbb{R}^d$ обозначаем *область*, т. е. связное открытое подмножество в $\mathbb{R}^d$, а также $\overline{B}_o(r) := \bigl\{x \in \mathbb{R}^d \bigm| |x-o| \leqslant r\bigr\}$ — *шар радиуса* $r > 0$ *с центром* $o \in \mathbb{R}^d$.

Подмножество H векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ называется *конусом*, если $tH \subset H$ при всех $0 < t \in \mathbb{R}$. Если дополнительно конус H содержит нулевой вектор, т. е. $tH \subset H$ при всех $0 \leqslant t \in \mathbb{R}$, то H — *конус с вершиной в нуле.* Конус H *выпуклый,* если H — выпуклое подмножество, т. е. имеет место включение $tH + (1-t)H \subset H$ при любых $0 < t < 1$. Таким образом, H — *выпуклый конус с вершиной в нуле*, если $tH \subset H$ при всех $0 \leqslant t \in \mathbb{R}$ и $H + H \subset H$.

Через $\mathsf{Meas}_0^+(D)$ обозначаем *выпуклый конус всех положительных конечных борелевских мер с компактным носителем в* D, $\mathsf{sbh}(D)$ — *выпуклый конус всех субгармонических на* D *функций,* который включает в себя функцию, тождественно равную $-\infty$ на D. Все необходимые здесь сведения о субгармонических функциях можно почерпнуть из [1; 2].

Как и в монографии [3], если интеграл от функции по мере μ существует и принимает значение из $\overline{\mathbb{R}}$, то эту функцию называем интегрируемой по мере μ, или *μ-интегрируемой,* а если этот интеграл еще и конечен, т. е. со значением в $\mathbb{R}$, то эту функцию называем суммируемой по мере μ, или *μ-суммируемой.*

Понятия суммируемости или интегрируемости интегралов, а также равенств $\overset{a.e.}{=}$ и неравенств $\overset{a.e.}{\leqslant}$ почти всюду без указания меры относятся ниже именно к мере Лебега $\mathfrak{m}_d$.

Всякая *постоянная* $c \in \overline{\mathbb{R}}$ часто рассматривается и как *функция, тождественно равная* c. Так, для функции $u\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ запись $u \neq -\infty$ означает, что функция u не тождественная $-\infty$ на D. Через

$$\mathsf{sbh}_*(D) := \bigl\{u \in \mathsf{sbh}(D) \bigm| u \neq -\infty\bigr\} \tag{1.1}$$

обозначаем выпуклый конус с вершиной в нуле всех субгармонических функций на области D, не равных тождественно $-\infty$.

Для расширенной вещественной функции $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ ее *полунепрерывная сверху регуляризация* $f^*\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ определяется как

$$f^*(x) := \limsup_{x' \to x} f(x'), \quad x \in D.$$

Функция $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ *локально ограничена сверху на* D, если

$$\sup_{x \in K} f(x) < +\infty$$

для каждого компакта $K \subset D$. Функция $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ *локально интегрируема на* D по мере $\mathfrak{m}_d$, если существует интеграл

$$\int_K f \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d \in \overline{\mathbb{R}}$$

для каждого компакта $K \subset D$, а если все интегралы здесь конечны, т. е. принимают значения из $\mathbb{R}$, то функция f *локально суммируема на* D. Каждая функция $u \in \mathsf{sbh}_*(D)$ локально суммируема на D.

Наше исследование опирается на функционально-аналитические результаты из [4; 5], где достаточно детально изложена и история вопроса с обширной библиографией. Здесь для выпуклых подконусов $H \subset \mathsf{sbh}(D)$ они применяются для двойственного описания условий, при которых для пары субгармонических функций $u, M \in \mathsf{sbh}_*(D)$ и непрерывной функции $m \in C(D)$ найдется субгармоническая функция $h \in \mathsf{sbh}_*(D)$, с которой $u + h \leqslant M + m$ на D. Наши основные результаты можно трактовать и как частный случай решения поставленных в [4, п. 2.3, задача 3; 5, раздел 1.2; п. 1.2.3, задача 3] общих проблем о существовании огибающей из выпуклых конусов.

Теорема 1. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^d$ содержит замкнутый шар $\overline{B}_o(r)$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $o \in D$, а также заданы пара субгармонических функций $u, M \in \mathsf{sbh}_*(D)$ на D вместе с непрерывной функцией $m \in C(D)$. Определим класс мер*[2]

$$J_o^r(D) := \left\{\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D) \;\middle|\; \int_{\overline{B}_o(r)} h \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int_D h \,\mathrm{d}\mu \quad \forall h \in \mathsf{sbh}(D)\right\}. \tag{1.2}$$

Для существования функции $h \in \mathsf{sbh}_*(D)$, с которой выполнены неравенства

$$u(x) + h(x) \leqslant m(x) + M(x) \quad \forall x \in D, \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало число $C \in \mathbb{R}$, для которого

$$\int_D u \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_D (m + M) \,\mathrm{d}\mu + C \quad \forall \mu \in J_o^r(D). \tag{1.4}$$

[2]Класс $J_o^r(D)$ в терминах из [4–6] — это класс всех линейных выметаний сужения $\mathfrak{m}_d$ на $\overline{B_o}(r)$ относительно $\mathsf{sbh}(D)$.

Доказательство необходимости в теореме 1. В силу полунепрерывности субгармонических функций u, h и M они μ-интегрируемы по любой борелевской положительной мере $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$ с компактным носителем на D. Интегрирование неравенства (1.3) по положительной мере $\mu \in J_o^r(D)$ с компактным носителем влечет за собой интегральное неравенство

$$\int_D u\,\mathsf{d}\mu + \int_D h\,\mathsf{d}\mu \leqslant \int_D m\,\mathsf{d}\mu + \int_D M\,\mathsf{d}\mu,$$

откуда по определению (1.2) класса $J_o^r(D)$ получаем

$$\int_D u\,\mathsf{d}\mu + \int_{\overline{B}_o(r)} h\,\mathsf{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int_D m\,\mathsf{d}\mu + \int_D M\,\mathsf{d}\mu \quad \text{для всех } \mu \in J_o^r(D). \tag{1.5}$$

Каждая субгармоническая на D функция h локально $\mathfrak{m}_d$-суммируема [1], ввиду чего

$$c := \int_{\overline{B}_o(r)} h\,\mathsf{d}\mathfrak{m}_d \in \mathbb{R},$$

где число $c \in \mathbb{R}$ не зависит от меры $\mu \in J_o^r(D)$. Последнее вместе с (1.5) влечет за собой неравенство

$$\int_D u\,\mathsf{d}\mu \leqslant \int_D (m+M)\,\mathsf{d}\mu - c \quad \text{для всех } \mu \in J_o^r(D).$$

Положив здесь $C := -c \in \mathbb{R}$, получаем требуемое (1.4).

Необходимость в теореме 1 доказана.

Доказательство достаточности в теореме 1 потребует определенной подготовки и представлено в последнем разделе 3. Для этого потребуется один общий результат по двойственному описанию нижней огибающей относительно выпуклого конуса — теорема A, приведенная ниже в разделе 2.

Наиболее важен в теореме 1 для применений к голоморфным функциям в духе [4; 5] уже случай, когда $m = 0$. Случай нулевой функции $M = 0$, т. е. единственной непрерывной функции $m \in C(D)$ в правой части (1.3), ранее был полностью разобран в [4, следствие 8.1; 5, следствие 3.2.1; 6, теорема 7.2]. Результат теоремы 1 перекликается с исследованиями по двойственному описанию нижних огибающих из работ [9–11] и многих последующих, если рассматривать нижнюю субгармоническую огибающую для функции $M + m - u$ в предположении локальной ограниченности функции u снизу, поскольку в этих работах всегда рассматривались нижние субгармонические огибающие исключительно для локально ограниченных сверху функций. Но в наиболее актуальном для дальнейших применений варианте $u = \ln|f|$, где f — *голоморфная на области $D \subset \mathbb{C}$ функция хотя бы с одним корнем,* функция $\ln|f|$ не ограничена снизу в окрестностях корней.

2. Двойственное описание огибающей относительно выпуклого конуса в проективном пределе векторных решеток

Упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ над $\mathbb{R}$ с отношением порядка $\leqslant$, рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, называется *векторной решеткой,* если для любого *конечного* $F \subset X$ существует *точная верхняя грань* в X, обозначаемая далее как $X\text{-}\sup F \in X$ (подробнее в [7; 8]).

Множество всех функций $f\colon X \to Y$, действующих из X в Y с областью определения на всем X, обозначаем далее через Y^X. Для векторных решеток X и Y через lin^+Y^X обозначаем *выпуклый конус линейных положительных,* или *возрастающих, функций* $l\colon X \to Y$. Другими словами, $l \in \mathsf{lin}^+Y^X$, если для любого положительного в X вектора x вектор $l(x)$ положительный в Y.

Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность *векторных решеток* X_n с отношениями порядка соответственно $\leqslant_n$, т. е. последовательность пар $(X_n, \leqslant_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ей соответствует произведение

$$\prod X_n := \prod_{n=0}^{\infty} X_n,$$

для которого при $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \prod X_n$ полагаем $\mathsf{pr}_n x = x_n \in X_n$ — *проекция* вектора $x \in \prod X_n$ на пространство X_n. По определению $x \leqslant x'$ в $\prod X_n$, если $\mathsf{pr}_n x \leqslant_n \mathsf{pr}_n x'$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$.

Пусть $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность линейных положительных функций $p_n \in \mathsf{lin}^+X_n^{X_{n+1}}$ из X_{n+1} в X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, для которой предполагаем *сохранение точной верхней грани для конечных подмножеств,* а именно:

$$X_n\text{-}\sup p_n(F_{n+1}) = p_n\bigl(X_{n+1}\text{-}\sup F_{n+1}\bigr)$$

для каждого конечного $F_{n+1} \subset X_{n+1}$. Тогда следующее подпространство в произведении $\prod X_n$, обозначаемое как

$$X := \operatorname{pr}\lim X_n p_n := \Big\{ x \in \prod X_n \;\Big|\; \operatorname{pr}_n x = p_n(\operatorname{pr}_{n+1} x)\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \Big\},$$

с тем же отношением порядка $\leqslant$, что и на $\prod X_n$, — векторная решетка, называемая *проективным пределом последовательности* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *векторных решеток по* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Не умаляя общности, можно считать [4, предложение 3.1; 5, предложение 2.1.1], что

$$\operatorname{pr}_n X := \big\{ \operatorname{pr}_n x \;\big|\; x \in X \big\} = X_n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}_0,$$

т. е. проекции pr_n из проективного предела $X = \operatorname{pr}\lim X_n p_n$ на X_n *сюръективны.*

Подмножество $B \subset X$ *ограничено снизу (сверху) в* X, если существует вектор $x \in X$, для которого $x \leqslant b$ (соответственно $b \leqslant x$) для всех $b \in B$ и B *ограничено в* X, если B ограничено и снизу, и сверху.

Теорема A [4, теорема 2, следствия 6.1 и 3.1; 5, теорема 2.4.1, следствия 2.4.1 и 2.1.1]. *Пусть* $H \subset X := \operatorname{pr}\lim X_n p_n$ *— выпуклый конус с вершиной в нуле, а для любой ограниченной в* X *последовательности* $\big(h^{(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ *векторов* $h^{(k)} \in H$ *существует принадлежащий* H *верхний предел*

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H. \tag{2.1}$$

Пусть $S \subset X$ *— векторное подпространство, содержащее* H*, и при каждом* $n \in \mathbb{N}_0$ *для любого* $s_n \in \operatorname{pr}_n S$ *найдется такое* $h_n \in \operatorname{pr}_n H$*, что* $h_n \leqslant_n s_n$*.*

Пусть выбрана линейная положительная функция $q_0 \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$ *на* X_0*, и для суперпозиции*

$$q := q_0 \circ \operatorname{pr}_0 \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^X \tag{2.2}$$

при любой убывающей в X *последовательности* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *с* $h^{(k)} \in H$ *при условии конечности*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

эта последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *ограничена снизу в* X *и*

$$q\big(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\big) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}). \tag{2.4}$$

Тогда для каждого $s \in S$ *величина*

$$\sup\big\{ q(h) \;\big|\; H \ni h \leqslant s \big\} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{2.5}$$

равна величине

$$\inf\Big\{ (l_n \circ \operatorname{pr}_n)(s) \;\Big|\; n \in \mathbb{N}_0, l_n \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{\operatorname{pr}_n S}, q(h) \leqslant (l_n \circ \operatorname{pr}_n)(h)\ \forall h \in H \Big\} \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.6}$$

В частности, если при заданном $s \in S$ *величина* (2.6) *не равна* $-\infty$*, то не равна* $-\infty$ *величина* (2.5) *и, следовательно, найдется вектор* $h \in H$*, огибающий снизу* s *в том смысле, что* $h \leqslant s$*.*

3. Доказательство достаточности в теореме 1

Сведем рассмотрение достаточности в теореме 1 к теореме A. Для этого выберем *исчерпание области* $D \subset \mathbb{R}^d$ последовательностью $(D_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ областей $D_n \subset \mathbb{R}^d$, для которого $\overline{B}_o(r) \subset D_0$, *замыкание* $\operatorname{clos} D_n$ области D_n содержится в области D_{n+1} при каждом $n \in \mathbb{N}_0$, т. е.

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_n, \quad \overline{B}_o(r) \subset \operatorname{clos} D_n \subset D_{n+1} \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}_0.$$

Для $n \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим пространство $X_n := L^1(\operatorname{clos} D_n)$ суммируемых на $\operatorname{clos} D_n$ по $\mathfrak{m}_d$ функций с отношением поточечного предпорядка $\leqslant_n^{a.e.}$, факторизацию которого по отношению $=^{a.e.}$ обозначим через X_n, где $\leqslant_n^{a.e.}$ уже отношение порядка. В качестве линейных положительных функций $p_n \in \operatorname{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$ выберем *сужения «функций» из* X_{n+1} *на* $\operatorname{clos} D_{n+1}$*,* которые становятся уже векторами из X_n. Проективный предел $\operatorname{pr}\lim X_n p_n$ здесь — это факторизованное по отношению $=^{a.e.}$ пространство локально суммируемых на D по $\mathfrak{m}_d$ функций с отношением порядка $\leqslant^{a.e.}$, которое обозначаем через $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. В качестве выпуклого конуса $H \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ выберем выпуклый конус

$$H := \operatorname{sbh}_*(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D). \tag{3.1}$$

Полунепрерывная сверху регуляризация верхнего предела последовательности субгармонических функций на области, если этот верхний предел не равен $-\infty$, с одной стороны, дает субгармоническую функцию, а с другой — отличается от верхнего предела разве что на множестве нулевой $\mathfrak{m}_d$-меры, и даже полярном [1; 2]. Поэтому для этого конуса $H=\mathsf{sbh}_*(D)$ выполнено условие теоремы A, завершающееся равенством и принадлежностью к H из соотношений (2.1). Положим

$$S:=C(D)+H-H=C(D)+\mathsf{sbh}_*(D)-\mathsf{sbh}_*(D)\subset L^1_{\mathrm{loc}}(D) \tag{3.2}$$

— векторное подпространство в $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Пусть $s_n\in \mathsf{pr}_n S$, т. е. $s_n=g_n+h_n-h_n'$, где g_n — непрерывная функция из $C(\operatorname{\mathsf{clos}} D_n)$, а функции $h_n\in\mathsf{pr}_nH$ и $h_n'\in\mathsf{pr}_nH$ — сужения на $\operatorname{\mathsf{clos}}D_n$ функций из выпуклого конуса $H=\mathsf{sbh}_*(D)$ из (3.1). Тогда существуют *положительные числа* c и c', для которых $g_n\geqslant -c$ на $\operatorname{\mathsf{clos}}D_n$ и $h_n'\leqslant_n c'$ на $\operatorname{\mathsf{clos}}D_n$. Следовательно, $h_n-c-c'\leqslant_n s_n$, где $h_n\in\mathsf{pr}_nH$, а также постоянная $-c-c'\in\mathbb R$ принадлежит pr_nH, поскольку каждая постоянная — субгармоническая функция. Таким образом, выполнены условия теоремы A для выбранного в (3.2) подпространства $S\subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$.

В качестве линейной положительной функции $q_0\in \mathsf{lin}^+\mathbb R^{X_0}$ в теореме A выберем сужение меры $\mathfrak m_d$ на $\overline B_o(r)$ в том смысле, что

$$q_0(f_0):=\int_{\overline B_o(r)} f_0\,d\mathfrak m_d\in\mathbb R \quad \text{для всех } f_0\in X_0=\mathsf{pr}_0L^1_{\mathrm{loc}}(D)=L^1(\operatorname{\mathsf{clos}}D). \tag{3.3}$$

При таком выборе q_0 линейная положительная функция q, определенная в (2.2), действует по правилу

$$q(f)=\int_{\overline B_o(r)} f\,d\mathfrak m_d\in\mathbb R \quad\text{для всех } f\in L^1_{\mathrm{loc}}(D). \tag{3.4}$$

Функция $u\colon D\to\overline{\mathbb R}$ *почти субгармоническая* на D, если она почти всюду совпадает с некоторой субгармонической функцией на D [12]. Для *произвольной убывающей почти всюду последовательности* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb N}$ почти субгармонических на D функций $h^{(k)}$ условие (2.3) согласно (3.4) означает, что

$$\inf_{k\in\mathbb N}\int_{\overline B_o(r)} h^{(k)}\,d\mathfrak m_d=\inf_{k\in\mathbb N}q(h^{(k)})\in\mathbb R, \tag{3.5}$$

т. е. точная нижняя грань левой части (3.5) *конечна.* Отсюда предел этой последовательности дает почти субгармоническую функцию на D, т. е. это верно для убывающей последовательности $(h^{(k)})_{k\in\mathbb N}$ из конуса $H=\mathsf{sbh}_*(D)$. Верхний предел (2.1) убывающей последовательности — это точная нижняя грань этой последовательности. Поэтому для последовательностей $(h^{(k)})_{k\in\mathbb N}$ при условии (3.5) получаем

$$-\infty\neq\inf_{k\in\mathbb N}h^{(k)}\in H=\mathsf{sbh}_*(D).$$

В частности, при условии (3.5) убывающая последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb N}$ из H, очевидно, ограниченная сверху функцией $h^{(1)}$, ограничена и снизу функцией

$$\inf_{k\in\mathbb N}h^{(k)}\in H.$$

При этом можем считать все функции $h^{(k)}$ полунепрерывными сверху. Для убывающей последовательности таких функций $\inf_{k\in\mathbb N}$ можно внести под знак интеграла:

$$\inf_{k\in\mathbb N}\int_{\overline B_o(r)} h^{(k)}\,d\mathfrak m_d=\int_{\overline B_o(r)}\inf_{k\in\mathbb N}h^{(k)}\,d\mathfrak m_d.$$

Согласно (3.5) это означает выполнение равенства

$$q\bigl(\inf_{k\in\mathbb N}h^{(k)}\bigr)=\inf_{k\in\mathbb N}q(h^{(k)})\quad\text{для } q:=q_0\circ\mathsf{pr}_0,$$

что даже сильнее соответствующего неравенства (2.4). Тем самым выполнены все требуемые условия теоремы A и можем приступить к трактовке равных друг другу величин (2.5) и (2.6) для проективного предела векторных решеток $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ и конуса (3.1) при условии (1.4) теоремы 1. Теперь, если из условия (1.4) теоремы 1 выведем, что величина (2.6) с учетом (3.2) и (3.1) для функции

$$s:=m+M-u\in S:=C(D)+H-H=C(D)+\mathsf{sbh}_*(D)-\mathsf{sbh}_*(D)\subset L^1_{\mathrm{loc}}(D), \tag{3.6}$$

не равна $-\infty$, то по заключительной части теоремы A это будет означать, что найдется некоторая функция $h\in H=\mathsf{sbh}_*(D)$, для которой $h\leqslant^{a.e.} s=m+M-u$ на D, или, в эквивалентной форме, $u+h\leqslant^{a.e.} m+M$ на D. Отсюда в силу субгармоничности функций u,h,M [1],[2] и непрерывности функции m легко следует, что $u+h\leqslant m+M$ *всюду на* D, что и дает требуемое неравенство (1.3).

Осталось показать, что при условии (1.4) теоремы 1, записанном в равносильной форме как

$$\inf_{\mu\in J_o^r(D)}\left(\int_D(m+M)\,d\mu-\int_D u\,d\mu\right)>-\infty, \tag{3.7}$$

величина (2.6) не равна $-\infty$.

Точную нижнюю грань в (2.6) для функции $s := m + M - u$ из (3.6) можно записать как

$$\inf\Big\{(l_n \circ \mathsf{pr}_n)(m+M) - (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(u) \;\Big|\; n \in \mathbb{N}_0, l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}, q(h) \leqslant (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(h), h \in H\Big\}. \tag{3.8}$$

При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}_0$ здесь l_n пробегают часть $\mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}$ для подпространства $S = C(D) + H - H$ из (3.2). Тогда обязательно $l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n C(D)} = \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{C(\mathsf{clos}\, D_n)}$, откуда по теореме Рисса l_n на $C(\mathsf{clos}\, D_n)$ реализуется на пространстве $C(\mathsf{clos}\, D_n)$ как некоторая положительная конечная мера Бореля μ на D с компактным носителем в $\mathsf{clos}\, D_n$. Требование из (2.6) вида $q(h) \leqslant (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(h)$ при всех $h \in H$ для $q = q_0 \circ \mathsf{pr}_0$ согласно (3.3) в терминах меры μ можно записать как требование

$$\int_{\overline{B}_o(r)} h \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int_D h \,\mathrm{d}\mu \quad \text{при всех } h \in H \cap C(D) \tag{3.9}$$

из определения класса $J_o^r(D)$ в (1.2), поскольку мера $\mu \geqslant 0$ с компактным носителем в D продолжается однозначно на все субгармонические функции, которые становятся μ-интегрируемыми ввиду возможности представить их как предел убывающей последовательности непрерывных субгармонических на D функций. Это, в частности, влечет за собой конечность интегралов

$$\int_D h \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } h \in H = \mathsf{sbh}_*(D).$$

Следовательно, полученные таким образом меры $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$, удовлетворяющие (3.9), корректно определены и принимают конечные значения на выпуклом конусе

$$C(D) + H = C(D) + \mathsf{sbh}_*(D) \supset \mathsf{sbh}_*(D).$$

В частности, функции из $C(D) + H$ суммируемы по мерам $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$, удовлетворяющим (3.9), а неравенство (3.9) верно для всех функций $h \in \mathsf{sbh}_*(D)$. Более того, это означает, что действие на $C(D) + H$ функций $l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}$, удовлетворяющих неравенству $q(h) \leqslant (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(h)$ для всех $h \in H$, при рассматриваемых конкретных выборах S как в (3.2), проекций pr_n как сужений на $\mathsf{clos} D_n$ и q как в (3.4), может быть реализовано в виде меры $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$ с носителем в $\mathsf{clos}\, D_n$, удовлетворяющей (3.9), но уже при всех $h \in H = \mathsf{sbh}\,(D)$. Другими словами, класс таких мер в действиях на $C(D) + H$ не уже класса функций $l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}$, участвующих в определении точной нижней грани (3.8). Отсюда сразу следует, что точная нижняя грань в (3.8) не меньше точной нижней грани в (3.7), которая не равна $-\infty$. Следовательно, и точная нижняя грань в (3.8) не равна $-\infty$, что завершает доказательство достаточности в теореме 1.

Литература

[1] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Москва: Мир, 1980. 304 с. URL: https://reallib.org/reader?file=470623&ysclid=lnu0g73fzc327282140.

[2] Hörmander L. Notions of Convexity. Boston: Birkhäser, 1994. 416 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4585-4.

[3] Эванс Л.К., Гариепи К.Ф. Теория меры и тонкие свойства функции. Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. 215 с. URL: https://djvu.online/file/NMAz58Vqw6Mi0?ysclid=lnu2ktxq8v26436524.

[4] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б. Порядковые версии теоремы Хана–Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Комплексный анализ. Математическая физика. Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Москва: ВИНИТИ РАН, 2019. Т. 162. С. 93–135. URL: https://www.mathnet.ru/rus/into445.

[5] Хабибуллин Б. Н. Огибающие в теории функций. Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. 140 с. URL: https://elib.bashedu.ru/dl/local/HabibullinBN_Ogib.v teor.funkci_mon_2021.pdf.

[6] Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Известия Российской Академии наук. Сер.: Математическая. 2001. Т. 65, № 5. С. 167–190. DOI: https://doi.org/10.4213/im361.

[7] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976. 254 с. URL: https://reallib.org/reader?file=443532&ysclid=lnu44io64k482315117.

[8] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978. 368 с. URL: https://reallib.org/reader?file=579705&ysclid=lnu4722y87509586531.

[9] Bu S., Schachermayer W. Approximation of Jensen Measures by Image Measures under Holomorphic Functions and Applications // Transactions of the American Mathematical Society. 1992. Vol. 331, Issue 2. Pp. 585–608. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2154129.

[10] Poletsky E. A. Disk envelopes of functions, II // Journal of Functional Analysis. 1999. Vol. 163, Issue 1. Pp. 111–132. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1998.3378.

[11] Cole B. J., Ransford T. J. Subharmonicity without Upper Semicontinuity // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 147. Issue 2. Pp. 420–442. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3070.

[12] Arsove M. G. Functions representable as differences of subharmonic functions // Transactions of the American Mathematical Society. 1953. Vol. 75. Pp. 327–365. DOI: https://doi.org/10.2307/1990736.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71

Submited: 03.08.2023
Revised: 06.09.2023
Accepted: 30.10.2023

B.N. Khabibullin
Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Federal Research Center
of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation
E-mail: khabib-bulat@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1308-4461

SUBHARMONIC ENVELOPES FOR FUNCTIONS ON DOMAINS[3]

ABSTRACT

One of the most common problems in various fields of real and complex analysis is the questions of the existence and construction for a given function of an envelope from below or from above of a function from a special class H. We consider a case when H is the convex cone of all subharmonic functions on the domain D of a finite-dimensional Euclidean space over the field of real numbers. For a pair of subharmonic functions u and M from this convex cone H, dual necessary and sufficient conditions are established under which there is a subharmonic function $h \not\equiv -\infty$, "dampening the growth" of the function u in the sense that the values of the sum of $u + h$ at each point of D is not greater than the value of the function M at the same point. These results are supposed to be applied in the future to questions of non-triviality of weight classes of holomorphic functions, to the description of zero sets and uniqueness sets for such classes, to approximation problems of the function theory, etc.

Key words: subharmonic function; lower envelope; ordered space; vector lattice; projective limit; linear balayage; Jensen measure; holomorphic function.

Citation. Khabibullin B.N. Subharmonic envelopes for functions on domains. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 64–71. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Bulat N. Khabibullin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, chief researcher of the Department of Theory of Functions and Functional Analysis, Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, 112, Chernyshevsky Street, Ufa, 450008, Russian Federation.

References

[1] Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions. Volume 1. Moscow: Mir, 1994, 304 p. (In Russ.)

[2] Hörmander L. Notions of Convexity. Boston: Birkhäser, 1994. 416 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4585-4.

[3] Evans L.C., Gariepy R.F. Measure Theory and Fine Properties of Functions. Novosibirsk: Nauchnaya kniga (IDMI), 2002, 215 p. Available at: https://djvu.online/file/NMAz58Vqw6Mi0?ysclid=lnu2ktxq8v26436524. (In Russ.)

[3]The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (scientific topic code FMRS-2022-0124)

[4] Khabibullin B.N., Rozit A.P., Khabibullina E.B. Order versions of the Hahn--Banach theorem and envelopes. II. Applications to the function theory, In: *Complex Analysis. Mathematical Physics, Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*. Moscow: VINITI RAN, 2019, vol. 162, pp. 93–135. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/into445. (In Russ.)

[5] Khabibullin B.N. Envelopes in the function theory. Ufa: RITs BashGU, 2021, 140 p. Available at: https://elib.bashedu.ru/dl/local/HabibullinBN_Ogib.v teor.funkci_mon_2021.pdf. (In Russ.)

[6] Khabibullin B.N. Dual representation of superlinear functionals and its applications in function theory. II. *Izvestiya: Mathematics*, 2001, vol. 65, issue 5, pp. 1017–1039. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2001v065n05ABEH000361. (In English; original in Russian)

[7] Kutateladze S.S., Rubinov A.M. Minkowski duality and its applications. Novosibirsk: Nauka, 1976, 254 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=443532&ysclid=lnu44io64k482315117. (In Russ.)

[8] Akilov G.P., Kutateladze S.S. Ordered vector spaces. Novosibirsk: Nauka, 1978, 368 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=579705&ysclid=lnu4722y87509586531. (In Russ.)

[9] Bu S., Schachermayer W. Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1992, vol. 331, issue 2, pp. 585–608. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2154129.

[10] Poletsky E.A. Disk envelopes of functions, II. *Journal of Functional Analysis*, 1999, vol. 163, issue 1, pp. 111–132. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1998.3378.

[11] Cole B.J., Ransford T.J. Subharmonicity without Upper Semicontinuity. *Journal of Functional Analysis*, 1997, vol. 147, issue 2, pp. 420–442. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3070.

[12] Arsove M.G. Functions representable as differences of subharmonic functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1953, vol. 75, pp. 327–365. DOI: https://doi.org/10.2307/1990736.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-72-78

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 24.07.2023
после рецензирования: 31.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

А.А. Абдушукуров
Московский государственный университет, филиал в г. Ташкенте, Ташкент, Узбекистан
E-mail: a_abdushukurov@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0994-8127
С.Б. Бозоров
Гулистанский государственный университет, Гулистан, Узбекистан
E-mail: suxrobbek_8912@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-8133-4963

СРАВНЕНИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ФУНКЦИИ ВЫЖИВАНИЯ

АННОТАЦИЯ

В статье проводится сравнение трех видов оценок: экспоненциальной, множительной и степенной структур для функции выживания при случайном цензурировании наблюдений справа. Ранее было установлено, что все эти три оценки при растущем объеме выборки эквивалентны, т. е. при одинаковой центровке и нормировке сходятся к одному и тому же гауссовскому процессу. Конкретно в выборке показано, что степенные оценки определены на всей прямой в отличие от экспоненциальной и множительных оценок. Следовательно, степенные оценки являются лучше, чем остальные две. Подвергнутые цензуре данные используются при анализе выживаемости, в биомедицинских испытаниях, в промышленных экспериментах. Существует несколько схем цензурирования (справа, слева, с обеих сторон, в сочетании с конкурирующими рисками и другими). Однако в статистической литературе широко распространено правостороннее случайное цензурирование, поскольку его легко описать с методологической точки зрения. В статье также рассмотрен этот вид цензурирования, чтобы сравнить наши результаты с другими исследованиями.

Ключевые слова: оценки; случайное цензурирование справа; функция выживания; доверительные полосы.

Цитирование. Абдушукуров А.А., Бозоров С.Б. Сравнение непараметрических оценок функции выживания // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 72–78. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-72-78.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Абдурахим Ахмедович Абдушукуров — профессор кафедры прикладной математики и информатики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, филиал в г. Ташкент, 100060, Узбекистан, г. Ташкент, пр. Амира Темура, 22.

Сухроб Баходирович Бозоров — докторант кафедры математики факультета информационных технологий, Гулистанский государственный университет, 120100, Узбекистан, Сырдарьинская область, г. Гулистан, 4 микрорайон, 1.

1. Предварительные сведения

Исследования непараметрических оценок, экспоненциальной, множительной и степенной структур показывают их асимптотическую эквивалентность (при $n \to \infty$). Некоторые отличительные свойства этих оценок проявляются при фиксированном объеме выборки, и они проведены в монографии [1].

Пусть $\{Z_j,\, j \geqslant 1\}$ и $\{Y_j, j \geqslant 1\}$ — взаимонезависимые последовательности, независимые и одинаково распределенные случайная величина с непрерывными функциями распределения H и G соответственно. Наблюдается выборка объема n:

$$C^{(n)} = \{(\xi_j, \Delta_j),\ \ 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

где

$$\xi_j = \min\left(Z_j; Y_j\right),$$
$$\Delta_j = \ \ I(Z_j \leqslant Y_j)$$

($I\,(A)$ — это индикатор события A.

1. Если $Z_j \leqslant Y_j$, то $\xi_j = \min\left(\mathrm{Z_j}; \mathrm{Y_j}\right) = \mathrm{Z_j}$, $\Delta_j = 1$, и в этом случае мы можем наблюдать Z;

2. Если $Y_j \leqslant Z_j$, то $\xi_j = \min\left(\mathrm{Z_j}; \mathrm{Y_j}\right) = \mathrm{Y_j}$, $\Delta_j = 0$, это будет случай цензурирования.

Задача состоит в оценивании функции выживания $1 - H(x)$ по выборке $C^{(n)}$ при мешающей функции распределения G. Для $1 - H$ справедливо представление [2]:

$$1 - H(x) = \exp(-\Lambda(x;1)),$$

где

$$\Lambda\,(x;1) = \int\limits_{(-\infty;x]} \left(1 - H\,(u-)\right)^{-1} dH\,(u) = \int\limits_{(-\infty;x]} \left(1 - N\,(u-)\right)^{-1} dM\,(u;1),$$
$$N\,(x) = P\,(\xi_j \leqslant x) = 1 - \left(1 - H\,(x)\right)\left(1 - G\,(x)\right) = M\,(x;1) + M\,(x;0)\,,$$
$$M\,(x;1) = P\,(\xi_j \leqslant x,\, \Delta_j = i)\,,\ i = 0;1.$$

$$\begin{gathered} H_{1n}\,(x) = 1 - \prod_{u \leqslant x} \exp\left\{-\tfrac{M_n(u;1) - M_n(u-;1)}{1 - N_n(u-)}\right\} = 1 - \exp\left(-\Lambda_n\,(x;1)\right), \\ H_{2n}\,(x) = 1 - \prod_{u \leqslant x} \exp\left\{1 - \tfrac{M_n(u;1) - M_n(u-;1)}{1 - N_n(u-)}\right\}, \\ H_{3n}\,(x) = 1 - \left(1 - N_n\,(x)\right)^{R_n(x)}, \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$R_n(x) \ \ = \Lambda_n(x;1)(\Lambda_n(x))^{-1},$$
$$\Lambda_n\,(x;1) = \int\limits_{(-\infty;x]} \left(1 - N_n\,(u-)\right)^{-1} dM_n\,(u;1)\,,$$
$$\Lambda_n\,(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \left(1 - N_n\,(u-)\right)^{-1} dN_n\,(u)\,,$$
$$N_n\,(x) = M_n\,(x;1) + M_n\,(x;0) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\,(\xi_j \leqslant x)\,,$$
$$M_n\,(x;i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\,(\xi_j \leqslant x, \Delta_j = i)\,,\ i = 0,1.$$

Таким образом, рассматриваемая модель является моделью случайного цензурирования справа Z_j при помощи Y_j, где Z_j наблюдаемы лишь при $\Delta_j = \ 1$.

Пусть $G_{1n}(x)$, $G_{2n}(x)$ и $G_{3n}(x)$ соответствующие оценки мешающей функции распределения $G(x)$, определяемые формулами (1) с заменой $M_n(x;1)$ на $M_n(x;0)$. В рассматриваемой модели $1 - N(x) = (1 - H(x))(1 - G(x))$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Однако для этих трех типов оценок имеем:

I.

$$(1 - H_{1n}(x))(1 - G_{1n}(x)) \ \ = \exp(-\Lambda_n(x)) \neq 1 - N_n(x)$$

и при

$$x \geqslant \xi_{(n)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\ \{\xi_i\}\,,$$
$$\max\left(H_{1n}(x); G_{1n}(x)\right) < 1.$$

II.

$$(1 - H_{2n}(x))(1 - G_{2n}(x)) \neq 1 - N_n(x)$$

и при

$$x \geqslant \xi_{(n)}$$

оценки $H_{2n}(x)$ и $G_{2n}(x)$ неопределенны.

III. Для степенных оценок

$$(1 - H_{3n}(x))(1 - G_{3n}(x)) = 1 - N_n(x)$$

и, следовательно, при $x \geqslant \xi_{(n)}$, $H_{2n}(x) = G_{2n}(x) = 1$.

Таким образом, для случая непрерывных распределений H и G, только оценки степенной структуры H_{3n} и G_{3n} являются идентифицируемыми с моделью. Для демонстрации свойств оценок (1) рассмотрим выборку объема $n = 97$ из работ [3; 5]. Это данные из центра уединения Ченнинг Хаус (Channing House) в г. Пало Альто (Palo Alto) в Калифорнии (США). Вариационный ряд, построенный по этим данным, есть:

(777;1), (781;0), (843;0), (866;0), (869;1), (872;1), (876;1), (893;1), (894;1), (895;0), (898;1), (906;0), (907;1), (909;1), (911;1), (911;0), (914;0), (927;1), (932;1), (936;0), (940;0), (942,5;0), (943;0), (945;1), (945;0), (948;1), (951;0), (953;0), (956;0), (957;1), (957;0), (959;0), (960;0), (966;1), (966;0), (969;1), (970;0), (971;1), (972;0), (973;0), (977;0), (983;1), (984;0), (985;1), (989;1), (992,5;1), (993;1), (996;1), (998;1), (1001;0), (1002;0), (1005;0), (1006;0), (1009;1), (1011,5;1), (1012;1), (1012;0), (1013;0), (1015;0), (1016;0), (1018;0), (1022;1), (1023;0), (1025;1), (1027;0), (1029;1), (1031;1), (1031;0), (1031,5;0), (1033;1), (1036;1), (1043;1), (1043;0), (1044;1), (1044;0), (1045;0), (1047;0), (1053;1), (1055;1), (1058;0), (1059;1), (1060;1), (1060;0), (1064;0), (1070;0), (1073;0), (1080;1), (1085;1), (1093;0), (1093,5;1), (1094;1), (1106;0), (1107;0), (1118;0), (1128;1), (1139;1), (1153;0).

Здесь данные представлены в месяцах, причем находящееся с рядом число 1 в парах означает нецензурирование (т. е. смерть), а 0 — цензурирование. При этом 46 человек умерли с начала открытия центра в 1964 году по 1 июля 1975 года ко дню сбора данных. Это нецензурированные данные. Из остальных данных о 51 человеке 5 были выписаны из центра, а 46 еще были живы к 1 июля 1975 года. Это цензурированные данные. По этим 97 данным приведены графики оценок $H_{m;97}(x)$, $m = 1, 2, 3$ на рис. 1–3 по отдельности и на рис. 4 вместе:

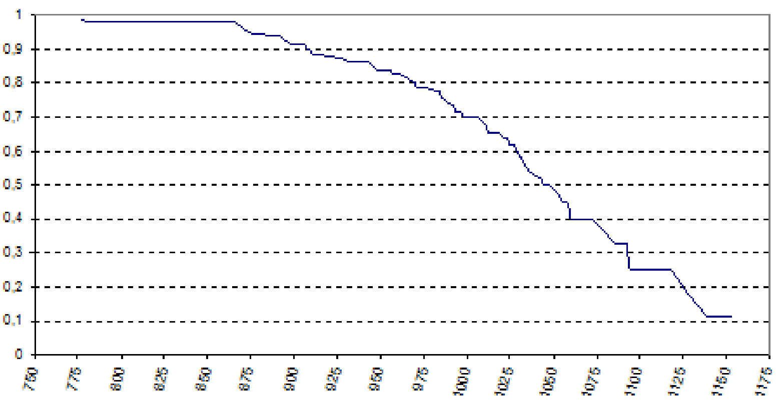


Рис. 1. Оценка $1 - H_{1;97}(x)$
Fig. 1. Estimator $1 - H_{1;97}(x)$

Из рисунков видно, что в отличие от экспоненциальных и множительных оценок только степенные оценки определены на всей прямой. Теперь при помощи оценок (1) построим доверительные полосы для неизвестной функции $1 - H(x)$. Для этого будем следовать работам [3; 4] и используем доверительные полосы вида

$$M^*_{mn}(x, \mu_1, \mu_2) = \left[\hat{M}^{(1)}_{mn}(x, \mu_1, \mu_2); M^{(2)}_{mn}(x, \mu_1, \mu_2)\right],$$

где $m = 1, 2, 3$,

$$\hat{M}^{(1)}_{mn}(x, \mu_1, \mu_2) = H_{mn}(x) - n^{-\frac{1}{2}}(1 - H_{mn}(x))\left(\mu_1 d_n^{\frac{1}{2}}(T) + \mu_2 \cdot \frac{d_n(x)}{d_n^{\frac{1}{2}}(T)}\right),$$

$$M^{(2)}_{mn}(x, \mu_1, \mu_2) = \frac{H_{mn}(x) + n^{-\frac{1}{2}}\left(\mu_1 d_n^{\frac{1}{2}}(T) + \mu_2 \frac{d_n(x)}{d_n^{\frac{1}{2}}(T)}\right)}{1 + n^{-\frac{1}{2}}\left(\mu_1 d_n^{\frac{1}{2}}(T) + \mu_2 \frac{d_n(x)}{d_n^{\frac{1}{2}}(T)}\right)},$$

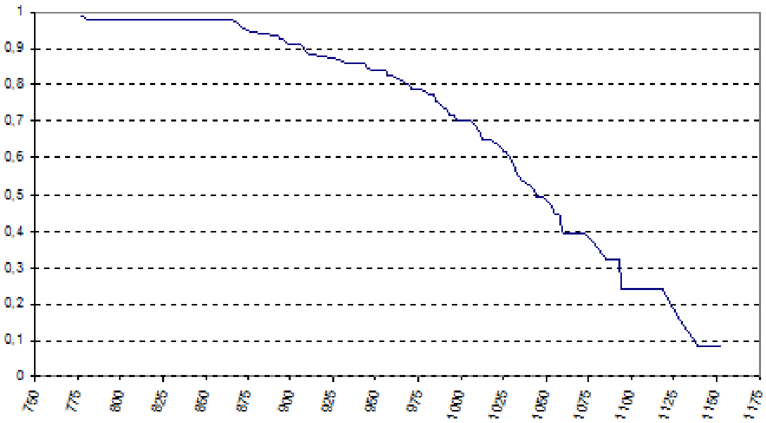


Рис. 2. Оценка $1 - H_{2;97}(x)$
Fig. 2. Estimator $1 - H_{2;97}(x)$

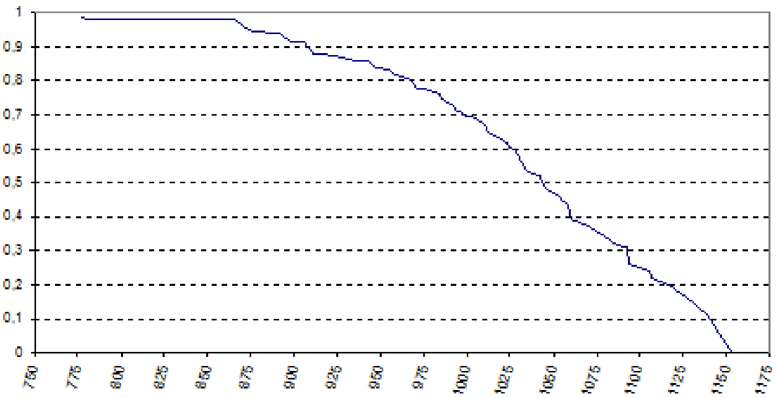


Рис. 3. Оценка $1 - H_{3;97}(x)$
Fig. 3. Estimator $1 - H_{3;97}(x)$

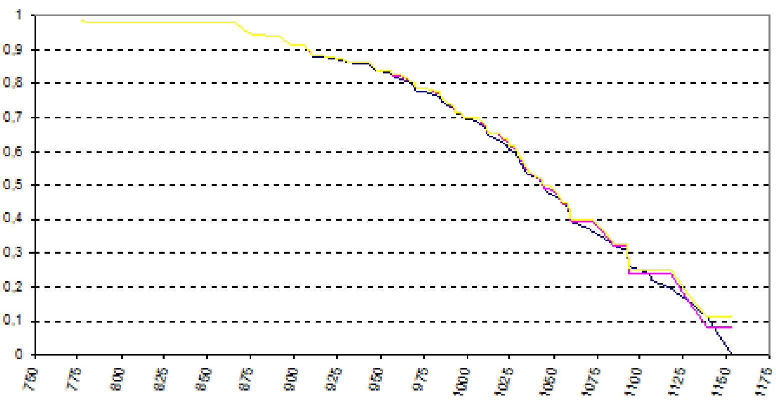


Рис. 4. Оценка $1 - H_{m;97}(x)$, $m = 1, 2, 3$
Fig. 4. Estimator $1 - H_{m;97}(x)$, $m = 1, 2, 3$

$T = 1128$; $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 1,37$ и $d_n(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - N_n(u-))^{-2} dM_n(u;1)$. Эти полосы для данных объема n=97 с использованием оценок (1) приведены на рис. 5–7.

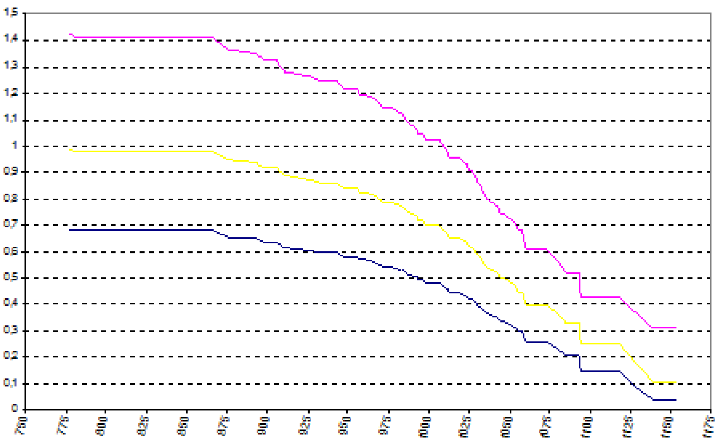


Рис. 5. Доверительные полосы $M_1{}^*{}_{;97}(x;1;1,37)$
Fig. 5. Confidence bands $M_1{}^*{}_{;97}(x;1;1,37)$

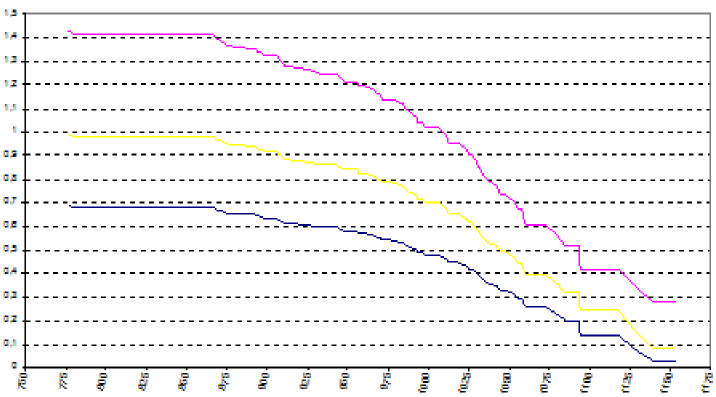


Рис. 6. Доверительные полосы $M_2{}^*{}_{;97}(x;\ 1;\ 1,37)$
Fig. 6. Confidence bands $M_2{}^*{}_{;97}(x;\ 1;\ 1,37)$

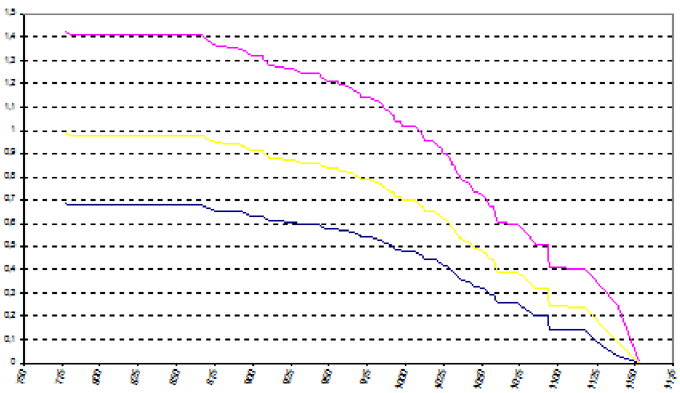


Рис. 7. Доверительные полосы $M_3{}^*{}_{;97}(x;\ 1;\ 1,37)$
Fig. 7. Confidence bands $M_3{}^*{}_{;97}(x;\ 1;\ 1,37)$

Заключение

Сравнивают три вида оценок: экспоненциальной, множительной и степенной для функции выживания при случайном цензурировании справа. Ранее была установлена асимптотическая эквивалентность этих трех видов оценок при растущем объеме выборки в смысле сходимости к одному и тому же гауссовскому процессу. Для конкретной конечной выборки объема $n = 97$ показаны некоторые преимущества степенной оценки по сравнению с остальными двумя. Следовательно, эта оценка лучше, чем остальные. Имеются численные примеры демонстрации результатов.

Литература

[1] Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений. Ташкент: Университет, 2009. 269 с.

[2] Abdushukurov A.A., Bozorov S.B., Nurmukhamedova N.S. Nonparametric Estimation of Distribution Function Under Right Random Censoring Based on Presmoothed Relative — Risk Function // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, vol. 42, no. 2, pp. 257–268. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221020049.

[3] Csörgő S. Estimating in the proportional hazards model of random censorship // Statistics. 1988. Vol. 19, Issue 3. Pp. 437–463. DOI: https://doi.org/10.1080/02331888808802115.

[4] Csörgő S., Horvath L. Confidence bands from censored samples // Canadian Journal of Statistics-revue Canadienne De Statistique. 1986. Vol. 14, Issue 2. Pp. 131–144. DOI: https://doi.org/10.2307/3314659.

[5] Efron B. Censored Data and the Bootstrap // Journal of the American Statistical Association, 1981, vol. 76, № 374, pp. 312–319. DOI: http://doi.org/10.2307/2287832.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-72-78

Submited: 24.07.2023
Revised: 31.08.2023
Accepted: 30.10.2023

A.A. Abdushukurov
Lomonosov Moscow State University, Tashkent branch, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: a_abdushukurov@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0994-8127
S.B. Bozorov
Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan
E-mail:suxrobbek_8912@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-8133-4963

COMPARISON OF NONPARAMETRIC ESTIMATES OF THE SURVIVAL FUNCTIONS

ABSTRACT

The article compares three types of estimates: exponential, multiplying and power structures for the survival function of three random censoring observations on the right. It was previously established that all these three estimates are equivalent with a growing sample size, i.e. three with the same centering and normalization converge to the same Gaussian process. For specific samples, it is shown that power estimates are defined on the entire line, in contrast to exponential and multiply estimates. Therefore, power estimates are better than the other two. Censored data is used in survival analyses, biomedical trials, and industrial experiments. There are several censoring schemes (right, left, both sides, combined with competing risks, and others). However, right-sided random censoring is common in the statistical literature because it is easy to describe from a methodological point of view. Here we also consider this type of censoring, to compare our results with others.

Key words: estimators; random censorship from the right; survival function; confidence bands.

Citation. Abdushukurov A.A., Bozorov S.B. Comparison of nonparametric estimates of the survival functions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 72–78. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-72-78. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Abdurakhim A. Abdushukurov — professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Lomonosov Moscow State University, Tashkent branch, 22, Amir Temur Street, Tashkent, 100060, Uzbekistan.

Sukhrob B. Bozorov — Doctoral student of the Department of Mathematics, Faculty of Information Technology, Gulistan State University, 4th House of Saodat Street in the neighborhood of Gulistan City Mevazor, Gulistan, 120100, Uzbekistan.

References

[1] Abdushukurov A.A. Statistics of incomplete observations. Tashkent: Universitet, 2009, 269 p. (In Russ.)

[2] Abdushukurov A.A., Bozorov S.B., Nurmukhamedova N.S. Nonparametric Estimation of Distribution Function Under Right Random Censoring Based on Presmoothed Relative - Risk Function. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 2, pp. 257–268. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221020049.

[3] Csörgő S. Estimating in the proportional hazards model of random censorship. *Statistics*, 1988, vol. 19, issue 3, pp. 437–463. DOI: https://doi.org/10.1080/02331888808802115.

[4] Csörgő S., Horvath L. Confidence bands from censored samples. *Canadian Journal of Statistics-revue Canadienne De Statistique*, 1986, vol. 14, № 2, pp. 131–144. DOI: https://doi.org/10.2307/3314659.

[5] Efron B. Censored Data and the Bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, 1981, vol. 76, no. 374, pp. 312–319. DOI: https://doi.org/10.2307/2287832.

 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-79-92

УДК 372.851; 373.41; 378.225

Дата: поступления статьи: 31.07.2023
после рецензирования: 04.09.2023
принятия статьи: 30.10.2023

В.Н. Аниськин
Самарский государственный социально-педагогический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: vnaniskin@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6102-1214
Д.К. Рахматуллина
МБОО СОШ с. Карновар, Пензенская область, Неверкинский район, село Карновар, Российская Федерация
E-mail: khusyainova.d@sgspu.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0000-2144-192X

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ И КОМПЕТЕНЦИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ХОЛИСТИЧНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

АННОТАЦИЯ

С позиций информационно-образовательного холизма Σ *ieh*, условий и особенностей переходного периода цифровой трансформации образования анализируется дидактический потенциал математического моделирования в формировании и развитии познавательных универсальных учебных действий (УУД) на уроках математики у школьников и универсальных компетенций (УК) при изучении математических и методико-математических дисциплин студентами вузов направления подготовки *Педагогическое образование.* На основе сочетаемости требований федеральных государственных образовательных стандартов среднего общего и высшего образования (ФГОС СОО и ФГОС ВО), определяющих условия и особенности формирования и развития универсальных учебных действий у школьников и универсальных компетенций у студентов — будущих учителей математики, определяется оптимизирующее влияние Σ *ieh* на эти процессы. Рассматриваются возможности математического моделирования как образовательной технологии, позволяющей повысить эффективность получения, усвоения и применения обучающимися новых предметных и методических знаний в условиях смешанного офлайн- и онлайн-обучения. Приводится модель информационно-образовательного холизма и примеры заданий.

Ключевые слова: цифровизация образования; математическое моделирование; информационно-образовательный холизм; холистичная образовательная среда; познавательные УУД; УК; подготовка учителей математики; развитие личностных качеств обучающихся.

Цитирование. Аниськин В.Н., Рахматуллина Д.К. Математическое моделирование как метод формирования познавательных универсальных учебных действий и компетенций обучающихся в условиях холистичной образовательной среды // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 79–92. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-79-92.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Владимир Николаевич Аниськин — кандидат педагогических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Самарский государственный социально-педагогический университет, 443099, Российская Федерация, г. Самара, ул. М. Горького, 65/67.

Диана Кадимовна Рахматуллина — учитель математики, МБОО СОШ села Карновар, 442485, Российская Федерация, Пензенская область, Неверкинский район, с. Карновар, ул. Школьная, 22.

Введение

Цифровая трансформация экономики и другие технологические процессы, обусловленные достижениями научно-технического прогресса, в полной мере способствуют созданию новых специализированных и универсальных информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), включая искусственно-интеллектуальные, квантовые и нейротехнологии, виртуальную и дополненную реальность, большие данные, робототехнику, сенсорику и другие SMART-технологии. Новое цифровое пространство, формируемое в соответствии с Программой «Цифровая экономика Российской Федерации» на период до 2024 года [1], определяет ученым, конструкторам, инженерам, производителям компьютерной техники, ИТ-специалистам и другим разработчикам те актуальные направления для адаптации, унификации и комплексирования традиционных, оптимизации современных и разработки перспективных конструкторско-технологических, программно-технических, эксплуатационно-пользовательских и иных решений, которые смогут обеспечить эффективность и продуктивность использования потенциала высоких цифровых технологий во всех отраслях и сферах нашего социума, включая систему образования.

Подобная «объективная и директивная» цифровизация российского образования, бурное развитие компьютерных SMART-средств, систем и технологий, иные организационные и содержательные инновационные изменения традиционных дидактико-социальных, а также предметно-специальных устоев и стереотипов обучения и воспитания школьников и студентов обусловливают необходимость адаптивной актуализации к новым реалиям ныне действующих и разработки новых вариантов ФГОС СОО и ФГОС ВО, определяют образовательным учреждениям всех уровней задачи формирования у обучающихся познавательных тех УУД [2] и УК [3], которые занимают ведущие места в процессах развития социально-технологических компетенций и цифровой культуры личности обучающегося [4].

Очевидно, что в таких условиях для учителей-предметников общеобразовательных школ и преподавателей вузов особенно актуальны поиск направлений универсализации и унификации компонентов образовательного процесса, преобразование уже существующих и разработка новых, приоритетных, и более совершенных учебно-воспитательных, информационно-дидактических, учебно-методических, культурно-просветительских, специально-практических, производственно-прикладных и других проектов, средств, методов, технологий и форматов как электронной информационно-образовательной среды, так и холистичной среды образовательного учреждения. При этом последнюю мы определяем как системно-интегративный комплекс традиционных, современных и перспективных цифровых и аналоговых средств обучения; «бумажных», электронных и сетевых учебных, воспитательных, методических, научных и иных информационных ресурсов; программных средств учебного назначения и программно-методических комплексов; современных бытовых гаджетов и др. SMART-устройств, предназначенных для получения необходимой информации, ее хранения и обеспечения преподавателям и студентам онлайн- и офлайн-доступа к информационным источникам; а также учебно-исследовательских и учебно-методических комплексов и другого оборудования кванториумов и технопарков образовательных учреждений, лабораторного и иного учебно-производственного оборудования.

Мнения ученых-педагогов и психологов относительно необходимости универсализации и унификации методов обучения школьников и технологий современной компетентностно-ориентированной подготовки студентов педагогических профилей для успешного формирования познавательных учебных действий их будущих учеников не всегда однозначны. Вместе с тем достаточно большое количество результатов исследований по данной тематике, полученных, например, А.Г. Асмоловым, Г.В. Бурменской, И.А. Володарской и др. [5]; П.Я. Гальпериным [6]; Н.М. Ждановой [7]; Т.Ю. Куликовой [8]; В.В. Мацюк [9]; Н.А. Скобелиной, И.В. Колосковой [10]; Л.П. Терентьевой, И.П. Ивановой [11], позволяют сделать вывод о целесообразности подобного холистичного интегрирования и универсализации как компонентов образовательно-воспитательной деятельности, так и результатов стандартизированной подготовки обучающихся. Т.Ю. Куликовой, на основе анализа публикаций по проблемам универсализации образования, целостное (холистичное) восприятие и познание мира учащимися, а также их готовность к творческому саморазвитию определяется как «способность строить взаимосвязи с миром на основе универсальных законов природы, эволюционных законов развития» и особо подчеркивается при этом то обстоятельство, что «...современная система образования акцентирует внимание на метапредметных трансдисциплинарных знаниях и универсальной учебной деятельности» [8].

1. Сочетаемость требований ФГОС СОО и ФГОС ВО к формированию УУД и УК

Из приведенных выше работ, а также других литературных источников известно, что по своему образовательно-дидактическому потенциалу, определяемому свойствами и функциями надпредметного (метапредметного) характера, УУД делятся на четыре основных вида: личностные, коммуникативные, регулятивные и познавательные [5; 9]. Такая же градация присутствует и в ныне действующем ФГОС СОО, определяющем компоненты УУД, осваиваемых школьниками в период их обучения в образовательном учреждении. Относительно УК, формируемых и развиваемых у студентов вузов направления подготовки *Педагогическое образование*, следует отметить, что обязательность этих компетенций включена в опубликованный проект ФГОС ВО 4-го поколения [12] с дополнением действующего ФГОС ВО (3++) базовыми компетенциями.

Поэтому вполне уместно предположить, что овладение УК выпускниками вуза означает их способность выполнять работу по формированию и развитию регулятивных, познавательных и коммуникативных УУД у школьников с использованием образовательного, информационно-дидактического и учебно-методического потенциала традиционных, современных и перспективных компьютерных SMART-средств, систем и технологий [13; 14]. Относительно же требований ФГОС СОО необходимо отметить, что, согласно этому стандарту, совокупность освоенных школьниками в период обучения межпредметных понятий с УУД определяет метапредметную составляющую общих результатов обучения выпускников в интеграции с личностными и предметными результатами [2].

Налицо органическая сочетаемость и явная корреляция в предписываемых ФГОС ВО и ФГОС СОО подходах к результатам обучения с позиций формирования УК у студентов вузов направления подготовки *Педагогическое образование* и УУД у учащихся общеобразовательных школ. При этом образовательные стандарты определяют вузам и школам задачи формирования у обучающихся таких УК и УУД, которые служат одной из основ для развития не только информационно-коммуникационных и социально-технологических компетенций, особенно важных в цифровом обществе, а в целом общей социальной и цифровой культуры личности [4; 15; 16].

Подобная сочетаемость директивных требований ФГОС СОО и ФГОС ВО наглядно подтверждает, что определение наиболее оптимального, комплексного и многофункционального набора универсальных средств, методов, систем и технологий образовательного назначения, в т. ч. традиционных «бумажных» и аналоговых технических средств обучения (ТСО), современных реальных и виртуальных компьютерных ИКТ, а также перспективных цифровых искусственно-интеллектуальных, квантовых и нейротехнологий, робототехнических и других SMART-устройств и комплексов, обладающих конструктивно-обусловленными (природными) образовательными, дидактическими и методическими свойствами и функциями, является актуальной проблемой современных педагогических, психологических, методических, гуманитарных, естественных, точных и других наук. Очевидно также, что такой набор образовательных технологических средств, устройств и комплексов является основой и системообразующим компонентом универсальной, целостной, холистичной образовательной среды, в условиях которой может быть в полной мере реализован системно-деятельностный подход, определяемый образовательными стандартами в качестве научно-методологической основы личностных, метапредметных и предметных результатов освоения основных образовательных программ (ООП) обучающимися [2; 3].

По сути, холистичная образовательная среда представляет собой многофункциональный комплекс средств, систем и технологий, оптимизирующий процессы формирования и развития у учащихся универсальных и многоплановых умений и навыков самостоятельного поиска и сбора учебной и иной информации, выдвижения гипотезы исследования и проведения ее экспериментальной проверки, умений делать выводы и умозаключения по результатам исследования, а также других важных учебных, учебно-методических и учебно-исследовательских действий и операций. Особенно важное место определение таких универсальных приемов и способов занимает в основном, среднем общем, среднем и высшем профессиональном образовании, так как именно на этих уровнях закладывается фундамент социальных, общекультурных и будущих профессиональных качеств обучающихся, формируются социально-технологическая и цифровая грамотность и культура личности человека [4], что еще раз наглядно подтверждает сочетаемость требований ФГОС СОО и ФГОС ВО к формированию УУД и УК.

Влияние информационно-образовательного холизма $\Sigma\ ieh$ на формирование познавательных УУД и УК

По нашему мнению, особую роль в процессах формирования вышеуказанных личностных качеств обучающихся может сыграть принцип информационно-образовательного холизма (information and education holizm — Σ *ieh*), который в рамках проблемы данного исследования определяется нами, в отличие от дефиниции, предлагавшейся ранее [17], как интеграция и комплексирование тех приемов и способов УУД школьников и категорий УК студентов, различных по своим дидактико-социальным, предметно-специальным и учебно-методическим функциям, но имеющим одну общую конечную цель — реализацию синергетического эффекта и принципа эмерджентности в решении образовательно-воспитательных задач в условиях холистичной образовательной среды за счет объединения всех компонентов потенциала инфраструктуры образовательного учреждения и его партнеров в единую общую систему, обладающую новыми качествами и возможностями для повышения эффективности формирования и развития УУД и УК. Считаем, что применимо к решению задач формирования УУД и УК потенциал Σ *ieh* способен оказывать оптимизирующее влияние, обеспечивая достижение целей школьной и вузовской подготовки учащихся за счет слияния отдельных составляющих (приемов и способов обучения и воспитания) в единую систему и упрощения возможностей достижения системного эффекта. Иными словами, интеграция и комбинация обучающих приемов и способов на основе Σ *ieh* могут дать гораздо больший общий эффект от применения УУД, чем простая сумма индивидуальных действий учащихся.

Структурная модель Σ *ieh* приведена на рис. 1.

Рис. 1. Модель информационно-образовательного холизма (Σ *ieh*) [17]
Fig. 1. Model of information and educational holism (Σ *ieh*) [17]

Гипотетическая формула потенциала *P(η)* Σ *ieh* могла бы иметь следующий вид:

$$P(\eta)\ \Sigma\ ieh = \frac{P\,(\eta)\ \ tle + P\,(\eta)\ \ eiee + P(\eta)\ \ ies}{N\ \ nuiee} 100\ \%,$$

где *P(η) tle* — потенциал (КПД) среды традиционного обучения (traditional learning environment), *P(η) eiee* — потенциал (КПД) электронной информационно-образовательной среды (electronic information and educational environment), *P(η) ies* — потенциал (КПД) информационно-образовательного пространства образовательного учреждения и его партнеров (information and educational space), *N nuiee* — количество пользователей (школьников, студентов, преподавателей, научных и других сотрудников) информационно-образовательной среды (пространства) образовательного учреждения (number of users of the information and educational environment).

Определяя целесообразность и преимущества *P(η)* Σ *ieh* холистичной образовательной среды в формировании УК у студентов — будущих педагогов и их подготовке к формированию и развитию УУД у школьников, стоит отметить, что по результатам опроса учителей наибольшие затруднения у обучающихся возникают при выполнении регулятивных (43 %) и познавательных УУД (57 %) [18]. Это дополнительно подтверждает наше предположение о том, что цифровая трансформация образования обусловливает необходимость создания новой системы универсальных знаний, умений, навыков и компетенций, которая позволит оптимизировать и адаптировать самостоятельную образовательную деятельность учащихся к реалиям цифрового общества. При этом особенно важное место в этой системе будет занимать социально-технологическая компетентность обучающихся, определяющая уровень их цифровой культуры как способности к правильной, «быстрой и умелой социальной ориентировке» [19] в цифровом обществе на основе УК и УУД, сформированных в процессе обучения, с быстрой и правильной рефлексивной реакцией на внешнее воздействие окружающей среды [4].

Очевидно также, что система УК у студентов вузов — будущих учителей-предметников может быть более эффективно сформирована с использованием $P(\eta)\ \Sigma\ ieh$ в процессе выполнения УУД совместно со школьниками, например, на педагогической практике или при организации внеучебных олимпиадных и конкурсных мероприятий и творческо-исследовательских проектов, которые означают в широком смысле «умение учиться, способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта» [4], а с более узкой (психологической) позиции рассматриваются как «совокупность способов действий обучающегося (а также связанных с ними навыков учебной работы), обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса» [4; 5; 15].

Мы считаем, что одно из главных мест в формировании компонентов УК и познавательных УУД у обучающихся должен занимать метод математического моделирования, так как, по изречению Михаила Васильевича Ломоносова «математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит» [Цит. по: 20]. Однако, к великому сожалению, приходится констатировать, что в последнее время из содержания начального, основного и среднего общего образования стали исключаться некоторые учебные предметы по математике, а ООП ВО, в рамках которых происходит подготовка будущих учителей математики, существенно сокращены в части математических дисциплин. Такое положение в системе российского образования не только сохраняется на протяжении надолго затянувшегося периода ее очередного реформирования, но и усугубляется, несмотря на очевидность важности математической подготовки для специалистов всех отраслей и сфер грядущего цифрового социума.

2. Метод математического моделирования в формировании познавательных УУД и УК

Проблемам содержательного наполнения структуры УУД наиболее продуктивными компонентами, определения психолого-педагогических условий формирования и развития этих качеств при обучении математике и применения дидактического потенциала математического моделирования при формировании познавательных УУД, подготовки и подборки учебно-диагностических заданий для выявления уровня сформированности УУД у обучающихся, их коррекции и мониторинга результатов освоения школьниками и студентами — будущими педагогами приемами и способами УУД в процессе обучения математике посвящены работы: О.В. Каликиной, А.В. Слепухина [21]; Л.В. Павловой [22]; Л.А. Погорельской [23]; Н.С. Подходовой [24]; Д.А. Романюк, Е.А. Суховеенко [25]; Н.А. Терешина [26] и других исследователей. Авторами этих работ определяются дидактические функции, обеспечивающие оптимизацию усвоения обучающимися метода и технологии математического моделирования на учебных и внеучебных занятиях по математике и другим предметам. Адаптируя их применимо к теме нашей статьи, можно выделить следующие основные дидактические функции математического моделирования, наиболее эффективные для формирования УУД и УК в условиях холистичной образовательной среды:

— когнитивную как функцию познания изучаемого объекта либо решения учебной задачи посредством математического или компьютерного моделирования для конструирования и проектирования модели, соответствующей реальному образу или условиям задачи с соблюдением дидактического принципа доступности обучения для определения кратчайшего, простого и понятного пути решения «от простого к сложному»);

— управленческую, при помощи которой возможно продуктивное выполнение учащимися и преподавателями таких универсальных действий, как: ориентировочные (построение модели, максимально приближенной по своим параметрам к условию задачи с последующим внесением в нее дополнительных элементов); контролирующие (сравнение самостоятельно созданной математической модели с рекомендуемой или эталонной моделью, приведенной в учебнике или учебно-методическом пособии, с сохранением варианта смоделированного объекта либо выполнением его преобразований); коммуникационные (оперирование моделью и рассмотрение ее с позиций различных вариантов решения задачи для пополнения и расширения как собственной информационной базы (опыта), так и объяснения (комментариев) приемов построения модели учителю и другим учащимся);

— интерпретационную, с помощью которой один и тот же объект или способы решения задачи можно представить различными вариантами математических моделей;

— эстетическую, способствующую реализации классических дидактических принципов наглядности, научности, доступности обучения и позволяющую формировать у обучающихся прилежание, усердие, ответственность, удовлетворение результатом и «чувство прекрасного» от создания не только полезной, но и «красивой» математической или компьютерной модели;

— функцию целенаправленного внимания для реализации принципа целесообразности обучения и обеспечения координации деятельности и сосредоточенности внимания учащихся на объекте моделирования;

— эвристическую функцию, с помощью которой построенная математическая модель позволяет учащемуся понять не только количественные характеристики и качественные стороны изучаемого объекта или алгоритма решения задачи, но и возможности применения модели для рассмотрения проблем в других науках и учебных предметах (надпредметный и метапредметный аспекты дидактического потенциала применения метода математического моделирования на уроках математики) [21–25].

На основе отмеченных функций можно утверждать, что математическое моделирование является наиболее оптимальным и эффективным средством для формирования и развития УУД и УК у обучающихся в условиях холистичной образовательной среды и перехода к цифровому образованию. Более того, моделирование рассматривается Н.С. Подходовой как одно из УУД при изучении математики в начальной школе [24], а К.В. Малышева считает, что УУД «главным образом формируются на уроках математики» [27], потому что именно на них у обучающихся развиваются посредством использования приемов моделирования такие свойства интеллекта личности, как: математическая интуиция, логическое и пространственное мышление, технический, комбинаторный и алгоритмический стили мышления, совершенствуется и развивается символьный язык математики. Мы поддерживаем подобный подход и уверены в том, что математическое моделирование занимает важнейшее место среди средств, методов и технологий недалекого цифрового и будущего кибернетического обучения.

Продолжая работу в рамках методико-дидактического направления, нами были проанализированы с опорой на статью П.Я. Гальперина [6] особенности формирования и развития познавательных УУД у школьников и УК у студентов с использованием математического моделирования как метода, позволяющего повысить эффективность получения, усвоения и применения новых знаний в условиях холистичной образовательной среды, интегрирующей аналоговые и компьютерные средства обучения, и особенностей цифровой трансформации образования. При этом в концептуальной последовательности определялась степень эффективности дидактического потенциала метода математического моделирования на таких этапах формирования познавательных УУД и УК, как:

— составление структурно-логической схемы (СЛС) или проектирование знаково-символьного варианта (ЗСВ) математической модели или последовательности (алгоритма) УУД для решения учебной задачи с возможностью оказания помощи педагогом в определении правильных направлений при выполнении задания как «знакомство со схемой ориентировочной основы действия» [6];

— корректировка СЛС (ЗСВ) познавательных УУД, выполняемая (при необходимости) учащимся совместно с учителем;

— решение учебной (исследовательской) задачи для получения ожидаемого результата согласно составленной ранее СЛС (ЗСВ) математической модели [28], или, как это определяется в терминологии П.Я. Гальперина, «выполнение учебного действия в материальном или материализованном виде» [6];

— внешнеречевое и внутриречевое действия учащегося при решении математической либо иной задачи (этап «проговаривания» выполняемых действий согласно СЛС (ЗСМ) математической модели с использованием «подсказки» учителя и «про себя») с поэтапным переходом к новым элементам модели при ее последовательном сокращении по мере выполнения частей задачи;

— проверка правильности решения задачи посредством выполнения «действий в умственном плане на этапе формирования умственных навыков, на котором происходит автоматизация действий, без слов, неосознанно» [6].

Для определения степени эффективности дидактического потенциала метода математического моделирования и его оптимизирующего влияния на формирование и развитие познавательных УУД у учеников основной школы на уроках математики нами были подобраны специальные задания, которые предстояло решить, предварительно смоделировав изучаемые объекты, условия и алгоритмы необходимых действий. Примеры таких задач приводятся ниже:

Задача 1. Составьте математические модели для следующих задач:

1. Спортивная площадка площадью 2400 кв. м огорожена забором длиной 200 м. Найдите длину и ширину этой площадки.

2. Можно ли разложить 96 кружков одинаковыми рядами так, чтобы рядов было на 16 меньше, чем кружков в каждом ряду?

3. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 54 км, вышли одновременно навстречу друг другу две группы туристов. Через 3 часа им оставалось пройти до встречи 9 км. Найдите, с какой скоростью шла каждая группа, если известно, что на весь путь первая затратила на 3 ч меньше второй.

4. Двузначное число в 7 раз больше суммы его цифр и на 52 больше произведения своих цифр. Найдите это число.

Среди данных систем найдите ту, которая отличается от трех других, и решите ее. Чем данная система отличается от других?

Решение: $\begin{cases} xy = 2400 \\ x + y = 100 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 16 \\ xy = 96 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 15 \\ \frac{54}{x} - \frac{54}{y} = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 10x + y = 7(x + y) \\ 10x + y - 52 = xy \end{cases}$.

Ученик должен выбрать третью систему, так как она является дробно-рациональной.

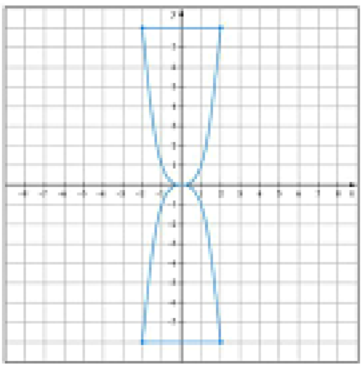
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \frac{54}{x} - \frac{54}{y} = 3 \end{cases};\begin{cases} x = 15 - y \\ \frac{54}{x} - \frac{54}{y} = 3 \end{cases};\begin{cases} x = 15 - y \\ \frac{54y - 54(15-y)}{y(15-y)} = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 15 - y \\ 54y - 54\,(15 - y) = 3y\,(15 - y) \\ y(15 - y) \neq 0 \end{cases};\begin{cases} x = 15 - y \\ 3y^2 + 63y - 810 = 0 \\ y(15 - y) \neq 0 \end{cases};\begin{cases} x = 15 - y \\ y^2 + 21y - 270 = 0 \\ y(15 - y) \neq 0 \end{cases};\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 15 - y \\ y = \frac{-21+39}{3} \\ x = 15 - y \\ y = \frac{-21-39}{3} \end{array}\right. \\ y(15 - y) \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 9 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 45 \\ y = -30 \end{array}\right. \\ y(15 - y) \neq 0 \end{cases}$$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: (6; 9).

Задача 2. Перед вами геометрическая фигура песочных часов, образованная графиками функций. Определите, графики каких функций изображены на рисунке. Найдите области определения и значения каждой функции.



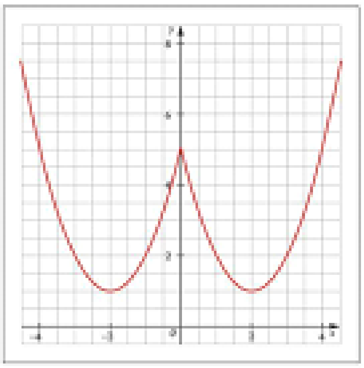
Ответ: Функции, представленные на графике: $y = x^3$; $y = -x^3$; $y = 7$; $y = -7$.
Область определения функций: $D(y) = [-2; 2]$.
Область значения функций: $E(y) = [-8; 8]$.

Задача 3. Не всегда жизненные задачи будут даваться вам в явном виде, и математические задачи не исключение. Попробуйте построить параболу и написать ее уравнение, не зная точных данных. Вам даны лишь следующие утверждения: у параболы 2 вершины; ось симметрии — ось Oy; на отрезке [0; 2] парабола убывает, а на луче (2; $+\infty$) — возрастает; ни один из коэффициентов не равен 0; ордината вершин равна 1.

Решение:

Приведенные задачи относятся нами к разряду дидактических материалов, позволяющих осуществлять формирование, развитие и диагностику уровня познавательных УУД школьников, так как обеспечивают коррекцию и мониторинг результатов освоения приемами и способами УУД в процессе обучения математике, в том числе и «средствами облачных электронных таблиц» [21]. Последнее свойство особенно актуально и значимо для формирования УУД и УК в условиях холистичной образовательной среды.

В процессах формирования и развития УК у будущих бакалавров и магистров педагогического образования в период их подготовки в вузе ведущая роль метода математического моделирования также очевидна. Причем в рамках ООП бакалавриата этот метод достаточно интенсивно применяется не только на аудиторных занятиях по математическим и другим дисциплинам, при выполнении курсовых (КР) и выпускных квалификационных работ (ВКР), а и во внеучебных научно-практических, конкурсных и олимпиадных мероприятиях с участием преподавателей и студентов. В качестве подобных при-



меров можно привести такие мероприятия и проекты, реализуемые факультетом математики, физики и информатики Самарского государственного социально-педагогического университета (ФМФИ СГСПУ), как:

— всероссийская (с международным участием) научно-практическая конференция «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования»;

— областной семинар учителей математики и физики «Школьное физико-математическое образование: перспективы развития» на базе Технопарка универсальных педагогических компетенций СГСПУ и учебных лабораторий кафедры физики, математики и методики обучения (ФМиМО) ФМФИ СГСПУ;

— региональный конкурс исследовательских работ и проектов школьников в области математики, прикладной математики «Математика вокруг нас»;

— ежегодный областной конкурс учебно-исследовательских проектов учащихся общеобразовательных учреждений «Мир твоих открытий»;

— студенческая профильно-предметная олимпиада «Неделя математики и физики ФМФИ»;

— межфакультетский студенческий конкурсе методических разработок «Я иду на урок...»;

— студенческий научно-методический кружок «Первые шаги в профессию» в самарских МБОУ СОШ № 6 и № 132 с целью погружения будущих педагогов в профессиональную деятельность учителя математики;

— программы дополнительного профессионального образования, реализуемые преподавателями ФМФИ СГСПУ: «Проектирование организации учебно-исследовательской и проектной деятельности обучающихся»; «Олимпиада как форма работы с одаренными детьми»; «Организация обучения с применением педагогических средств ЭИОС в школе».

Относительно развития УК у студентов магистратуры ФМФИ «Математика и информатика в условиях цифровизации образования» можно отметить, что на основе характеристики направления их подготовки к профессиональной деятельности, а также требований к результатам освоения ООП и ее структуре, содержащимися во ФГОС ВО, необходимость включения математических методов и методов компьютерного моделирования в содержание подготовки магистров педагогического образования в условиях холистичной образовательной среды не вызывает сомнения. С целью повышения эффективности формирования УК у будущих магистров-педагогов и повышения качества их подготовки в содержание названной ООП ВВО включен учебный курс «Математические методы и методы компьютерного моделирования в образовании».

При этом стоит отметить то обстоятельство, что условия холистичной образовательной среды, и в особенности такого компонента ее структуры, как современная ЭИОС вуза, обусловливают насущную необходимость интенсификации применения методов компьютерного и математического моделирования магистрантами в своих научных исследованиях при подготовке ВКР в форме магистерских диссертаций. Однако на основе нашего опыта, из практики их защит следует, что этим методам пока отводится лишь роль своеобразной «подручной» оснастки или дополнительного средства математической статистики для подтверждения гипотезы проводимого исследования. Особенно заметна на защитах магистерских диссертаций по направлению подготовки *Педагогическое образование* неоправданность некорректного (с математической точки зрения) применения известных статистических методов. Как нами уже отмечалось ранее в работе [28], основные ошибки (рис. 2), допускаемые магистрантами-педагогами при подготовке и защите своих диссертаций, выражаются в несоответствии используемых методов предлагаемой компьютерной или математической модели, а также между моделью и практикой, моделью и целью моделирования.

Мы считаем, что использование метода математического моделирования в формировании УК у выпускников педагогического бакалавриата, которые впоследствии поступают учиться в магистратуру, может способствовать повышению их подготовленности к недопущению таких ошибок.

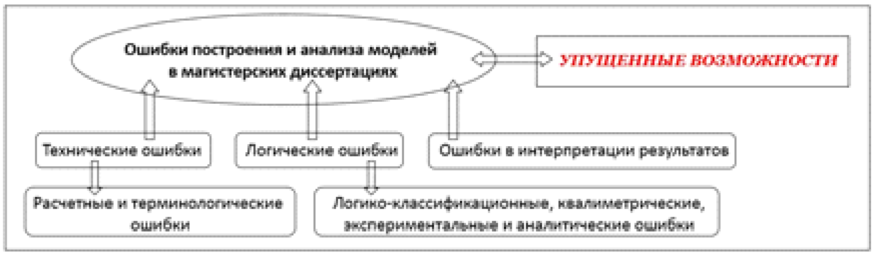


Рис. 2. Классификация основных ошибок, допускаемых магистрантами в диссертациях по педагогике
Fig. 2. Classification of the main mistakes made by undergraduates in dissertations on pedagogy

3. Результаты опытно-экспериментальной работы

Опытно-экспериментальная часть нашей работы по определению влияния метода математического моделирования на формирование и развитие познавательных УУД у школьников в условиях холистичной образовательной среды выполнялась как дипломное исследование в общеобразовательных школах Неверкинского района Пензенской области. В ней принимали участие обучающиеся основной школы — ученики 9-х классов в количестве 57 человек, включенных в 2 контрольные и 2 экспериментальные группы (классы). Работа состояла из традиционных этапов: констатирующего, формирующего и контрольного.

На первом из них в форме собеседования, решения контрольных задач и тестирования был определен начальный уровень познавательных УУД обучающихся. План работы формирующего этапа включал в себя оценку эффективности метода математического моделирования и его применение для формирования и развития познавательных УУД у девятиклассников на уроках математики с проведением диагностических срезов и последующей коррекцией действий учащихся и учителей, которым были предоставлены методические рекомендации, содержащие соответствующие задания, разработанные и подобранные нами применимо к теме исследования. Этот этап эксперимента проводился в течение двух четвертей 2022/23 учебного года.

Заключительный контрольный этап опытно-экспериментальной работы включал в себя итоговый диагностический срез по результатам формирующего этапа. Его целью являлось обобщение и сравнительный анализ результатов, полученных на предыдущих этапах эксперимента, а также составление и систематизацию выводов и заключений по проведенному исследованию. При этом участникам эксперимента давались соответствующие задания, позволяющие определить уровень сформированности познавательных УУД у обучающихся основной школы посредством применения метода математического моделирования.

Результаты итогового диагностического среза приведены на диаграмме (рис. 3):

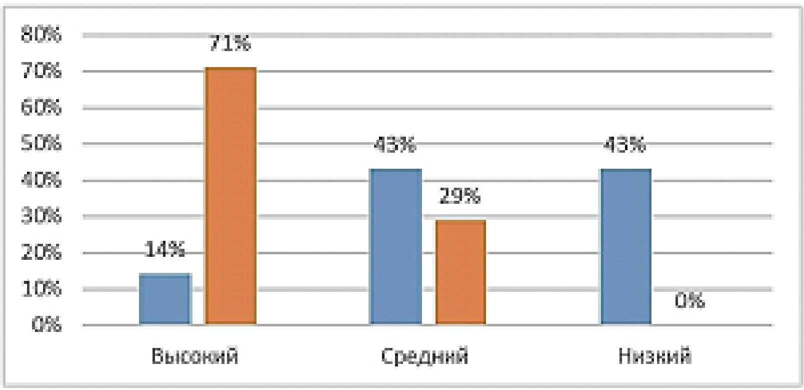


Рис. 3. Результаты влияния метода математического моделирования на формирование и развитие познавательных УУД у школьников в условиях холистичной образовательной среды
Fig. 3. Results of the influence of the method of mathematical modeling on the formation and development cognitive ULA in schoolchildren in a holistic educational environment

Из приведенной диаграммы следует, что данные сравнительного анализа результатов констатирующего и контрольного этапов опытно-экспериментальной работы показали увеличение высокого уровня сформированности познавательных УУД у обучающихся на 57 %, средний уровень УУД снизился на

12 %, а низкого уровня не осталось ни у одного из учащихся, входивших в экспериментальную группу. Таким образом, можно сделать вывод о том, что если в процессе обучения математике в холистичной образовательной среде основной школы используется метод математического моделирования, то процесс формирования и развития познавательных УУД у обучающихся станет гораздо эффективнее.

Эксперимент по определению степени эффективности применения метода математического моделирования для формирования и развития УК у студентов педагогического бакалавриата и магистратуры – будущих учителей математики в условиях холистичной образовательной среде вуза планируется провести в 2023/24 учебном году. Вместе с тем на основе наблюдений, результатов промежуточной и итоговой аттестации обучающихся и собственного опыта можно предположить, что он позволяет оптимизировать исследуемые процессы, а корреляция и сочетаемость УУД с УК позволяет говорить о них как об универсальном высокоэффективном инструментарии организации совместной деятельности учителей-предметников и обучающихся для решения задач формирования и развития личностных качеств подрастающего поколения при подготовке к жизни в цифровом информационном обществе.

Литература

[1] Программа "Цифровая экономика Российской Федерации" на период до 2024 года (утверждена распоряжением Правительства РФ от 28.07.2017. № 1632-р). URL: http://government.ru/docs/all/112831.

[2] Реестр примерных ООП Минпросвещения России. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Одобрен решением от 12.08.2022 № 732. URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1.

[3] Портал ФГОС ВО (3++) по направлениям бакалавриата // Образование и педагогические науки. URL: https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24/94.

[4] Богословский В.И., Аниськин В.Н., Добудько Т.В. Цифровая культура педагога сквозь призмы компьютерной грамотности и социально-технологической компетентности // Новые образовательные стратегии в современном информационном пространстве. Санкт-Петербург: РГПУ, имени А.И. Герцена, 2023. С. 259–264. URL: https://nesinmis.ru/bogoslovskiy-v-i/.

[5] Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. и др. Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе. От действия к мысли: пособие для учителя. Москва: Просвещение, 2008. 152 с. URL: https://asmolovpsy.ru/book/kak-proektirovat-universalnye-uchebnye-dejstviya-v-nachalnoj-shkole-ot-dejstviya-k-mysli-posobie-dlya-uchitelya/.

[6] Гальперин П.Я. Опыт изучения формирования умственных действий // Вестник Московского университета. Сер. 14: Психология. 2017. № 4. С. 3–20. DOI: http://doi.org/10.11621/vsp.2017.04.03.

[7] Жданова Н.М. Подготовка студентов к формированию личностных универсальных учебных действий у младших школьников // Вестник Шадринского государственного педагогического университета. 2018. № 1 (37). С. 24–28. URL: https://shgpi.edu.ru/files/nauka/vestnik/2018/1_37/5.pdf; https://elibrary.ru/item.asp?id=35076774. EDN: https://elibrary.ru/xqbttn.

[8] Куликова Т.Ю. К вопросу об актуальности универсализации образования // Философские, социологические и психолого-педагогические проблемы современного образования. 2019. № 1. С. 59–62. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=41254402. EDN: https://elibrary.ru/snwmyd.

[9] Мацюк В.В. Формирование универсальных учебных действий при обучении математике // Актуальные исследования. 2023. № 6–2 (136). С. 91–94. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=50238338. EDN: https://elibrary.ru/nioyur.

[10] Скобелина Н.А., Колоскова И.В. Универсализация образования: интеграция духовного и светского компонентов // Высшее образование сегодня. 2017. № 10. С. 30–33. DOI: https://doi.org/10.25586/RNU.HET.17.10.P.30. EDN: https://elibrary.ru/zrztqh.

[11] Терентьева Л.П., Иванова И.П. Особенности подготовки студентов к формированию познавательных универсальных учебных действий младших школьников // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева. 2018. № 4 (100). С. 268–275. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-podgotovki-studentov-k-formirovaniyu-poznavatelnyh-universalnyh-uchebnyh-deystviy-mladshih-shkolnikov.

[12] Опубликован макет ФГОС 4-го поколения. АНО ДПО "Учебно-консультационный центр". URL: https://ukc-nica.ru/novosti/opublikovan-maket-fgos-4-go-pokoleniya.html.

[13] Афанасьева И.Г. Проектно-ориентированная модель формирования универсальных компетенций будущих специалистов в условиях цифровой трансформации экономики // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. 2022. № 8 (171). С. 38–49. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49736319. EDN: https://elibrary.ru/kfmcgx.

[14] Первухина Е.Л., Шалимова Е.М. Проблемы унификации и универсализации учебных планов при подготовке отечественных ИТ-специалистов // Гуманитарный вестник. 2017. № 11 (61). С. 7. DOI: https://doi.org/10.18698/2306-8477-2017-11-489. EDN: https://www.elibrary.ru/xcyxrl.

[15] Аниськин В.Н., Рахматуллина Д.К. Применение математического моделирования для формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся // Естественные и гуманитарные науки в современном мире. Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2023. С. 377–381.

[16] Стародубцева В.С. Формирование универсальной компетенции самоорганизации и саморазвития студента вуза // Информация и образование: границы коммуникаций. 2022. № 14 (22). С. 424–426. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49227830. EDN: https://www.elibrary.ru/bvolsn.

[17] Аниськин В.Н., Аниськин С.В., Добудько Т.В., Пугач В.И. Модель информационно-образовательного холизма // Балтийский гуманитарный журнал. 2016. Т. 5, № 4 (17). С. 135–139. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28278410. EDN: https://www.elibrary.ru/xuvfrn.

[18] Липская Т.А. Универсальные учебные действия как содержательная единица ФГОС НОО, ООО, СОО // Современный урок в условиях внедрения ФГОС: опыт, проблемы, перспективы: сборник статей Всероссийской научно-методической конференции [Электронное издание]. Оренбург: Оренбургский государственный педагогический университет, 2017. С. 131–133. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28159835. EDN: https://www.elibrary.ru/xsftpt.

[19] Выготский Л.С. Собрание сочинений: в 6 т. Т. 3. Проблемы развития психики (под ред. А.М. Матюшкина). Москва: Педагогика, 1983. 369 с. URL: http://elib.gnpbu.ru/text/vygotsky_ss-v-6tt_t3_1983/.

[20] Депман И.Я. История арифметики: пособие для учителей. 2-е изд., испр. Москва: Просвещение, 1965. 416 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/depman_istoriya_arifmetiki_1965/p1/.

[21] Каликина О.В., Слепухин А.В. Специфика составления учебно-диагностических заданий для выявления уровня сформированности познавательных универсальных учебных действий обучающихся // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2019. № 4. С. 67–75. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38165376. EDN: https://www.elibrary.ru/idrvad.

[22] Павлова Л.В. Познавательные компетентностные задачи как средство формирования предметно-профессиональной компетентности будущего учителя математики // Известия Российского государственного педагогического университета имени А.И. Герцена. 2009. № 113. С. 169–174. URL: https://lib.herzen.spb.ru/text/pavlova_113_169_174.pdf.; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12872062. EDN: https://www.elibrary.ru/jtnhpt.

[23] Погорельская Л.А. Типовые задачи по формированию универсальных учебных действий на уроках математики // Концепт. 2013. № 9. С. 79–85. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20933353. EDN: https://www.elibrary.ru/rqcezp.

[24] Подходова Н.С. Моделирование как универсальное учебное действие при изучении математики // Начальная школа. 2011. № 9. С. 34–41. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17850364. EDN: https://www.elibrary.ru/paqcqp.

[25] Романюк Д.А., Суховеенко Е.А. Модель мониторинга формирования универсальных учебных действий в процессе обучения математике // Мир науки, культуры, образования. 2018. № 4 (71). С. 160–164. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35576077. EDN: https://www.elibrary.ru/xyvarf.

[26] Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: книга для учителя. Москва: Просвещение, 1990. 96 с. URL: https://sovietime.ru/matematika/napravlennost-kursa-matematiki-1990?ysclid=lnvqvwg1lm366324766.

[27] Малышева К.В. Психолого-педагогические условия формирования познавательных УУД у школьников при обучении математике в основной школе // Студенческий научный форум — 2019. URL: https://scienceforum.ru/2019/article/2018011487.

[28] Аниськин В.Н., Добудько Т.В., Пугач В.И., Пугач О.И. Математические методы и методы компьютерного моделирования как необходимые компоненты содержания подготовки магистров педагогического образования // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Сер.: Педагогика, психология. 2015. № 4 (23). С. 24–29. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25375788. EDN: https://www.elibrary.ru/vjhtml.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-79-92

Submited: 31.07.2023
Revised: 04.09.2023
Accepted: 30.10.2023

V.N. Aniskin
Samara State University of Social Science and Education, Samara, Russian Federation
E-mail: vnaniskin@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6102-1214
D.K. Rakhmatullina
Municipal budgetary educational institution secondary school of the village Karnovar, Neverkinsky district, Penza region, Russian Federation
E-mail: khusyainova.d@sgspu.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0000-2144-192X

MATHEMATICAL MODELING AS A METHOD OF FORMING COGNITIVE UNIVERSAL LEARNING ACTIONS AND COMPETENCES OF STUDENTS IN THE CONDITIONS OF A HOLISTIC EDUCATIONAL ENVIRONMENT

ABSTRACT

From the standpoint of information and educational holism Σ *ieh*, conditions and features of the transitional period of digital transformation of education, the didactic potential of mathematical modeling in the formation and development of cognitive universal learning activities (ULA) in mathematics lessons for schoolchildren and universal competencies (UC) in the study of mathematical and methodological methods is analyzed-mathematical disciplines by students of universities of the direction of preparation Pedagogical education. Based on the compatibility of the requirements of the federal state educational standards of secondary general and higher education (FSES SGE and FSES HE), which determine the conditions and features of the formation and development of universal learning activities in schoolchildren and universal competencies in students — future teachers of mathematics, the optimizing effect of Σ *ieh* on these processes. The possibilities of mathematical modeling are considered as an educational technology that makes it possible to increase the efficiency of obtaining, assimilation and application of new subject and methodological knowledge by students in conditions of mixed offline- and online-learning. A model of information and educational holism and examples of tasks are given.

Key words: digitalization of education; math modeling; information and educational holism; holistic educational environment; cognitive ULA; UC; training teachers of mathematics; development of personal qualities of students.

Citation. Aniskin V.N., Rakhmatullina D.K. Mathematical modeling as a method of forming cognitive universal learning actions and competences of students in the conditions of a holistic educational environment. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 79–92. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-79-92. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Vladimir N. Aniskin — Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor, dean of the Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Samara State University of Social Sciences and Education, 65/67, Maxim Gorky Street, Samara, 443099, Russian Federation.
Diana K. Rakhmatullina — teacher of mathematics, Municipal Budgetary General Educational Organization, Secondary School of the Village of Karnovar, 22, Shkolnaya Street, village Karnovar, Neverkinsky District, Penza Region, 442485, Russian Federation.

References

[1] Program "Digital Economy of the Russian Federation"for the period up to 2024 (approved by the order of the Government of the Russian Federation as of July 28, 2017 № 1632-p). Available at: http://government.ru/docs/all/112831/. (In Russ.)

[2] Register of exemplary educational programs of the Ministry of Education of Russia. Federal State Educational Standard of Secondary General Education. Approved by decision № 732 dated August 12, 2022. Available at: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1. (In Russ.)

[3] Portal of Federal State Educational Standard of Higher Education (3++) in the direction of Bachelor's programme. Education and Pedagogical Sciences. Available at: https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24/94. (In Russ.)

[4] Bogoslovsky V.I., Aniskin V.N., Dobudko T.V. Digital culture of the teacher through the prisms of computer literacy and socio-technological competence. In: *New educational strategies in the modern*

information space. Saint Petersburg: RGPU imeni A.I. Gertsena, 2023, pp. 259–264. Available at: https://nesinmis.ru/bogoslovskiy-v-i/. (In Russ.)

[5] Asmolov A.G., Burmenskaya G.V., Volodarskaya I.A. How to design universal learning activities in elementary school. From action to thought: a teacher's guide. Moscow: Prosveshchenie, 2008, 152 p. Available at: https://asmolovpsy.ru/book/kak-proektirovat-universalnye-uchebnye-dejstviya-v-nachalnoj-shkole-ot-dejstviya-k-mysli-posobie-dlya-uchitelya/. (In Russ.)

[6] Galperin P.Ya. Experience in studying the formation of mental actions. *Moscow University Psychology Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 3–20. DOI: http://doi.org/10.11621/vsp.2017.04.03. (In Russ.)

[7] Zhdanova N.M. To prepare students for the formation of personal universal educational actions of junior schoolchildren. *Journal of Shadrinsk State Pedagogical University*, 2018, no. 1 (37), pp. 24–28. Available at: https://shgpi.edu.ru/files/nauka/vestnik/2018/1_37/5.pdf; https://elibrary.ru/item.asp?id=35076774. EDN: https://elibrary.ru/xqbttn. (In Russ.)

[8] Kulikova T.Yu. To the question of the relevance of the universalization of education. *Philosophical, sociological and psycho-pedagogical problems of modern education*, 2019, no. 1, pp. 59–62. Availablr at: https://elibrary.ru/item.asp?id=41254402. EDN: https://elibrary.ru/snwmyd. (In Russ.)

[9] Matsuk V.V. Formation of universal educational actions in teaching mathematics. *Aktual'nye issledovaniya*, 2023, no. 6–2 (136), pp. 91–94. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=50238338. EDN: https://elibrary.ru/nioyur. (In Russ.)

[10] Skobelina N.A., Koloskova I.V. Universalization of education: integration of spiritual and secular components. *Higher education today*, 2017, no. 10, pp. 30–33. DOI: https://doi.org/10.25586/RNU.HET.17.10.P.30. EDN: https://elibrary.ru/zrztqh. (In Russ.)

[11] Terentyeva L.P., Ivanova I.P. On preparation of students to formation of cognitive general learning actions at younger schoolchildren. *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin*, 2018, no. 4 (100), pp. 268–275. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-podgotovki-studentov-k-formirovaniyu-poznavatelnyh-universalnyh-uchebnyh-deystviy-mladshih-shkolnikov. (In Russ.)

[12] 4th generation FSES model is published. Retrieved from the official website of ANO DPO "Training and Consulting Center". Available at: https://ukc-nica.ru/novosti/opublikovan-maket-fgos-4-go-pokoleniya.html. (In Russ.)

[13] Afanasyeva I.G. The project-oriented model of the formation of the universal competencies of future specialists in the context of the digital transformation of the economy. *Izvestia of the Volgograd State Pedagogical University*, 2022, no. 8 (171), pp. 38–49. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=49736319. EDN: https://elibrary.ru/kfmcgx. (In Russ.)

[14] Pervukhina E.L., Shalimova E.M. Problems of curricula unification and universalization in the Russian IT-specialists' education. *Humanities Bulletin of BMSTU*, 2017, no. 11 (61), p. 7. DOI: https://doi.org/10.18698/2306-8477-2017-11-489. EDN: https://www.elibrary.ru/xcyxrl. (In Russ.)

[15] Aniskin V.N., Rakhmatullina D.K. The use of mathematical modeling for the formation of cognitive universal learning activities for students. In: *Natural and humanitarian sciences in the modern world*. Oryol: OGU im. I.S. Turgeneva, 2023, pp. 377–381. (In Russ.)

[16] Starodubtseva V.S. Formation of universal competence of self-organization and self-development of university students. *Information and education: borders of communications*, 2022, no. 14 (22), pp. 424–426. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49227830. EDN: https://www.elibrary.ru/bvolsn. (In Russ.)

[17] Aniskin V.N., Aniskin S.V., Dobudko T.V., Pugach V.I. Information and education holizms model. *Baltic Humanitarian Journal*, 2016, vol. 5, no. 4 (17). pp. 135–139. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28278410. EDN: https://www.elibrary.ru/xuvfrn. (In Russ.)

[18] Lipskaya T.A. Universal educational actions as a content unit of the Federal State Educational Standard PGE, BGE, SGE. In: *Modern lesson in the context of the implementation of the Federal State Educational Standard: experience, problems, prospects: collection of articles of the all-Russian research and methodological conference (Electronic edition)*. Orenburg: Orenburgskii gosudarstvennyi pedagogicheskii universitet, 2017, pp. 131–133. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28159835. EDN: https://www.elibrary.ru/xsftpt. (In Russ.)

[19] Vygotsky L.S. Six-book set: Vol. 3: Problems of mental evolution (Matyushkin A.M. (Ed.)). Moscow: Pedagogika, 1983, 369 p. Available at: http://elib.gnpbu.ru/text/vygotsky_ss-v-6tt_t3_1983/. (In Russ.)

[20] Depman I.Ya. History of arithmetic: a guide for teachers. 2nd edition, revised. Moscow: Prosveshchenie, 1965, 416 p. Available at: https://www.mathedu.ru/text/depman_istoriya_arifmetiki_1965/p1/. (In Russ.)

[21] Kalikina O.V., Slepukhin A.V. Particularity of compositions of educational diagnostic tasks for detecting the level of formation of pupils cognative universal educatiional actions. *Aktual'nye voprosy prepodavaniya matematiki, informatiki i informatsionnykh tekhnologii*, 2019, no. 4, pp. 67–75. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38165376. EDN: https://www.elibrary.ru/idrvad. (In Russ.)

[22] Pavlova L.V. Cognitive competency problems as a way of forming of future mathematics teachers' professional subject competence. *Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences*, 2009, no. 113, pp. 169–174. Available at: https://lib.herzen.spb.ru/text/pavlova_113_169_174.pdf.; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12872062. EDN: https://www.elibrary.ru/jtnhpt. (In Russ.)

[23] Pogorelskaya L.A. Typical tasks for the formation of universal educational actions in mathematics lessons. *Scientific and methodological electronic journal "Koncept"*, 2013, no. T9, pp. 79–85. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20933353. EDN: https://www.elibrary.ru/rqcezp. (In Russ.)

[24] Podkhodova N.S. Modeling as a universal educational action in the study of mathematics. *Elementary School*, 2011, no. 9, pp. 34–41. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17850364. EDN: https://www.elibrary.ru/paqcqp. (In Russ.)

[25] Romanyuk D.A., Suhovienko E.A. Monitoring model of the formation of universal learning actions in the process of teaching mathematics. *World of Science, Culture and Education*, 2018, no. 4 (71), pp. 160–164. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35576077. EDN: https://www.elibrary.ru/xyvarf. (In Russ.)

[26] Tereshin N.A. Applied orientation of the school course of mathematics. Instructor's manual. Moscow: Prosveshchenie, 1990, 96 p. Available at: https://sovietime.ru/matematika/napravlennost-kursa-matematiki-1990?ysclid=lnvqvwg1lm366324766. (In Russ.)

[27] Malysheva K.V. Psychological and pedagogical conditions for the formation of cognitive universal educational actions in schoolchildren when teaching mathematics in basic school. *Student Scientific Forum – 2019*. Available at: https://scienceforum.ru/2019/article/2018011487. (In Russ.)

[28] Aniskin V.N., Dobudko T.V., Pugach V.I., Pugach O.I. Mathematical methods and computer-based simulation methods as the essential components of training masters of pedagogical education. *Science Vector of Togliatti State University. Series: Pedagogy, Psychology*, 2015, no. 4 (23), pp. 24–29. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25375788. EDN: https://www.elibrary.ru/vjhtml. (In Russ.)

 Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-93-99

Submited: 11.07.2023
Revised: 15.08.2023
Accepted: 30.10.2023

D.V. Ivanov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
Samara State University of Transport, Samara, Russian Federation
E-mail: dvi85@list.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5021-5259

ESTIMATION OF PARAMETERS OF AUTOREGRESSIVE MODELS WITH FRACTIONAL DIFFERENCES IN THE PRESENCE OF ADDITIVE NOISE[1]

ABSTRACT

For modeling in time series, models with fractional differences are widely used. The best known model is the ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average) model. It is known that for integer-order autoregressive models, autoregressive models with additive noise can outperform ARMA and autoregressive models in terms of accuracy. This article considers a class of autoregressive models with fractional order differences. The article presents a new method for estimating parameters autoregressive models with fractional differences in the presence of additive noise with an unknown variance of additive noise. The propose algorithm was realized in Matlab. The simulation results show the high efficiency of the propose algorithm.

Key words: Fractional difference; autoregressive model; total least squares; additive noise; unknown ratio of variances; generalized instrumental variables; long run memory.

Citation. Ivanov D.V. Estimation of parameters of autoregressive models with fractional differences in the presence of additive noise. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 93–99. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-93-99. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Dmitriy V. Ivanov — associate professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation; associate professor, Department of Information Technologies, Samara State University of Railway Transport, 2B, Svobody Street, 443066, Russian Federation.

Introduction

To describe processes of various nature, equations with derivatives are increasingly used. and differences of fractional order. Despite the lack of a simple interpretation, which give derivatives, integrals and differences of integers, models described by fractional-order equations, make it possible to accurately simulate many processes in physics and technology [1–4]. In connection with the active development and application of equations with differences and fractional derivatives for modeling and forecasting problems, methods for estimating systems have also begun to actively develop, describing fractional-order equations and differences.

Autoregressions with fractional differences are widely used in the analysis of time series with long memory [5; 6]. There are a large number of different models with generalizations of fractional differences,

[1]The work was carried out as part of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, agreement No. 075-02-2023-931.

such as Gegenbauer autoregressive moving average (GARMA) [7; 8], fractional ARUMA [9], seasonal autoregressive fractionally integrated moving average (SARFIMA) [10; 11], and autoregressive tempered fractionally integrated moving average (ARTFIMA) [12; 13]. Various aspects of using fractional differences for time series analysis have been considered [14; 15].

It is known that for autoregressive models of an integer order, autoregressive models with additive noise can exceed the accuracy of ARMA models and autoregressive models [16]. An overview of methods for estimating integer-order autoregressions in the presence of noise is presented in [17]. In the articles [8; 18; 19], the author considered the estimation of autoregressions with fractional-order differences in the presence of noise with a known noise ratio.

The article presents a new method for estimating parameters autoregressive models with fractional differences in the presence of additive noise with an unknown variance of additive noise.

1. Basic results

Time series, is described by linear stochastic equations with fractional order differences:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \zeta_i,\ y_i = z_i + \xi_i, \tag{1.1}$$

where $b^{(m)}$ are constant coefficients; $0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r$; $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$;

$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^j \left(\begin{array}{c} \alpha_m \\ j \end{array} \right) z_{i-j}$ is fractional difference;

$\left(\begin{array}{c} \alpha_m \\ j \end{array} \right) = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)}$ is generalized binomial coefficients.

It is required to estimate the unknown coefficients of the dynamic system described by (1.1) from the observed sequence $\{y_i\}$ with noise for the known orders r , α_m.

If r and, α_m are unknown, it is necessary to apply algorithms based on global optimization, such as genetic algorithms [8].

The following assumptions are introduced:

A1. The dynamic system (1) is asymptotically stable.

A2. Noises $\{\xi_i\}$ and $\{\zeta_i\}$ are statistically independent sequences with $\mathrm{E}\{\xi_i\} = 0$, $\mathrm{E}\{\zeta_i\} = 0$, $\mathrm{E}\left\{\xi_i^2\right\} = \sigma_\xi^2 < \infty$, $\mathrm{E}\left\{\zeta_i^2\right\} = \sigma_\zeta^2 < \infty$ a.s., where E is the expectation operator.

A3. The output sequence $\{z_i\}$, is independent of noise sequence $\{\xi_i\}$. The noise sequences $\{\xi_i\}$,$\{\zeta_i\}$ are mutually independent.

In [18], the following objective function was proposed for estimating the parameters:

$$\min_b \frac{\|Y - Cb\|_2^2}{1 + \gamma + b^T H_\xi b}, \tag{1.2}$$

where
$H_\xi^{(mk)} = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\begin{array}{c} \alpha_m \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \alpha_k \\ j \end{array} \right) \frac{N-j}{N}, m = \overline{1,r}, k = \overline{1,r}$,
$C = \left(\varphi_1^T \ldots \varphi_N^T\right) \in \mathbb{R}^{r\times N}, Y = (y_1 \ldots y_N) \in \mathbb{R}^N, b = \left(b^{(1)} \ldots b^{(r)}\right)^T \in \mathbb{R}^r$,
$\varphi_i = (\Delta^{\alpha_1} y_{i-1}, ..., \Delta^{\alpha_r} y_{i-1}) \in \mathbb{R}^{1\times r}, \gamma = \sigma_\zeta^2/\sigma_\xi^2$

Theorem 2.1. [18] Let the dynamic system described by Equation (1.1)with initial zero conditions and assumptions A1–A3 be introduced. Then, the estimate of the coefficients determined by expression (1.2) exists, is unique, and converges to the true value of the coefficients with probability 1, i.e.:

$$\hat{b}(N) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{a.s.} b_0 \tag{1.3}$$

.

Proof. The proof of the theorem is similar to the proof given in [20].
The minimum of function (1.2) can be found as a solution to the biased normal system of equations

$$\left(C^T C - \hat{\sigma}_\xi^2 H_\xi\right) \hat{b} = C^T Y. \tag{1.4}$$

If the noise variance is unknown σ_ξ^2, then it is necessary to use the estimate of the additive noise variance σ_ξ^2. The variance estimate $\hat{\sigma}_\xi^2$ can be found as the minimal generalized singular value

$$\hat{\sigma}_\xi = \sigma_{\min}\left(\bar{C}, L_\xi\right), \tag{1.5}$$

where $\sigma_{\min}\left(\bar{C}, L_{\xi}\right)$ is the minimal generalized singular number of matrices $\bar{C}$ and L_{ξ},
$\bar{C} = \begin{pmatrix} Y & C \end{pmatrix}$.
$\bar{H}_{\xi} = \bar{L}_{\xi}^{T}\bar{L}_{\xi},\ \bar{H}_{\xi} = \begin{pmatrix} 1+\gamma & 0 \\ 0 & H_{\xi} \end{pmatrix}$.

In [17] a review of methods for parametr estimation integer-order autoregressions with additive noise is presented. One of the most accurate was the approach proposed in the article [21]. This article uses a generalization of this approach to the case of autoregressions with fractional order differences. The maximum value of the variance $\sigma_{\xi\max}^2$ is if the variance $\sigma_{\zeta}^2 = 0$ is defined as

$$\sigma_{\xi\max}^2 = \sigma_{\min}^2\left(\bar{C}, L_{max}\right)$$

where $\sigma_{\min}\left(\bar{C}, L_{max}\right)$ is minimal generalised singular values of matrices $\bar{C}$ and L_{max},
$\bar{H}_{max} = \bar{L}_{max}^{T}\bar{L}_{max},\ \bar{H}_{max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{\xi} \end{pmatrix}$.

The true value of the variance belongs to the interval $\sigma_{\xi}^2 \in \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\xi\max}^2 \end{pmatrix}$.

In [21], high-order Yule-Walker equations are used to determine the variance. However, this approach cannot be applied directly, since it is impossible to obtain a vector of instrumental shifts for equation (1.1).

Minimization (1.2) can be written as an eigenvector problem:

$$\left(\bar{C}^{T}\bar{C} - \hat{\sigma}_{\xi}^{2}\bar{H}_{\xi}\right)\hat{\bar{b}} = 0, \tag{1.6}$$

where $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$.

Equation (1.6) requires knowing not only the variance of the additive noise σ_{ξ}^2, but also the variance σ_{ζ}^2. In order to eliminate the need to evaluate σ_{ξ}^2 and σ_{ε}^2 simultaneously for fractional order autoregressions, we use generalized instrumental variables [22], the application of generalized instrumental variables for fractional order systems is considered in the article [23].

The vector of instrumental variables ψ_i satisfies the equality

$$\lim_{N\to\infty}\left(C_{\psi}^{T}\bar{C} - \sigma_{\xi}^{2}\bar{H}_{\psi}\right)\bar{b} = 0, \tag{1.7}$$

where
$C_{\psi} = \left(\psi_1^T \ldots \psi_N^T\right) \in \mathbb{R}^{r\times N}$,
$\psi_i = \left(\Delta^{\alpha_1}y_{i-2}, ..., \Delta^{\alpha_r}y_{i-2}\right) \in \mathbb{R}^{1\times r},\ \bar{H}_{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & H_{\psi} \end{pmatrix}$,
$H_{\psi}^{(mk)} = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\begin{pmatrix} \alpha_m \\ j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_k \\ j \end{pmatrix}\frac{N-j}{N}, m = \overline{1,r}, k = \overline{1,r},$

For a finite sample, equality (1.7) will not be strict, the problem of determining the variance estimate $\hat{\sigma}_{\xi}^2$ can be described as a quadratic function minimization problem

$$\min_{\sigma_{\xi}\in(0,\sigma_{\xi\max})} J\left(\sigma_{\xi}\right), \tag{1.8}$$

where
$J\left(\sigma_{\xi}\right) = \bar{b}^{T}\left(C_{\psi}^{T}\bar{C} - \sigma_{\xi}^{2}\bar{H}_{\psi}\right)^{T}\left(C_{\psi}^{T}\bar{C} - \sigma_{\xi}^{2}\bar{H}_{\psi}\right)\bar{b}.$

Based on equations (4), (6) and (8), an iterative algorithm is proposed for estimating the parameters $\hat{b}$ and the variance $\hat{\sigma}_{\xi}^2$.

Step 1. Determine the maximum value of the variance $\sigma_{\xi\max}^2$ is defined as

$$\sigma_{\xi\max}^2 = \sigma_{\min}^2\left(\bar{C}, L_{max}\right).$$

Step 2. Start from a generic value $\sigma_{\xi}^2 \in \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\xi\max}^2 \end{pmatrix}$.

Step 3. Compute the parameter vector from equation (1.4)

$$\left(C^{T}C - \hat{\sigma}_{\xi}^{2}H_{\xi}\right)\hat{b} = C^{T}Y,$$

Step 4. Compute the cost function (1.8)

$$J\left(\sigma_{\xi}\right) = \hat{\bar{b}}^{T}\left(C_{\psi}^{T}\bar{C} - \sigma_{\xi}^{2}\bar{H}_{\psi}\right)^{T}\left(C_{\psi}^{T}\bar{C} - \sigma_{\xi}^{2}\bar{H}_{\psi}\right)\hat{\bar{b}}.$$

Step 5. Choose a new value σ_{ξ}^2 . The choice can be made using one of the methods of one-dimensional optimization.

Step 6. Repeat steps 3–5 until the value associated with the minimum of is found.

2. Simulation results

The proposed algorithm has been compared with ordinary least squares and the algorithm based on objective function (1.2) with a known noise variance ratio. The minimum (1.2) of the objective function can be found from the solution of the equation (1.4) or the augmented system of equations [24].

Test cases were compared by the following characteristics:the normalized root mean square error (NRMSE) of parameter estimation, defined as

$$\delta b = \sqrt{\left\|\hat{b} - b_0\right\|^2 \Big/ \left\|b_0\right\|^2} \cdot 100\%,$$

and normalized root mean square error of modelling (NRMSEM), defined as

$$\delta z = \sqrt{\left\|\hat{z} - z\right\|^2 \Big/ \left\|z\right\|^2} \cdot 100\%.$$

The results were based on 50 independent Monte-Carlo simulations.

Example 1. The AR model is described by the equation

$$z_i = 0.45\Delta^{-0.1} z_{i-1} + \zeta_i,\ y_i = z_i + \xi_i, \tag{2.1}$$

Noise standard deviation ratio

$$\sigma_\xi / \sigma_z = 0.5, \gamma = 2.605$$

The number of data points N in each simulation was 10000.

Table 2.1 shows the mean values of tNRMSE and NRMSEM and their standard deviations.

Table 2.1

Mean values of NRMSE and NRMSEM and their standard deviations

Таблица 2.1

Средние значения NRMSE и NRMSEM и их стандартные отклонения

	Ordinary least squares, %	Algorithm with known ratio, %	Proposed algorithm with unknown ratio, %
δb	8.95 ± 5.74	1.05 ± 1.20	1.44 ± 1.93
δz	43.50 ± 15.42	12.88 ± 9.88	13.55 ± 10.98

Example 2. The AR model is described by the equation

$$z_i = 0.5\Delta^{0.7} z_{i-1} + \zeta_i,\ y_i = z_i + \xi_i, \tag{2.2}$$

Noise standard deviation ratio

$$\sigma_\xi / \sigma_z = 0.5, \gamma = 2.11$$

The number of data points N in each simulation was 2000.

Table 2.2 shows the mean values of tNRMSE and NRMSEM and their standard deviations.

Table 2.2

Mean values of NRMSE and NRMSEM and their standard deviation

Таблица 2.2

Средние значения NRMSE и NRMSEM и их стандартное отклонение

	Ordinary least squares, %	Algorithm with known ratio, %	Proposed algorithm with unknown ratio, %
δb	15.73 ± 2.62	2.16 ± 1.46	3.00 ± 2.74
δz	26.70 ± 2.36	5.82 ± 4.47	7.13 ± 5.39

Conclusion

This paper proposed an estimation method of the parameters of fractional AR models with additive noise. The simulation results showed that the parameter estimates obtained using the proposed algorithm are highly accurate.

Further development of the proposed approach is the study of the best choice of instrumental variables and the choice of the weighting matrix.

References

[1] Stiassnie M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models // Applied Mathematical Modelling. 1979. Vol. 3. Issue 4. Pp. 300–302. DOI: https://doi.org/10.1016/S0307-904X(79)80063-3.

[2] Bagley R.L. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA Journal. 1983. Vol. 21. Number 5. Pp. 741–748. DOI: https://doi.org/10.2514/3.8142.

[3] Reyes-Melo M.E., Martinez-Vega J.J., Guerrero-Salazar C.A., Ortiz-Mendez U. Application of fractional calculus to modeling of relaxation phenomena of organic dielectric materials // Proceedings International Conference Solid Dielectrics (ICSD'04). Toulouse, 2004. Vol. 2. P. 530–533. DOI: http://doi.org/10.1109/ICSD.2004.1350485.

[4] Vinagre B.M., Feliu V. Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures // Proceedings of 41-st IEEE Conference Decision Control. Las Vegas, 2002. Pp. 214–239. Available at: https://www.researchgate.net/profile/Vicente-Feliu-2/publication/252440774_Modeling_and_control_of_dynamic_system_using_fractional_calculus_Application_to_electrochemical_processes_and_flexible_structures/links/54aa71290cf2eecc56e6f22e/Modeling-and-control-of-dynamic-system-using-fractional-calculus-Application-to-electrochemical-processes-and-flexible-structures.pdf.

[5] Granger C.W., Joyeux R. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing // Journal of Time Series Analysis. 1980. Vol. 1, No. 1. Pp. 15–29. DOI: http://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1980.tb00297.x.

[6] Hosking J.R.M. Fractional differencing // Biometrika. 1981. Vol. 68, No. 1. Pp. 165–176. DOI: http://doi.org/10.1093/biomet/68.1.165.

[7] Woodward W.A., Cheng Q.; Gray H.L. A k-factor GARMA long-memory model // Journal of Time Series Analysis. 1998. Vol. 19, Issue 4. Pp. 485–504. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1998.00105.x.

[8] Ivanov D.V., Engelgardt V.V., Sandler I.L. Genetic Algorithm of Structural and Parametric Identification of Gegenbauer Autoregressive with Noise on Output // Procedia Computer Science. 2018. Vol. 131. Pp. 619–625. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.procs.2018.04.304.

[9] Giraitis L., Leipus R. A generalized fractionally differencing approach in long memory modelling // Lithuanian Mathematical Journal. 1995. Vol. 35. Pp. 53–65. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02337754.

[10] Reisen V.A., Rodrigues A.L., Palma W. Estimation of Seasonal Fractionally Integrated Processes // Computational Statistics & Data Analysis. 2006. Vol. 50, Issue 2. Pp. 568–582. DOI: https://doi.org/10.1016/j.csda.2004.08.004.

[11] Reisen V.A., Rodrigues A.L., Palma W. Estimating seasonal long-memory processes: A Monte Carlo study // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2006. Vol. 76, Issue 4. Pp. 305–316. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/10629360500107790.

[12] Meerschaert M.M., Sabzikar F., Phanikumar M.S., Zeleke A. Tempered fractional time series model for turbulence in geophysical flows // Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment. 2014. P09023. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-5468/2014/09/P09023.

[13] Sabzikar F., Meerschaert M.M., Chen J. Tempered Fractional Calculus // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 293. Pp. 14–28. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.04.024.

[14] Ram M. Recent Advances in Time Series Forecasting, 1st ed.; Bisht D.C.S. (Ed.) Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2021. 238 p. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003102281.

[15] Palma W. Long-memory time series: Theory and Methods. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2006. 304 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=NtSbmQyQcSMC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false.

[16] Guidorzi R., Diversi R., Vincenzi L., Simioli V. AR+ noise versus AR and ARMA models in SHM-oriented identification // Proceedings of the 23rd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Torremolinos, Spain, 16–19 June 2015. Pp. 809–814. DOI: https://doi.org/10.1109/med.2015.7158845.

[17] Ivanov D., Yakoub Z. Overview of Identification Methods of Autoregressive Model in Presence of Additive Noise // Mathematics 2023. Vol. 11, Issue 3. P. 607. DOI: https://doi.org/10.3390/math11030607.

[18] Ivanov D.V. Identification autoregression non-integer order with noise in output signal. In: *Interdisciplinary research in the area of mathematical modelling and informatics: Materials of the research and practical internet-conference. June 18-19*, 2019. Togliatti, June 18-19, 2013. Togliatti: SIMJET, 2013, pp. 64–67. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20742187. EDN: https://www.elibrary.ru/rlxlcf. (In Russ.)

[19] Ivanov D.V., Serebryakov A.Yu., Ivanov A.V. Identification of autoregression described by fractional difference equations with 1/f noise in the output signal. *Vestnik transporta Povolzhya*, 2016, no. 5 (59), pp. 93–99. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27468166. EDN: https://www.elibrary.ru/xdcfvf. (In Russ.)

[20] Ivanov D.V. Estimation of parameters of linear fractional order ARX systems with noise in the input signal // *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2014. No. 2(27), pp. 30–38. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21649106. EDN: https://www.elibrary.ru/sftlbf. (In Russ.)

[21] Diversi R., Guidorzi R., Soverini U. Identification of autoregressive models in the presence of additive noise // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2007. Vol. 22. P. 465–481. DOI: http://doi.org/10.1002/acs.989.

[22] Soderstrom T. A generalized instrumental variable estimation method for errors-in-variables identification problems // Automatica. 2011. Vol. 47, Issue 8, Pp. 1656–1666. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.05.010.

[23] Ivanov D.V., Sandler I.L., Kozlov E.V. Identification of Fractional Linear Dynamical Systems with Autocorrelated Errors in Variables by Generalized Instrumental Variables // IFAC-PapersOnLine, 2018, Vol. 51, Issue 32. Pp. 580–584. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.485.

[24] Ivanov D., Zhdanov A. Symmetrical Augmented System of Equations for the Parameter Identification of Discrete Fractional Systems by Generalized Total Least Squares // Mathematics. 2021. Vol. 9, Issue 24. Article number: 3250. DOI: https://doi.org/10.3390/math9243250.

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-93-99

УДК 519.254.1

Дата: поступления статьи: 11.07.2023
после рецензирования: 15.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

Д.В. Иванов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: dvi85@list.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5021-5259

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИИ С РАЗНОСТЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ АДДИТИВНОГО ШУМА[2]

АННОТАЦИЯ

Для моделирования во временных рядах широко используются модели с дробными разностями. Наиболее известной моделью является модель ARFIMA (авторегрессионная частично интегрированная скользящая средняя). Известно, что для авторегрессионных моделей целого порядка авторегрессионные модели с аддитивным шумом могут превосходить по точности ARMA и авторегрессионные модели. В данной статье рассматривается класс авторегрессионных моделей с разностью дробного порядка. Представлен новый метод оценивания параметров авторегрессионных моделей с дробными разностями при наличии аддитивного шума с его неизвестной дисперсией. Предлагаемый алгоритм реализован в среде Matlab. Результаты моделирования показывают высокую эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: дробная разность; авторегрессионная модель; сумма наименьших квадратов; аддитивный шум; неизвестное отношение дисперсий; обобщенные инструментальные переменные; долговременная память.

Цитирование. Ivanov D.V. Estimation of parameters of autoregressive models with fractional differences in the presence of additive noise // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная

[2]Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-931.

серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 93–99. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-93-99.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Дмитрий Владимирович Иванов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34; доцент кафедры цифровых технологий, Самарский государственный университет путей сообщения, 443066, Российская Федерация, г. Самара, ул. Свободы, 2В.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал ”Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series” издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу *https://journals.ssau.ru/est.* Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале ”Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series” печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегий журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут.
Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются через сайт https://journals.ssau.ru/est.

2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть поразделной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы LaTeX2$_\varepsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций TeX’а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами LaTeX’а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис (”-”), двойной дефис (”–”)[1], тройной дефис (”—”)[2]. Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и ”двойных”фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (”) с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные

[1]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--~`

[2]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала