

Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

- *Математика*
- *Механика*
- *Математические
методы
в естественных
науках*

ТОМ 27 • № 3 • 2021 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ
Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, член-корреспондент РАН, д-р тех. наук, проф., научный руководитель Самарского университета, главный научный сотрудник института акустики машин, зав. кафедрой автоматических систем энергетических установок (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики, зам. директора Межвузовского научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению (Самара, Самарский университет, РФ)

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.И. Кузнецовой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель: Самарский университет

Адрес издателя:

443086, Российская Федерация, г. Самара,
Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге

АО Агентство «Роспечать» 80307

ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 02.12.2021.

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 11,25.

Тираж 200 экз. (первый завод — 27 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара,
Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самара, Самарский университет, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Саранск, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, РФ)

В.В. Иважнич, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самара, Самарский университет, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет, РФ)

Константин Панкрашжин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Орсе, Университет Париж-юг 11, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самара, Самарский университет, РФ)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики твердого тела и неравновесных систем (Самара, Самарский университет, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Милан, Миланский университет, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самара, Самарский университет, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Ханты-Мансийск, Югорский государственный университет, РФ; Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Саранск, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самара, Самарский университет, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самара, Самарский университет, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольск-на-Амуре, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, РФ)

© Самарский университет, 2021

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mechanics*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*

VOL. 27 • № 3 • 2021

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E.V. Shakhmatov, corresponding member of the RAS, Dr. of Science (Engineering), prof., scientific adviser of Samara National Research University, chief researcher of Machine Acoustics Institute, head of Department of Power Plant Automatic Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., professor of Department of General and Theoretical Physics, deputy director of Samara Center for Theoretical Materials Science (Samara, Samara National Research University, RF)

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, Russian Federation)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.I. Kuznetsova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher: Samara National Research University

Address publisher:

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial staff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011,
Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС
77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for
Supervision of Communications, Information Technology and Mass
Media.

Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307

ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 02.12.2021.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 11,25.

Circulation 200 copies (first printing – 27 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm, Perm National Research Polytechnic University, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara, Samara National Research University, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Saransk, Ogarev Mordovia National University, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara, Samara National Research University, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (Orsay, University of Paris-Sud 11, France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara, Samara National Research University, RF)

A.V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Solid-State Physics and Nonequilibrium Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (Milan, University of Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara, Samara National University, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Khanty-Mansiysk, Yugra State University, RF; Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Saransk, Ogarev Mordovia National Research University, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Physics (Samara, Samara National Research University, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Differential Equations and Control Theory, prof. of the Department of Engineering Cybernetics (Samara, Samara National Research University, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov, Saratov State University, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-on-Amur, Komsomolsk-na-Amure State University, RF)

© Samara University, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Алдашев С.А. Корректность основной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе	7
Гилев А.В., Кечина О.М., Пулькина Л.С. Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной	14
Соболев В.А., Тропкина Е.А., Щепаккина Е.А., Zhang L. Декомпозиция задач о бегущих волнах	22
Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 7. Диагностирование в системах прямого и непрямого управления	31

Механика

Белова О.Н., Чаплий Д.В., Степанова Л.В. Применение пользовательской подпрограммы UMAT для решения задач континуальной механики (обзор)	46
Савчин В.М., Чинь Ф.Т. О потенциальности дискретных систем	74

Математические методы в естественных науках

Сметанников М.А. Декомпозиция систем энзимной кинетики с быстрыми и медленными переменными в задаче суицидного субстрата	83
<i>Требования к оформлению статей</i>	89

CONTENTS

Mathematics

Aldashev S.A. Well-posedness of the main mixed problem for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation	7
Gilev A.V., Kechina O.M., Pulkina L.S. Characteristic problem for a fourth-order equation with a dominant derivative	14
Sobolev V.A., Tropkina E.A., Shchepakina E.A., Zhang L. Decomposition of traveling waves problems	22
Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 7. Differential diagnostics in some systems of direct and indirect control	31

Mechanics

Belova O.N., Chapliy D.V., Stepanova L.V. Application of the UMAT subroutine for solving continuum mechanics problems (overview).....	46
Savchin V.M., Trinh P.T. On discrete systems with potential operators	74

Mathematical Methods in Natural Sciences

Smetannikov M.A. Decomposition of enzyme kinetics system with fast and slow variables in suicide substrate problem.....	83
<i>Requirements to the design of articles</i>	89

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13

УДК 517.956

Дата: поступления статьи: 14.09.2021
после рецензирования: 16.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

С.А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
г. Алматы, Республика Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8223-6900>

КОРРЕКТНОСТЬ ОСНОВНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ

АННОТАЦИЯ

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному волновому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

Основная смешанная задача в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций хорошо исследована. В работах автора доказана корректность этой задачи для многомерных гиперболических и эллиптических уравнений, а также получены явные виды классических решений.

Насколько известно, эти вопросы для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений не изучены.

Смешанная задача с граничными условиями для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе является некорректной.

В данной статье доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения основной смешанной задачи с граничными и начальными данными для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

Ключевые слова: корректность; основная смешанная задача; цилиндрическая область; функция Бесселя.

Цитирование. Алдашев С.А. Корректность основной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 7–13. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Алдашев С.А., 2021

Серик Аймурзаевич Алдашев — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики и математического моделирования, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Республика Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Толе Би, 86.

Введение

Основная смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций хорошо изучена [1–4]. В [5–10] получены явные виды классических решений смешанных задач для многомерных гиперболических уравнений.

Насколько известно автору, эти задачи для многомерных эллиптических уравнений изучены только в [11], а для многомерных гиперболю-эллиптических уравнений еще не исследованы.

Смешанная задача с граничными условиями для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе является некорректной.

В данной статье доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения основной смешанной задачи с граничными и начальными данными для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ — части поверхности Γ , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ области $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$, представляющих собой множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$(sgnt)\Delta_x u - u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Рассмотрим следующую основную смешанную задачу с граничными и начальными данными [12]

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\beta} = \tau(r, \theta), \quad u_t|_{\sigma_\beta} = \nu(r, \theta), \quad (3)$$

при этом $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$, $\psi_2(\beta, \theta) = \tau(1, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$ $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots$ пространства Соболева.

Имеет место [13]

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\psi_{2n}^k(t)$, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $\psi_2(t, \theta)$, $\tau(r, \theta)$, $\nu(r, \theta)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $l > \frac{3m}{2}$, то задача 1 имеет единственное решение.

2. Доказательство теоремы 1

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид [13]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u + u_{tt} = 0, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [13], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [13], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k + \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

при этом краевое условие (3) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{u}_{nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

В формулах (7), (8) произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k + \bar{v}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (9)$$

$$\bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{v}_n^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{v}_{nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_{2n}^k(t) - \psi_{2ntt}^k, \quad \bar{\tau}_n^k(r) = \bar{\tau}_n^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta), \quad \bar{\nu}_n^k(r) = \bar{\nu}_n^k(r) - \psi_{2nt}^k(\beta).$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} v_n^k(r, t)$ задачу (9),(10) приведем к следующей задаче:

$$L_1 v_n^k \equiv v_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k + v_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

$$v_n^k(1, t) = 0, \quad v_n^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad v_{nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{2}, \quad \bar{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \bar{\tau}_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{\nu}_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\nu}_n^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде $v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)$, где $v_{1n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad v_{1n}^k(r, \beta) = v_{1nt}^k(r, \beta) = 0, \quad (13)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad v_{2n}^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad v_{2nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad (14).$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (15)$$

при этом пусть

$$\bar{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k R_s(r), \quad \bar{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r), \quad \bar{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k(t) R_s(r). \quad (16)$$

Подставляя (15) в (13), с учетом (16) получим

$$R_{srr} + \left(\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} + \mu \right) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (17)$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{s,n}^k(t), \quad \beta < t < 0, \quad T_s(\beta) = 0, \quad T_{st}(\beta) = 0. \quad (18)$$

Ограниченным решением задачи (17) является [14, с. 404]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (19)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Задача (18) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ [12, с. 49]

$$T_{s,n}(t) - \mu_{s,n}^2 \int_{\beta}^t (t - \xi) T_{s,n}(\xi) d\xi = \int_{\beta}^t (t - \xi) a_{s,n}(\xi) d\xi, \quad (20)$$

которое имеет решение и притом единственное.

Подставляя (19) в (16), получим

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_n^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Ряды (21) — разложение в ряды Фурье — Бесселя [15, с. 83], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (22)$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\tau}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (23)$$

$$e_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\nu}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi,$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (19), (20) получим решение задачи (13) в виде

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (24)$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяются из (22).

Далее, подставляя (19) в (14), с учетом (16) будем иметь

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \quad \beta < t < 0, \quad V_s(\beta) = b_{s,n}^k, \quad V_{st}(\beta) = e_{s,n}^k,$$

в которой, произведя замену

$$G_{s,n}(t) = V_{s,n}(t) - b_{s,n}^k - (t - \beta) e_{s,n}^k, \quad (25)$$

приходим к следующей задаче:

$$G_{s,ntt} - \mu_{s,n}^2 G_{s,n}(t) = q_{s,n}^k(t), \quad \beta < t < 0, \quad G_{s,n}(\beta) = 0, \quad G_{s,nt}(\beta) = 0, \quad (26)$$

$$q_{s,n}^k(t) = \mu_{s,n}^2 [b_{s,n}^k + (t - \beta) e_{s,n}^k].$$

Задача (26) сводится также к интегральному уравнению (20), где вместо $a_{s,n}^k(t)$ берется $q_{s,n}^k(t)$.

Из (19), (20), (25) найдем решение задачи (14) в виде

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (27)$$

где $b_{s,n}^k$, $e_{s,n}^k$, находятся из (23).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (28)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (24) и (27).

Учитывая формулу [15] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, и оценки [13; 16]

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right), \quad \nu \geq 0, \\ |k_n| &\leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_2(t, \theta), \tau(r, \theta), \nu(r, \theta)$, как в [4], можно доказать, что полученное решение в виде (28) принадлежит классу $C(\Omega_\beta) \cap C^1(\Omega_\beta \cup S) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее из (24), (27), (28) при $t \rightarrow -0$ имеем

$$u(r, \theta, 0) = \tau_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_{1n}^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (30)$$
$$\tau_{1n}^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} [T_{s,n}(0) + V_{s,n}(0)] J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \nu_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \nu_{1n}^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (31)$$
$$\nu_{1n}^k(r) = \psi_{2nt}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} [T_{s,nt}(0) + V_{s,nt}(0)] J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

Из (21)–(23), (29), а также из лемм вытекает, что $\tau_1(r, \theta), \nu_1(r, \theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2), (30), (31), мы получили в области Ω_α основную смешанную задачу для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0 \quad (32)$$

с данными

$$u|_S = \tau_1(r, \theta), u_t|_S = \nu_1(r, \theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta). \quad (33)$$

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если $\tau_1(r, \theta), \nu_1(r, \theta) \in W_2^l(S), \psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), l > \frac{3m}{2}$, то задача (32), (33) однозначно разрешима.

Далее, используя теорему 2, приходим к справедливости теоремы 1.

Так как в [5] получен явный вид решения задачи (32), (33), то можно записать явное представление и для задачи 1.

Литература

- [1] Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва: Гостехиздат, 1953. 279 с. URL: <https://booksee.org/book/579384>.
- [2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с. URL: <https://booksee.org/book/442669>.
- [3] Краснов М.Л. Смешанные задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб., 1959. Т. 49(91). С. 29–84. URL: <http://mi.mathnet.ru/msb4910>
- [4] Барановский Ф.Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения // Ученые записки Ленингр. пед. ин-та, 1958. Т. 183. С. 23–58.
- [5] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Укр. матем. журнал, 2017. Т. 69, Вып. 7. С. 992–999.
- [6] Aldashev S.A. Well-Posedness of mixed problems for multidimensional hyperbolic equations with wave operator // Ukrainian Mathematical Journal, 2017. Vol. 69, 7. P. 1154–1163. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1422-7>.
- [7] Aldashev S.A. Well-Posedness of the mixed problems for generate multidimensional hyperbolic equations // Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and Information: материалы конф. Киев: КНУ им. Т. Шевченко, 2018. С. 14–15.
- [8] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Вычислительная и прикладная математика, 2019. 2(131). С. 5–14
- [9] Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. Корректность смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений // Теория управления и матем. моделирование: материалы Всерос. конф., Ижевск: Удм. гос. ун-т, 2020. С. 24–26
- [10] Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. Смешанная задача для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка // Известия НАН РК. Сер.: Физико-математическая, 2020. № 6(334). С. 13–18. URL: <https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/632>.
- [11] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Научные ведомости БелГУ. Сер.: Математика. Физика, 2019. Т. 51, № 2. С. 174–182. URL: <http://dspace.bsu.edu.ru/handle/123456789/26603>.
- [12] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с. URL: <https://knigogid.ru/books/1954660-nekotorye-klassy-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread>.

- [13] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962. 254 с. URL: <https://booksee.org/book/578442>.
- [14] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1965. 703 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kamke_ODE_1971ru.pdf.
- [15] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1973. Т. 1. 292 с. URL: <http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm>.
- [16] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 724 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/tihonov.html>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13

Submitted: 14.09.2021

Revised: 16.10.2021

Accepted: 15.11.2021

S.A. Aldashev

Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Republic of Kazakhstan

E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8223-6900>

WELL-POSEDNESS OF THE MAIN MIXED PROBLEM FOR THE MULTIDIMENSIONAL LAVRENTIEV — BITSADZE EQUATION

ABSTRACT

It is known that the oscillations of elastic membranes in space are modelled with partial differential equations. If the deflection of the membrane is considered as a function of $u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 2$, then, according to the Hamilton principle, we arrive to a multidimensional wave equation.

Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, we also obtain the multidimensional Laplace equation from the Hamilton's principle.

Consequently, the oscillations of elastic membranes in space can be modelled with a multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation.

The main mixed problem in the cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations in the space of generalized functions is well studied. In the works of the author, the well-posedness of this problem for multidimensional hyperbolic and elliptic equations is proved, and the explicit forms of classical solutions are obtained.

As far as we know, these questions for multidimensional hyperbolic-elliptic equations have not been studied.

The mixed problem with boundary-value conditions for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation is ill-posed.

In this paper, we prove the unique solvability and obtain an explicit form of classical solution of the main mixed problem with boundary and initial conditions for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation.

Key words: well-posedness; main mixed problem; cylindrical domain; Bessel function.

Citation. Aldashev S.A. Well-posedness of the main mixed problem for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 7–13. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Aldashev S.A., 2021

Serik A. Aldashev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Abai Kazakh National Pedagogical University, 86, Tole Bi Street, Almaty, 050100, Republic of Kazakhstan.

References

- [1] Ladyzhenskaya O.A. A mixed problem for a hyperbolic equation. Moscow: Gostekhizdat, 1953, 279 p. Available at: <https://booksee.org/book/579384>. (In Russ.)

- [2] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: <https://booksee.org/book/442669>. (In Russ.)
- [3] Krasnov M.L. Mixed boundary problems for degenerate linear hyperbolic differential equations second order. *Mat. sb.*, 1959, vol. 49(91), pp. 29–84. Available at: <http://mi.mathnet.ru/msb4910>. (In Russ.)
- [4] Baranovsky F.T. A mixed problem for a linear hyperbolic equation. *Uchenye zapiski Leningr. ped. ins-ta*, 1958, vol. 183, pp. 23–58. (In Russ.)
- [5] Aldashev S.A. Correctness of a mixed problem for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2017, vol. 69, no. 7, pp. 992–999. (In Russ.)
- [6] Aldashev S.A. Well-Posedness of Mixed Problems for Multidimensional Hyperbolic Equations with Wave Operator. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2017, vol. 69, no. 7, pp. 1154–1163. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1422-7>.
- [7] Aldashev S.A. Well-Posedness of the mixed problems for generate multidimensional hyperbolic equations. In: *Materials of the conference "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and Information"*. Kyiv: KNU im. T. Shevchenko, 2018, pp. 14–15. (In Russ.)
- [8] Aldashev S.A. Correctness of a mixed problem for one class of degenerate multidimensional hyperbolic equations. *Zhurnal "Vychislitel'noi i prikladnoi matematiki"*. Kyiv: KNU im. T. Shevchenko, 2019, no. 2(131), pp. 5–14. (In Russ.)
- [9] Aldashev S.A., Kanapyanova Z.N. Correctness of a mixed problem for degenerate three-dimensional hyperbolic equations. In: *Materials of the All-Russian conference "Control Theory and Mathematic Modeling"*. Izhevsk: Udm. gos. un-t, 2020, pp. 24–26. (In Russ.)
- [10] Aldashev S.A., Kanapyanova Z.N. Mixed problem for three-dimensional hyperbolic equations with type and order degeneracy. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-Mathematical Series*, 2020, no. 6 (334), pp. 13–18. Available at: <https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/632>. (In Russ.)
- [11] Aldashev S.A. Correctness of a mixed problem for one class of degenerate multidimensional elliptic equations. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2019, vol. 51, no. 2, pp. 174–182. Available at: <http://dspace.bsu.edu.ru/handle/123456789/26603>. (In Russ.)
- [12] Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981, 448 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/1954660-nekotorye-klassy-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread>. (In Russ.)
- [13] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 254 p. Available at: <https://booksee.org/book/578442>. (In Russ.)
- [14] Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka, 1965, 703 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kamke_ODE_1971ru.pdf. (In Russ.)
- [15] Bateman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Moscow: Nauka, 1973, Vol. 1, 292 p. Available at: <http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm>. (In Russ.)
- [16] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1966, 724 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/tihonov.html>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21

УДК 517.956

Дата: поступления статьи: 02.09.2021
после рецензирования: 07.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

А.В. Гилев

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: toshqaaa@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6747-5826>

О.М. Кечина

Самарский государственный социально-педагогический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: omka-83@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5560-8521>

Л.С. Пулькина

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрена задача Гурса для уравнения с доминирующей смешанной производной четвертого порядка и доказана ее однозначная разрешимость. Рассматриваемое уравнение можно интерпретировать как обобщенное уравнение Буссинеска — Лява, которое возникает при описании продольных волн в стержне с учетом поперечных деформаций. Для обоснования разрешимости предложен метод, который основан на возможности сведения поставленной задачи к двум задачам Гурса для уравнений второго порядка. Одна из задач является классической задачей Гурса для простейшего гиперболического уравнения, другое же уравнение оказывается нагруженным, и исследование задачи Гурса для него представляет собой основной результат работы.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска — Лява; система двух задач; задача Гурса; уравнение с доминирующей производной; нагруженное уравнение; метод последовательных приближений; существование решения; единственность решения.

Цитирование. Гилев А.В., Кечина О.М., Пулькина Л.С. Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 14–21. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Гилев А.В., 2021

Антон Владимирович Гилев — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Кечина О.М., 2021

Ольга Михайловна Кечина — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения, Самарский государственный социально-педагогический университет, 443090, Российская Федерация, г. Самара, М. Горького, 65/67.

© Пулькина Л.С., 2021

Людмила Степановна Пулькина — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

В статье рассматривается характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей смешанной производной

$$u_{xxyy}(x, y) + (A(x, y)u_x(x, y))_x + (B(x, y)u_y(x, y))_y + C(x, y)u(x, y) = f(x, y),$$

которое можно рассматривать как частный случай уравнения Л. Бианки [1], но мы ограничимся интерпретацией его как обобщения уравнения Буссинеска — Лява [2]

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - u_{xxtt}(x, t) = f(x, t),$$

которое встречается при изучении продольных колебаний стержня с учетом эффектов поперечной инерции. В литературе уравнение Буссинеска — Лява часто встречается под названием псевдогиперболического уравнения, а также уравнения Соболевского типа. Краевые, начальные, а также нелокальные задачи для этого уравнения активно изучаются, имеется много публикаций, содержащих интересные результаты о разрешимости краевых, нелокальных и обратных задач для уравнения Буссинеска — Лява и его обобщений. Отметим лишь некоторые из них [3–10] и обратим внимание на списки литературы в них.

Обратив внимание на то, что уравнение Буссинеска — Лява можно интерпретировать и как уравнение с доминирующей смешанной производной, естественно рассмотреть для него задачи с условиями на характеристиках. Такие задачи для уравнений с доминирующей производной порядка выше второго изучены в работах [11–16]. В большинстве этих работ доказательства разрешимости базируются на построении функции Римана. Мы предлагаем другой метод, который основан на сведении поставленной характеристической задачи для уравнения четвертого порядка к двум задачам Гурса для уравнений второго порядка. Одна из них оказывается классической задачей для простейшего гиперболического уравнения, тогда как вторая — задачей Гурса для нагруженного гиперболического уравнения. Хорошо известна статья А.М. Нахушева, посвященная исследованию задачи Гурса для нагруженного уравнения [17], однако отличия в постановке нашей задачи от рассмотренной в упомянутой статье не позволяют сделать прямую ссылку на нее. Учитывая также нежелание строить функцию Римана, мы предлагаем другой способ доказательства разрешимости задачи. Отметим, что характеристические задачи для нагруженного уравнения тесно связаны с нелокальными аналогами задачи Гурса [18; 19].

2. Постановка задачи

Рассмотрим в области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ уравнение

$$u_{xxyy}(x, y) + (A(x, y)u_x(x, y))_x + (B(x, y)u_y(x, y))_y + C(x, y)u(x, y) = F(x, y) \quad (2.1)$$

и поставим следующую задачу: найти в области Ω решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x), \quad (2.2)$$

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u_x(0, y) = \nu(y). \quad (2.3)$$

Под решением задачи будем понимать функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и имеющую непрерывную в Ω смешанную производную u_{xxyy} . В следующем разделе мы докажем, что при выполнении ряда условий на входные данные существует единственное решение поставленной задачи.

3. Разрешимость задачи

Теорема. Если

$$A, B \in C^1(\bar{\Omega}), \quad C, F \in C(\bar{\Omega}) \\ \varphi, \psi \in C^1[0, a], \mu, \nu \in C^1[0, b],$$

и выполняются условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0), \psi(0) = \nu(0), \varphi'(0) = \nu(0), \mu'(0) = \psi(0),$$

то существует единственное решение задачи (2.1) – (2.3).

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение.

Лемма 1. Задача (2.1) – (2.3) эквивалентна системе двух задач, которые будем называть $G1$ и $G2$, для уравнений второго порядка.

Задача G1. Найти в Ω решение уравнения

$$v_{xy} = F(x, t), \quad (3.1)$$

удовлетворяющее условиям

$$v(x, 0) = p(x), \quad v(0, y) = h(y), \quad (3.2)$$

где

$$p(x) = \psi'(x) + \int_0^x B(\xi, 0)\psi(\xi)d\xi, \quad h(y) = \nu'(y) + \int_0^y A(0, \eta)\nu(\eta)d\eta. \quad (3.3)$$

Задача G2. Найти в Ω решение уравнения

$$u_{xy} + \int_0^y Au_x d\eta + \int_0^x Bu_y d\xi + \int_0^y \int_0^x Cud\xi d\eta = v(x, y), \quad (3.4)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \mu(y). \quad (3.5)$$

Доказательство леммы 1. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (2.1) — (2.3). Равенство (2.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(u_{xy} + \int_0^y Au_x d\eta + \int_0^x Bu_y d\xi + \int_0^y \int_0^x Cud\xi d\eta \right) = F(x, y). \quad (3.6)$$

Введем функцию

$$v(x, y) = u_{xy} + \int_0^y Au_x d\eta + \int_0^x Bu_y d\xi + \int_0^y \int_0^x Cud\xi d\eta. \quad (3.7)$$

Тогда из (3.6) $v_{xy} = F(x, y)$. Из (3.7) и условий $u_y(x, 0) = \psi(x)$, $u_x(0, y) = \nu(y)$, которые выполняются в силу нашего предположения, легко получаем условия (3.2). Рассматривая (3.7) как уравнение второго порядка относительно $u(x, y)$ с правой частью $v(x, y)$, легко убеждаемся в том, что решение уравнения (3.4), которое совпадает с (3.7), удовлетворяет условиям (3.5), т. е. является решением задачи G2.

Пусть теперь $u(x, y), v(x, y)$ являются решениями задач G2 и G1 соответственно. Тогда $u(x, t)$ — решение (2.1). Покажем, что выполняются и условия (2.2)–(2.3). Очевидно, что $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(0, y) = \mu(y)$, так как $u(x, t)$ — решение задачи G2. Положим в (3.7) $x = 0$. Учитывая введенные обозначения, получим

$$v(0, y) = h(y) = u_{xy}(0, y) + \int_0^y A(0, \eta)u_x(0, \eta)d\eta.$$

Из (2.3) следует

$$u_{xy}(0, y) + \int_0^y A(0, \eta)u_x(0, \eta)d\eta = \nu'(y) + \int_0^y A(0, \eta)\nu(\eta)d\eta.$$

Это равенство проинтегрируем по y и после несложных преобразований получим

$$u_x(0, y) - u_x(0, 0) + \int_0^y (y - \eta)A(0, \eta)u_x(0, \eta)d\eta = \nu(y) - \nu(0) + \int_0^y (y - \eta)A(0, \eta)\nu(\eta)d\eta.$$

Так как $u_x(0, 0) = \nu(0)$, то

$$u_x(0, y) + \int_0^y (y - \eta)A(0, \eta)u_x(0, \eta)d\eta = \nu(y) + \int_0^y (y - \eta)A(0, \eta)\nu(\eta)d\eta.$$

Последнее равенство можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра с ограниченным ядром, которое, как известно, имеет единственное решение. Но как нетрудно видеть, $u_x(0, y) = \nu(y)$ удовлетворяет этому уравнению. Стало быть, это и есть единственное решение интегрального уравнения, а это означает, что выполняется второе из условий (2.3). Выполнение второго из условий (2.2) доказывается совершенно аналогично.

Лемма доказана.

Теперь можно приступить к доказательству теоремы. В силу леммы 1 для обоснования разрешимости задачи (2.1) — (2.3) достаточно доказать разрешимость задач G1 и G2.

Разрешимость G1. Обоснование разрешимости задачи G1 не вызывает затруднений, так как это классическая задача Гурса для простейшего гиперболического уравнения, поэтому сразу выпишем ее единственное решение

$$v(x, y) = p(x) + h(y) - h(0) + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta)d\xi d\eta.$$

В терминах задачи (2.1) — (2.3) формула принимает вид

$$v(x, y) = \psi'(x) + \nu'(y) - \nu'(0) + \int_0^y A(0, \eta)\nu(\eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^x B(\xi, 0)\psi(\xi)d\xi + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta)d\xi d\eta. \quad (3.8)$$

Разрешимость G2. Уравнение (3.4) нагруженное, и мы не можем сделать прямую ссылку, например [20], на результат о разрешимости задачи Гурса для него. Не можем также использовать результаты статьи [17], так как в этой статье рассматривается нагруженное уравнение другой структуры. Не воспользуемся мы и методом, изложенным в ней. Нам удалось реализовать идею доказательства разрешимости классической задачи Гурса [20] для случая нагруженного уравнения, получив нужные оценки.

Пусть $u(x, y)$ — решение задачи G2. Введем новые функции, положив в равенстве (3.4) $u_x = V$, $u_y = W$. Тогда $V_y = u_{xy}$, $W_x = u_{xy}$, следовательно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} V_y(x, y) &= v(x, y) - \int_0^y AV d\eta - \int_0^x BW d\xi - \int_0^y \int_0^x Cud\xi d\eta, \\ W_x(x, y) &= v(x, y) - \int_0^y AV d\eta - \int_0^x BW d\xi - \int_0^y \int_0^x Cud\xi d\eta, \\ u_y(x, y) &= W(x, y). \end{aligned}$$

Интегрируя каждое из этих равенств по соответствующей переменной и учитывая, что из (3.5) следует $W(0, y) = \mu'(y)$, $V(x, 0) = \varphi'(x)$, получим

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \varphi'(x) + \int_0^y [v - \int_0^\eta AV d\eta' - \int_0^x BW d\xi - \int_0^\eta \int_0^x Cud\xi d\eta'] d\eta, \\ W(x, y) &= \mu'(y) + \int_0^x [v - \int_0^\eta AV d\eta' - \int_0^x BW d\xi - \int_0^\eta \int_0^x Cud\xi d\eta'] d\xi, \\ u(x, y) &= \varphi(x) + \int_0^y W d\eta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, если $u(x, y)$ — решение задачи G2, то тройка функций u, V, W — решение системы (3.9).

Пусть теперь известно, что u, V, W — решение системы (3.9). Из последнего равенства (3.9), учитывая условия согласования, получаем

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \varphi(0) + \int_0^y W(0, \eta)d\eta = \varphi(0) + \int_0^y \mu'(\eta)d\eta = \mu(y),$$

и условия (3.5) выполнены. Дифференцируя последнее равенство (3.9) по y , получим $u_y = W(x, y)$, а дифференцируя теперь по x , приходим к равенству

$$u_{xy} = W_x = v - \int_0^y AV d\eta - \int_0^x Bu_y d\xi - \int_0^y \int_0^x Cud\xi d\eta.$$

Дифференцируем последнее равенство (3.9) по x , а затем, учитывая результат дифференцирования второго из равенств (3.9) по x и первого по y , получим

$$u_x = \varphi'(x) + \int_0^y W_x(x, \eta)d\eta = \varphi'(x) + \int_0^y V_\eta d\eta = \varphi'(x) + V(x, y) - V(x, 0).$$

Так как $V(x, 0) = \varphi'(x)$, что видно из первого равенства (3.9), то $u_x = V$. Но тогда

$$u_{xy} = v(x, y) - \int_0^y AV d\eta - \int_0^x Bu_y d\xi - \int_0^y \int_0^x Cud\xi d\eta,$$

а это означает, что $u(x, y)$ удовлетворяет и уравнению (3.4), следовательно, является решением задачи G2.

Результаты проведенных рассуждений сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. Если выполнены условия теоремы, то задача G2 эквивалентна системе интегральных уравнений (3.9).

Таким образом, для доказательства разрешимости задачи G2 достаточно убедиться в существовании единственного решения системы (3.9), к чему мы и переходим.

Считая $V_0 = \varphi'(x)$, $W_0 = \mu'(y)$ $u_0 = \varphi(x)$, будем искать приближенное решение системы (3.9) в виде

$$\begin{aligned} V_n(x, t) &= \varphi'(x) + \int_0^y [v - \int_0^\eta AV_{n-1} d\eta' - \int_0^x BW_{n-1} d\xi - \int_0^\eta \int_0^x Cu_{n-1} d\xi d\eta'] d\eta, \\ W_n(x, y) &= \mu'(y) + \int_0^x [v - \int_0^\eta AV_{n-1} d\eta' - \int_0^x BW_{n-1} d\xi - \int_0^\eta \int_0^x Cu_{n-1} d\xi d\eta'] d\xi, \\ u_n(x, y) &= \varphi(x) + \int_0^y W_{n-1} d\eta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Условия теоремы гарантируют существование числа $L > 0$ такого, что

$$|v| + \int_0^y |A||\varphi'| d\eta + \int_0^x |B||\mu'| d\xi + \int_0^y \int_0^x |C||u| d\xi d\eta \leq L.$$

Тогда $|V_1 - V_0| \leq bL$, $|W_1 - W_0| \leq aL$, $|u_1 - u_0| \leq bL$. Обозначим $q = \max\{a, b\}$. Пусть $|A| + |B| + q|C| \leq K$, где $K > 0$, и такое число найдется в силу условий теоремы. Покажем, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} |V_n - V_{n-1}| &\leq LK^{n-1} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |W_n - W_{n-1}| &\leq LK^{n-1} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |u_n - u_{n-1}| &\leq LK^{n-1} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Очевидно, оценки верны для $n = 1$. Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что оценки верны и для $n + 1$. Полученные оценки гарантируют абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1}), \quad V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (V_n - V_{n-1}), \quad W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (W_n - W_{n-1}), \quad (3.12)$$

так они мажорируются равномерно и абсолютно сходящимся к функции $L + Le^{K(x+y)}$ рядом

$$L + L \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Следовательно, последовательности u_n, V_n, W_n , являясь последовательностями частичных сумм рядов (3.12), равномерно стремятся к пределам u, V, W . Переходя к пределу в (3.10), убеждаемся в том, что (u, V, W) — решение системы (3.9), причем единственное, что следует из оценок (3.11), а это и означает, что $u(x, t)$ — решение задачи G_2 , что гарантирует лемма 2. Теперь благодаря лемме 1 можем утверждать, что $u(x, t)$ является решением поставленной задачи (2.1) — (2.3).

Литература

- [1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl.Sc. fis.,mat. e natur. 1895. V. 4. P. 89–99, 133–142.
- [2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Москва: Мир, 1977. 622 с. URL: <https://www.nehdilit.ru/books/detail5807.html>.
- [3] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. Москва: URSS, 2010. 237 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qjwvpl>.
- [4] Кожанов А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 70–75. DOI: <http://doi.org/10.4213/mzm1029>.
- [5] Pulkina L.S., Beylin A.B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // Electronic Journal of Differential Equations. 2019. Vol. 2019. №. 29. P. 1–9. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf>.
- [6] Юлдашев Т.К. Об одной краевой задаче для трехмерного аналога дифференциального уравнения Буссинеска // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158. № 3. С. 424–433. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F749645498/158_3_phys_mat_8.pdf.
- [7] Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21. № 2. С. 47–59. URL: <https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/issues/2014-2/47-59.pdf>.
- [8] Mehraliyev Y.T. On solvability of an inverse boundary problem for the Boussinesq-Love equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2013. V. 6(4). P. 485–494. URL: <http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/10080/>
- [9] Pul'kina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation // Russian Mathematics. 2016. V. 60(9). P. 38–45. DOI: <http://doi.org/10.3103/S1066369X16090048>.
- [10] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным динамическим условием для уравнения колебаний толстого стержня // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучн. сер. 2017. Т. 23. № 4. С. 7–18. URL: DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18>.
- [11] Жегалов В.И. Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска — Лява // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 771–776. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1720>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xieeia>.
- [12] Аттаев А.Х. Характеристическая задача для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения второго порядка // Вестник КРАУНЦ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2018. № 3 (23). С. 14–18. DOI: <http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18>

- [13] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 1. С. 186–194. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1666>.
- [14] Миронов А.Н., Миронова Л.Б., Яковлева Ю.О. Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор) // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 2. С. 207–240. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1853>.
- [15] Midodashvili V. A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics // Electronic Journal of Differential Equations. 2002. Vol. 2002, no. 85, pp. 1–7. URL: <https://emis.univie.ac.at/journals/EJDE/Volumes/2002/85/midodashvili.pdf>.
- [16] Жегалов В.И., Уткина Е.А., Шакирова И.М. Об условиях разрешимости задачи Гурса для обобщенного уравнения Аллера // Изв. вузов. Сер.: Матем. 2018. № 8. С. 21–26. URL: <http://mi.mathnet.ru/ivm9383>.
- [17] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва: Наука, 2006. 287 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17962288>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pdbuih>.
- [18] Кечина О.М. О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучн. сер. 2017. Т. 23. № 1. С. 15–20. URL: <https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142>.
- [19] Гилев А.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучн. сер. 2020. Т. 26. № 4. С. 25–35. URL: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35>.
- [20] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 444 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=446293>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21

Submitted: 02.09.2021

Revised: 07.10.2021

Accepted: 15.11.2021

A.V. Gilev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: toshqaaa@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6747-5826>

O.M. Kechina

Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russian Federation

E-mail: omka-83@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5560-8521>

L.S. Pulkina

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

CHARACTERISTIC PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION WITH A DOMINANT DERIVATIVE

ABSTRACT

In this article we consider the Goursat problem for an equation with a dominating fourth-order mixed derivative and prove its unique solvability. The equation under consideration can be interpreted as a generalized Boussinesq – Love equation, which arises when describing longitudinal waves in a rod, taking into account transverse deformations. To justify the solvability, we proposed a method that is based on the possibility of reducing the problem posed to two Goursat problems for second-order equations. One of the problems is the classical Goursat problem for the simplest hyperbolic equation, while the other equation is loaded, and the study of the Goursat problem for it is the main result of the work.

Key words: Boussinesq – Love equation; system of two problems; Goursat problem; equation with dominant derivative; loaded equation; method of successive approximations; existence of a solution; uniqueness of a solution.

Citation. Gilev A.V., Kechina O.M., Pulkina L.S. Characteristic problem for a fourth-order equation with a dominant derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 14–21. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Gilev A.V., 2021

Anton V. Gilev — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Kechina O.M., 2021

Olga M. Kechina — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Physics, Mathematics and Teaching Methods, Samara State University of Social Sciences and Education, 65/67, M. Gorky, Samara, 443090, Russian Federation.

© Pulkina L.S., 2021

Ludmila S. Pulkina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore. *Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl.Sc. fis., mat. e natur.*, 1895, vol. 4, pp. 89–99, pp. 133–142.
- [2] Uizem G. Linear and non-linear waves. Moscow: Mir, 1977, 622 p. Available at: <https://www.nehudlit.ru/books/detail5807.html>. (In Russ.)
- [3] Korpusov M.O. Destruction in nonclassical wave equations. Moscow: URSS, 2010, 237 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qjwvpl>. (In Russ.)
- [4] Kozhanov A.I. An initial-boundary value problem for equations of the generalized Boussinesq equation type with a nonlinear source. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, no. 1, pp. 59–63. DOI: <https://doi.org/10.10072/BF02675010>. (In Russ.)
- [5] Pulkina L.S., Beylin A.B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2019, vol. 2019, no. 29, pp. 1–9. Available at: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf>.
- [6] Yuldashev T.K. On a boundary value problem for a three dimensional analog of the Boussinesq type differential equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 424–433. Available at: https://kpfu.ru/portal/docs/F749645498/158_3_phys_mat_8.pdf. (In Russ.)
- [7] Namsaraeva G.V. Linear inverse problems for some analogues of the Boussinesq equation. *Mathematical notes of NEFU*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 47–59. Available at: <https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/issues/2014-2/47-59.pdf>. (In Russ.)
- [8] Mehraliyev Y.T. On Solvability of an Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq-Love Equation. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2013, vol. 6(4), pp. 485–494. Available at: <http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/10080/>
- [9] Pulkina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation. *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 38–45. DOI: <http://doi.org/10.3103/S1066369X16090048>.
- [10] Beylin A.B., Pulkina L.S. A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriya = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 7–18. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18>. (In Russ.)
- [11] Zhegalov V.I. On a problem for generalized Boussinesq–Love equation. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 771–776. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1720>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xieeia>. (In Russ.)
- [12] Attaev A.H. The characteristic problem for the second-order hyperbolic equation loaded along one of its characteristics. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences], 2018, no. 3(23), pp. 14–18. DOI: <http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18>. (In Russ.)
- [13] Andreev A.A., Yakovleva J.O. The Goursat-type problem for a hyperbolic equation and system of third order hyperbolic equations. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 186–194. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1666>. (In Russ.)
- [14] Mironov A.N., Mironova L.B., Yakovleva Yu.O. The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review). *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1853>. (In Russ.)
- [15] Midodashvili B. A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2002, vol. 2002, no. 85, pp. 1–7. Available at: <https://emis.univie.ac.at/journals/EJDE/Volumes/2002/85/midodashvili.pdf>.

- [16] Zhegalov V.I., Utkina E.A., Shakirova I.M. On conditions of solvability of the Goursat problem for generalized Aller equation. *Izvestiya VUZ. Matematika* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], 2018, vol. 62, no. 8, pp. 17–21. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X18080030>. (In Russ.)
- [17] Nakhushiev A.M. Problems with displacement for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006, 287 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17962288>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pdbuih>. (In Russ.)
- [18] Ketchina O.M. On solvability of nonlocal problem for third-order equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 15–20. Available at: <https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142>. (In Russ.)
- [19] Gilev A.V. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with a dominant mixed derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 25–35. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35>. (In Russ.)
- [20] Sobolev S.L. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1966, 444 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=446293>. (In Russ.)



Научная статья

10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 02.09.2021
после рецензирования: 9.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

В.А. Соболев

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-7340>

Е.А. Тропкина

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: elena_a.85@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5970-6740>

Е.А. Щепакина

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: shchepakina@yahoo.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2898-2865>

Л. Жанг

Шаньдунский научно-технологический университет,
г. Циндао, Китайская Народная Республика
E-mail: li-jun0608@163.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5697-4611>

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ О БЕГУЩИХ ВОЛНАХ¹

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается задача о бегущих волнах для сингулярно возмущенных систем полулинейных параболических уравнений. Предлагается эффективный метод редукции сингулярно возмущенных систем, которые возникают при решении задач о нахождении бегущих волн. Полученные математические результаты используются для исследования бегущих волн как для абстрактных уравнений с частными производными, так и в конкретной модели, возникающей в задачах физики, химии и биологии.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; медленные инвариантные многообразия; критические бегущие волны; редукция.

Цитирование. Соболев В.А., Тропкина Е.А., Щепакина Е.А., Zhang L. Декомпозиция задач о бегущих волнах // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 22–30. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Соболев В.А., 2021

Владимир Андреевич Соболев — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Тропкина Е.А., 2021

Елена Андреевна Тропкина — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта № 20-51-53008 и проекта NSFC No. 12011530062

© Щепакина Е.А., 2021

Елена Анатольевна Щепакина — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Жанг Л., 2021

Личунь Жанг — PhD, профессор, Шаньдунский научно-технологический университет, 266590, Китайская Народная Республика, провинция Шаньдун, г. Циндао, округ Гуаньдао, 579.

1. Предварительные сведения

Известно, что бегущие волны играют фундаментальную роль при исследовании широкого круга математических и прикладных задач. Рассмотрим следующий класс систем полудиффузионных параболических уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \Upsilon(u), \quad (1.1)$$

где $u \in \mathbb{R}^n$, $\chi \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, ε — положительный малый параметр. Здесь Λ — постоянная диагональная матрица с положительными элементами на главной диагонали $(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$, а $\Upsilon(u)$ — достаточно гладкая и ограниченная по норме векторная функция.

Системы такого типа широко применяются в качестве математических моделей в физике, химии и биологии, и известно много примеров бегущих волн в таких моделях, см., например, [1–4].

Напомним, что решение типа бегущей волны представимо в виде $u(x, t) = u(\zeta)$, $\zeta = x - ct$ для некоторого значения $c \in \mathbb{R}$ скорости волны и удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-cu' = \varepsilon \Lambda u'' + \Upsilon(u), \quad (1.2)$$

где символ $(\cdot)'$ соответствует дифференцированию по ζ . Наша первоочередная цель состоит в понижении размерности системы (1.2), используя расщепляющее преобразование [5; 6].

2. Расщепляющее преобразование

Рассмотрим сингулярно возмущенную дифференциальную систему, линейную по y :

$$\dot{x} = \xi(x, \varepsilon) + \Xi(x, \varepsilon)y, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon \dot{y} = \theta(x, \varepsilon) + \Theta(x, \varepsilon)y, \quad (2.2)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Будем предполагать, что собственные значения $\lambda_i(x)$ матрицы $\Theta(x, 0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \lambda_i(x) \leq -2\gamma < 0$, при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, и что матричные и векторные функции ξ, θ, Ξ и Θ непрерывны и ограничены вместе со своими частными производными по переменным $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

При этих предположениях система (2.1), (2.2) имеет медленное инвариантное многообразие

$$y = \varphi(x, \varepsilon) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \dots$$

Используя равенство

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\xi + \Xi \varphi),$$

которое следует из (2.1), получим, что функция φ может быть найдена из так называемого уравнения инвариантности [7]

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\xi + \Xi \varphi) = \theta + \Theta \varphi.$$

Предположим, что справедливы следующие представления:

$$\Xi(x, \varepsilon) = \Xi_0(x) + \varepsilon \Xi_1(x) + \dots,$$

$$\xi(x, \varepsilon) = \xi_0(x) + \varepsilon \xi_1(x) + \dots,$$

$$\Theta(x, \varepsilon) = \Theta_0(x) + \varepsilon \Theta_1(x) + \dots,$$

$$\theta(x, \varepsilon) = \theta_0(x) + \varepsilon \theta_1(x) + \dots$$

Тогда формулы для коэффициентов асимптотического разложения медленного инвариантного многообразия $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$ принимают вид

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= -\Theta_0^{-1}\theta_0, \\ \varphi_1 &= \Theta_0^{-1} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} (\xi_0 + \Xi_0 \varphi_0) - \theta_1 - \Theta_1 \varphi_0 \right].\end{aligned}\tag{2.3}$$

Уравнение инвариантности для быстрого инвариантного многообразия $\Psi = \Psi(v, z, \varepsilon)$ [5; 6] имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial v} \left[\xi(v, \varepsilon) + \Xi(v, \varepsilon) \varphi(v, \varepsilon) \right] + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left[\Theta(v + \varepsilon \Psi, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} (v + \varepsilon \Psi, \varepsilon) \Xi(v + \varepsilon \Psi, \varepsilon) \right] z = \\ = \xi(v + \varepsilon \Psi, \varepsilon) - \xi(v, \varepsilon) + \Xi(v + \varepsilon \Psi, \varepsilon) (z + \varphi(v + \varepsilon \Psi, \varepsilon)) - \Xi(v, \varepsilon) \varphi(v, \varepsilon).\end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получим

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \Theta_0(v) z = \Xi_0(v) z.$$

Для $\Psi_0(v, z)$ справедливо представление $\Psi_0(v, z) = D_0(v) z$, где матрица $D_0(v)$ удовлетворяет уравнению

$$D_0(v) \Theta_0(v) = \varphi_0(v),$$

и, следовательно,

$$\Psi_0(v, z) = \Xi_0(v) \Theta_0^{-1}(v) z.$$

Перейдем к построению расщепляющего преобразования

$$x = v + \varepsilon \Psi(v, z, \varepsilon),\tag{2.4}$$

$$y = z + \varphi(x, \varepsilon),\tag{2.5}$$

которое приводит систему (2.1), (2.2) к виду

$$\dot{v} = V(v, \varepsilon),\tag{2.6}$$

$$\varepsilon \dot{z} = Z(v, z, \varepsilon).\tag{2.7}$$

Пусть $(x(t), y(t))$ является решением (2.1), (2.2) с начальным условием $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. Тогда существует такое решение $(v(t), z(t))$ для (2.6), (2.7) с начальным условием $v(t_0) = v_0, z(t_0) = z_0$, что

$$x(t) = v(t) + \varepsilon \Psi(v(t), z(t), \varepsilon),\tag{2.8}$$

$$y(t) = z(t) + \varphi(x(t), \varepsilon).\tag{2.9}$$

Достаточно показать, что (2.8), (2.9) имеет место при $t = t_0$. Полагая $t = t_0$ в (2.8), получим

$$x_0 = v_0 + \varepsilon \Psi(v_0, z_0, \varepsilon),$$

$$y_0 = z_0 + \varphi(x_0, \varepsilon)$$

и, следовательно, $z_0 = y_0 - \varphi(x_0, \varepsilon)$.

Для v_0 имеем уравнение

$$v_0 = x_0 - \varepsilon \Psi(v_0, z_0, \varepsilon),\tag{2.10}$$

которое имеет единственное решение для любого $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и фиксированных значений z_0 и t_0 , где

$$\|z_0\| = \|y_0 - \varphi(x_0, \varepsilon)\| \leq \rho_1$$

для некоторого ρ_1 .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1 Любое решение $x = x(t, \varepsilon), y = y(t, \varepsilon)$ системы (2.1), (2.2) с начальным условием $x(t_0, \varepsilon) = x_0, y(t_0, \varepsilon) = y_0$ можно представить в форме (2.8).

Эта теорема означает, что система (2.1), (2.2) может быть приведена к виду (2.6), (2.7) при помощи расщепляющего преобразования (2.4), (2.5). Таким образом, преобразование (2.4), (2.5) осуществляет декомпозицию на две подсистемы, первая из которых независима и содержит малый параметр регулярным образом. Заметим, что начальное значение v_0 может быть найдено из (2.10) в виде асимптотического разложения

$$v_0 = v_{00} + \varepsilon v_{01} + \varepsilon^2 v_{02} + \dots$$

Например, $v_{00} = z_0, v_{01} = -\Psi(x_0, z_{00}, 0)$, где $z_{00} = y_0 - \varphi_0(x_0)$.

Важно отметить существование такого числа K , $K > 1$, что справедливо неравенство

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq K \exp(-\gamma t/\varepsilon) \|z_0\|, \quad t \geq 0.$$

Это означает, что решение $x = x(t, \varepsilon)$, $y = y(t, \varepsilon)$ исходной системы (2.1), (2.2) с начальным условием $x(t_0, \varepsilon) = x_0$, $y(t_0, \varepsilon) = y_0$ представимо в виде

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= v(t, \varepsilon) + \varepsilon \psi_1(t, \varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \varphi(v(t, \varepsilon), \varepsilon) + \psi_2(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, это решение представимо в виде суммы решения, траектория которого принадлежит медленному инвариантному многообразию, т. е.

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= v(t, \varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \varphi(v(t, \varepsilon), \varepsilon), \end{aligned}$$

и экспоненциально убывающей добавкой

$$\begin{aligned} \varepsilon \psi_1 &= \varepsilon \Psi(v(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \psi_2(t, \varepsilon) &= z(t, \varepsilon) + \varphi(v(t, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon \Psi(v(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon), \varepsilon) - \varphi(v(t, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка $o(\varepsilon)$, применим преобразование

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon \Psi_0(v, z), \\ y &= z + \varphi_0(v) + \varepsilon \varphi_1(v), \end{aligned}$$

чтобы свести (2.1), (2.2) к нелинейной блочно-треугольной форме

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \xi_0(v) + \Xi_0(v) \varphi_0(v) + \varepsilon \left[\xi_1(v) + \Xi_0(v, t) \varphi_1(v) + \Xi_1(v, t) \varphi_0(v) \right] + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon \dot{z} &= \left[\Theta_0(v) + \varepsilon \left(\Theta_1(v) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial v}(v) \Xi_0(v) \right) \right] z + O(\varepsilon^2 \|z\|). \end{aligned}$$

3. Декомпозиция задачи о бегущих волнах

Предположим, что скорость бегущей волны является величиной порядка единицы, т. е. $c = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда можно переписать (1.2) в форме (2.1), (2.2) с

$$\xi = 0, \quad \Xi = I, \quad \theta = -\Lambda^{-1} \Upsilon, \quad \Theta = -c \Lambda^{-1},$$

где I — единичная матрица.

Из этих формул и (2.3) следует

$$\dot{v} = \varphi_0(v) + \varepsilon \varphi_1(v) + O(\varepsilon^2), \tag{3.1}$$

где

$$\varphi_0 = -\Theta^{-1} \theta = -c^{-1} \Upsilon(v)$$

и

$$\varphi_1 = \Theta^{-1} \frac{\partial \varphi_0(v)}{\partial v} \varphi_0(v),$$

или

$$\varphi_1 = -c^{-3} \Lambda \Upsilon_v(v) \Upsilon(v),$$

где $\Upsilon_v(v) = \frac{\partial \Upsilon(v)}{\partial v}$.

Таким образом, если мы найдем периодическое решение (3.1), то получим периодическую бегущую волну для исходной системы (1.1). Аналогичная ситуация имеет место для гомоклинических и гетероклинических траекторий системы (3.1).

Заметим, что уравнение для z принимает вид

$$\varepsilon \dot{z} = \left[-c \Lambda^{-1} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \Upsilon(v)}{\partial v} \right] z + O(\varepsilon^2 \|z\|).$$

4. Модель типа ”реакция–диффузия”

Полагая $u = (u_1, u_2)$, рассмотрим систему, состоящую из двух уравнений параболического типа

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi^2} + f(u), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \chi^2} + g(u),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}f &= -u_1(1 + u_2) + \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1 + u_1^\gamma}, \\ g &= u_1(\beta + u_2) - \delta u_2.\end{aligned}$$

Если эту систему рассматривать как модель реакции типа Белоусова–Жаботинского, то u_1 и u_2 рассматриваются как безразмерные концентрации реагентов; α , β , γ , δ и ν_0 — безразмерные положительные параметры и при этом $\beta > 1$ и $\gamma > 1$ [8]. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2) принимает вид

$$\varepsilon u_1'' = -cu_1' + u_1(1 + u_2) - \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1 + u_1^\gamma}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\varepsilon}{\kappa} u_2'' = -cu_2' - u_1(\beta + u_2) + \delta u_2. \quad (4.2)$$

При $\varepsilon = 0$ получаем вырожденную систему

$$\begin{aligned}0 &= -cu_1' + u_1(1 + u_2) - \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1 + u_1^\gamma}, \\ 0 &= -cu_2' - u_1(\beta + u_2) + \delta u_2.\end{aligned} \quad (4.3)$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned}x &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ y &= \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\kappa \end{pmatrix}, \\ \Upsilon &= \begin{pmatrix} -u_1(1 + u_2) + \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1 + u_1^\gamma} \\ u_1(\beta + u_2) - \delta u_2 \end{pmatrix}, \\ \theta &= \begin{pmatrix} u_1(1 + u_2) - \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1 + u_1^\gamma} \\ \kappa[-u_1(\beta + u_2) + \delta u_2] \end{pmatrix}, \\ \Theta &= \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c\kappa \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi_0 = -\Theta^{-1}\theta = -\frac{1}{c}\Upsilon(v) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} v_1(1 + v_2) - \frac{\alpha(\nu_0 + v_1^\gamma)}{1 + v_1^\gamma} \\ -v_1(\beta + v_2) + \delta v_2 \end{pmatrix},$$

и

$$\varphi_1 = \Theta^{-1} \frac{\partial \varphi_0(v)}{\partial v} \varphi_0(v) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(v) \\ \varphi_{12}(v) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c\kappa} \end{pmatrix},$$

и

$$\frac{\partial \varphi_0(v)}{\partial v} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 + v_2 - \frac{\alpha \gamma v_1^{\gamma-1}(1 - \nu_0)}{(1 + v_1^\gamma)^2} & v_1 \\ -\beta - v_2 & \delta - v_1 \end{pmatrix}.$$

В результате система (4.1), (4.2) сводится к независимой подсистеме на медленном инвариантном многообразии

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\zeta} &= -\frac{\alpha(\nu_0 + v_1^\gamma)}{c(1 + v_1^\gamma)} + \frac{1}{c}v_1(1 + v_2) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{c^3} \left[\left(\frac{\alpha \gamma v_1^{\gamma-1}(1 - \nu_0)}{(1 + v_1^\gamma)^2} - 1 - v_2 \right) \left(\frac{\alpha(\nu_0 + v_1^\gamma)}{1 + v_1^\gamma} - v_1(1 + v_2) \right) - v_1^2(\beta + v_2) + \delta v_1 v_2 \right] + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dv_2}{d\zeta} &= -\frac{1}{c}v_1(\beta + v_2) + \frac{\delta}{c}v_2 - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{c^3 k} \left[(\beta + v_2) \left(\frac{\alpha(\nu_0 + v_1^\gamma)}{1 + v_1^\gamma} - v_1(1 + v_2) \right) + (v_1 - \delta)(v_1(\beta + v_2) - \delta v_1) \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и подсистеме для быстрых переменных z_1 и z_2

$$\begin{aligned} \varepsilon z_1' &= -cz_1 + \frac{\varepsilon}{c} \left[\left(\frac{\alpha \gamma v_1^{\gamma-1}(1 - \nu_0)}{(1 + v_1^\gamma)^2} - 1 - v_2 \right) z_1 - v_1 z_2 \right] + O(\varepsilon^2 \|z\|), \\ \varepsilon z_2' &= -ckz_2 + \frac{\varepsilon}{c} [(\beta + v_2)z_1 + (v_1 - \delta)z_2] + O(\varepsilon^2 \|z\|). \end{aligned}$$

Подсистема (4.4) не содержит сингулярных возмущений, и ее порядок вдвое меньше по сравнению с (4.1), (4.2), что существенно упрощает анализ.

Заметим, что особые точки исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяются равенствами $u_1' = 0$, $u_2' = 0$ и $f(u_1, u_2) = 0$, $g(u_1, u_2) = 0$, в то время как для определения особых точек на медленном инвариантном многообразии достаточно рассматривать только два уравнения, т. е.

$$f(u_1, u_2) = 0, \quad g(u_1, u_2) = 0.$$

В качестве примера рассмотрим случай следующих численных значений параметров: $\alpha = 12$, $\beta = 1.5$, $\gamma = 3$, $\delta = 1.7$ и $\nu_0 = 0.01$. В этом случае система (4.3) имеет три особые точки: неустойчивый узел P_1 , седло P_2 и неустойчивый фокус P_3 (рис. 4.1). Заметим, что эти особые точки являются проекциями особых точек \tilde{P}_1 , \tilde{P}_2 и \tilde{P}_3 полной системы (4.1), (4.2) на медленную поверхность.

Анализ системы (4.3) дает наличие гетероклинической траектории, соединяющей особые точки P_1 и P_2 (рис. 4.2). Более того, система (4.1), (4.2) имеет решение, стремящееся к неустойчивой особой точке \tilde{P}_1 при $\zeta \rightarrow -\infty$ и к \tilde{P}_2 при $\zeta \rightarrow +\infty$. Это решение определяет профиль бегущей волны системы параболических уравнений, распространяющейся с постоянной скоростью $c > 0$.

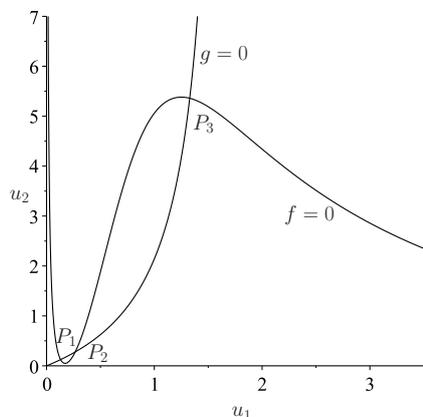


Рис. 4.1. Нуль-кривые и особые точки системы (4.3)

Fig. 4.1. Zero-curves and singular points of the system (4.3)

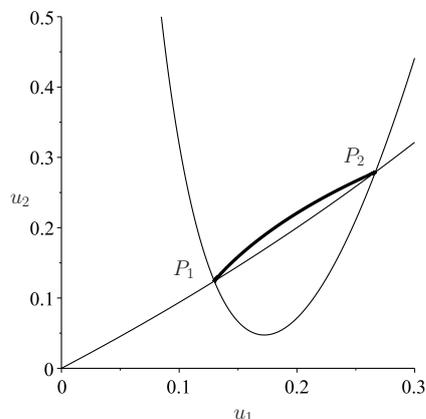


Рис. 4.2. P_1 – P_2 гетероклиническая траектория системы (4.3)

Fig. 4.2. P_1 – P_2 heteroclinic trajectory of the system (4.3)

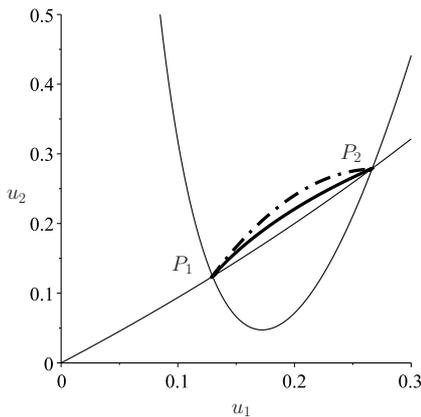


Рис. 4.3. Гетероклиническая траектории системы (4.3) (сплошная линия) и (v_1, v_2) -проекция соответствующей гетероклинической траектории системы (4.1), (4.2) (штрих-пунктирная линия)
 Fig. 4.3. Heteroclinical trajectory of the system (4.3) (solid line) and (v_1, v_2) -projection of the appropriate heteroclinic trajectory of the system (4.1), (4.2) (dashed-dotted line)

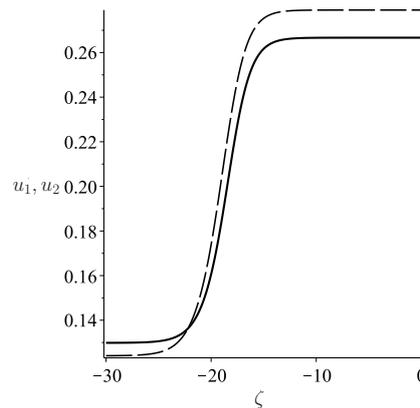


Рис. 4.4. Графики функций $u_1 = u_1(\zeta)$ (сплошная линия) и $u_2 = u_2(\zeta)$ (пунктирная линия) для $\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$ гетероклинической траектории системы (4.1), (4.2)
 Fig. 4.4. The graphs of the functions $u_1 = u_1(\zeta)$ (solid line) and $u_2 = u_2(\zeta)$ (dashed line) for $\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$ heteroclinical trajectory of the system (4.1), (4.2)

Рисунок 4.3 демонстрирует гетероклиническую траекторию системы (4.3) (сплошная линия) вместе с (v_1, v_2) -проекцией соответствующей траектории системы (4.1), (4.2) (пунктирная линия). Эти линии близки друг к другу, это означает, что редуцированная система наследует существенные черты поведения исходной системы. Следует отметить, что соответствующие гетероклинические траектории систем (4.3) и (4.4) практически совпадают [9].

На рис. 4.4 приводятся графики функций $u_1 = u_1(\zeta)$ и $u_2 = u_2(\zeta)$ для $\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$ гетероклинической траектории системы (4.1), (4.2).

Понятно, что изменение значений параметров может приводить не только к бифуркации состояний равновесия, но и к бифуркации решений типа бегущих волн. При этом наиболее интересны бифуркации, при которых возникают траектории-утки как периодические, так и гетероклинические или гомоклинические траектории-утки. Такие траектории соответствуют так называемым критическим бегущим волнам [10–12]. Интересные примеры бегущих волн, соответствующих траекториям-уткам, можно найти в работах и других авторов, см., например, [13; 14].

Литература

- [1] Murray J.D. *Mathematical Biology* (3rd Ed). New York, 2003. Vol. I (An Introduction). URL: <https://booksee.org/book/1008392>.
- [2] Murray J.D. *Mathematical Biology* (3rd Ed). New York, 2003. Volume II (Spatial Models and Biomedical Applications). URL: <http://poleon.if.ufrgs.br/pub/listas-sistdin/MurrayII.pdf>.
- [3] Volpert A. I., Volpert Vitaly A., Volpert Vladimir A. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*. Providence: AMS, 1994. 453 p. URL: https://box.cs.istu.ru/public/docs/other/_Unsorted/new/books.pdox.net/Math/Traveling%20Wave%20Solutions%20of%20Parabolic%20Systems.pdf.
- [4] Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. New York: Springer Verlag, 1983. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-0152-3>.
- [5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // *System and Control Letters*. 1984. Vol. 5. P. 169–179. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(84\)80099-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7).
- [6] Sobolev V.A. Efficient decomposition of singularly perturbed systems // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2019. Vol. 14. № 4. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019012>.
- [7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. *Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications* // *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin–Heidelberg–London: Springer, 2014. Vol. 2114.
- [8] Sevčikova H., Kubiček M., Marek M. 1984 Concentration waves — effects of an electric field // *Mathematical Modelling in Science and Technology*, ed. X.J.R. Avula, R.E. Kalman, A.I. Liapis and E.Y. Rodin. New York: Pergamon Press, 1984. P. 477–482. DOI: <http://doi.org/10.1016/B978-0-08-030156-3.50091-6>.

- [9] Shchepakina E., Tropkina E. Order reduction for problems with traveling wave solutions to reaction-diffusion systems // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1745. Issue 1. 012109. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012109>.
- [10] Schneider K., Shchepakina E., Sobolev V. New type of travelling wave solutions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2003. Vol. 26. Issue 16. P. 1349–1361. DOI: <http://doi.org/10.1002/mma.404>.
- [11] Соболев В.А., Шнайдер К., Щепакина Е.А. Три вида волн неадиабатического горения в случае автокаталитической реакции // Химическая физика. 2005. Т. 24. № 6. С. 63–69. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9148658>. EDN: <https://elibrary.ru/hsffep>.
- [12] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. Москва: Физматлит, 2010. 320 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://elibrary.ru/ryrtfh>.
- [13] Härterich J. Viscous Profiles of Traveling Waves in Scalar Balance Laws: The Canard Case // Methods and Applications of Analysis. 2003. Vol. 10. P. 97–118. URL: https://www.intlpress.com/site/pub/files/_fulltext/journals/maa/2003/0010/0001/MAA-2003-0010-0001-a006.pdf.
- [14] Buřič L., Klíč A., Purmová L. Canard solutions and travelling waves in the spruce budworm population model // Applied Mathematics and Computation. 2006. Vol. 183. P. 1039–1051. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.115>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30

Submitted: 02.09.2021

Revised: 09.10.2021

Accepted: 15.11.2021

V.A. Sobolev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-7340>

E.A. Tropkina

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: elena_a.85@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5970-6740>

E.A. Shchepakina

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: shchepakina@yahoo.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5697-4611>

L. Zhang

Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong, China

E-mail: li-jun0608@163.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5697-4611>

DECOMPOSITION OF TRAVELING WAVES PROBLEMS

ABSTRACT

In the article, the traveling waves problem for singularly perturbed systems of semilinear parabolic equations is considered. An effective method for the order reduction of singularly perturbed systems is proposed. The obtained mathematical results are used to study traveling waves both for abstract partial differential equations and for a specific model that can arise in physics problems, chemistry, and biology.

Key words: singular perturbations; slow invariant manifolds; critical travelling waves; singular perturbations; integral manifold; order reduction; asymptotic expansion; differential equations; fast variables; slow variables.

Citation. Sobolev V.A., Tropkina E.A., Shchepakina E.A., Zhang L. Decomposition of traveling waves problems. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia serii* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 22–30. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Sobolev V.A., 2021

Vladimir A. Sobolev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Tropkina E.A., 2021

Elena A. Tropkina — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Shchepakina E.A., 2021

Elena A. Shchepakina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Zhang L., 2021

Lijun Zhang — professor, Shandong University of Science and Technology, 579, Quinwangang Road, Huangdao District, Qingdao, Shandong Province, 266590, P.R. China.

References

- [1] Murray J.D. *Mathematical Biology* (3rd Ed). New York, 2003, Vol. I (An Introduction). Available at: <https://booksee.org/book/1008392>.
- [2] Murray J.D. *Mathematical Biology* (3rd Ed). New York, 2003, Vol. II (Spatial Models and Biomedical Applications). Available at: <http://pcleon.if.ufrgs.br/pub/listas-sistdin/MurrayII.pdf>.
- [3] Volpert A.I., Volpert Vitaly A., Volpert Vladimir A. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*. Providence: AMS, 1994. Available at: https://box.cs.istu.ru/public/docs/other/_Unsorted/new/books.pdox.net/Math/Traveling%20Wave%20Solutions%20of%20Parabolic%20Systems.pdf.
- [4] Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. New York: Springer Verlag, 1983. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-1-4612-0873-0>.
- [5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems. *System and Control Letters*, 1984, Vol. 5, pp. 169–179. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(84\)80099-7](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7).
- [6] Sobolev V.A. Efficient decomposition of singularly perturbed systems. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2019, vol. 14, no. 4, pp. 1–18. DOI: <http://doi.org/10.1051/mmnp/2019023>.
- [7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin–Heidelberg–London: Springer, 2014, vol. 2114.
- [8] Sevcikova H., Kubiček M., Marek M. Concentration waves — effects of an electric field. In: *Avula X.J.R., Kalman R.E., Liapis A.I., Rodin E.Y. (Eds.) Mathematical Modelling in Science and Technology*. New York: Pergamon Press, 1984, pp. 477–482. DOI: <http://doi.org/10.1016/B978-0-08-030156-3.50091-6>.
- [9] Shchepakina E., Tropkina E. Order reduction for problems with traveling wave solutions to reaction-diffusion systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1745, Issue 1, 012109. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012109>.
- [10] Schneider K., Shchepakina E., Sobolev V. New type of travelling wave solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2003, vol. 26, issue 16, pp. 1349–1361. DOI: <http://doi.org/10.1002/mma.404>.
- [11] Sobolev V., Schneider K., Shchepakina E. Three types of non-adiabatic combustion waves in the case of autocatalytic reaction. *Russian Journal of Physical Chemistry B: Focus on Physics*, 2005, vol. 24, no. 6, pp. 63–69. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9148658>. EDN: <https://elibrary.ru/hssfep> (in Russian)
- [12] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Model reduction and critical phenomena in macrokinetics. Moscow: Fizmatlit, 2010, 320 p. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://elibrary.ru/ryrtfh> (in Russian)
- [13] Härterich J. Viscous Profiles of Traveling Waves in Scalar Balance Laws: The Canard Case. *Methods and Applications of Analysis*, 2003, vol. 10, pp. 97–118. Available at: https://www.intlpress.com/site/pub/files/_fulltext/journals/maa/2003/0010/0001/MAA-2003-0010-0001-a006.pdf.
- [14] Buřič L., Klíč A., Purmová L. Canard solutions and travelling waves in the spruce budworm population model. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, vol. 183, pp. 1039–1051. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.115>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-31-45

УДК 517+531.01

Дата: поступления статьи: 10.09.2021
после рецензирования: 14.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

М.В. Шамолин

Институт механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ. ЧАСТЬ 7. ДИАГНОСТИРОВАНИЕ В СИСТЕМАХ ПРЯМОГО И НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Данная статья является седьмой работой цикла по дифференциальной и топологической диагностике. В ней рассмотрена диагностика неисправностей в системе непрямого управления объектом, движение которого описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего порядка (задача Б.В. Булгакова). В использованном алгоритме диагностирования выбрана сфера контроля, когда каждой неисправной системе ставится в соответствие некоторая постоянная величина, и с ней по определенным правилам осуществляется сравнение чисел, полученных в процессе интегрирования уравнений и характеризующих функциональное состояние системы. Рассматривается также диагностика неисправностей в одной системе прямого управления движением летательного аппарата, которое может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. При этом строится и используется определенный алгоритм диагностирования в соответствии с разработанной ранее методикой.

Ключевые слова: задача дифференциальной диагностики; система непрямого и прямого управления; диагностирование; сфера контроля; асимптотическая устойчивость.

Цитирование. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 7. Диагностирование в системах прямого и непрямого управления // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 31–45. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-31-45>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Шамолин М.В., 2021

Максим Владимирович Шамолин — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики, эксперт РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

Введение

Напомним, что задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления [1–6] может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т. е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т. е. поиску происшедшей неисправности [7; 8]. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля [9; 10].

При этом исходной информацией при решении задачи контроля являются математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля [11–13].

Как известно, задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма короткого интервала времени, например за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

1. Еще раз о задаче контроля

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = f_0(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leq t \leq T_0, \quad x \in X \subseteq \mathbf{R}^n, \quad (1.1)$$

где x — n -мерный фазовый вектор системы, $f_0(x, t)$ — непрерывная (или гладкая) вектор-функция, S^0 — известная с центром в начале координат и радиуса R^0 сфера начальных значений, T_0 — конечное время.

Предположим, что тривиальное решение системы (1.1) при условии

$$f_0(0, t) \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, T_0] \quad (1.2)$$

асимптотически устойчиво и описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени в рассматриваемой области пространства системой управления (СУ) посредством функции $u(t)$. Структура СУ (управление $u(t)$) и соответствующие параметры выбираем, исходя из цели управления и условий устойчивости системы (1.1), полученных, например, с помощью некоторой функции Ляпунова $v(x, t) > 0$. Систему (1.1), удовлетворяющую перечисленным условиям, обычно называют исправной [14–16].

Пусть в СУ движением данного объекта может произойти l неисправностей. Формально определим неисправность следующим образом. Априори известно, что в некоторый случайный момент времени t правая часть системы (1.1) изменяется каким-либо из l способов. При этом система (1.1) заменяется одной из систем следующего вида:

$$x' = f_j(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leq t \leq T_0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.3)$$

Фазовая траектория системы (1.1) после возникновения неисправности в некоторый момент времени непрерывно продолжается некоторой траекторией одной из систем вида (1.3).

Предположим, что наблюдение за некоторыми компонентами фазового вектора (данные компоненты, как известно, образуют вектор контроля $y(t)$ [17; 18], размерность которого m , очевидно, не превзойдет размерность n фазового вектора $x(t)$), дает возможность судить о том, что система вида (1.3) исправна или что в этой системе произошла неисправность. Задачу контроля сформулируем так.

В фазовом пространстве вектора контроля $y(t)$ требуется построить сферу S_R радиуса R такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля при интегрировании системы (1.1) с начальными условиями из некоторой выбранной сферы S^0 в течение времени $t < T_0 - t_0$ лежали внутри сферы S_R , а траектории систем вида (1.3) пересекались со сферой S_R .

Пусть фазовая траектория системы (1.1) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности таковы, что они доставляют неустойчивость тривиального решения системы (1.1) [19–21]. В некоторый случайный момент времени происходит неисправность, т. е. непрерывный переход на траекторию одной из систем вида (1.3), которая выходит из окрестности начала координат.

В этом случае, проводя розыгрыш начальных условий x^0 из ограниченного множества S^0 и с этими начальными условиями интегрируя систему (1.1) на интервале времени $[t_0, T_0]$, можно построить m ансамблей портретов координат вектора контроля $y(t)$. За сферу контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем вида (1.3) имеются устойчивые системы (т. е. системы, тривиальное решение которых асимптотически устойчиво). Траектории $y(t)$ таких систем, выходящие из сферы S^0 , также должны пересекать сферу S_R .

Рассмотрим также сферу контроля S_R и квадратичную форму

$$(y, y') = 0. \quad (1.4)$$

Этим уравнением для каждой из систем вида (1.3) определяется объем траекторий вектора контроля. Границу этого объема внутри будем аппроксимировать некоторой конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим через S_R^j , $j = 1, \dots, l$. Фазовые траектории вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием j -й системы вида (1.3) с начальными условиями из сферы S^0 ($R^0 < R$), будут выходить из сферы S_R через множество S_R^j . Те множества S_R^j , которые не пересекаются с другими траекториями вектора контроля, определяют номер неисправности. В противном случае j -я гипотеза отбрасывается сразу (см. также [22]).

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно уменьшить список систем вида (1.3) и даже диагностировать некоторые неисправности.

2. Динамическая система с непрямым управлением

Рассмотрим динамическую систему с непрямым управлением, которая впервые изучена Б.В. Булгаковым:

$$\begin{aligned} T^2\eta'' + U\eta' + k\eta &= T^2\xi, \\ \xi' &= \varphi(\sigma), \\ \sigma &= a\eta + E\eta' + G^2\eta'' - \frac{1}{l}\xi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь T^2 — постоянная, характеризующая инерционность объекта управления, $U > 0$ и $k > 0$ — его естественное демпфирование и восстанавливающая сила; a, E, G^2, l — постоянные параметры системы управления. Величина $\varphi(\sigma)$ принадлежит к классу так называемых допустимых функций и удовлетворяет условиям

$$\varphi(\sigma) = 0 \text{ при } \sigma = 0 \text{ и } \sigma\varphi(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \neq 0. \quad (2.2)$$

Будем считать, что в задаче (2.1) параметры T^2, U, k не изменяются в процессе движения, а параметры a, E, G^2, l в процессе движения могут претерпевать изменения.

Сначала необходимо найти условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2.1) в пространстве ее параметров.

2.1. Достаточные условия устойчивости

Уравнения (2.1) запишем в следующей форме ($\eta = x_1, \eta' = x_1' = x_2$):

$$\begin{aligned} x' &= Ax + b\xi, \\ \xi' &= \varphi(\sigma), \\ \sigma &= C^*x - \rho\xi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}; \quad (2.4)$$

$$a_1 = \frac{U}{T^2} > 0, \quad a_2 = \frac{k}{T^2} > 0, \quad \rho = \frac{1}{l} - G^2; \quad (2.5)$$

$$\gamma_1 = E - U\frac{G^2}{T^2}, \quad \gamma_2 = a - k\frac{G^2}{T^2}; \quad (2.6)$$

звездочкой обозначено транспонирование. Матрица A в (2.3) является “устойчивой”, поскольку корни ее характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (2.7)$$

имеют отрицательные действительные части (E — единичная матрица).

Приведем уравнения (2.3) к виду ($x' = \zeta$)

$$\begin{aligned} \zeta' &= A\zeta + b\varphi(\sigma), \\ \sigma' &= C^*\zeta - \rho\varphi(\sigma). \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом для невырожденности преобразования координат

$$\begin{aligned} \zeta &= Ax + b\xi, \\ \sigma &= C^*x - \rho\xi \end{aligned} \quad (2.9)$$

необходимо и достаточно, чтобы следующий определитель был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} A & b \\ C^* & -\rho \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.10)$$

Поскольку $|A| = a^2 \neq 0$, из (2.10) получаем условие

$$\rho \neq -C^* A^{-1} b = \frac{\gamma_2}{a^2} \quad (2.11)$$

или

$$a \neq \frac{1}{l} \frac{k}{T^2}. \quad (2.12)$$

Задача состоит в определении такой области значений параметров (регулятора), при которых гарантируется асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (2.8).

Функцию Ляпунова возьмем в следующей форме:

$$V = \zeta^* B \zeta + \int_0^\sigma \varphi(s) ds. \quad (2.13)$$

Тогда полная производная функции Ляпунова в силу системы (2.8) имеет следующий вид:

$$-\dot{V}|_{(2.8)} = \begin{pmatrix} \zeta^* & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ d^* & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где

$$-C = A^* B = BA, \quad -d = Bb + \frac{1}{2} C. \quad (2.15)$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Очевидно, что если выполнены неравенства

$$p > 0, \quad r - q^2 > 0, \quad (2.17)$$

то матрица C положительно определена.

Из второго неравенства (2.17) следует, что должно быть выполнено следующее строгое неравенство:

$$r > 0. \quad (2.18)$$

Из первого равенства (2.15) находим

$$\begin{aligned} p &= 2a_2 q_0, \\ q &= a_1 q_0 + a_2 r_0 - p_0, \\ r &= 2(a_1 r_0 - q_0). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Определитель системы (2.19) относительно неизвестных p_0, q_0, r_0 равен $4a_1 a_2 > 0$, поэтому данная система имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{2} \frac{a_1^2 + a_2}{a_1 a_2} p - q + \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_1} r, \\ q_0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{a_2} p, \\ r_0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{a_1 a_2} p + \frac{1}{2} \frac{1}{a_1} r. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Используем далее так называемую модификацию Лурье. А именно, на выбор параметров системы (2.8) наложим ограничение, положив $d = 0$. Тогда, в соответствии с (2.15), учитывая (2.19), получаем два соотношения:

$$\begin{aligned} p + a_2 \gamma_2 &= 0, \\ p + r a_2 + a_1 a_2 \gamma_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из первого равенства (2.21), в силу первого условия (2.17), следует, что $\gamma_2 < 0$, а из второго равенства (2.21), в соответствии с неравенством (2.18), заключаем, что и $\gamma_1 < 0$. Исключая p из (2.21), с учетом неравенства (2.18) получаем: $\gamma_2 > a_1 \gamma_1$.

Таким образом, имеем три условия устойчивости параметров системы (2.1):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &< 0, \\ \gamma_2 &< 0, \\ \gamma_2 &> a_1 \gamma_1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

К этим условиям необходимо добавить условие, вытекающее непосредственно из (2.11):

$$\rho > d^* C^{-1} d = 0. \quad (2.23)$$

Группы неравенств (2.22) и (2.23) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости тривиального решения рассматриваемой системы. Запишем их в виде исходных обозначений

$$\begin{aligned} E &< U \frac{G^2}{T^2}, \\ 0 &< k \frac{G^2}{T^2} - a < \frac{U}{T^2} \left(U \frac{G^2}{T^2} - E \right), \\ G^2 &< \frac{1}{l}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Рассмотрим трехмерное пространство параметров a, E, G^2 . В этом пространстве условия (2.24) задают область \bar{Y} , целиком принадлежащую области Y , и соответствуют асимптотической устойчивости тривиального решения исходной системы. Область \bar{Y} ограничена следующими плоскостями:

$$\begin{aligned} I. G^2 &= \frac{ET^2}{U}. \\ II. G^2 &= \frac{aT^2}{k}. \\ III. G^2 &= \frac{1}{l}. \\ IV. G^2 &= T^2 \frac{a-EU/T^2}{k-U^2/T^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Условие (2.10) невырожденности преобразования (2.9) удовлетворяется во всех внутренних точках этой области. Номинальные значения $\bar{a}, \bar{E}, \bar{G}^2$ параметров a, E, G^2 выбираем внутри области \bar{Y} .

Рассмотрим численный пример и алгоритмы решения задачи диагностики.

2.2. Исправная система

Пусть параметры объекта управления рассматриваемой системы (2.1) имеют значения:

$$T = 1; U = 0,4; k = 1; \quad (2.26)$$

а параметры a, E, G^2 системы управления объектом — номинальные значения из области \bar{Y} :

$$\bar{a} = 0,5; \bar{E} = 0,2; \bar{G}^2 = 0,5. \quad (2.27)$$

Кроме того, будем считать, что “параметр обратной связи” (l) удовлетворяет условию

$$l = 1. \quad (2.28)$$

Тривиальное решение системы (2.1) с параметрами (2.26)–(2.28) асимптотически устойчиво. Эту систему и будем считать исправной.

В качестве (замкнутой) области начальных условий H выберем шар (ограниченный сферой S_r) радиуса r :

$$H : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2. \quad (2.29)$$

Если выбрать $r = 0,7$, то любая траектория системы (2.1) с параметрами (2.26)–(2.28) и начальными условиями из области (2.29) за конечное время вернется в H и не выйдет оттуда, т. е. будет лежать в области притяжения начала координат.

2.3. Выбор сферы контроля S_R

При выборе сферы контроля S_R радиуса R использована идея метода статистических испытаний [11; 23; 24]. Выбор точки в пространстве параметров осуществлен так. Параметры a, E, G^2 приняты независимыми нормально распределенными случайными величинами с математическими ожиданиями $\bar{a}, \bar{E}, \bar{G}^2$ и дисперсиями $\sigma_a^2 = 0,03$, $\sigma_E^2 = 0,005$ и $\sigma_{G^2}^2 = 0,03$, обеспечивающими близкую к единице вероятность попадания в область $\tilde{Y} \subset \bar{Y}$, имеющую следующие параметры:

$$\tilde{Y} : \bar{a} \pm 3\sigma_a, \bar{E} \pm 3\sigma_E, \bar{G}^2 \pm 3\sigma_{G^2}. \quad (2.30)$$

Для выбора точки в области H начальных условий будем полагать, что при любых фиксированных параметрах из только что построенной области \tilde{Y} область H начальных условий целиком погружена в область притяжения начала координат. В этом случае любая траектория, начинающаяся из области H , за конечное время вернется в H и уже не выйдет оттуда.

Обозначим через X_H область фазового пространства, заполненную траекториями системы, начинающимися в области H . Для отыскания границ множества X_H достаточно рассмотреть только те траектории, которые начинаются со сферы S_r , а в качестве поверхности контроля выбрать сферу S_R , охватывающую множество X_H .

Начальные условия считаем независимыми и равномерно распределенными по следующей сфере (радиуса $r = 0,7$):

$$S_r : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,7^2. \quad (2.31)$$

Точку в пространстве параметров \tilde{Y} (2.30) и точку в пространстве начальных условий на сфере S_r (2.31) выбираем независимо одну от другой. В качестве сферы S_R выбрана сфера радиуса $R = 1$, целиком содержащая множество X_H из более чем 600 траекторий.

2.4. Неисправные системы

Рассмотрим три неисправных системы вида (2.1) с параметрами, приведенными в табл. 2.1, где 1 (означает) — неисправен датчик угловой скорости, 2 (означает) — неисправен прибор, вырабатывающий сигнал, пропорциональный угловому ускорению, 3 (означает) — оборвана обратная связь в исполнительном органе. Все описанные неисправности имеют различную физическую природу и различные размерности, т. е. являются невырожденными. Все эти неисправности создают неустойчивость тривиального решения рассматриваемой системы. Интегрирование уравнений системы (2.1) с параметрами, соответствующими неисправным системам, начиналось из точек, равномерно распределенных на сфере S_r радиуса $r = 0,7$.

Таблица 2.1
Table 2.1

Неисправность системы	a	E	G^2	$1/l$
1	0,5	1,5	0,5	1
2	0,5	0,2	1,5	1
3	0,5	0,2	0,5	0

2.5. Выбор соответствующих констант M_j

Каждая система уравнений (2.1) с параметрами a, E, G^2, l , соответствующими неисправным системам типа 1–3 (см. табл. 2.1), проинтегрирована 450 раз. Всякий раз после выхода фазовой траектории в момент времени τ_0 на сферу S_R радиуса $R = 1$ на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$, где $\tau = 0,2$ с, для различных $N = 1, 3, 5$ осуществлен подсчет чисел:

$$S_j = \sum_{i=1}^N [(x_{ij1} - x_{ig1}^2 + (x_{ij2} - x_{ig2}^2) + (x_{ij3} - x_{ig3}^2)]. \quad (2.32)$$

Максимальное из 450 чисел S_j ($j = 1, 2, 3$), полученных для каждой неисправной системы типа 1–3 (см. табл. 2.1) при $N = 1, 3, 5$, выбрано в качестве константы $M_j = \max S_j$ (при каждом фиксированном j) (табл. 2.2).

Из табл. 2.2 видно, что с возрастанием значения N величина константы M_j уменьшается. Таким образом, каждой неисправной системе соответствует определенное число M_j .

Таблица 2.2
Table 2.2

M_j	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
M_1	$0,50124 \cdot 10^{-4}$	$0,74702 \cdot 10^{-9}$	$0,43220 \cdot 10^{-9}$
M_2	$0,11825 \cdot 10^{-6}$	$0,14546 \cdot 10^{-10}$	$0,24749 \cdot 10^{-11}$
M_3	$0,12751 \cdot 10^{-6}$	$0,22850 \cdot 10^{-10}$	$0,13614 \cdot 10^{-10}$

2.6. Подсчет величин $\overline{K_j}, \overline{\sigma_j}, K_j$ и выбор N

С начальными условиями, равномерно распределенными на сфере S_r , интегрируем одну из неисправных систем при $j = 1, 2, 3$. После выхода фазовой траектории на сферу S_R на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ при определенном $N = 1, 3, 5$ осуществляем подсчет трех сумм S_j и сравнение их с соответствующими значениями M_j , которые ранее были определены для данных N и j . Количество величин S_j , удовлетворяющих неравенству $S_j \leq M_j$, обозначим через $K_j^k(x_0^i)$. Интегрирование уравнений определенной неисправной системы с различными начальными условиями повторяем $k = 50$ раз и таким образом получаем следующие величины [16; 25]:

$$\overline{K_j} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} K_j^k(x_0^i), \quad (2.33)$$

$$\bar{\sigma}_j = \left[\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (\bar{K}_j - K_j^k(x_0^i))^2 \right]^{1/2}, \quad (2.34)$$

$$K_j = \bar{K}_j \pm \frac{\bar{\sigma}_j}{\sqrt{50}}. \quad (2.35)$$

Для рассматриваемой системы уравнений (2.1) с неисправностями (см. табл. 2.2) 1, 2, 3 при произвольных начальных условиях на сфере S_r и $k = 50$, $N = 1, 3, 5$ получено значение $K_j = 1$ с ошибкой в вычислении, не превышающей 2 %.

Поэтому достаточно выбрать $N = 1$.

Таким образом, при одном измерении, исключая измерение начальных условий в момент выхода фазовой траектории системы на сферу S_R , алгоритм диагностирования позволяет точно определять указанные неисправности.

2.7. Алгоритм восстановления

Используем найденные параметры алгоритма восстановления S_R, M_j, N для обнаружения возникшей неисправности и восстановления системы (2.1). В результате математического эксперимента по восстановлению системы (2.1) при неисправном датчике угловой скорости, т. е. с параметрами неисправности 1, установлено, что неисправность возникает в окрестности начала координат $(0; 0; 0, 1)$ и фазовая точка перемещается по некоторой фазовой траектории T_1 .

Согласно алгоритму поиска неисправности процесс восстановления осуществляется следующим образом. В момент τ_0 фазовая траектория неисправной системы встречается со сферой S_R . На интервале $[\tau_0, \tau]$ происходит поиск неисправности (формируются суммы S_j , которые сравниваются с соответствующими константами M_j ; $N = 1$). В момент $\tau = 0, 2$ с происходит обнаружение неисправности и подключение исправной системы. После этого фазовая точка по некоторой фазовой траектории T_2 возвращается в окрестность начала координат.

В случае, когда в системе управления (2.1) доступна измерению только одна фазовая координата, $x_1 = \eta$, а функционал диагностирования (2.32) имеет вид

$$S_j = \sum_{i=1}^N (x_{ij1} - x_{ig1})^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.36)$$

получается результат, аналогичный изложенному выше.

3. Динамическая система с прямым управлением

Как уже отмечалось ранее [1; 2; 26], задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т. е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т. е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля [23; 27].

Исходной информацией при решении задачи контроля являются математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля.

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например, за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства зачастую не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Рассмотрим применение развиваемой методики диагностирования на интересном примере, взятом из теории летательных аппаратов.

3.1. Уравнения движения

Рассмотрим летательный аппарат с прямым управлением, движение которого может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\begin{aligned} x' &= A(x)\xi - b\delta, \\ \delta &= \Phi(\zeta), \\ \zeta &= r^T x + h\varphi(x, \delta, f(\eta)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

— вектор, характеризующий состояние летательного аппарата;
 δ — координата управления;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

— постоянная “устойчивая” матрица (т. е. действительные части ее собственных значений отрицательны);

$$\varphi(x, \delta, f(\eta)) = \int_{t_0}^t (p^T x + q\delta - f(\eta))dt, \quad (3.4)$$

а

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

— постоянные матрицы;
 q и h — постоянные скалярные величины;
 T — символ транспонирования матрицы.

Функции $\Phi(\zeta)$ и $f(\eta)$ (η — формируемый сигнал обратной связи) принадлежат к классу допустимых функций: они определены и непрерывны при всех значениях ζ и η и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= 0, \quad \zeta = 0; \quad \zeta\Phi(\zeta) > 0, \quad \zeta \neq 0, \\ f(\eta) &= 0, \quad \eta = 0; \quad \eta f(\eta) > 0, \quad \eta \neq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первая задача, которая возникает при исследовании системы (3.1), ставится следующим образом: найти такое формируемое η , которое не доставляет неустойчивости аппарату и обеспечивает выполнение цели управления. Целью управления может быть, например, отслеживание системой формируемого сигнала η .

Для решения этой задачи прежде всего необходимо найти условия, при выполнении которых система (3.1) является устойчивой.

3.2. Достаточные условия устойчивости

В дальнейшем требуется выражение для ζ' . В силу системы (3.1) выполнены следующие равенства:

$$\zeta' = r^T x' + h\varphi' = c^T x - \rho\Phi(\zeta) - hf(\eta), \quad (3.7)$$

где

$$c = r^T A + hp^T = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}, \quad \rho = r^T b + hq. \quad (3.8)$$

Функцию Ляпунова выберем в следующем виде:

$$V = x^T Bx + \int_0^\zeta \Phi(\zeta)d\zeta. \quad (3.9)$$

Полная производная по времени функции Ляпунова в силу системы (3.1) представится в следующем виде:

$$V' = x^T Bx + x^T Bx' + \Phi(\zeta)\zeta'. \quad (3.10)$$

В силу (3.1) и (3.7) производная вдоль траектории будет равна

$$-V' = \begin{pmatrix} x^T & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ d^T & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Phi \end{pmatrix} + \Phi(\zeta)hf(\eta), \quad (3.11)$$

где

$$-C = A^T B + BA, \quad (3.12)$$

$$d = Bb - \frac{1}{2}c. \quad (3.13)$$

Для положительной определенности величины $-V'$ как квадратичной формы от x, Φ и f потребуем выполнения условий

$$C > 0, \quad (3.14)$$

$$\rho > d^T C^{-1} d, \quad (3.15)$$

$$h > 0, \quad (3.16)$$

$$\Phi(\zeta)f(\eta) > 0. \quad (3.17)$$

Далее положительную определенность величины $-V'$ гарантировать значительно проще, положив

$$d = Bb - \frac{1}{2}c = 0. \quad (3.18)$$

В силу (3.18) из (3.15) следует, что

$$\rho = r_1 b_1 + r_2 b_2 + h q > 0. \quad (3.19)$$

Из (3.17) также следует, что функция $f(\eta)$ должна иметь тот же знак, что и функция $\Phi(\zeta)$.

Перейдем теперь к совместному решению уравнений Ляпунова (3.12) и уравнения (3.15). С этой целью выберем матрицы B и C в следующем виде:

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Если в (3.20) принять, что

$$p > 0, \quad r > 0, \quad (3.21)$$

то матрица C положительно определена.

С учетом (3.20) и уравнения Ляпунова (3.12) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -p = 2 \left(\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) p_0 - \frac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}} r_0 \right), \\ -r = 2 \left(\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) r_0 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}} p_0 \right), \end{cases} \quad (3.22)$$

$$a_{11} + a_{22} \neq 0. \quad (3.23)$$

Если определитель системы алгебраических уравнений (3.22) относительно неизвестных p_0, r_0

$$\Delta = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (3.24)$$

отличен от нуля, то система (3.22) будет иметь единственное решение. Предположим, что определитель (3.24) не равен нулю, и выпишем решение системы уравнений (3.22) в следующем виде:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{2}{\Delta} \left(- \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) p - \frac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}} r \right), \\ r_0 = \frac{2}{\Delta} \left(- \left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) r - \frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}} p \right). \end{cases} \quad (3.25)$$

При этом

$$q_0 = \frac{2}{\Delta} \frac{1}{a_{11} + a_{22}} (a_{12}a_{22}p + a_{21}a_{11}r). \quad (3.26)$$

Выпишем, далее, учитывая (3.20), решение уравнения (3.18). Имеем:

$$\begin{cases} p_0 b_1 + q_0 b_2 = \frac{1}{2} c_{11}, \\ q_0 b_1 + r_0 b_2 = \frac{1}{2} c_{22}. \end{cases} \quad (3.27)$$

А теперь перепишем уравнения (3.27) с учетом (3.25) и (3.26):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta} \left\{ \left(-b_1 \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) + b_2 \frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} \right) p + \right. \\ & \left. + \left(-b_1 \frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} + b_2 \frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} \right) r \right\} = \frac{1}{2} c_{11}, \\ & \frac{2}{\Delta} \left\{ \left(b_1 \frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_2 \frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}} \right) p + \right. \\ & \left. + \left(b_1 \frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2 \left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) \right) r \right\} = \frac{1}{2} c_{22}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Определитель системы (3.28) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} = & \left(-b_1 \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) + b_2 \frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} \right) \times \\ & \times \left(b_1 \frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2 \left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) \right) - \\ & - \frac{1}{(a_{11}+a_{22})^2} (-b_1 a_{21}^2 + b_2 a_{21} a_{11}) (b_1 a_{12} a_{22} - b_2 a_{12}^2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тогда решение системы алгебраических уравнений (3.28) примет вид:

$$\begin{aligned} p = & \frac{1}{\Delta \bar{\Delta}} \left\{ \left(b_1 \frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2 \left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) \right) c_{11} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{a_{11}+a_{22}} (b_2 a_{21} a_{11} - b_1 a_{21}^2) c_{22} \right\}, \\ r = & \frac{1}{\Delta \bar{\Delta}} \left\{ \left(b_2 \frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1 \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) \right) c_{22} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{a_{11}+a_{22}} (b_1 a_{12} a_{22} - b_2 a_{12}^2) c_{11} \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Учитывая (3.21), из (3.30) получим следующие условия:

$$\begin{aligned} & \left(b_1 \frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2 \left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) \right) c_{11} > \\ & > \frac{1}{a_{11}+a_{22}} (b_2 a_{21} a_{11} - b_1 a_{21}^2) c_{22}, \\ & \left(b_2 \frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1 \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}} \right) \right) c_{22} > \\ & > \frac{1}{a_{11}+a_{22}} (b_1 a_{12} a_{22} - b_2 a_{12}^2) c_{11}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Таким образом, если

$$a_{11} + a_{22} \neq 0, \quad \Delta \neq 0, \quad \bar{\Delta} \neq 0, \quad (3.32)$$

то выполняются условия (3.16), (3.19) и (3.31). Поэтому рассматриваемая система будет абсолютно устойчивой независимо от выбора допустимых функций Φ и f , удовлетворяющих условию (3.17), то есть все решения системы (3.1) будут сходиться к началу координат при $t \rightarrow +\infty$. При этом предполагается, что начало координат x_0 является единственной критической точкой системы (3.1).

Условие (3.17), в силу (3.18), легко может быть нарушено. Могут возникнуть и другие ситуации, которые обусловят нежелательные последствия, то есть обусловят нарушение цели управления. Поэтому возникает вторая задача при исследовании системы (3.1) — задача диагностирования нежелательных ситуаций, то есть диагностирования неисправностей, которые могут возникнуть в системе управления летательным аппаратом.

3.3. Априорный список неисправностей

Остановимся только на диагностировании отказов в системе управления летательным аппаратом (3.1). Рассмотрим список отказов трех датчиков, так или иначе формирующих три обратные связи в системе управления объектом:

$$1) \quad r_1 = 0. \quad (3.33)$$

$$2) \quad r_2 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q = 0. \quad (3.34)$$

$$3) \quad \eta = 0. \quad (3.35)$$

3.4. Функционал диагностирования

Сформируем следующие суммы:

$$S_j = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (x_{jk}(t_l) - x_{gk}(t_l))^2, \quad j = 0, \dots, 3, \quad (3.36)$$

где $x_{jk}(t_l)$ являются значениями компонент вектора состояния рассматриваемой системы в момент t_l , $l = 1, \dots, N$, рассчитанными для j -й траектории по уравнениям (3.1) для исходной системы и систем с параметрами (3.33)–(3.35);

величины же $x_{gk}(t_l)$ в (3.36) являются компонентами действительного вектора состояния, измеренного в моменты времени t_l , $l = 1, \dots, N$.

Справедлива основная теорема для данной задачи.

Теорема 3.1. Для конечного набора систем уравнений найдутся такие числа S_j и N ($j = 0, \dots, 3$), что при некотором номере i величина $S_i = \min_j S_j$, возникшая в системе неисправности с неизвестным номером j в процессе движения объекта с помощью функционала (3.36), будет диагностирована однозначно (ср. с теоремами из [1; 2; 28; 29]).

Из этой теоремы и вытекает алгоритм диагностирования: из всех чисел S_j выбирается наименьшее, и номер i такого числа S_i принимается за номер случившейся неисправности. Под номером “0” в априорный список включена исходная (исправная) система (3.1). Алгоритм диагностирования включается циклически, и если он обнаруживает нулевую неисправность, то моделируется дальнейшее функционирование системы.

Если же номер j неисправности не был равен нулю, то выдается сигнал о возникновении j -й неисправности.

3.5. Численный эксперимент

Вычислительными средствами моделировалось поведение рассматриваемой системы, возникновение неисправности в системе и ее диагностика. Как уже отмечалось, априорный список содержал три неисправности, каждая из которых характеризует обрыв, соответствующий обратной связи в системе управления. В рассматриваемом примере вектор диагностирования был вектором состояния системы (x_1, x_2) . Число измерений $N = 3$.

Моделировалось исправное движение системы, начинавшееся в момент $t_0 = 0$, затем возникновение неисправности № 1 в момент $t_1 = 15$ с, включение алгоритма диагностирования в момент $t_2 = 20$ с. Алгоритм правильно диагностировал неисправность в момент $t_3 = 24$ с.

Неисправность № 2 моделировалась аналогичным образом, значения t_0, t_1, t_2, t_3 были такими же, как при моделировании неисправности № 1. Неисправность № 2 была определена в момент t_3 правильно.

Неисправность № 3 моделировалась следующим образом: начало функционирования — момент $t_0 = 0$, возникновение неисправности — $t_1 = 10$ с, включение алгоритма — $t_2 = 15$ с. При первом включении алгоритм диагностировал систему как исправную, поэтому функционирование системы продолжалось и алгоритм включился вторично в момент $t_3 = 30$ с и правильно диагностировал неисправность № 3 в момент $t_4 = 34$ с [30–32].

Заключение

Сначала рассмотрен модельный пример по диагностике неисправностей в системе непрямого управления объектом, движение которого описывается нелинейными дифференциальными уравнениями третьего порядка, которые впервые изучались Б.В. Булгаковым. При этом используется алгоритм диагностирования, при котором выбирается сфера контроля, каждой неисправной системе ставится в соответствие некоторая константа и по определенным правилам осуществляется сравнение с этими константами чисел, полученных в процессе интегрирования уравнений и характеризующих функциональное состояние системы.

Затем на уровне математических моделей и программ рассматривается диагностика систем прямого управления летательных аппаратов и показывается работоспособность предлагаемых алгоритмов диагностики. Рассматривается летательный аппарат с прямым управлением, движение которого в вертикальной плоскости (посадка) может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Диагностике подвергаются отказы трех датчиков, формирующих три обратные связи в системе управления объектом.

Литература

- [1] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 32–43. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>.
- [2] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 2. Задача дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 22–31. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>.
- [3] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 3. Задача контроля // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 4. С. 36–47. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>.
- [4] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений) // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2020. Т. 26. № 1. С. 52–68. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>.
- [5] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 5. Задача диагностирования (случай траекторных измерений с ошибкой) // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2020. Т. 26. № 3. С. 30–39. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-30-39>.

- [6] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 6. Статистическое решение задачи дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27. № 1. С. 82–88. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-74-80>.
- [7] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5, Вып. 3. С. 775–790. URL: <http://mech.math.msu.su/fpm/rus/99/993/99309h.htm>.
- [8] Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и доп. Москва: Экзамен, 2007. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf>.
- [9] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics // J. Math. Sci. 2003. Vol. 114, No. 1. P. 976–1024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [10] Пархоменко П.П., Сагомоян Е.С. Основы технической диагностики. Москва: Энергия, 1981. URL: <https://djvu.online/file/FmH1gaq0Jm2AJ>.
- [11] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 96–121. URL: <http://mi.mathnet.ru/at7158>.
- [12] Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. Москва: Изд-во МГУ, 1983.
- [13] Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 38–46. URL: <http://mi.mathnet.ru/at4566>.
- [14] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 24–36. URL: <http://mi.mathnet.ru/at3855>.
- [15] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 30–38. URL: <http://mi.mathnet.ru/at587>.
- [16] Жуков В.П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 51–64. URL: <http://mi.mathnet.ru/at1475>.
- [17] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 29–31. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vmumm&paperid=1441&option_lang=rus.
- [18] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization. // Operations Research Letters, May 2003, vol. 31, no. 3, pp. 167–175. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](http://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6).
- [19] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. // SIAM Journal on Optimization, 2001, Vol. 12, No. 1, pp. 79–108. DOI: <http://doi.org/10.1137/S1052623499354564>.
- [20] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. // Journal of Machine Learning Research, 2016, no. 17 (153), pp. 1–43. URL: https://www.researchgate.net/publication/311221666_A_differential_equation_for_modeling_Nesterov%E2%80%99s_accelerated_gradient_method_Theory_and_insights.
- [21] Шамолин М.В. Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // Электронное моделирование, 33:3 (2011), 121–126. URL: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/61768>.
- [22] Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // Электронное моделирование, 32:5 (2010), 31–44. URL: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/61677>.
- [23] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions. // SIAM Journal on Control, 1968, Vol. 6, No. 2, pp. 194–214. DOI: <http://doi.org/10.1137/0306015>
- [24] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay. // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2014, Vol. 50, No. 3, pp. 2119–2326. DOI: <http://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [25] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition // Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2015, Vol. 78, No. 1, pp. 159–179. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [26] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. // Acta Applicandae Mathematica, 2002, vol. 74, no. 2, pp. 155–175. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1020669212384>.
- [27] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. // Mathematical Methods of Operations Research, 2009, vol. 70, pp. 567–596. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.
- [28] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks. // Foundations and Trends in Networking, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 381–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1561/1300000009>.

- [29] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. // IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, Vol. 54, No. 10, pp. 2328–2340. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/tac.2009.2028960>.
- [30] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. // SIAM Journal on Control and Optimization, 1991, Vol. 29, No. 6, pp. 1251–1287. DOI: <http://doi.org/10.1137/0329065>
- [31] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. // Linear Algebra and Its Applications, 1989, Vol. 122–124, pp. 23–64. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).
- [32] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues // Systems & Control Letters, 2002, vol. 46, pp. 323–342. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00147-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00147-0).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-31-45

Submitted: 10.09.2021

Revised: 14.10.2021

Accepted: 15.11.2021

M. V. Shamolin

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

PROBLEMS OF DIFFERENTIAL AND TOPOLOGICAL DIAGNOSTICS. PART 7. DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS IN SOME SYSTEMS OF DIRECT AND INDIRECT CONTROL

ABSTRACT

Proposed work is the seventh work of the cycle on differential and topological diagnostics. Diagnostics of malfunctions in the system of indirect control of an object whose motion is described by nonlinear ordinary differential equations of the third order (the problem of B.V. Bulgakov) is considered. In the diagnostic algorithm used, the scope of control is selected, when a certain constant value is assigned to each faulty system, and according to certain rules, the numbers obtained in the process of integrating equations and characterizing the functional state of the system are compared with it. Troubleshooting is also considered in one system of direct control of the movement of the aircraft, which can be described by nonlinear differential equations of the second order. At the same time, a certain diagnostic algorithm is built and used in accordance with the previously developed methodology.

Key words: problem of differential diagnostics; indirect control system; direct control system; diagnostics; sphere of control; asymptotic stability.

Citation. Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 7. Differential diagnostics in some systems of direct and indirect control. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 31–45. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-31-45>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Shamolin M.V., 2021

Maxim V. Shamolin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, expert of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, 1, Michurinsky Avenue, Moscow, 119192, Russian Federation.

References

- [1] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 1. Motion equations and classification of malfunctions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 32–43. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>. (In Russ.)

- [2] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 2. Problem of differential diagnostics. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 22–31. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>. (In Russ.)
- [3] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 3. The checking problem. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 36–47. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>. (In Russ.)
- [4] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 4. The case of exact trajectorial measurements. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 52–68. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>. (In Russ.)
- [5] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 5. The case of trajectorial measurements with error. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 30–39. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-30-39>. (In Russ.)
- [6] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 6. Statistical resolving of differential diagnosis problem. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 82–88. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-74-80>. (In Russ.)
- [7] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Resolving a Problem of Differential Diagnostics. *Fundamental and Applied Mathematics*, 1999, vol. 5, no. 3, pp. 775–790. Available at: <http://mech.math.msu.su/fpm/rus/99/993/99309h.htm>. (In Russ.)
- [8] Shamolin M.V. Certain problems of differential and topological diagnostics. 2nd edition, revised and enlarged. Moscow: Ekzamen, 2007. Available at: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf>. (In Russ.)
- [9] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 114, no. 1, pp. 976–1024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [10] Parkhomenko P.P., Sagomonian E.S. Foundations of Technical Diagnostics. Moscow: Energiya, 1981. Available at: <https://djvu.online/file/FmH1gaq0Jm2AJ>. (In Russ.)
- [11] Mironovskii L.A. Functional diagnosis of dynamic systems. *Avtomatika i Telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1980, no. 8, pp. 96–121. Available at: <http://mi.mathnet.ru/at7158>. (In Russ.)
- [12] Okunev Yu.M., Parusnikov N.A. Structural and Algorithmic Aspects of Modeling for Control Problems. Moscow: Izd-vo MGU, 1983. (In Russ.)
- [13] Chikin M.G. Phase-constrained systems. *Avtomatika i Telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1987, no. 10, pp. 38–46. Available at: <http://mi.mathnet.ru/at4566>. (In Russ.)
- [14] Zhukov V.P. Sufficient and necessary conditions for the asymptotic stability of nonlinear dynamical systems. *Avtomatika i Telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1994, vol. 55, no. 3, pp. 321–330. Available at: <http://mi.mathnet.ru/at3855> (English; Russian original).
- [15] Zhukov V.P. On the sufficient and necessary conditions for robustness of the nonlinear dynamic systems in terms of stability retention. *Avtomatika i Telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 1, pp. 27–35. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0005117908010037>. (English; Russian original).
- [16] Zhukov V.P. Reduction of Stability Study of Nonlinear Dynamic Systems by the Second Lyapunov Method. *Avtomatika i Telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 12, pp. 1916–1928. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9> (English; Russian original).
- [17] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Solving the problem of differential diagnostics by the method of statistical tests. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika = Moscow University Mechanics Bulletin*, 2001, no. 1, pp. 29–31. Available at: <http://mi.mathnet.ru/vmumm1441>. (In Russ.)
- [18] Beck A., Teboulle M. Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization. *Operations Research Letters*, May 2003, vol. 31, issue 3, pp. 167–175. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](http://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6).
- [19] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, vol. 12, no. 1, pp. 79–108. DOI: <http://doi.org/10.1137/S1052623499354564>.
- [20] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. *Journal of Machine Learning Research*, 2016, no. 17(153), pp. 1–43. Available at: https://www.researchgate.net/publication/311221666_A_differential_equation_for_modeling_Nesterov%E2%80%99s_accelerated_gradient_method_Theory_and_insights.
- [21] Shamolin M.V. Diagnostics of Gyro-Stabilized Platform, Included in the Aircraft Motion Control System. *Elektronnoe modelirovanie = Electronic Modeling*, 2011, vol. 33, no. 3, pp. 121–126. Available at: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/61768>. (In Russ.)

- [22] Shamolin M.V. Diagnostics of Aircraft Motion in Planning Descent Mode. *Elektronnoe modelirovanie = Electronic Modeling*, 2010, vol. 32, no. 5, pp. 31–44. Available at: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/61677>. (In Russ.)
- [23] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions. *SIAM Journal on Control*, 1968, vol. 6, no. 2, pp. 194–214. DOI: <http://doi.org/10.1137/0306015>.
- [24] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 2119–2326. DOI: <http://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [25] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2015, vol. 78, no. 1, pp. 159–179. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [26] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Applicandae Mathematica*, 2002, vol. 74, no. 2, pp. 155–175. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1020669212384>.
- [27] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2009, vol. 70, pp. 567–596. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.
- [28] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks. *Foundations and Trends in Networking*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 381–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1561/1300000009>.
- [29] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, no. 10, pp. 2328–2340. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/tac.2009.2028960>.
- [30] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 1251–1287. DOI: <http://doi.org/10.1137/0329065>.
- [31] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra and Its Applications*, 1989, vol. 122–124, pp. 23–64. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).
- [32] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues. *Systems & Control Letters*, 2002, vol. 46, pp. 323–342. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00147-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00147-0).

МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 14.09.2021
после рецензирования: 16.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

О.Н. Белова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: BelovaONik@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

Д.В. Чаплий

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Dch300189@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9510-3659>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Stepanovalv2015@yandex.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ ПОДПРОГРАММЫ UMAT ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КONTИНУАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ (ОБЗОР)

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье представлен обзор применения подпрограммы UMAT многофункционального программного комплекса SIMULIA Abaqus в механике деформируемого твердого тела и смежных с ней областях. Данная подпрограмма служит для описания новых пользовательских материалов, отсутствующих в классе стандартных материалов пакета SIMULIA Abaqus. Приведены примеры задач и определяющих уравнений материалов, которые моделируются с помощью процедур UMAT/VUMAT. Представлены разнообразные типы материалов, успешно описанных посредством пользовательских процедур UMAT и VUMAT. Даны общее описание и опыт применения подпрограммы UMAT. Приведены результаты конечно-элементного моделирования деформирования пластины, ослабленной центральным круговым отверстием, при всестороннем равномерном и одноосном растяжении при установившейся ползучести в среде с поврежденностью, эволюционирующей по степенному закону, в связанной постановке задачи (ползучесть – поврежденность). Найдены распределения напряжений, деформаций и поля поврежденности у кончика дефекта в условиях ползучести и приведен анализ влияния процесса накопления повреждений на поля напряжений у вершины трещины в условиях установившейся ползучести. Продемонстрированы распределения напряжений и деформаций ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени.

Ключевые слова: пользовательская процедура UMAT; SIMULIA Abaqus; композиты; ползучесть; поврежденность; механика твердого тела; моделирование материалов; разрушение в условиях ползучести.

Цитирование. Белова О.Н., Чаплий Д.В., Степанова Л.В. Применение пользовательской подпрограммы UMAT для решения задач континуальной механики (обзор) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 46–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Белова О.Н., 2021

Оксана Николаевна Белова — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Чаплий Д.В., 2021

Дмитрий Викторович Чаплий — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Степанова Л.В., 2021

Лариса Валентиновна Степанова — заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В настоящее время доступно множество функциональных пакетов программ, таких как Mechanical ANSYS, NASTRAN, SIMULIA Abaqus, MARC/Mentat и др., реализующих метод конечных элементов и способных решать сложные инженерные задачи [1–4]. Особую популярность получили программные комплексы SIMULIA Abaqus и Mechanical ANSYS, предоставляющие мощные и простые в использовании инструменты и возможности разработки, позволяющие пользователям легко выполнять моделирование, анализ и постобработку полученных результатов [5–87]. Для моделирования различных материалов, не включенных в библиотеку материалов Abaqus, имеются специальные инструменты. В модуле Abaqus/Standard пользовательские модели реализуются с помощью подпрограммы UMAT (User-defined Material), в модуле Abaqus/Explicit – с помощью подпрограммы VUMAT. Через интерфейс подпрограммы пользовательского материала UMAT имеется возможность создать дополнительные модели материала, описав их механическое поведение [55–87].

1. Обзор задач, для решения которых применяется пользовательская процедура UMAT

Хрупкое и вязкое квазистатическое разрушение твердых тел представляет собой сложный механический процесс, для изучения которого применяются разнообразные вычислительные подходы и активно используется набор процедур расчетного комплекса SIMULIA Abaqus.

Расчетные процедуры комплекса SIMULIA Abaqus нашли широкое применение при моделировании процессов разрушения, происходящих в композиционных материалах [6–8]. Исследование и моделирование нестабильностей из-за образования и распространения хрупкой межфазной трещины в волокнистых композитах приведено в работе Л. Тавары и соавторов [6]. Авторы используют подпрограмму UMAT для внедрения модели хрупкого разрушения композиционного материала, представляющего собой эпоксидную матрицу с углеродными волокнами. Процедура UMAT в данном исследовании нацелена на описание множественных отслаиваний включений от матрицы.

В целом композиционные материалы давно используются в инженерной практике и в настоящее время находят все более обширное применение при проектировании и эксплуатации конструкций в различных отраслях и при разных внешних температурно-механических воздействиях [6–8]. Следует отметить, что процедура UMAT используется для моделирования различных особенностей деформирования в условиях ползучести достаточно широко [7; 15; 21; 23; 24; 25]. Например, в композитах с полимерной матрицей возникают деформации ползучести даже при низких температурах из-за вязкоупругого поведения матрицы [7]. Учет этих явлений является первостепенной задачей при проектировании композитных конструкций. Работа [7] посвящена изучению поведения таких материалов при ползучести. Авторами [7] были изучены изотропные материалы, в частности, полимеры, у которых сохраняются вязкоупругие свойства даже при низких температурах. На основе микромеханического подхода с использованием элементарного репрезентативного объема проанализировано поведение композита с полимерной матрицей в условиях ползучести. Авторы предположили, что волокна являются линейно-упругими, а материал матрицы является вязкоупругим. Для проведения численного моделирования в пакете SIMULIA Abaqus была разработана подпрограмма UMAT для изучения одно- и разнонаправленных слоистых композитов в условиях ползучести на основе макромеханической теории.

В настоящее время доступно несколько моделей ортотропного материала, учитывающих повреждение композитных материалов с различными критериями разрушения и законами развития повреждений. В работе [8] представлен подход к разработке модели повреждения ортотропных композитных материалов, основанный на критерии разрушения Цая-Ву, изначально предложенного в работах [9; 10] и являющегося одним из наиболее известных критериев инициации разрушения. Авторы [8] протестировали и успешно реализовали свою модель с помощью UMAT.

В цикле работ Б.Н. Федулова [11-13] с помощью пользовательских процедур расчетной программы ABAQUS рассмотрены задачи для нового критерия пластического течения, чувствительного к виду нагружения. Критерий пластичности описан в виде процедуры и введен в расчетную схему метода конечных элементов. Также с помощью нового критерия получены решения задач прочности термопластичных композиционных материалов с полимерной матрицей. В работах [13] вводится параметр степени кристалличности, влияющий на механические свойства материала. Посредством специальной программы была создана конечно-элементная модель термопластического материала, учитывающая изменение степени кристалличности материала как функции температуры.

В работах [14; 15] проводится моделирование пластических свойств материала на основе конституционных соотношений модели градиентной пластичности, основанной на дислокационной модели Тейлора [16] как при малых, так и при конечных деформациях. Необходимость создания такой модели связана с наличием сильных размерных эффектов в микро- и субмикронных масштабах, не учитываемых при моделировании с помощью классических теорий пластичности. В проведенных исследованиях свойства материала и приложенные нагрузки связываются с физическим расстоянием до вершины трещины, где градиент деформации существенно влияет на распределение напряжений, тем самым определяя условия, при которых эффект пластической зоны должен быть учтен при определении напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины.

Работа [17] посвящена исследованию влияния микроструктурных ловушек на диффузию водорода и охрупчивание при наличии циклических нагрузок. Разработана модель переноса водорода с несколькими ловушками, реализованная с помощью метода конечных элементов и подпрограммы UMAT и используемая для регистрации изменения состояния в окрестности вершины трещины и концентрации захваченного водорода в зависимости от частоты нагрузки, энергии связи ловушек и их плотности.

В [18] на основе конституционных уравнений градиентной пластичности представлен численный анализ совместного влияния пластических свойств материала, вида напряженного состояния и параметра Тейлора структуры материала на поля напряжений и плотностей дислокаций вблизи вершины трещины. Численные расчеты выполнены с привлечением вычислительного комплекса ANSYS. Определяющие соотношения градиентной теории пластичности были инкорпорированы в расчетный комплекс ANSYS посредством пользовательской подпрограммы USER-MATERIAL UMAT. В [18] установлено, что учет влияния характерного параметра структуры материала приводит к различным по масштабу эффектам повышения значений напряжений вблизи вершины трещины при плоском напряженном состоянии и плоской деформации по сравнению с решением для классической пластичности. На основе конечно-элементных решений с использованием теории градиентной пластичности найдены поля плотностей дислокаций в функции расстояния до вершины трещины. Координата равенства значений компонент дислокаций отвечает внешней границе области преобладания градиентной пластичности. Показано, что плоское напряженное состояние приводит к более высоким значениям эквивалентных напряжений и плотностей дислокаций по сравнению с плоским деформированным состоянием при одинаковых условиях нагружения. Выполнено многопараметрическое исследование и дана оценка коллективному влиянию пластических свойств и параметра Тейлора структуры материала в рамках теории градиентной пластичности.

В [19] аналитически и численно исследованы механические поля у вершины трещины также с привлечением теории градиентной пластичности. Конституционные соотношения основаны на теории градиентной пластичности первого порядка (MSG), базирующейся, в свою очередь, на дислокационной теории Тейлора. Определяющие уравнения введены в коммерческий пакет ANSYS, реализующий метод конечных элементов, с помощью пользовательской подпрограммы. Рассмотрены две краевые задачи для образца с одним краевым надрезом и для двухосно нагруженной пластины. Целью исследования является определение напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Эффекты градиента деформации, связанные с механизмами упрочнения дислокаций, приводят к повышению напряжений в области, примыкающей к кончику трещины, по сравнению с традиционной деформационной теорией пластичности. Полученные численные результаты показывают, что порядок сингулярности, предсказанный теорией MSG первого порядка, равен или выше, чем в линейно-упругих телах. Авторы делают заключение, что поля у вершины трещины не могут быть представлены в аналитической форме, аналогичной той, которую получают с помощью метода разделения переменных. В отличие от ранее показанной для теорий MSG пластичности более высокого порядка, порядок сингулярности проявляет зависимость от свойств пластичного материала. Аналитические и численные подходы используются для формулировки новых амплитудных (масштабных) коэффициентов. Для характеристики поля напряжений у вершины трещины предложен обобщенный J -интеграл, используемый для связи с нелинейным амплитудным коэффициентом.

Описание механических полей (напряжений, деформаций и поврежденности) в непосредственной зоне, примыкающей к вершине трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, на основе градиентной теории пластичности является предметом исследования в [20]. Определяющие соотношения гра-

дентной теории пластичности снова инкорпорированы в расчетную схему метода конечных элементов с помощью пользовательской процедуры UMAT. На основе проведенного исследования авторы заключают, что для заданного нагружения эффекты градиентной пластичности сильнее проявляются для плоского напряженного состояния, чем для плоского деформированного состояния. Вычислительные результаты показывают, что сингулярность поля напряжений зависит от типа смешанного нагружения и поля напряжений не могут быть представлены в подобной форме, которую получают с помощью метода разложения по собственным функциям.

В диссертационной работе [21] в многопрофильном и междисциплинарном пакете Abaqus с помощью пользовательской процедуры UMAT реализовано моделирование разрушения полимерного композиционного материала в условиях ползучести. Автор обращается к трансверсально-изотропной вязкоупругой модели, предложенной Робинсоном и др. [22] и расширенной с учетом гидростатического напряжения. Вязкоупругая модель имеет следующую форму:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\dot{\epsilon}_o} = \frac{3}{2} \Phi^{n-1} \frac{\Gamma_{ij}}{\sigma_o} \frac{1}{\psi^n}, \quad (1.2)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{(m+1)t_o} \Delta^v \frac{1}{\psi^m}, \quad (1.3)$$

где ϵ_{ij}^e — компоненты упругой деформации, $\dot{\epsilon}_{ij}$ и $\dot{\epsilon}_{ij}$ — компоненты скорости общей деформации и деформации ползучести (вязкоупругой), соответственно; σ_{ij} — компоненты напряжений Коши; σ_o — эквивалентное напряжение; $\dot{\epsilon}_o, n, m, t_o$ и v константы материала; Φ — потенциальная функция диссипации; Δ — изохронная функция поврежденности и ψ — параметр сплошности Качанова. Значение $\psi = 1$ соответствует неповрежденному материалу, $\psi = 0$ показывает, что материал полностью разрушен. Функции Φ и Δ зависят от инвариантов напряжений σ_{ij} , дивергента напряжений s_{ij} и тензора ориентации композиционного материала D_{ij} :

$$J_2 = s_{ij}s_{ij}/2, \quad J_o = D_{ij}s_{ij}, \quad I = \sigma_{ii}, \quad I_o = D_{ij}\sigma_{ij}, \quad J = D_{ij}s_{jk}s_{ki}. \quad (1.4)$$

Потенциальная функция диссипации Φ и функция Γ_{ij} имеют вид

$$\Phi = \sqrt{3[J_2 - \xi(J - J_o^2) - (\zeta - \eta)J_o^2 + 1/9(\zeta - 4\eta)I^2]}/\sigma_o, \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij} = s_{ij} - \xi(D_{ik}s_{kj} + s_{ik}D_{kj} - 2J_oD_{ij}) - 2(\zeta - \eta)J_o(D_{ij} - 1/3\delta_{ij}) + 2/9(\zeta - 4\eta)I\delta_{ij}. \quad (1.6)$$

Здесь ξ, ζ, η — параметры анизотропии, подбираемые, исходя из следующих неравенств [22]:

$$4(\zeta - \eta) - 3\xi \geq 0,$$

$$2(\zeta - \eta) - 3\xi \leq 0,$$

$$1 + 4\eta - 2\zeta \geq 0,$$

$$\zeta - 4\eta \geq 0.$$

Изохронная функции поврежденности Δ вычисляется следующим образом:

$$\Delta = \Delta(\sigma_{ij}, D_{ij}) = \Delta(N, S), \quad (1.7)$$

$$\Delta(N, S) = \left[\left(\frac{N}{\sigma_o} \right)^p + \left(\frac{\alpha S}{\sigma_o} \right)^p \right]^{1/p}, \quad (1.8)$$

$$N = \frac{(I - I_o)}{2} + \sqrt{J_2 + \frac{1}{4}J_o^2 - J}, \quad (1.9)$$

$$S = \sqrt{J - J_o^2}. \quad (1.10)$$

Описав данные законы и уравнения в подпрограмме UMAT, автору удалось провести конечно-элементные расчеты в пакете Abaqus для целого ряда образцов с использованием трансверсально-изотропной вязкоупругой модели с учетом поврежденности материала.

Другим способом описания закона ползучести является введение вязкоупругой конституциональной модели с операторами дробного интегрирования и дифференцирования. Преимущество ее обусловлено тем, что напряжения и смещения зависят от предыдущих напряжений и деформаций, что позволяет учитывать предыдущие значения материала. Существует несколько дробных аналогов вязкоупругих моделей типа Кельвина, Фойхта и Максвелла [23]. Данные модели описаны в работе [24], и авторы реализовали их в Abaqus посредством подпрограммы UMAT. Авторами работы [26] проведена разработка модели ортотропной нелинейной ползучести, учитывающей влияние влажности. Процедура UMAT предоставляет широкие возможности ее применения и позволяет описать такие свойства, как набухание материала под действием влажности.

Подпрограмма UMAT была использована для описания механического поведения различных конкретных материалов, например, стали, древесины, бетона или полимерной пены [27–64]. Аустенитная нержавеющая сталь демонстрирует сложное механическое поведение, проявляющееся в появлении пластических деформаций при низких температурах, вызванное фазовыми превращениями [27]. Для ее описания требуется модель вязкопластического материала, учитывающая действие предварительной деформации и температуры. Такая модель предложена в работе [27] и реализована с помощью пользовательской подпрограммы UMAT, имеющей преимущества при прогнозировании поведения материалов, таких как аустенитная нержавеющая сталь.

Одним из широко используемых материалов в настоящее время остается древесина. Ее главным преимуществом являются экологичность и прочность, в связи с этим древесный материал пользуется большой популярностью [28–31]. Но остается вопрос о его долговечности. Большой интерес вызывает возможность смоделировать древесный материал и спрогнозировать его механическое поведение [28–31]. Древесина обычно представляет собой неоднородный ортотропный материал с различными уникальными и независимыми механическими свойствами в трех взаимно перпендикулярных осях, определяемых направлением волокон. Кроме того, механические свойства древесины, включая прочность, модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона, меняются не только по направлению, но и зависят от вида напряженного состояния. Развитие моделей механического поведения древесины приведено в работах [30; 31]. Авторами предложены модели поведения древесины и проведено моделирование ее нелинейного механического поведения разными способами. Статья [31] направлена на разработку пользовательской процедуры UMAT для древесного материала с помощью модели изотропного упругопластического упрочнения в сочетании с критерием текучести Хоффмана [31; 32], анизотропным повреждением и критерием разрушения Сандаса [33]. В работе [30] моделируется ортотропный материал и используется критерий разрушения Цая-Ву [9]. Другим распространенным материалом является асфальтобетонная смесь. Ее правильная подготовка непосредственно влияет на качество и срок службы дорожного покрытия. Одной из основных проблем остается образование колеи на асфальтовом покрытии. Исследование колейности становится сложной задачей из-за присущей асфальтовой смеси вязкоупругих свойств и различных внешних факторов, включая температуру и нагрузку. В настоящее время метод конечных элементов широко используется в исследованиях дорожных покрытий [34–37]. В работе [34], например, авторы применили разработанную модель посредством подпрограммы UMAT и изучили влияние деформации дорожного полотна на колейность.

Полимерные пены, такие как пенополиуретан и пенополистерол, активно используются благодаря своим превосходным свойствам, таким как легкость, высокая удельная жесткость и прочность, способность поглощать энергию. Полимерная пена является пористым материалом и обладает ортотропными, поперечно-изотропными и изотропными свойствами в зависимости от процесса вспенивания, наличия добавок и других факторов. Кроме того, из-за наличия пустот поведение материала при одноосном растяжении и сжатии несоизмеримо отличается друг от друга. Например, под действием растягивающей нагрузки полимерная пена проявляет упругость, а после достижения определенного уровня деформации может произойти внезапное хрупкое разрушение. Однако при сжимающей нагрузке последовательно проявляются упругое и неупругое поведение, при котором наблюдаются разупрочнение, падение напряжения и уплотнение. Моделирование поведения и разрушения изотропной полимерной пены при сжатии в зависимости от скорости деформации и температуры выполнялось в работе [64], где авторами были использованы более ранние работы и модели. Поведение полимерной пены при упруго-вязкопластическом деформировании с учетом накопления повреждений и с использованием модифицированной модели Гурсо — Твергаарда — Нидельмана [38; 39], отвечающей за уменьшение доли пустотного объема и модуля упругости при одноосном сжатии, и модифицированной модели Хана — Хуана — Лианга [40; 41], для оценки нелинейного поведения пенополимеров в зависимости от скорости деформации и температуры приведено в работе [64]. А для моделирования поврежденности было использовано уравнение эволюции поврежденности Леметра [42], объединенное с моделью Гурсо — Твергаарда — Нидельмана для оценки развития повреждения (или уменьшения модуля упругости), вызванного увеличением деформации сжатия. Модель Гурсо — Твергаарда — Нидельмана имеет следующий вид [39]:

$$\varphi = J_2(s) - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + q_3 f^{*2} - 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3q_2 \sigma_h}{2\sigma_y} \right) \right], \quad (1.11)$$

где φ — функция текучести, s — девиатор тензора напряжений, $J_2(s)$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений, σ_y , σ_h обозначают предел текучести и гидростатическое напряжение и q_1, q_2, q_3 — материальные параметры. Для учета слияния пор В. Твергаард и А. Нидельман предложили использовать в условии пластичности Гурсо эквивалентную пористость f^* , вычисляемую в соответствии со

следующим уравнением:

$$f^* = \begin{cases} f & f \geq f_C, \\ f_C + \frac{\bar{f}_F^* - f_C}{f_F - f_C}(f - f_C) & f_C < f < f_F, \\ \frac{f}{f_F} & f_F \leq f, \end{cases} \quad (1.12)$$

где f — объемная доля пустот, f_C — критическая пористость, до которой поры не взаимодействуют, f_F — пористость, соответствующая разрушению, и $\bar{f}_F = (q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3})/q_3$ — предельная пористость.

Модифицированная модель Хана — Хуана — Лианга [40; 41] для расчета зависимости поведения материала от скорости деформации и температуры выглядит следующим образом:

$$\sigma = \left\{ \left[A_1 + B \left(1 - \frac{\ln \dot{\epsilon}}{\ln D_0^p} \right)^{n_1} p^{n_0} \right] \exp \left[A_2 \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] + A_3 \exp \left[A_4 \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] \right\} \times \frac{(1 - m_2 T^*)^{m_1}}{\lambda_f}, \quad (1.13)$$

$$T^* = \frac{T - T_r}{T_m - T_r}, \quad (1.14)$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4, B, n_0, n_1, m_1$ и m_2 — материалыные параметры, T_m — максимальная температура, при которых пенополиуретан применяется для промышленных конструкций. Коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4 определяют тенденцию зависимости предела текучести по отношению к скорости деформации, B, n_0 определяют форму зависимости напряжения от деформации, а $n_1, m_{1,2}$ контролируют скорость деформации и температурную чувствительность. σ — интенсивность напряжения, $\dot{\epsilon}$ — интенсивность скорости деформации, $\dot{\epsilon}_0$ — характерная скорость деформации, D_0^p — максимальная скорость пластической деформации. Величина λ_f представляет собой соотношение напряжений в пористом состоянии с начальной объемной долей пустот f_0 и в плотном состоянии без начальной объемной доли пустот. Модифицированная модель Гурсо — Твергаарда — Нидельмана (1.11) с уравнением эволюции поврежденности Леметра примет следующий вид:

$$\varphi = \frac{J_2(s)}{(1 - D)^{Q_2}} - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[1 + q_3 f^{*2} - 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3q_2 \sigma_h}{2\sigma_y} \right) \right], \quad (1.15)$$

$$G_{eff} = (1 - D)^{Q_2} G, \quad (1.16)$$

где D — параметр поврежденности, в данной модели представляющий собой объемную долю пустот, и закон его эволюции следует из закона сохранения массы. Q_2 — параметр материала, который контролирует влияние повреждения на тензор упругих модулей. В соответствии с этим эффектом тензор упругих модулей G_{eff} модифицируется согласно уравнению (1.16). Данные модели описываются в Abaqus посредством подпрограммы UMAT, проводится серия испытаний на сжатие полимерной пены, и результаты сравниваются с экспериментальными данными.

Пользовательские подпрограммы UMAT также нашли свое применение при реализации механических моделей перидинамики, которая является перспективным подходом в практических инженерных задачах [43–52].

Впервые термин «перидинамика» ввел С.А. Силлинг (Национальная лаборатория Сандии) в своей работе «Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces», опубликованной в 2000 году [43], для прогнозирования и моделирования развития разрушения элементов конструкций. Впоследствии теория получила существенное обобщение и распространение в других областях знания. Перидинамика сегодня стала единым физическим подходом, позволяющим предсказывать развитие поврежденности на разных масштабных уровнях в элементах конструкций. С момента своего создания перидинамика растет в геометрической прогрессии благодаря вкладам и публикациям исследователей из разных уголков мира [45–48]. Перидинамическая теория — это альтернативная форма механики сплошных сред, которая более удобна, по сравнению со стандартной (локальной) теорией, для описания разрывов (распространяющиеся трещины). В перидинамической теории уравнения движения и материалыные модели используют интегральное представление, а не дифференциальные уравнения в частных производных. Это позволяет применять перидинамические уравнения непосредственно к поверхности трещины. Изначально перидинамика создавалась для моделирования семейств трещин, процесса их образования и ветвления, что значительно отличает ее от традиционной классической механики линейного упругого разрушения [45–48]. Появление перидинамики обусловлено тем, что при рассмотрении и моделировании развития трещин появилась необходимость учитывать такие явления, как неоднородность тел и, прежде всего, наличие внутренних сил, возникающих на ненулевых расстояниях [45]. Классический метод изучения разрушения и роста трещин, основанный на моделях механики сплошных сред, базирующейся на

уравнениях в частных производных, не дает полного представления о процессах, приводящих к образованию трещин и разрывов. Суть перидинамики заключается в рассмотрении равновесия и движения твердых тел с помощью интегральных уравнений, а не дифференциальных. Основным преимуществом такого метода является изучение тел малой величины (наномасштаба) [49]. В отличие от механики разрушения линейно-упругих тел перидинамика дает возможность рассматривать вопросы разрушения и роста трещины с учетом поведения материала вблизи вершины трещины, ее распространения внутри материала, а также учета межатомных связей в кристаллической решетке материала. Поэтому перидинамику можно считать альтернативной формой механики сплошных сред. Еще одной из причин появления перидинамики является то, что уравнения в частных производных классической теории механики сплошных сред теряют смысл вблизи вершины трещины или поверхности растущей трещины, поскольку непосредственно у вершины не существует требуемых частных производных. Поэтому исследователи стремятся переформулировать модель континуума, чтобы избежать этой проблемы [45]. Подход заключается в использовании интегральных уравнений, а не уравнений в частных производных. Образование и рост трещин является результатом некоторого процесса: накопление изменений внутри материала, которые изменяют его до такой степени, что тело не может больше рассматриваться как континуум. Традиционная механика линейного упругого разрушения не дает полного понимания об этом процессе, сводя детали того, что происходит вблизи вершины трещины, к таким параметрам, как коэффициент интенсивности напряжений и критериальные соотношения, которые помогают смоделировать эволюцию трещины в терминах данных параметров. Еще одним преимуществом перидинамики является правильный прогноз важных параметров динамического распространения и ветвления трещин, таких как: форма траекторий трещин, общий профиль распространения трещин. Для решения таких задач в перидинамике используют теорию фазового поля [45; 48; 49; 50]. Ее преимущество заключается в объединении механики разрушения и повреждения в единую структуру. В зависимости от модели повреждений, основанных на фазовом поле, предпочтение отдается двум подходам: динамическим моделям разрушения фазового поля, основанным на уравнениях эволюции фазового поля типа Ландау — Гинзбурга [48] и фазового поля, основанным на теории Гриффитса [50]. В обеих теориях разрывы задаются с помощью дополнительной переменной поля, называемой фазовым полем или параметром порядка [48; 49]. Этот подход позволяет отслеживать самопроизвольное возникновение и распространение трещин, устраняя необходимость в специальных алгоритмах моделирования траектории трещин, как в обычной механике разрушения. Это делает модель более гибкой в вычислительном отношении. Наблюдая за фазовым полем в различных точках материала, можно определить состояние материала. В модели фазового поля неповрежденное, разрушенное и поврежденное состояние материала соответствуют $S = 1$, $S = 0$ и $S \in (0, 1)$ соответственно, где S обозначает фазовое поле. В этой модели имеется необходимость совместного решения управляющего уравнения для фазового поля в сочетании с уравнениями баланса импульса.

Работы [54–57] посвящены реализации подхода, основанного на методе фазового поля, в конечно-элементном пакете Abaqus с использованием пользовательских подпрограмм UMAT/VUMAT и VUEL/UEL.

Обширное применение пользовательские подпрограммы UMAT/VUMAT получили при изучении взаимного влияния поврежденности и ползучести [42–64], [57–70]. По всей видимости, первыми работами, в которых скалярная и тензорная мера поврежденности были инкорпорированы в расчетный комплекс SIMULIA Abaqus, были работы Петра Мика [58–60]. В [58; 60], по-видимому, впервые в процедуру многоцелевого комплекса Abaqus была введена тензорная мера поврежденности в рамках модели ортотропного поврежденного материала, текущее состояние которой описывается тензором второго ранга. Предполагается, что тензор деформаций связан с тензором напряжений и тензором поврежденности соотношением

$$\varepsilon = F(\sigma, \mathbf{D}) \tag{1.17}$$

и в рассмотренном в [58] случае данное соотношение – линейное:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}(D_{mn})\sigma_{kl}. \tag{1.18}$$

Физические свойства материала задаются матрицей податливости вида

$$A_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{D_1}{4(1+D_1)E}(\delta_{ik}D_{jl} + \delta_{il}D_{jk} + \delta_{ji}D_{ik}). \tag{1.19}$$

Для формулировки кинетического уравнения можно использовать тензор Ω , связанный с тензором поврежденности равенствами

$$\Omega_i = \frac{D_i}{1+D_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.20}$$

Стандартная процедура Abaqus требует, что уравнение (1.17) было представлено в форме

$$\varepsilon = \mathbf{K} \cdot \sigma, \quad (1.21)$$

где \mathbf{K} – тензор второго ранга с компонентами K_{ij} ,

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}], \quad (1.22)$$

$$\sigma^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}], \quad (1.23)$$

Компоненты тензора \mathbf{K} определяются следующим образом:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{12}^T & \tilde{K}_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

где подматрицы являются выражениями

$$\tilde{K}_{11} = \begin{pmatrix} 1 + \Omega_1 D_{11} & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 + \Omega_1 D_{22} & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 + \Omega_1 D_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

$$\tilde{K}_{12} = \begin{pmatrix} \Omega_1 D_{12} & \Omega_1 D_{13} & 0 \\ \Omega_1 D_{12} & 0 & \Omega_1 D_{23} \\ 0 & \Omega_1 D_{13} & \Omega_1 D_{23} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

$$\tilde{K}_{22} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu} + \Omega_1 (D_{11} + D_{22}) & \Omega_1 D_{23} & \Omega_1 D_{13} \\ \Omega_1 D_{23} & \tilde{\nu} + \Omega_1 (D_{11} + D_{33}) & \Omega_1 D_{12} \\ \Omega_1 D_{13} & \Omega_1 D_{12} & \tilde{\nu} + \Omega_1 (D_{22} + D_{33}) \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

где $\tilde{\nu} = 2 + 2\nu$. Текущее состояние поврежденности определяется с помощью интегрирования эволюционного уравнения накопления поврежденности вида

$$\partial_t \Omega_i = k (\mathbf{M}\mathbf{N}^T)^2 \sigma_i H(\sigma_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

В уравнении (1.28) Ω_i – главные значения симметричного тензора поврежденности, σ_i – главные значения тензора напряжений, $H(\sigma_i)$ – функция Хэвисайда, входящая в эволюционное уравнение, отражает отсутствие процесса накопления повреждений при действии сжимающих напряжений, k – материальная постоянная, \mathbf{N} и \mathbf{M} – вектор-строки с компонентами

$$\mathbf{M} = \left[\frac{1 - 2\nu}{6E}, \frac{1 + \nu}{2E}, \frac{\Omega_1}{E} \right], \quad (1.29)$$

$$\mathbf{N} = [tr^2 \sigma, tr S^2, tr(\sigma^2 D)], \quad (1.30)$$

где S – девиатор напряжений.

С помощью уравнений (1.17) – (1.30) проведено численное исследование развития поврежденности для различных значений показателя ползучести n . В [61] автор, опираясь на вычислительный эксперимент, приходит к выводу, что качественная природа распределения поврежденности не зависит от показателя ползучести n , ибо отличие между главными значениями тензора поврежденности Ω_1 в момент разрушения для каждого значения параметра n не превышает 5 %, что и приводит к близким уровням поврежденности.

Аналізу задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в связанной постановке посвящены работы О.Я. Извекова и А.М. Крупейника [62; 63]. С помощью UMAT и UMATHT авторам удалось решить связанную задачу теплопроводности и накопления поврежденности.

В работе [25] представлен анализ ползучести с учетом влияния изменения геометрии изгибов труб при комбинированных нагрузках и внутреннего давления на основе метода конечных элементов. Для моделирования повреждения при ползучести используются модифицированные уравнения Качанова – Работнова [67], имеющие следующий вид;

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} S_{ij} [(1 - \rho) + \rho(1 - D)^{-n}], \quad (1.31)$$

$$\frac{dD}{dt} = g \frac{A}{\varphi + 1} \frac{(\sigma_r)^v}{(1 - D)^\varphi}, \quad (1.32)$$

$$D_{cr} = 1 - (1 - g)^{\frac{1}{\varphi+1}}, \quad (1.33)$$

где ε_{ij}^c – тензор деформации ползучести, S_{ij} – тензор девиатора напряжений, D – параметр поврежденности и D_{cr} – критическое значение параметра поврежденности, $D/D_{cr} = 1$ соответствует полному разрушению. Параметры B, n, A, v – постоянные материала, которые относятся к минимальной

скорости деформации ползучести, g, φ, ρ – постоянные, которые учитывают неоднородность накопления поврежденности. Эквивалентное напряжение σ_r зависит от максимального главного напряжения и интенсивности напряжения в соответствии со следующей формулой:

$$\sigma_r = \alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_e \quad (1.34)$$

где α – постоянная материала, отражающая влияние многоосного напряженного состояния. Значение α может принимать значения от 0 до 1. Максимальное главное напряжение доминирует при $\alpha = 1$, а эквивалентное – при $\alpha = 0$. Авторы реализовали модель развития повреждений с помощью пользовательской подпрограммы UMAT и получили различия в распределении деформации с использованием геометрической нелинейности и без ее учета. В целом в данной работе представлен детальный численный анализ длительной ползучести в трубах с изгибным соединением под действием комбинированной нагрузки (изгиб и внутреннее давление).

Моделирование накопления повреждений в образцах с концентраторами напряжений в линейно-упругом изотропном материале рассмотрено в работах [68; 70–72]. Исходная модель анизотропной поврежденности боросиликатного стекла, которая зиждется на тензоре поврежденности второго ранга, была выдвинута в статьях [73; 74]. В [70] показано, что с помощью анизотропной модели поврежденности можно качественно описать трещинообразование в стекле при вдавливании штампа.

В работе [71] в Abaqus с помощью подпрограммы UMAT проведено компьютерное имитационное моделирование процесса накопления повреждений в опытных образцах с круговыми отверстиями в материале с определяющими уравнениями линейной теории упругости, включающими компоненты тензора второго ранга – тензора поврежденности. Принимается, что внедиагональные компоненты тензора поврежденности обращаются в нуль, а диагональные компоненты вычисляются следующим образом [70]:

$$D_{ii} = \begin{cases} 0 & \sigma_i \leq \sigma_{th}, \\ T \frac{\sigma_i - \sigma_{th}(T)}{\sigma_e(T) - \sigma_{th}(T)} & \sigma_{th} < \sigma_i < \sigma_c, \\ 1 & \sigma_i \geq \sigma_c, \end{cases} \quad (1.35)$$

где приняты следующие обозначения: $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ – главные напряжения, σ_{th}, σ_c – пороговое и критическое значения напряжений соответственно, D_{ij} – компоненты тензора поврежденности. При значении напряжений ниже порогового значения накопления повреждений не происходит. При достижении главными напряжениями критических значений σ_c материал считается полностью поврежденным $D_{ii} = 1$. Определяющие уравнения материала представляются в форме

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + 2D_{11}(C_1 + C_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + C_1(D_{11} + D_{22}) & \lambda + 2\mu + 2D_{22}(C_1 + C_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + C_1(D_{11} + D_{33}) & \lambda + C_1(D_{22} + D_{33}) & \lambda + 2\mu + 2D_{33}(C_1 + C_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где λ, μ – постоянные Ламе, а C_1, C_2 – постоянные материала, определяемые экспериментально. В результате найдено численное решение задачи о трещинах в материале с поврежденностью в связанной постановке (упругость-поврежденность).

В настоящее время проводятся моделирование широкого спектра материалов и конструкций, например, глубоководных подводных оконных иллюминаторов под действием постоянного давления морской воды [65] и исследование контактных задач. Например, в работе [66] авторами изучено влияние деформаций ползучести и контактной ползучести между шероховатыми поверхностями на долговечность болтовых композитных соединений. В ряде работ [75; 76] с помощью UMAT проводилось введение в Abaqus различных критериев разрушения и их сравнение.

Различным аспектам процессов взаимного влияния эволюции поврежденности и изменения напряженно-деформированного состояния и их численному моделированию с помощью конечно-элементного подхода посвящены исследования [77–79].

В [77] авторы анализируют явление накопления повреждений в условиях ползучести в двухосно нагруженной пластине при плоской деформации и в компактном образце конечной толщины с использованием степенного эволюционного уравнения накопления повреждений.

Возможность описания любых моделей материала при помощи применения подпрограммы пользовательского материала UMAT дает существенную гибкость и широту при использовании программного комплекса Abaqus и позволяет решать обширные классы задач.

В заключение отметим одну из последних работ [79], посвященную расчету турбины – ответственного элемента конструкции, находящегося в реальных эксплуатационных условиях. Паровые турбины состоят из толстостенных компонентов, подвергающихся воздействию высоких температур и циклическим нагрузкам. С целью уменьшения глобального углеродного следа в настоящее время двойная цель обычной электростанции с приводом от паровой турбины заключается в максимизации тепловой эффективности и в то же время обеспечении гибкой работы для интеграции возобновляемых источников энергии. Первая цель исторически достигается за счет повышения температуры и давления, при которых паровая турбина работает за счет более высокого использования срока службы при ползучести. Чтобы соответствовать меняющимся требованиям к электросетям из-за возобновляемых источников энергии, гибкая работа электростанций приводит к более высокому потреблению усталостного ресурса. Поэтому взаимодействие ползучести и усталости паровых турбин имеет большое значение в настоящее время. Высокие требования к надежности, эксплуатационной готовности и аспекты безопасности человека требуют точного прогнозирования повреждений паровых турбин из-за таких взаимодействующих явлений. Закон линейного накопления повреждений, применяемый в настоящее время в промышленности, часто переоценивает накопленную поврежденность. Напротив, усовершенствованная модель циклического вязкопластического поведения с учетом процессов накопления повреждений, базирующаяся на континуальной механике сплошных повреждений, позволила определить распределение поврежденности. Однако сложные по своей природе обобщенные модели имеют существенный недостаток, заключающийся в большом времени вычислений. В [79] представлен новый подход к прогнозированию накопления повреждений с использованием смешанной формулировки, основанной на аналитических результатах, и методов конечных элементов с использованием передовых определяющих моделей континуальной механики сплошных сред, направленных на сокращение времени вычислений без существенной потери точности. Накопление повреждений для прогнозирования возникновения мезотрещин представлено с использованием трех различных подходов. Полученные результаты сравниваются с точки зрения точности и времени вычисления.

Таким образом, можно заключить, что континуальная механика поврежденности, пройдя долгий путь от первых пионерских работ Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова, становится в наше время эффективным инструментом и общим подходом для построения решения задач механики, инженерии и смежных с ними направлений.

2. Описание подпрограммы UMAT

В этом разделе приведены общие сведения о UMAT и краткое описание основных переменных. При описании поведения материалов в пользовательских процедурах UMAT/VUMAT используется программный код языка FORTRAN. Для работы подпрограмм UMAT/VUMAT необходимо установить дополнительное программное обеспечение и создать связку между тремя программами: Abaqus, Visual Studio и Parallel Studio. Необходимо обеспечить совместимость версий данных программ, например, рабочим является использование связки Abaqus версии 6.14, Visual studio 2012 Professional, Intel Composer XE Suites 2015. Список всех совместимых версий представлен на сайте [80]. В модуле «Material» необходимо выбрать тип «User Material», сам файл с кодом с расширением .for подключается в модуле «Job» во вкладке «General».

Пользовательская подпрограмма UMAT вызывается для каждой материальной точки на каждой итерации каждого приращения. Во всех случаях для механической модели конституциональных соотношений в подпрограмме необходимо объявить матрицу Якоби $\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\varepsilon$, где $\Delta\sigma$ – это приращение напряжений, $\Delta\varepsilon$ – приращение деформаций. В UMAT заполняют матрицу $DDSDDE(i, j)$ значениями, определяющими изменение i -го компонента напряжения в конце приращения, вызванное бесконечно малым возмущением j -го компонента массива приращения деформаций. Для вязкоупругого поведения матрица Якоби должна иметь размер (NTENS, NTENS, 2). Модуль упругости должен быть указан в $DDSDDE(NTENS, NTENS, 1)$, а модуль потерь – в $DDSDDE(NTENS, NTENS, 2)$, где NTENS – размерность массива, содержащего компоненты тензоров напряжений или деформаций. Для любой нетривиальной задачи определение матрицы Якоби является сложной задачей. Массив STRESS(NTENS) передается в качестве тензора напряжений в начале приращения и должен быть обновлен до конца приращения. Многие модели описания материалов требуют хранения переменных состояния Statev(NSTATV), зависящих от решения. Для переменных состояния необходимо выделить место путем задания их количества в поле Depvar в программе Abaqus. NSTATV – количество переменных состояния, связанных с этим

типом материала. Массив STRAN(NTENS) содержит полные деформации в начале приращения, а в массиве DSTRAN(NTENS) хранятся приращения деформаций. Для заданного приращения деформации $\Delta\varepsilon_{n+1}$ результаты предыдущего временного шага t_n , т. е. напряжения σ_n и деформация ε_n , используются для вычисления и обновления матрицы Якоби (DDSDDE), тензора напряжений (STRESS) и переменных состояния (STATEV), зависящих от решения на текущем временном шаге t_{n+1} . В переменной TIME(1) записывается время шага в начале приращения, в TIME(2) записывается общее время, в TIME — приращение времени. В переменных SSE, SPD, SCD задаются удельная энергия упругой деформации, пластическая диссипация и диссипация ползучести соответственно. В начале программы, как правило, идет описание переменных, используемых в UMAT, и в массив PROPS(NPROPS) вводятся материальные постоянные, число которых равно NPROPS. Более подробно о подпрограмме UMAT можно прочитать на сайте [81]. Примеры реализации некоторых моделей с помощью пользовательских процедур UMAT и VUMAT можно найти в руководствах [82; 83].

3. Результаты моделирования

В пакете SIMULIA Abaqus проведен ряд численных расчетов с целью моделирования поведения пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести. Выполнено компьютерное моделирование всестороннего и одноосного растяжения пластины с центральным круговым отверстием. На рис. 3.1 приведены изображения модели с указанием размеров, типа сетки и схемы нагружения при моделировании одноосного растяжения пластины.

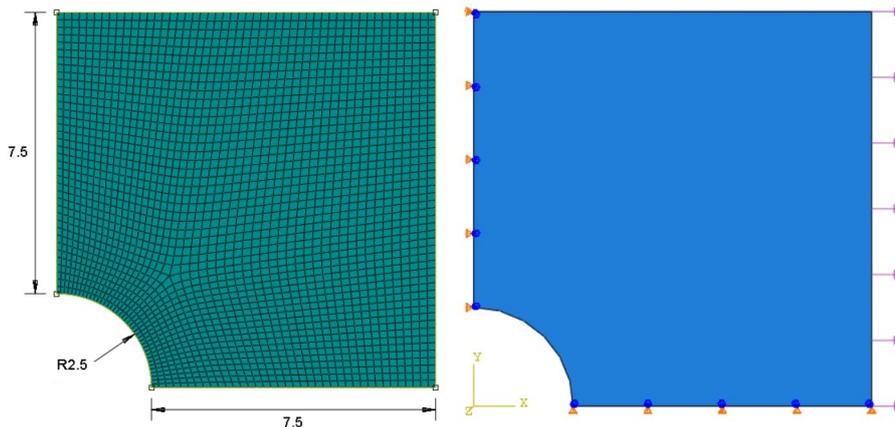


Рис. 3.1. Размеры модели, вид сетки и схема приложения нагрузки при реализации одноосного растяжения

Fig. 3.1. Dimensions of the model, the type of grid and the scheme of load application in the implementation of a uniaxial sprains

Для моделирования ползучести с помощью пользовательской подпрограммы UMAT выбран степенной закон Нортона, являющийся наиболее экспериментально проверенным [84]. Выбор обусловлен еще и возможностью сравнить результаты моделирования, полученные с помощью пользовательской подпрограммы, с результатами моделирования в Abaqus, когда закон ползучести задан в модуле материала.

Определяющий степенной закон ползучести имеет следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad (3.2)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты скорости деформации ползучести, σ_{ij} — компоненты напряжений Коши, σ_e — интенсивность напряжения, n, B — постоянные материала; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ — компоненты девиатора напряжений, где δ_{ij} — символ Кронекера. При моделировании используются следующие характеристики материала: модуль Юнга $E = 210000$ кГ/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, коэффициент $B = 2.634 \times 10^{-13}$ (кГ/см²)⁻ⁿ(h)⁻¹ и показатель закона Нортона для установившейся ползучести $n = 5$. Вообще, показатель n для металлов колеблется от 3 до 8, а для ряда современных высокопрочных сталей изменяется до 18 [85–87], для чистых металлов примерно равен 4 [84]. Время деформирования $T = 10$ ч, нагрузка $P = 10$ кГ/см².

В результате моделирования получили полное совпадение распределений напряжений и деформаций в случае описания закона посредством пользовательской процедуры UMAT и в случае задания степенного закона через интерфейс многофункционального комплекса SIMULIA Abaqus в модуле описания материала.

Затем степенной закон ползучести был модифицирован путем добавления закона накопления поврежденности Работнова — Качанова следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\psi}, \quad (3.3)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{(m+1)} \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (3.4)$$

где ψ — параметр сплошности Качанова. $\psi = 1$ соответствует неповрежденному материалу, $\psi = 0$ показывает, что материал полностью разрушен. Также часто используется параметр поврежденности ω , связанный с параметром сплошности с помощью следующего выражения $\omega = 1 - \psi$. При моделировании констант материала m была задана равной 3.5, чтобы выполнялось соотношение $m \approx 0.7 n$, выведенное экспериментально [85]. Более подробно о параметрах материала, участвующих в уравнениях ползучести и поврежденности, можно ознакомиться в работах [86; 87], где также приведены значения констант для некоторых материалов.

С целью проверки адекватности описания поведения материала с помощью модифицированного закона ползучести было проведено моделирование всестороннего растяжения пластины с круговым отверстием. Задача симметричная, следовательно, распределения напряжений, деформаций и сплошности должны быть симметричны. На рис. 3.2 приведены полученные в результате расчета распределения интенсивности напряжений и параметра сплошности.

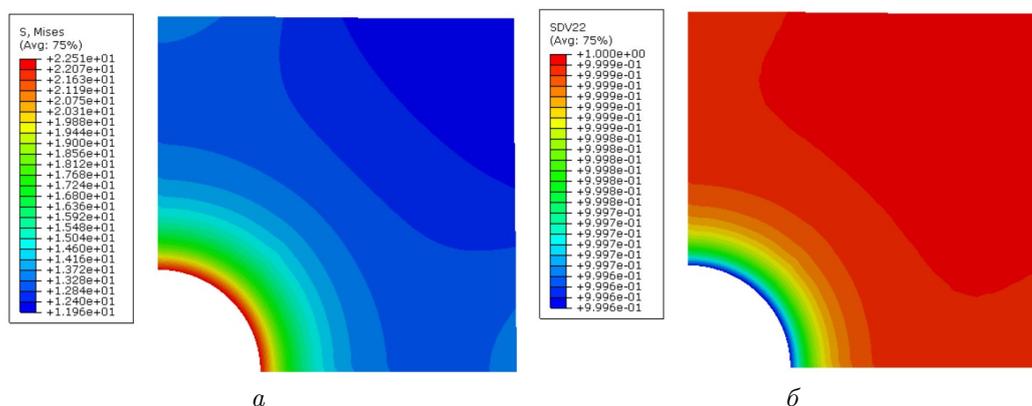


Рис. 3.2. Всестороннее растяжение пластины с круговым отверстием. Распределения: *a* — интенсивности напряжений и *b* — параметра сплошности

Fig. 3.2. All-round stretching plate with a circular hole. Distributions: *a* — intensity stresses and *b* — continuity parameter

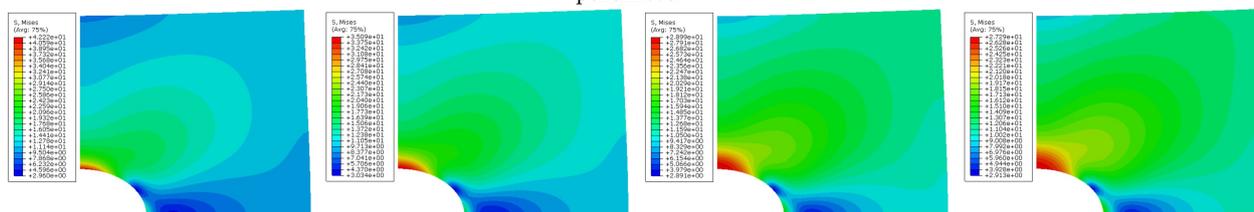


Рис. 3.3. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределение интенсивности напряжений с течением времени

Fig. 3.3. Uniaxial stretching of the plate with a circular hole. Voltage intensity distribution over time

Далее модель ползучести с учетом поврежденности применили при компьютерном моделировании одноосного растяжения пластины с круговым отверстием. На рис. 3.3 представлены картины распределения интенсивности напряжений с течением времени. На рис. 3.4 приведены распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ с течением времени. Показаны картины в момент времени 1, 3, 9, 15 часов, что соответствует 1, 3, 5, 7 итерации.

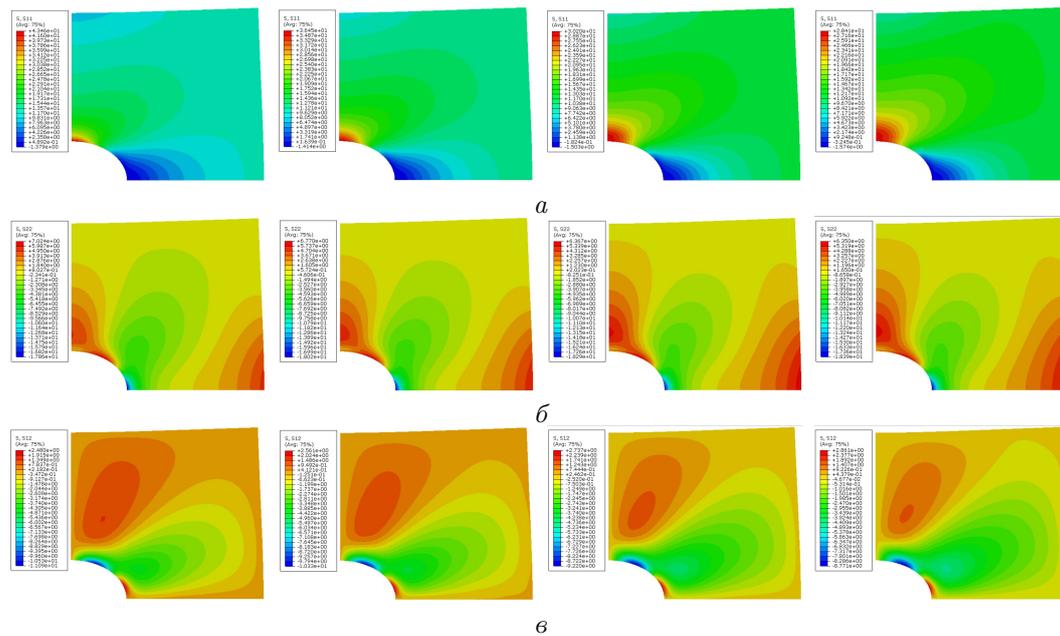


Рис. 3.4. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределение компонент тензора напряжений: $a - \sigma_{11}$; $b - \sigma_{22}$; $c - \sigma_{12}$ с течением времени

Fig. 3.4. Uniaxial tension of a plate with a circular hole. Distribution of tensor components stresses: $a - \sigma_{11}$; $b - \sigma_{22}$; $c - \sigma_{12}$ over time

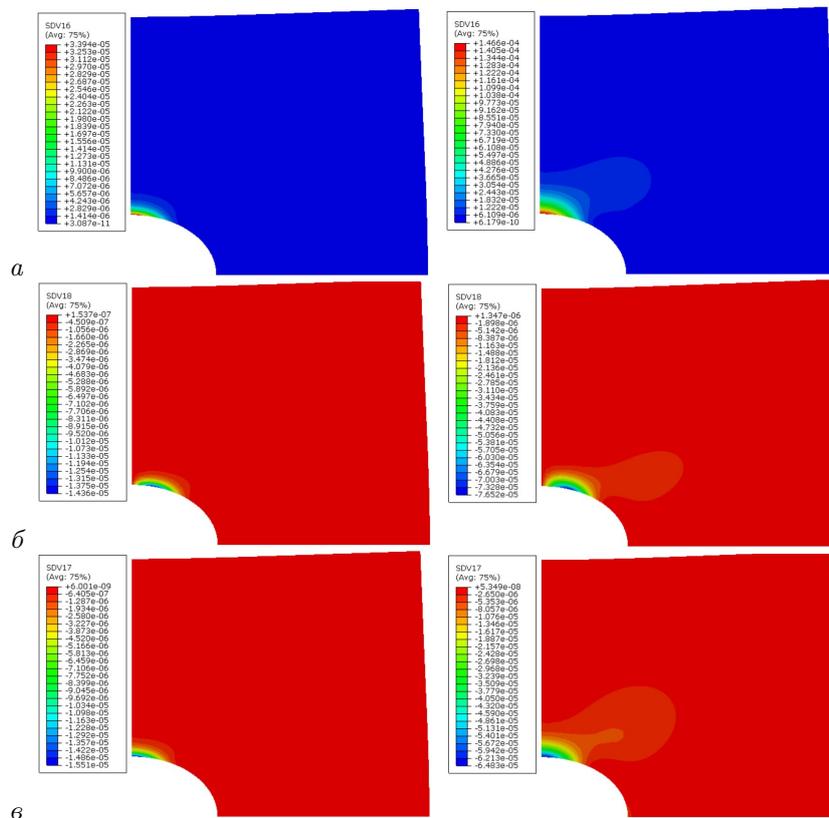


Рис. 3.5. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределения компонент тензора деформаций ползучести: $a - \epsilon_{11}^c$; $b - \epsilon_{22}^c$; $c - \epsilon_{12}^c$

Fig. 3.5. Uniaxial tension of a plate with a circular hole. Distributions of tensor components creep strains: $a - \epsilon_{11}^c$; $b - \epsilon_{22}^c$; $c - \epsilon_{12}^c$

На рис. 3.5 приведены распределения компонент тензора деформаций ползучести $\epsilon_{11}^c, \epsilon_{22}^c, \epsilon_{12}^c$ на первой и последней итерации.

На рис. 3.6 показано изменение сплошности с течением времени. Приведены распределения параметра сплошности в момент времени 1, 3, 9, 15 часов, что соответствует 1, 3, 5, 7 итерации.

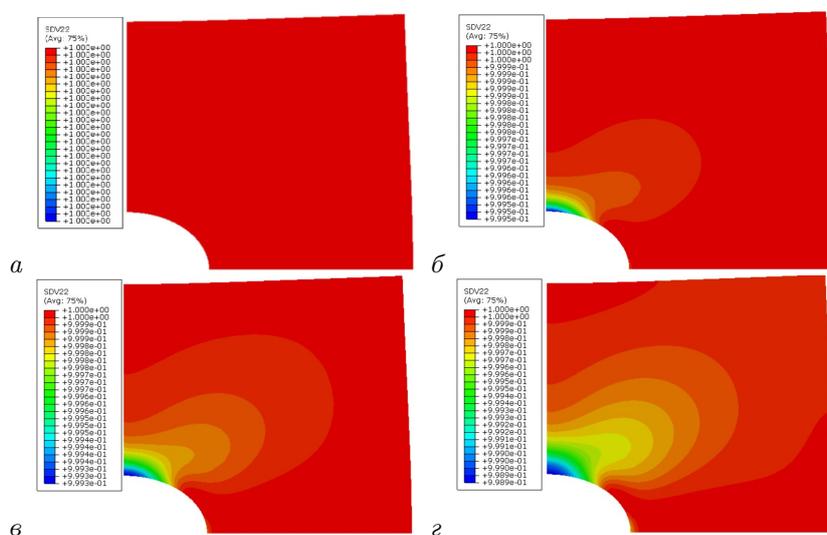


Рис. 3.6. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределения параметра сплошности в момент времени: *a* – 1 ч; *b* – 3 ч; *c* – 9 ч; *d* – 15 ч

Fig. 3.6. Uniaxial tension of a plate with a circular hole. Continuity parameter distributions at time:

a – 1 o'clock; *b* – 3 o'clock; *c* – 9 o'clock; *d* – 15 o'clock

Из рисунка видно, что минимальные значения сплошности, а значит максимальные значения поврежденности, достигаются в точках кругового отверстия, лежащих вблизи оси ординат, что соответствует результатам, полученным в других работах, например, в [71]. Таким образом, были получены характеристические величины при одноосном нагружении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени.

4. Моделирование области активного накопления повреждений у вершины трещины

Предметом настоящей части исследования является обнаружение зон активной эволюции поврежденности вблизи вершины трещины в условиях плоского деформированного состояния для степенного закона ползучести и кинетического уравнения Качанова–Работнова с помощью пользовательской процедуры UMAT. На основании построенной процедуры UMAT определяющее уравнение степенного закона с использованной концепции истинного напряжения и эволюционное уравнение Качанова–Работнова было включено в вычислительную схему конечных элементов и были найдены распределения параметра поврежденности и механических полей около концентратора напряжений. При моделировании используются следующие характеристики материала: модуль Юнга $E = 210000 \text{ кГ/см}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, коэффициент $B = 2.962 \cdot 10^{-11} (\text{кГ/см}^2)^{-n} (h)^{-1}$ и показатель закона Нортона для установившейся ползучести $n = 3$. Константа материала m была задана равной 2, нагрузка $P = 1 \text{ кГ/см}^2$. Длина трещины составляла 10 % от длины пластины и создавалась путем вырезания области в виде трещины с закругленными вершинами. Радиус закругления вершин трещины составлял тысячную долю от длины трещины. Типичная конечно-элементная сетка представлена на рис. 4.1.

Полученные распределения сплошности в различные моменты времени показаны на рис. 4.2 – 4.12. Поле сплошности для $t = 2$ ч запечатлено на рис. 4.2, для $t = 5$ ч – на рис. 4.3. Иллюстрации 4.4 демонстрируют контуры равных значений параметра сплошности в момент времени $t = 10$ ч, слева показан весь образец, справа – увеличенная окрестность кончика трещины. На рис. 4.5 можно увидеть конечно-элементное решение для поля сплошности в момент времени $t = 20$ ч. Поле сплошности для $t = 40$ ч отражено на рис. 4.6, для $t = 81$ ч – на рис. 4.7. Иллюстрации 4.8 демонстрируют контуры равных значений параметра сплошности в момент времени $t = 163$ ч, снова слева показан весь образец, справа – увеличена непосредственная окрестность кончика трещины. Найденное распределение сплошности в момент времени $t = 327$ ч показано на рис. 4.9, в момент времени $t = 655$ ч показано на рис. 4.10. Скалярная функция Ψ в моменты времени $t = 1311$ ч и $t = 1500$ ч изображена на рис. 4.11 и 4.12.

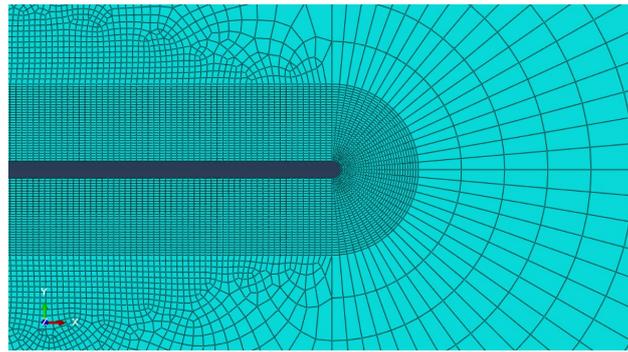


Рис. 4.1. Типичная сетка, используемая в расчетах на ползучесть
Fig. 4.1. Typical mesh used in creep calculations

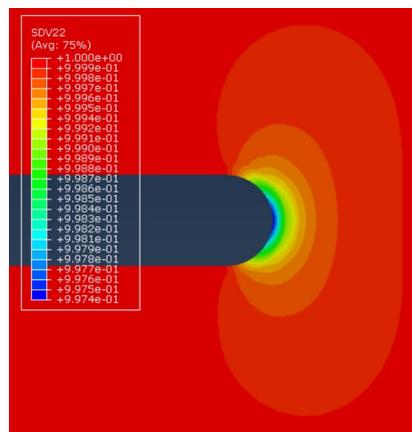


Рис. 4.2. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 2$ ч
Fig. 4.2. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 2$ h

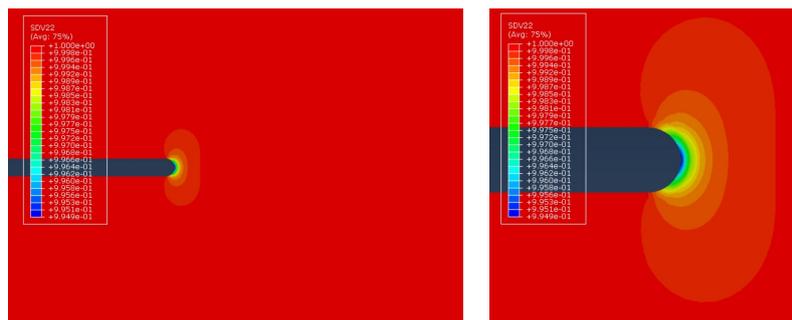


Рис. 4.3. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 5$ ч
Fig. 4.3. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 5$ h

Распределение интенсивности напряжений с течением времени представлено на рис. 4.13–4.15. На рис. 4.15 приведено сравнение двух расчетов в момент времени $t = 1500$ ч. Слева изображено распределение интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести с учетом поврежденности. Справа приведено распределение интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести без поврежденности, полученное в результате моделирования ползучести посредством Abaqus.

Как видно на рис. 4.15, наличие поврежденности влияет на распределение интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести. В случае ползучести с поврежденностью максимальное значение интенсивности напряжений меньше, чем без поврежденности.

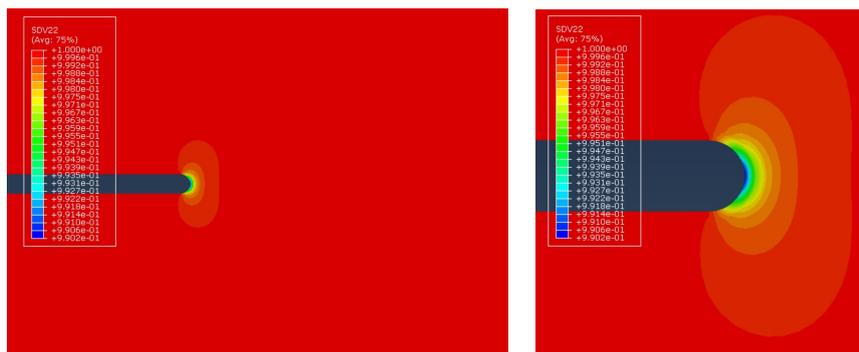


Рис. 4.4. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 10$ ч
Fig. 4.4. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 10$ h

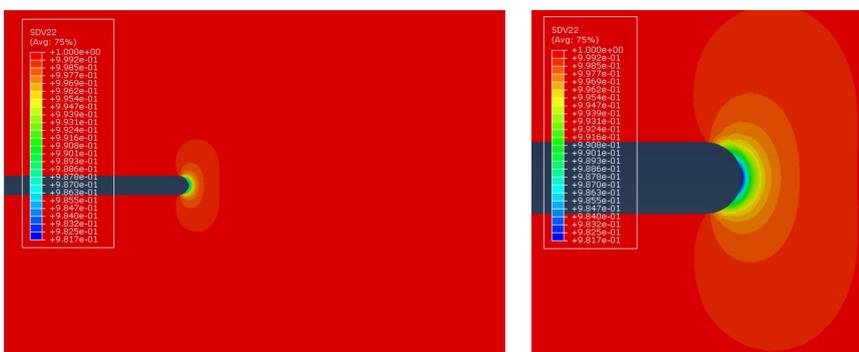


Рис. 4.5. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 20$ ч
Fig. 4.5. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 20$ h

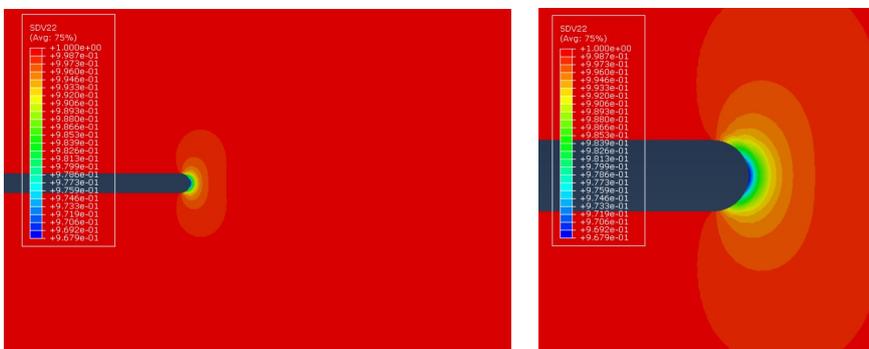


Рис. 4.6. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 40$ ч
Fig. 4.6. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 40$ h

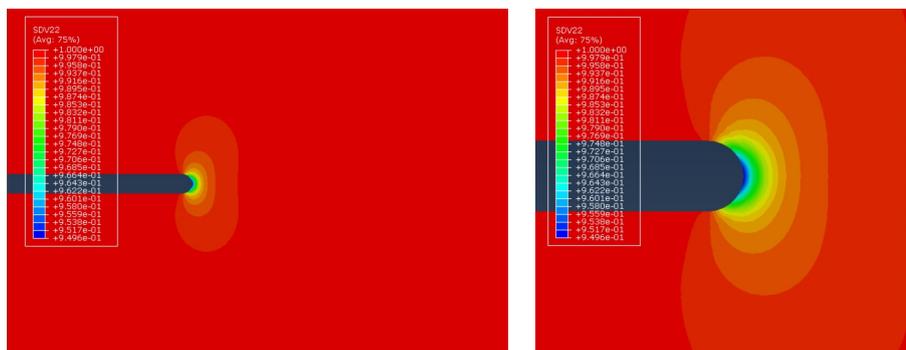


Рис. 4.7. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 81$ ч
Fig. 4.7. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 81$ h

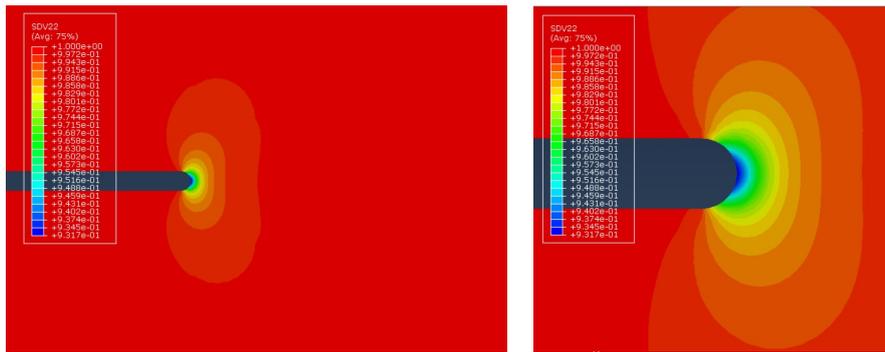


Рис. 4.8. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 163$ ч
 Fig. 4.8. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 163$ h

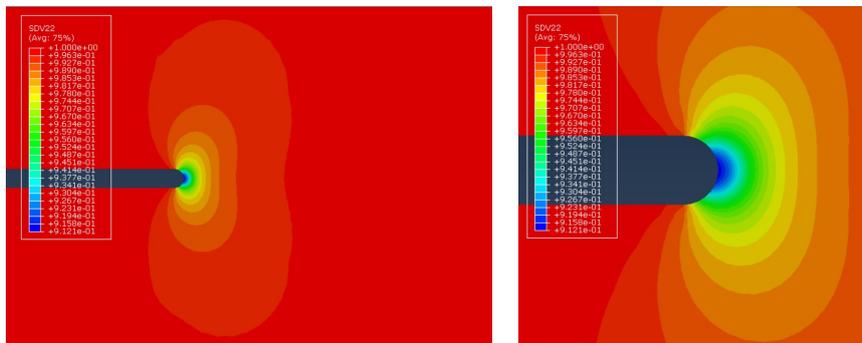


Рис. 4.9. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 327$ ч
 Fig. 4.9. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 327$ h

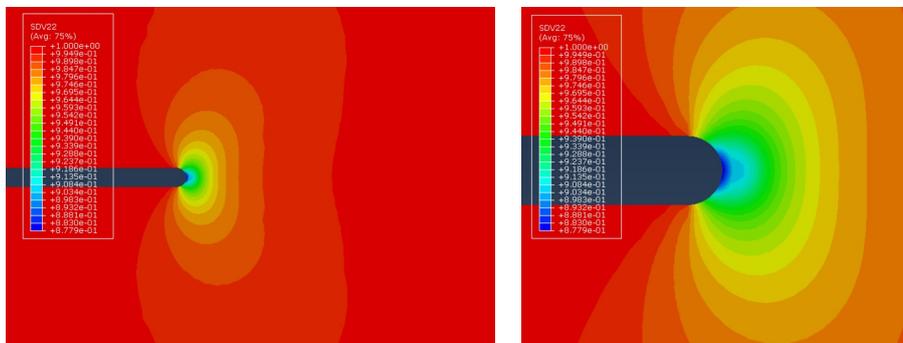


Рис. 4.10. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 655$ ч
 Fig. 4.10. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 655$ h

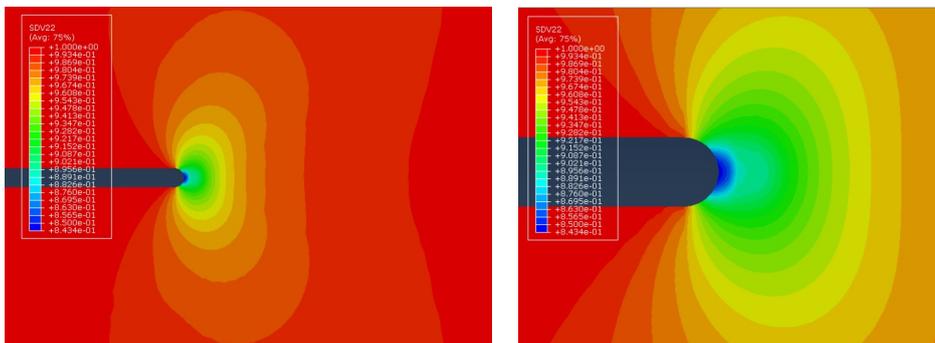


Рис. 4.11. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 1311$ ч
 Fig. 4.11. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 1311$ h

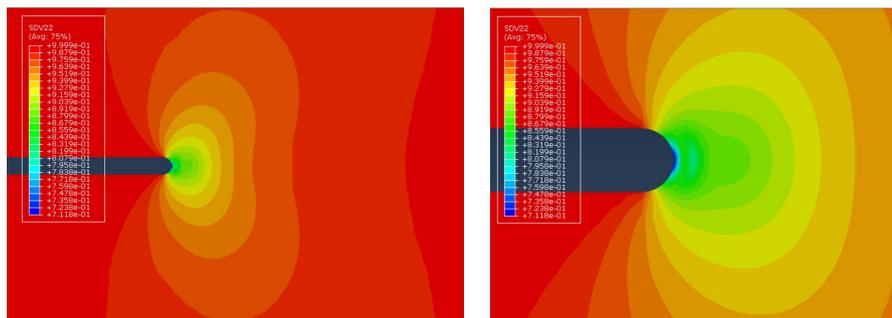


Рис. 4.12. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени $t = 1500$ ч
 Fig. 4.12. Continuity distribution near the crack tip for time $t = 1500$ h

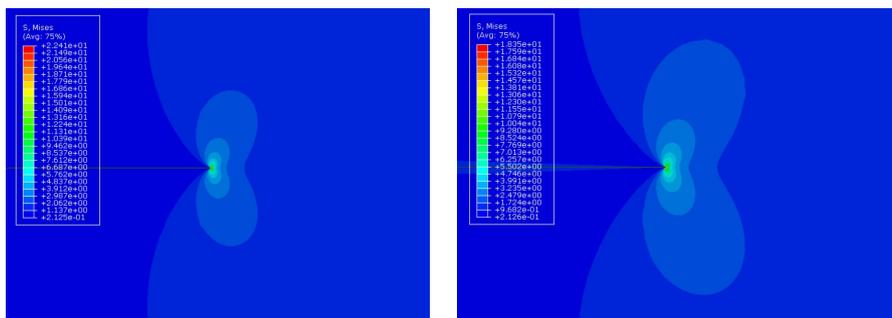


Рис. 4.13. Распределение интенсивности напряжений при $t = 150$ ч и при $t = 300$ ч
 Fig. 4.13. Stress intensity distribution at $t = 150$ h and at $t = 300$ h

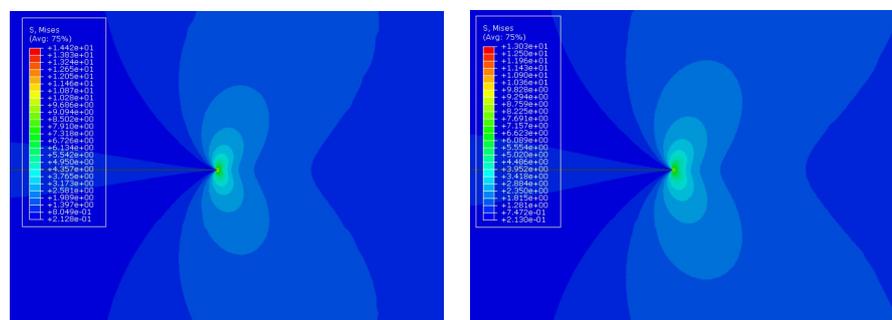


Рис. 4.14. Распределение интенсивности напряжений при $t = 600$ ч и при $t = 1300$ ч
 Fig. 4.14. Stress intensity distribution at $t = 600$ h and at $t = 1300$ h

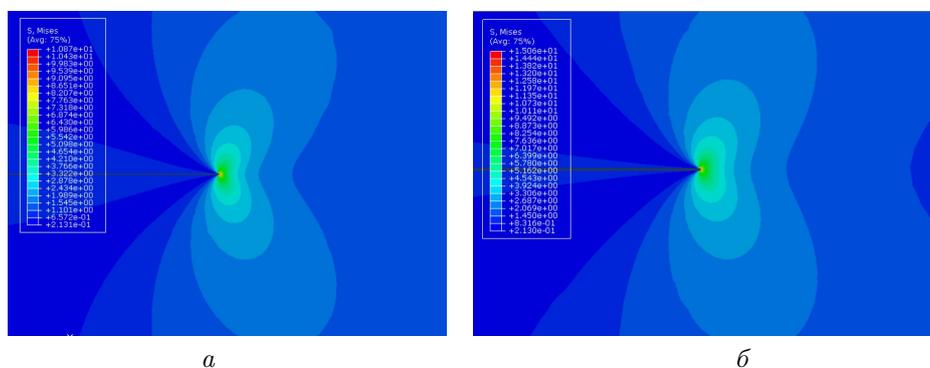


Рис. 4.15. Распределение интенсивности напряжений при $t = 1500$ ч в окрестности вершины трещины в условиях ползучести: *a* — с учетом поврежденности; *b* — без поврежденности
 Fig. 4.15. The distribution of stress intensity at $t = 1500$ h in the vicinity of the crack tip in creep conditions: *a* — with damage taken into account; *b* — without damage

Заключение

В работе представлен обзор применения подпрограммы UMAT программного комплекса SIMULIA Abaqus в механике деформируемого твердого тела. Данная подпрограмма служит для описания новых пользовательских материалов, отсутствующих в списке стандартных материалов пакета SIMULIA Abaqus. В этой обзорной статье приведены примеры задач и определяющих уравнений, которые моделируются исследователями при помощи процедур UMAT/VUMAT. Рассмотрены процессы разрушения и ползучести. Представлены типы материалов, успешно описанных посредством этих пользовательских процедур. В частности, были рассмотрены работы, посвященные изучению композитных и пористых материалов. Дано общее описание и опыт применения подпрограммы UMAT. Приведены результаты конечно-элементного моделирования деформирования пластины, ослабленной центральным круговым отверстием, при всестороннем равномерном и одноосном растяжении при установившейся ползучести в среде с поврежденностью, эволюционирующей по степенному закону, в связанной постановке задачи (ползучесть – поврежденность). Найдены распределения напряжений, деформаций и поля поврежденности у кончика дефекта в условиях ползучести и приведен анализ влияния процесса накопления повреждений на поля напряжений у вершины трещины в условиях установившейся ползучести. Продемонстрированы распределения напряжений и деформаций ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени.

Благодарность.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ в рамках научного проекта № 21-11-00346

Литература

- [1] ANSYS documentation. URL: <https://kashanu.ac.ir/Files/Content/ANSYS%20Workbench.pdf>.
- [2] MSC Nastran documentation. URL: https://faq.cc.metu.edu.tr/tr/system/files/u16319/nastran_2020_doc_install.pdf.
- [3] Marc/Mentat documentation. URL: <https://ru.scribd.com/doc/22327176/Marc-2010-User-s-Guide>.
- [4] Abaqus documentation. URL: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEEXCRefMap/simaexc-docproc.htm>.
- [5] Abaqus. Применение комплекса в инженерных задачах. Москва: Тесис. 2010. 104 с. URL: https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_metodic_2010.pdf.
- [6] Tavara L., Moreno L., Paloma E., Mantic V. Accurate modelling of instabilities caused by multi-site interface-crack onset and propagation in composites using the sequentially linear analysis and Abaqus // Composite Structures. 2019. Vol. 225. P. 110993. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2019.110993>.
- [7] Jafaripour M., Taheri-Behrooz F. Creep behavior modeling of polymeric composites using Schapery model based on micro-macromechanical approaches // European Journal of Mechanics / A Solids. 2020. Vol. 81. P. 103963. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103963>.
- [8] Arruda M.R.T., Almeida-Fernandes L., Castro L., Correia J.R. Tsai–Wu based orthotropic damage model // Composites Part C: Open Access. 2021. Vol. 4. P. 100122. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.JCOMC.2021.100122>.
- [9] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. 1971. Vol. 5. № 1. pp. 58–80.
- [10] Tsai S.W. A survey of macroscopic failure criteria for composite materials // J. Reinforced Plast. Compos. 1984. Vol. 3. № 1. pp. 40–62. DOI: <https://doi.org/10.1177/073168448400300102>.
- [11] Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. Пластическое деформирование полос из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 7(54). С. 263–279. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/plasticheskoe-deformirovanie-polos-iz-materiala-s-zavisyaschimi-ot-vida-napryazhenogo-sostoyaniya-svoystvami/viewer>.
- [12] Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. Теория пластичности и предельного равновесия тел, чувствительных к виду напряженного состояния // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-4. С. 1595–1587. URL: http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778_2011_-_4-4_unicode/100.pdf; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22631869>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tbgoyz>.
- [13] Fedulov B.N. et al. Modelling of thermoplastic polymer failure in fiber reinforced composites // Composite Structures. 2017. Vol. 163. pp. 293–301. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2016.11.091>.
- [14] Martinez-Paneda E., Fuentes-Alonso S., Betegon C. Gradient-enhanced statistical analysis of cleavage fracture // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2019. Vol. 77. P. 103785. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.05.002>.

- [15] Martinez-Paneda E., Betegon C. Modeling damage and fracture within strain-gradient plasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 59. pp. 208–215. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.010>.
- [16] Taylor G.I. Plastic strain in metals // *Journal of the Institute of Metals*. 1938. Vol. 62. pp. 307–324.
- [17] Fernandez-Sousa R., Betegon C., Martinez-Paneda E. Analysis of the influence of microstructural traps on hydrogen assisted fatigue // *Acta Materialia*. 2020. Vol. 199. pp. 253–263. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.08.030>.
- [18] Шлянников В.Н., Туманов А.В., Хамидулин Р.М. Эффекты градиентной пластичности в вершине трещины при плоском напряженном состоянии и плоской деформации // *Физическая мезомеханика*. 2021. Т. 24. № 2. С. 41–55. DOI: <http://doi.org/10.24412/1683-805X-2021-2-41-55>. EDN: <https://www.elibrary.ru/psslrr>.
- [19] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Tartygasheva A. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2021. Vol. 208–209. pp. 63–82. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
- [20] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Khamidullin R. Mode I and Mode II stress intensity factors and dislocation density behaviour in strain gradient plasticity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 116. P. 103128. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103128>.
- [21] Fengxia O. Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy. Ph. D. Thesis. Akron, 2005. 90 p.
- [22] Robin D.N., Binienda W.K., Ruggles M.B. Creep of Polymer Matrix Composites. I: Norton/Bailey Creep Law for Transverse Isotropy // *Journal of Engineering Mechanics*. 2003. Vol. 129. Issue 3. Pp. 310–317. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:3\(310\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:3(310)).
- [23] Alotta G., Barrera O., Cocks A.C.F., Paola M.D. On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model // *Meccanica*. 2016. Vol. 52 № 9, pp. 2127–2142. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11012-016-0550-8>.
- [24] Alotta G., Barrera O., Cocks A., Paola M. The finite element implementation of 3D fractional viscoelastic constitutive models // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2018. Vol. 146. pp. 28–41. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2018.04.003>.
- [25] Li J. et al. Creep analyses for pipe bends under combined internal pressure and bending loads // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2021. Vol. 193. P. 104450. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2021.104450>.
- [26] Sun T. et al. Experimental and numerical research on the nonlinear creep response of polymeric composites under humid environments // *Composite Structures*. 2020. Vol. 251. P. 112673. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112673>.
- [27] Kim J.H. et al. Prestrain-dependent viscoplastic damage model for austenitic stainless steel and implementation to ABAQUS user-defined material subroutine // *Computational Materials Science*. 2013. Vol. 67. Pp. 273–281. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2012.08.021>.
- [28] O’Ceallaigh C., Sikora K., McPolin D., Harte A.M. Modelling the hygro-mechanical creep behaviour of FRP reinforced timber elements // *Construction and Building Materials*. 2020. Vol. 259. P. 119899. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119899>.
- [29] Pavkovic K., Stepinac M., Rajcic V. Brittle failure modes in reinforced and non-reinforced timber joint with large diameter fastener loaded parallel to grain // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 222. P. 111104. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111104>.
- [30] Gharib M., Hassanieh A., Valipour H., Bradford M. A. Three-dimensional constitutive modelling of arbitrarily orientated timber based on continuum damage mechanics // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2017. Vol. 135. pp. 79–90. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2017.07.008>.
- [31] Eslami H., Jayasinghe L.B., Waldmann D. Nonlinear three-dimensional anisotropic material model for failure analysis of timber // *Engineering Failure Analysis*. 2021. Vol. 130. P. 105764. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105764>.
- [32] Hoffman O. The brittle strength of orthotropic materials // *Journal of Composites*. 1967. Vol. 1. № 2. Pp. 200–206. DOI: <http://doi.org/10.1177/002199836700100210>.
- [33] Sandhaas C. Van de Kuilen J.W., Blass H.J. Constitutive model for wood based on continuum damage mechanics // *12th World Conference on Timber Engineering*. Auckland, 2012. URL: <http://resolver.tudelft.nl/uuid:55c1c5e5-9902-43ad-a724-62bb063c3c80>.
- [34] Zhang J. et al. Characterizing the three-stage rutting behavior of asphalt pavement with semi-rigid base by using UMAT in ABAQUS // *Construction and Building Materials*. 2017. Vol. 140. pp. 496–507. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2017.02.152>.
- [35] Zhao Y., Jiang L., Zhou L. Ambient Temperature and Vehicle Loading Effects on Asphalt Concrete Pavement Rutting Development // *Proceeding of 5th International Conference on Transportation Engineering*. 2015. Pp. 1084–1091. DOI: <https://doi.org/10.1061/9780784479384.136>.

- [36] Ban H., Im S., Kim Y.R. Nonlinear viscoelastic approach to model damage associated performance behavior of asphaltic mixture and pavement structure // *Can. J. Civ. Eng.* 2013. Vol. 40. № 4. Pp. 313–323. DOI: <http://doi.org/10.1139/CJCE-2012-0289>.
- [37] Xia K. Finite element modeling of dynamic tire/pavement interaction // *Proceedings of the Pavements and Materials: Characterization and Modeling Symposium*. 2010. Pp. 204–214. DOI: [http://doi.org/10.1061/41129\(385\)18](http://doi.org/10.1061/41129(385)18).
- [38] Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I—yield criteria and flow rules for porous ductile media // *J. Eng. Mater. Technol.* 1977. Vol. 99. pp. 2–15. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3443401>.
- [39] Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar // *Acta Metallurgica*. 1984. Vol. 32. Issue 1. Pp. 157–169. DOI: [http://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](http://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X).
- [40] Khan A.S., Suh Y.S., Kazmi R. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys // *International Journal of Plasticity*. 2004. Vol. 20. Issue 12. Pp. 2233–2248. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2003.06.005>.
- [41] Liang R., Khan A.S. A critical review of experimental results and constitutive models for BCC and FCC metals over a wide range of strain rates and temperatures // *International Journal of Plasticity*. 1999. Vol. 15. Issue 9. Pp. 963–980. DOI: <http://doi.org/10.1016/S0749-6419%2899%2900021-2>.
- [42] Lemaitre J. How to use damage mechanics // *Nuclear Engineering and Design*. 1984. Vol. 80. Issue 2. Pp. 233–245. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90169-9](https://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90169-9).
- [43] Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2000. Vol. 48. Issue 1. Pp. 175–209. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](http://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0).
- [44] Bobaru F, Foster J.T., Geubelle P.H., Silling S.A. *Handbook of Peridynamic Modeling*. New York: Taylor and Francis Group, 2017, 530 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781315373331>.
- [45] Ha Y.D., Bobaru F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics // *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 162. № 1-2. Pp. 229–244. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10704-010-9442-4>.
- [46] Ha Y.D., Bobaru F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics // *Engineering Fracture Mechanics*. 2011. Vol. 78. № 6. Pp. 1156–1168. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.11.020>.
- [47] Ha Y.D., Bobaru F. Dynamic brittle fracture captured with peridynamics // *Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2011, pp. 437–442. DOI: <http://doi.org/10.1115/IMECE2011-65515>.
- [48] Oterkus E., Oterkus S., Madenci E. *Peridynamic Modeling, Numerical Techniques, and Applications* // Elsevier Series in Mechanics of Advanced Materials. 2021. 462 p. DOI: <http://doi.org/10.1016/C2019-0-01174-0>.
- [49] Kuhn C., Muller R. A continuum phase field model for fracture // *Engineering Fracture Mechanics*. 2010. Vol. 77. № 18. Pp. 3625–3634. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.08.009>.
- [50] Schneider, D., Schoof, E., Huang, Y., Selzer, M., Nestler, B. Phase-field modeling of crack propagation in multiphase systems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016. Vol. 312. pp. 186–195. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CMA.2016.04.009>.
- [51] Bie Y.H., Liu Z.M., Yang H. et al. Abaqus implementation of dual peridynamics for brittle fracture // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 372. P. 113398. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113398>.
- [52] Wang Y., Zhou X., Wang Y. A 3-D conjugated bond-pair-based peridynamic formulation for initiation and propagation of cracks in brittle solids // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 134. Pp. 89–115. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2017.10.022>.
- [53] Griffith A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Math. or Phys. Character* (1896-1934). 1921. Vol. 221. Pp. 163–198. Available at: <http://ia802702.us.archive.org/31/items/philtrans01457975/01457975.pdf>.
- [54] Msekh M.A. et al. Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture // *Computational Materials Science*, 2014, vol. 96, part B, pp. 472–484. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2014.05.071>.
- [55] Navidtehrani Y., Betegon C., Martinez-Paneda E. A unified Abaqus implementation of the phase field fracture method using only a user material subroutine // *Materials*. 2021. Vol. 14. Issue 8. P. 1913. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14081913>.
- [56] Navidtehrani Y., Betegyn C. Martinez-Paceda E. A simple and robust Abaqus implementation of the phase field fracture method // *Applications in Engineering Science*. 2021. Vol. 6. P. 100050. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.APPLES.2021.100050>.
- [57] Wua J., Huang Y. Comprehensive implementations of phase-field damage models in Abaqus // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 106. P. 102440. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102440>.

- [58] Mika P. On interaction between damage growth and material stiffness in 3D structures // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 1999. Vol. 37. № 4. Pp. 755–778. URL: <http://ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v37n4p755>.
- [59] Mika P. The comparison of scalar and tensorial damage measures. // ECCM-2001 : 2nd European Conference on Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Cracow, Poland, June 26–29, 2001 : under the auspices of ECCOMAS and IACM [: papers]
- [60] Mika P. Influence of variable load on damage evolution in the plate structures // CMM-2003. Computer methods in mechanics. Short papers. 2003. pp. 253–254.
- [61] Mika P. Influence of Exponent in Damage Evolution Equation on the Accuracy of Damage Modelling in Brittle Materials // Engineering Transactions. 2015. Vol. 63. № 4. Pp. 463–479. URL: <http://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/download/245/239>.
- [62] Извеков О.Я., Селицкий А.А., Крупеник А.М. Решение связанных задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в SIMULIA ABAQUS. URL: https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es11_mftu.pdf
- [63] Извеков О.Я., Крупеник А.М. Реализация энергетической модели континуального разрушения хрупких сред в SIMULIA ABAQUS 6.9. URL: https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es10_mfti.pdf.
- [64] Lee J.-H., Ryu D.-M., Lee C.-S. Constitutive-damage modeling and computational implementation for simulation of elasto-viscoplastic-damage behavior of polymeric foams over a wide range of strain rates and temperatures // International Journal of Plasticity. 2020. Vol. 130. P. 102712. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102712>.
- [65] Liu P.F., Li J.X., Wang S.B., Leng J.X. Finite element analysis of viscoelastic creep behaviors of deep-sea manned submersible viewport windows // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2020. Vol. 188. P. 104218. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2020.104218>.
- [66] Xie Y. et al. Influence of creep on preload relaxation of bolted composite joints: Modeling and numerical simulation // Composite Structures. 2020. Vol. 245. P. 112332. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112332>.
- [67] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. С. 26–31.
- [68] Dube M., Doquet V., Constantinescu A., George D., Remond Y., Ahzi S. Modelling of thermal shock-induced damage in borosilicate glass // Mechanics of Materials. 2010. Vol. 42. Issue 9. pp. 863–872. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2010.07.002>.
- [69] Doquet V., Ben Ali N., Constantinescu A., Boutillon X. Fracture of a borosilicate glass under triaxial tension // Mechanics of Materials. 2013. Vol. 57. pp. 15–29. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.10.008>.
- [70] Doquet V., Ben Ali N., Chabert E., Bouyer F. Experimental and numerical study of crack healing in a nuclear glass // Mechanics of Materials. 2015. Vol. 80. pp. 145–162. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2014.09.003>.
- [71] Степанова Л.В. Компьютерное моделирование процессов накопления повреждений в твердых телах с трещинами с помощью пользовательской процедуры UMAT вычислительного комплекса Simulia Abaqus // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2018. № 3. С. 71–86. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yljexz>.
- [72] Turkova V.A., Stepanova L.V. Evaluation of damage accumulation zone in the vicinity of the crack tip: FEM analysis via UMAT procedure // Journal of Physics: Conference Series. 2018, vol. 1096, issue 1, p. 012157. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012157>.
- [73] Sun X., Khaleel M.A. Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics–static spherical indentation // International Journal of Damage Mechanics. 2004. Vol. 13. Pp. 263–284. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789504042593>.
- [74] Sun X., Khaleel M.A., Davies R.W. Modeling of stone impact resistance of monolithic glass ply using continuum damage mechanics // International Journal of Damage Mechanics. 2005. Vol. 14. Pp. 165–178. DOI: <http://doi.org/10.1177/1056789505048601>.
- [75] Zhang S., Wang Q., Zhou W. Implementation of the Tresca yield criterion in finite element analysis of burst capacity of pipelines // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2019. Vol. 172. Pp. 180–187. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2019.03.037>.
- [76] Kodagali K. Progressive Failure Analysis of composite Materials using the Puck Failure Criteria (Doctoral dissertation). 2017. 77 p. URL: <https://scholarcommons.sc.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5464&context=etd>.
- [77] Shlyannikov V., Tumanov A. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 150. Pp. 166–183. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2018.06.009>.
- [78] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Force and deformation models of damage and fracture during creep // Physical Mesomechanics. 2018. Vol. 21. № 3. Pp. 70–85. DOI: <http://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>.

- [79] Sen S., Patel B.P. Creep-Fatigue Interaction of Steam Turbine Rotors Using Continuum Damage Mechanics // Transactions of the Indian National Academy of Engineering. 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s41403-021-00310-2>.
- [80] Compatible Fortran and Visual Studio for Abaqus. URL: <https://caeassistant.com/blog/compatible-fortran-visual-studio-for-abaqus>.
- [81] USER MATERIAL IN ABAQUS. URL: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAESUBRefMap/simasub-c-umat.htm>.
- [82] Lecture 6 Writing a UMAT or VUMAT Overview. URL: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.
- [83] Okereke M., Keates S. Finite Element Applications. Springer. 2018. 418 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-67125-3>.
- [84] Ilin V.N., Mordashov S.V., Pusach S.V. Laws of creep for computation of fire resistance for steel equipment // Technology of technosphere safety. 2008. № 6 (22). С. 10–17. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15101435>. EDN: <https://www.elibrary.ru/msmcaf>.
- [85] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир. 1986. 360 с.
- [86] Riedel H. Fracture at High Temperatures. Springer-Verlag. 1987. 418 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-82961-1>.
- [87] Meng Li., Chen W., Yan Y., Kitamura T., Feng. M. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening // Engineering Fracture Mechanics. 2019. Vol. 218. P. 106582. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2019.106582>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73

Submitted: 14.09.2021

Revised: 16.10.2021

Accepted: 15.11.2021

O.N. Belova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: BelovaONik@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

D.V. Chapliy

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: Dch300189@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9510-3659>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: StepanovaLv2015@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

APPLICATION OF THE UMAT SUBROUTINE FOR SOLVING CONTINUUM MECHANICS PROBLEMS (OVERVIEW)

ABSTRACT This paper presents an overview of the application of the UMAT subroutine of the SIMULIA Abaqus multifunctional software package in solid mechanics and related areas. This subroutine is used to describe new user materials that are not available in the class of standard materials of the SIMULIA Abaqus package. This overview article provides examples of problems and constitutive equations of materials that are modeled using UMAT / VUMAT procedures. Various types of materials are presented, successfully described by means of user-defined UMAT and VUMAT procedures. A general description and experience of using the UMAT subroutine is given. The results of finite element modeling of the deformation of a plate weakened by a central circular hole under uniform and uniaxial tension with steady-state creep in a damaged medium evolving according to a power law are presented in the coupled formulation of the problem (creep - damage). The distributions of stresses, strains, and damage fields at the tip of the defect under creep conditions are found, and an analysis is made of the effect of the damage accumulation process on the stress fields at the crack tip under steady-state creep conditions. The distributions of stresses and creep strains are demonstrated taking into account the accumulation of damage over time.

Key words: user procedure UMAT; SIMULIA Abaqus; composites; creep; damage; solid mechanics; modeling of materials; fracture in creep conditions.

Citation. Belova O.N., Chapliy D.V., Stepanova L.V. Application of the UMAT Subroutine for solving continuum mechanics problems (Overview). *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 46–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Belova O.N., 2021

Oksana N. Belova — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Chapliy D.V., 2021

Dmitriy V. Chapliy — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Stepanova L.V., 2021

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] ANSYS documentation. Available at: <https://kashanu.ac.ir/Files/Content/ANSYS%20Workbench.pdf>
- [2] MSC Nastran documentation. Available at: https://faq.cc.metu.edu.tr/tr/system/files/u16319/nastran_2020_doc_install.pdf.
- [3] Marc/Mentat documentation. Available at: <https://ru.scribd.com/doc/22327176/Marc-2010-User-s-Guide>.
- [4] Abaqus documentation. Available at: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEEXCRefMap/simaexc-docproc.htm>.
- [5] Abaqus. Application of the complex in engineering tasks. Moscow: Tesis, 2010, 104 p. Available at: https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_metodic_2010.pdf. (In Russ.)
- [6] Tavara L., Moreno L., Paloma E., Mantic V. Accurate modelling of instabilities caused by multi-site interface-crack onset and propagation in composites using the sequentially linear analysis and Abaqus. *Composite Structures*, 2019, vol. 225, p. 110993. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2019.110993>.
- [7] Jafaripour M., Taheri-Behrooz F. Creep behavior modeling of polymeric composites using Schapery model based on micro-macromechanical approaches. *European Journal of Mechanics A- solids*, 2020, vol. 81, p. 103963. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103963>.
- [8] Arruda M.R.T., Almeida-Fernandes L., Castro L., Correia J.R. Tsai–Wu based orthotropic damage model. *Composites Part C: Open Access*, 2021, vol. 4, p. 100122. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.JCOMC.2021.100122>.
- [9] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 1971, vol. 5, № 1, pp. 58–80. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.
- [10] Tsai S.W. A survey of macroscopic failure criteria for composite materials. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1984, vol. 3, № 1, pp. 40–62. DOI: <https://doi.org/10.1177/073168448400300102>.
- [11] Lomakin E.V., Fedulov B.N. Plastic deformation of stripes of stress-state-dependent material properties. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2007, № 7(54), pp. 263–279. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/plasticheskoe-deformirovanie-polos-iz-materiala-s-zavisyaschimi-ot-vida-napryazhenogo-sostoyaniya-svoystvami/viewer>. (In Russ.)
- [12] Lomakin E.V., Fedulov B.N. Theory of plasticity and limit state of solids susceptible to the stress state type. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, № 4-4, pp. 1595–1587. Available at: http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778_2011_-_4-4_unicode/100.pdf; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22631869>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tbgoyz>. (In Russ.)
- [13] Fedulov B.N. et al. Modelling of thermoplastic polymer failure in fiber reinforced composites. *Composite Structures*, 2017, vol. 163, pp. 293–301. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2016.11.091>.
- [14] Martinez-Paneda E., Fuentes-Alonso S., Betegon C. Gradient-enhanced statistical analysis of cleavage fracture. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2019, vol. 77, p. 103785. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.05.002>.
- [15] Martinez-Paneda E., Betegon C. Modeling damage and fracture within strain-gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 59, pp. 208–215. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.010>.
- [16] Taylor G.I. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, 1938, vol. 62, pp. 307–324.

- [17] Fernandez-Sousa R., Betegon C., Martinez-Paneda E. Analysis of the influence of microstructural traps on hydrogen assisted fatigue. *Acta Materialia*, 2020, vol. 199, pp. 253–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.08.030>.
- [18] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Khamidullin R.M. Strain gradient effects at the crack tip under plane strain and plane stress conditions. *Physical Mesomechanics*, 2021, vol. 24, № 3, pp. 257–268. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1029959921030048>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yapvcu>. (English; Russian original).
- [19] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Tartygasheva A. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, vol. 208–209, pp. 63–82. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
- [20] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Khamidullin R. Mode I and Mode II stress intensity factors and dislocation density behaviour in strain gradient plasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, vol. 116, p. 103128. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103128>
- [21] Fengxia O. Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy. Ph. D. Thesis. Akron, 2005, 90 p.
- [22] Robinson D.N., Binienda W.K., Ruggles M.B. Creep of Polymer Matrix Composites. I: Norton/Bailey Creep Law for Transverse Isotropy. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, vol. 129, Issue 3, pp. 310–317. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:3\(310\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:3(310)).
- [23] Alotta G., Barrera O., Cocks A.C.F., Paola M.D. On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model. *Meccanica*, 2016, vol. 52, № 9, pp. 2127–2142. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11012-016-0550-8>.
- [24] Alotta G., Barrera O., Cocks A., Paola M. The finite element implementation of 3D fractional viscoelastic constitutive models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2018, vol. 146, pp. 28–41. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2018.04.003>.
- [25] Li J. et al. Creep analyses for pipe bends under combined internal pressure and bending loads. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, vol. 193, p. 104450. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2021.104450>.
- [26] Sun T. et al. Experimental and numerical research on the nonlinear creep response of polymeric composites under humid environments. *Composite Structures*, 2020, vol. 251, p. 112673. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112673>.
- [27] Kim J.-H. et al. Prestrain-dependent viscoplastic damage model for austenitic stainless steel and implementation to ABAQUS user-defined material subroutine. *Computational Materials Science*, 2013, vol. 67, pp. 273–281. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2012.08.021>.
- [28] O’Ceallaigh C., Sikora K., McPolin D., Harte A.M. Modelling the hygro-mechanical creep behaviour of FRP reinforced timber elements. *Construction and Building Materials*, 2020, vol. 259, p. 119899. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119899>.
- [29] Pavkovic K., Stepinac M., Rajcic V. Brittle failure modes in reinforced and non-reinforced timber joint with large diameter fastener loaded parallel to grain. *Engineering Structures*, 2020, vol. 222, p. 111104. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111104>.
- [30] Gharib M., Hassanieh A., Valipour H., Bradford M. A. Three-dimensional constitutive modelling of arbitrarily orientated timber based on continuum damage mechanics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2017, vol. 135, pp. 79–90. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2017.07.008>.
- [31] Eslami H., Jayasinghe L.B., Waldmann D. Nonlinear three-dimensional anisotropic material model for failure analysis of timber. *Engineering Failure Analysis*, 2021, vol. 130, p. 105764. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105764>.
- [32] Hoffman O. The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, 1967, vol. 1, № 2, pp. 200–206. DOI: <http://doi.org/10.1177/002199836700100210>.
- [33] Sandhaas C. Van de Kuilen J.W., Blass H.J. Constitutive model for wood based on continuum damage mechanics. In: *12th World Conference on Timber Engineering*. Auckland, 2012. Available at: <http://resolver.tudelft.nl/uuid:55c1c5e5-9902-43ad-a724-62bb063c3c80>.
- [34] Zhang J. et al. Characterizing the three-stage rutting behavior of asphalt pavement with semi-rigid base by using UMAT in ABAQUS. *Construction and Building Materials*, 2017, vol. 140, pp. 496–507. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2017.02.152>.
- [35] Zhao Y., Jiang L., Zhou L. Ambient Temperature and Vehicle Loading Effects on Asphalt Concrete Pavement Rutting Development. *Proceeding of 5th International Conference on Transportation Engineering*, 2015, pp. 1084–1091. DOI: <http://doi.org/10.1061/9780784479384.136>.
- [36] Ban H., Im S., Kim Y.R. Nonlinear viscoelastic approach to model damage associated performance behavior of asphaltic mixture and pavement structure. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2013, vol. 40, № 4, pp. 313–323. DOI: <http://doi.org/10.1139/CJCE-2012-0289>.

- [37] Xia K. Finite element modeling of dynamic tire/pavement interaction. *Proceedings of the Pavements and Materials: Characterization and Modeling Symposium*, 2010, pp. 204–214. DOI: [http://doi.org/10.1061/41129\(385\)18](http://doi.org/10.1061/41129(385)18).
- [38] Gurson A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology-transactions of The Asme*, 1977, vol. 99, pp. 2–15. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3443401>.
- [39] Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 1984, vol. 32, issue 1, pp. 157–169. DOI: [http://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](http://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X).
- [40] Khan A.S., Suh Y.S., Kazmi R. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys. *International Journal of Plasticity*, 2004, vol. 20, issue 12, pp. 2233–2248. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2003.06.005>.
- [41] Liang R., Khan A.S. A critical review of experimental results and constitutive models for BCC and FCC metals over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, 1999, vol. 15, issue 9, pp. 963–980. DOI: <https://doi.org/10.1016/S0749-6419%2899%2900021-2>.
- [42] Lemaitre J. How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 1984, vol. 80, issue 2, pp. 233–245. DOI: [http://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90169-9](http://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90169-9).
- [43] Silling S.A. Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces. *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 2000, vol. 48, issue 1, pp. 175–209. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](http://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0).
- [44] Bobaru F, Foster J.T., Geubelle P.H., Silling S.A. Handbook of Peridynamic Modeling. New York: Taylor and Francis Group, 2017, 530 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781315373331>.
- [45] Ha Y.D., Bobaru F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture*, 2010, vol. 162, № 1-2, pp. 229–244. DOI: <http://doi.org/10.1007/S10704-010-9442-4>.
- [46] Ha Y.D., Bobaru F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, vol. 78, № 6, pp. 1156–1168. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.11.020>.
- [47] Ha Y.D., Bobaru F. Dynamic brittle fracture captured with peridynamics. In: *Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. DOI: <http://doi.org/10.1115/IMECE2011-65515>.
- [48] Oterkus E., Oterkus S., Madenci E. Peridynamic Modeling, Numerical Techniques, and Applications. In: *Elsevier Series in Mechanics of Advanced Materials*, 2021, 462 p. DOI: <http://doi.org/10.1016/C2019-0-01174-0>
- [49] Kuhn C., Muller R. A continuum phase field model for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, vol. 77, № 18, pp. 3625–3634. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.08.009>.
- [50] Schneider D., Schoof E., Huang Y., Selzer M., Nestler B. Phase-field modeling of crack propagation in multiphase systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, vol. 312, pp. 186–195. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CMA.2016.04.009>.
- [51] Bie Y.H., Liu Z.M., Yang H. et al. Abaqus implementation of dual peridynamics for brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 372, p. 113398. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113398>.
- [52] Wang Y., Zhou X., Wang Y. A 3-D conjugated bond-pair-based peridynamic formulation for initiation and propagation of cracks in brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 134, pp. 89–115. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2017.10.022>.
- [53] Griffith A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character (1896-1934)*, 1921, vol. 221, pp. 163–198. DOI: <https://ia802702.us.archive.org/31/items/philtrans01457975/01457975.pdf>.
- [54] Msekh M.A. et al. Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 96, part B, pp. 472–484. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2014.05.071>.
- [55] Navidtehrani Y., Betegon C., Martinez-Paneda E. A unified Abaqus implementation of the phase field fracture method using only a user material subroutine. *Materials*, 2021, vol. 14, issue 8, p. 1913. DOI: <http://doi.org/10.3390/ma14081913>.
- [56] Navidtehrani Y., Betegyn C. Martinez-Paceda E. A simple and robust Abaqus implementation of the phase field fracture method. *Applications in Engineering Science*, 2021, vol. 6, p. 100050. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.APPLES.2021.100050>.
- [57] Wua J., Huang Y. Comprehensive implementations of phase-field damage models in Abaqus. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 106, p. 102440. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102440>.
- [58] Mika P. On interaction between damage growth and material stiffness in 3D structures. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1999, vol. 37, № 4, pp. 755–778. Available at: <http://ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v37n4p755>.

- [59] Mika P. The comparison of scalar and tensorial damage measures. In: *ECCM-2001: 2nd European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering. Cracow, Poland, June 26-29, 2001: under the auspices of ECCOMAS and IACM*.
- [60] Mika P. Influence of variable load on damage evolution in the plate structures. In: *CMM-2003. Computer methods in mechanics. Short papers*, 2003, pp. 253–254.
- [61] Mika P. Influence of Exponent in Damage Evolution Equation on the Accuracy of Damage Modelling in Brittle Materials. *Engineering Transactions*, 2015, vol. 63, № 4, pp. 463–479. Available at: <http://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/download/245/239>.
- [62] Izvekov O.Ya., Krupenik A.M. Solutions of coupled problems of continuum fracture of porous and poro-elastic media in SIMULIA ABAQUS. Available at: http://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es11_mftu.pdf.
- [63] Izvekov O.Ya., Krupenik A.M. Realization of energy model of continuum fracture of brittle media in SIMULIA ABAQUS 6.9. Available at: https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es10_mfti.pdf.
- [64] Lee J.-H., Ryu D.-M., Lee C.-S. Constitutive-damage modeling and computational implementation for simulation of elasto-viscoplastic-damage behavior of polymeric foams over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, 2020, vol. 130, p. 102712. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102712>.
- [65] Liu P.F., Li J.X., Wang S.B., Leng J.X. Finite element analysis of viscoelastic creep behaviors of deep-sea manned submersible viewport windows. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2020, vol. 188, p. 104218. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2020.104218>.
- [66] Xie Y. et al. Influence of creep on preload relaxation of bolted composite joints: Modeling and numerical simulation. *Composite Structures*, 2020, vol. 245, p. 112332. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112332>.
- [67] Kachanov L.M. On the fracture time under creep conditions. *Izv. AN SSSR. Otd-nie tekhn. nauk*, 1958, pp. 26–31. (In Russ.)
- [68] Dube M., Doquet V., Constantinescu A., George D., Remond Y., Ahzi S. Modelling of thermal shock-induced damage in borosilicate glass. *Mechanics of Materials*, 2010, vol. 42, Issue 9, pp. 863–872. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2010.07.002>.
- [69] Doquet V., Ben Ali N., Constantinescu A., Boutillon X. Fracture of a borosilicate glass under triaxial tension *Mechanics of Materials*, 2013, vol. 57, pp. 15–29. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.10.008>.
- [70] Doquet V., Ben Ali N., Chabert E., Bouyer F. Experimental and numerical study of crack healing in a nuclear glass. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 80, pp. 145–162. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2014.09.003>.
- [71] Stepanova L.V. Computational simulation of the damage accumulation processes in cracked solids by the user procedure UMAT of Simulia Abaqus. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3, pp. 71–86. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yljexz>. (In Russ.)
- [72] Turkova V.A., Stepanova L.V. Evaluation of damage accumulation zone in the vicinity of the crack tip: FEM analysis via UMAT procedure. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1096, issue 1, p. 012157. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012157>.
- [73] Sun X., Khaleel M.A. Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics–static spherical indentation. *International Journal of Damage Mechanics*, 2004, vol. 13, pp. 263–284. DOI: <http://doi.org/10.1177/1056789504042593>.
- [74] Sun X., Khaleel M.A., Davies R.W. Modeling of stone impact resistance of monolithic glass ply using continuum damage mechanics. *International Journal of Damage Mechanics*, 2005, vol. 14, pp. 165–178. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789505048601>.
- [75] Zhang S., Wang Q., Zhou W. Implementation of the Tresca yield criterion in finite element analysis of burst capacity of pipelines. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2019, vol. 172, pp. 180–187. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2019.03.037>.
- [76] Kodagali K. Progressive Failure Analysis of composite Materials using the Puck Failure Criteria (Doctoral dissertation). 2017, 77 p. Available at: <https://scholarcommons.sc.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5464&context=etd>.
- [77] Shlyannikov V., Tumanov A. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 150, pp. 166–183. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2018.06.009>.
- [78] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Force and deformation models of damage and fracture during creep. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, № 3, pp. 70–85. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>.
- [79] Sen S., Patel B.P. Creep-Fatigue Interaction of Steam Turbine Rotors Using Continuum Damage Mechanics. *Transactions of the Indian National Academy of Engineering*, 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s41403-021-00310-2>.
- [80] Compatible Fortran and Visual Studio for Abaqus. Available at: <https://caeassistant.com/blog/compatible-fortran-visual-studio-for-abaqus/>

- [81] USER MATERIAL IN ABAQUS. Available at: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAESUBRefMap/simasub-c-umat.htm>
- [82] Lecture 6 Writing a UMAT or VUMAT Overview. Available at: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.
- [83] Okereke M., Keates S. Finite Element Applications. Springer, 2018, 418 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-67125-3>.
- [84] Ilin V.N., Mordashov S.V., Pusach S.V. Laws of creep for computation of fire resistance for steel equipment. *Technology of technosphere safety*, 2008, no. 6 (22), pp. 10–17. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15101435>. EDN: <https://www.elibrary.ru/msmcaf>. (In Russ.)
- [85] Boil G., Spens G. Stress Analysis for Creep. Moscow: Mir, 1986, 360 p. (In Russ.)
- [86] Riedel H. Fracture at High Temperatures. Springer-Verlag, 1987, 418 p. Available at: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-82961-1>.
- [87] Meng Li., Chen W., Yan Y., Kitamura T., Feng. M. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 218, p. 106582. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACTMECH.2019.106582>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82

УДК 531.011

Дата: поступления статьи: 27.09.2021
после рецензирования: 28.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

В.М. Савчин

Российский университет дружбы народов,
г. Москва, Российская Федерация

E-mail: savchin-vm@rudn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3850-6747>

Ф.Т. Чинь

Российский университет дружбы народов,
г. Москва, Российская Федерация

E-mail: tr.phuocaoan@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7707-322X>

О ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ¹

АННОТАЦИЯ

Основная цель данной статьи — исследование потенциальности дискретной системы, полученной из системы вида $C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0$ с непрерывным временем. Введено определение потенциальности соответствующей дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности относительно заданной билинейной формы. Изложен алгоритм построения соответствующего функционала — аналога действия по Гамильтону. Дан иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: потенциальные операторы; дискретные системы.

Цитирование. Савчин В.М., Чинь Ф.Т. О потенциальности дискретных систем // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 74–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Савчин В.М., 2021

Владимир Михайлович Савчин — профессор, доктор физико-математических наук, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

© Чинь Ф.Т., 2021

Фьюк Тоан Чинь — аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$N(u) \equiv C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0, \quad 0 < t < l, \quad (1.1)$$

$$u(0) = a_1, \quad u(l) = a_2, \quad (1.2)$$

где $C(t, u)$ — заданная матрица $[C_{\mu\nu}(t, u)]_{2n \times 2n}$; $u = (u^1, u^2, \dots, u^{2n})^T$ — неизвестная вектор-функция; $E(t, u) = (E_1(t, u), E_2(t, u), \dots, E_{2n}(t, u))^T$; $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{2n}$.

Предположим, что $C_{\mu\nu}(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $E_\mu(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Запишем систему (1.1) в виде

$$A(u) + E(t, u) = 0,$$

¹Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

где A — оператор, определяемый дифференциальными выражением

$$A(u) \equiv C(t, u) \dot{u}(t).$$

Пусть область определения $D(A)$ оператора A состоит из непрерывно дифференцируемых вектор-функций на $(0, l)$ — пространство X , удовлетворяющих граничным условиям (1.2).

Разобьем $[0, l]$ на m равных частей узлами $t_k = k\tau$ ($k = 0, 1, \dots, m$), где $\tau = m^{-1}l$. Введем операторы сужения [1]

$$T_p u(t) = (u^1(t_1), \dots, u^{2n}(t_1), u^1(t_2), \dots, u^{2n}(t_2), \dots, \\ \dots, u^1(t_{m-1}), \dots, u^{2n}(t_{m-1}))^T$$

(столбец высоты $p = 2n(m-1)$). Такие столбцы образуют линейное пространство, которое будем обозначать \bar{X}_p . Для $\bar{u}_p = T_p u(t)$ зададим сферическую норму

$$\|\bar{u}_p\| = \left(\frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} |u_k^\mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

где $u_k^\mu = u^\mu(t_k)$.

Заменим в дифференциальном операторе A

$$C(t, u) \dot{u}(t) \sim \frac{1}{\tau} C^{1,k} (u_{k+1} - u_k) + \frac{1}{\tau} C^{2,k} (u_k - u_{k-1}),$$

где $u_k = u(t_k)$; $C^{1,k} = C^{1,k}(t_k, u_k)$, $C^{2,k} = C^{2,k}(t_k, u_k, u_{k-1})$ — матрицы $[C_{\mu\nu}^{1,k}]_{2n \times 2n}$, $[C_{\mu\nu}^{2,k}]_{2n \times 2n}$, удовлетворяющие равенству $C^{1,k} + C^{2,k} = C(t_k, u(t_k)) + o(\tau)$. Дифференцируемые функции $C_{\mu\nu}^{1,k}$ и $C_{\mu\nu}^{2,k}$ можно выбрать разными способами, например, $C_{\mu\nu}^{1,k} = \gamma_{\mu\nu} C_{\mu\nu}(t_k, u_k)$; $C_{\mu\nu}^{2,k} = \frac{(1-\gamma_{\mu\nu})}{2} (C_{\mu\nu}(t_k, u_k) + C_{\mu\nu}(t_k, u_{k-1}))$, а $\gamma_{\mu\nu}$ — некоторое число из $[0, 1]$.

Тогда можем записать в \bar{X}_p следующую последовательность приближенных задач, или разностную схему:

$$\frac{1}{\tau} C^{1,k} (u_{k+1} - u_k) + \frac{1}{\tau} C^{2,k} (u_k - u_{k-1}) + E^k = 0, k = \overline{1, m-1}; \quad (1.4)$$

$$u_0 = a_1, u_m = a_2. \quad (1.5)$$

Здесь $E^k = E(t_k, u_k)$.

Обозначим

$$N_\mu^k = \sum_{\nu=1}^{2n} \left[\frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{1,k} (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) + \frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{2,k} (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) \right] + E_\mu^k$$

и

$$\bar{N}_p(\bar{u}_p) \equiv (N_1^1, N_1^2, \dots, N_1^{m-1}, N_2^1, \dots, N_{2n}^{m-1})^T.$$

В книге [2] получены необходимые и достаточные условия самосопряженности системы дифференциальных уравнений вида (1.1) с непрерывным временем, а также разработаны методы приведения этой системы к форме уравнений Биркгофа с непрерывным временем.

В работах [3; 4] получены дискретные аналогии уравнения Биркгофа путем дискретизации пфаффиана. Однако вопрос о необходимых и достаточных условиях потенциальности дискретных систем и построении соответствующих функционалов в литературе, насколько нам известно, пока не исследовался. Рассматриваемые в настоящей статье вопросы восходят к идеям монографии [5].

Для дальнейшего нам понадобится понятие потенциальности дискретного оператора.

2. Критерий потенциальности дискретного оператора

Обозначим через \bar{N}'_p первую производную Гато оператора \bar{N}_p и положим $D(\bar{N}'_p) = \{\bar{u}_p \in \bar{X}_p; u_0 = a_1, u_m = a_2\}$, $D(\bar{N}'_p) = \{\bar{h}_p \in \bar{X}_p; h_0 = h_m = 0\}$.

Определение 2.1. Дискретный оператор $\bar{N}_p : D(\bar{N}_p) \rightarrow \mathbb{R}^p$ называется потенциальным в области $D(\bar{N}_p)$ относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bar{X}_p \times \bar{X}_p \rightarrow \mathbb{R}$, если существует функционал $F_{\bar{N}_p} : \bar{X}_p \rightarrow \mathbb{R}$, такой, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p + \varepsilon \bar{h}_p] - F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p]}{\varepsilon} = \langle \bar{N}_p(\bar{u}_p), \bar{h}_p \rangle, \quad \forall \bar{u}_p \in D(\bar{N}_p), \forall \bar{h}_p \in D(\bar{N}'_p).$$

При этом будем говорить, что система (1.4), (1.5) является потенциальной в области $D(\bar{N}_p)$ относительно заданной билинейной формы, а $F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p]$ — потенциал оператора $\bar{N}_p(\bar{u}_p)$.

Теорема 2.1 (критерий потенциальности оператора). Пусть дифференцируемый по Гато оператор $\bar{N}_p : D(\bar{N}_p) \rightarrow \mathbb{R}^p$ и билинейная форма

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \bar{X}_p \times \bar{X}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

такие, что для любых фиксированных элементов $\bar{u}_p \in D(\bar{N}_p)$, $\bar{h}_p, \bar{g}_p \in D(\bar{N}'_p)$ функция $\varphi(\varepsilon) \equiv \langle \bar{N}_p(\bar{u}_p + \varepsilon \bar{h}_p), \bar{g}_p \rangle \in C^1[0, 1]$. Тогда для потенциальности оператора \bar{N}_p в односвязной области $D(\bar{N}_p)$ относительно заданной билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\langle \bar{N}'_p \bar{h}_p, \bar{g}_p \rangle = \langle \bar{N}'_p \bar{g}_p, \bar{h}_p \rangle. \quad (2.1)$$

При этом

$$F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p] = \int_0^1 \langle \bar{N}_p(\bar{u}_p^0 + \lambda(\bar{u}_p - \bar{u}_p^0)), \bar{u}_p - \bar{u}_p^0 \rangle d\lambda, \quad (2.2)$$

где $\bar{u}_p^0 \in D(\bar{N}_p)$ — фиксированный элемент.

Доказательство можно получить, используя общий критерий потенциальности оператора [6].

Для дальнейшего изложения введем в \bar{X}_p скалярное произведение

$$(\bar{u}_p, \bar{v}_p) = \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu v_k^\mu. \quad (2.3)$$

Теперь \bar{X}_p превращено в евклидово пространство, причем $(\bar{u}_p, \bar{u}_p) = \|\bar{u}_p\|^2$. Сначала найдем первую производную Гато оператора N_μ^k

$$\begin{aligned} (\bar{N}'_p \bar{h}_p)_\mu^k &= \sum_{\nu=1}^{2n} \left\{ \frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{1,k} (h_{k+1}^\nu - h_k^\nu) + \frac{1}{\tau} C_{\mu\nu}^{2,k} (h_k^\nu - h_{k-1}^\nu) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma=1}^{2n} \left[\frac{1}{\tau} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{1,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\tau} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma} h_{k-1}^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) \right] \right\} + \sum_{\sigma=1}^{2n} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{N}'_p \bar{h}_p &= \left((\bar{N}'_p \bar{h}_p)_1^1, (\bar{N}'_p \bar{h}_p)_1^2, \dots, (\bar{N}'_p \bar{h}_p)_1^{m-1}, (\bar{N}'_p \bar{h}_p)_2^1, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, (\bar{N}'_p \bar{h}_p)_{2n}^{m-1} \right)^T. \end{aligned}$$

Используя формулу (2.3), получаем

$$\begin{aligned} (\bar{N}'_p \bar{h}_p, \bar{g}_p) &= \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} (\bar{N}'_p \bar{h}_p)_\mu^k g_k^\mu = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\mu\nu}^{1,k} + W_{\mu\nu\sigma}^{2,k}], \\ (\bar{N}'_p \bar{g}_p, \bar{h}_p) &= \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{2n} (\bar{N}'_p \bar{g}_p)_\mu^k h_k^\mu = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\mu\nu}^{3,k} + W_{\mu\nu\sigma}^{4,k}], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{1,k} &= C_{\mu\nu}^{1,k} (h_{k+1}^\nu - h_k^\nu) g_k^\mu + C_{\mu\nu}^{2,k} (h_k^\nu - h_{k-1}^\nu) g_k^\mu, \\ W_{\mu\nu\sigma}^{2,k} &= \frac{\partial C_{\mu\nu}^{1,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) g_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) g_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma} h_{k-1}^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) g_k^\mu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\sigma} h_k^\sigma g_k^\mu, \\ W_{\mu\nu}^{3,k} &= C_{\mu\nu}^{1,k} (g_{k+1}^\nu - g_k^\nu) h_k^\mu + C_{\mu\nu}^{2,k} (g_k^\nu - g_{k-1}^\nu) h_k^\mu, \\ W_{\mu\nu\sigma}^{4,k} &= \frac{\partial C_{\mu\nu}^{1,k}}{\partial u_k^\sigma} g_k^\sigma (u_{k+1}^\nu - u_k^\nu) h_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_k^\sigma} g_k^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) h_k^\mu + \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma} g_{k-1}^\sigma (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) h_k^\mu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\sigma} g_k^\sigma h_k^\mu. \end{aligned}$$

Здесь \bar{h}_p, \bar{g}_p — произвольные элементы из $D(\bar{N}'_p)$. Поскольку

$$W_{\mu\nu}^{1,k} = W_{\nu\mu}^{1,k}, \quad W_{\mu\nu\sigma}^2 = W_{\nu\sigma\mu}^2, \quad W_{\mu\nu}^{4,k} = W_{\mu\nu\sigma}^{4,k},$$

ТО

$$\begin{aligned} (\overline{N}'_p \overline{h}_p, \overline{g}_p) &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\nu\mu}^{1,k} + W_{\nu\sigma\mu}^{2,k}] = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} \left[C_{\nu\mu}^{1,k} (h_{k+1}^\mu - h_k^\mu) g_k^\nu + C_{\nu\mu}^{2,k} (h_k^\mu - h_{k-1}^\mu) g_k^\nu + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\mu} h_k^\mu (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) g_k^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} h_k^\mu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) g_k^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\mu} h_{k-1}^\mu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) g_k^\nu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\mu} h_k^\mu g_k^\nu \right], \\ (\overline{N}'_p \overline{g}_p, \overline{h}_p) &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} [W_{\mu\nu}^{3,k} + W_{\mu\sigma\nu}^{4,k}] = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu, \sigma=1}^{2n} h_k^\mu \left[C_{\mu\nu}^{1,k} (g_{k+1}^\nu - g_k^\nu) + C_{\mu\nu}^{2,k} (g_k^\nu - g_{k-1}^\nu) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\nu} g_{k-1}^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu \right]. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности элементов h_k^μ из критерия потенциальности (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[C_{\nu\mu}^{1,k-1} g_{k-1}^\nu - C_{\nu\mu}^{1,k} g_k^\nu + C_{\nu\mu}^{2,k} g_k^\nu - C_{\nu\mu}^{2,k+1} g_{k+1}^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\mu} (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) g_k^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) g_k^\nu + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k+1}}{\partial u_k^\mu} (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) g_{k+1}^\nu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\nu^k}{\partial u_k^\mu} g_k^\nu \right] = \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[C_{\mu\nu}^{1,k} (g_{k+1}^\nu - g_k^\nu) + C_{\mu\nu}^{2,k} (g_k^\nu - g_{k-1}^\nu) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_{k+1}^\sigma - u_k^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\nu} g_{k-1}^\nu (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\nu} g_k^\nu \right], \\ & k = \overline{2, m-2}, \mu = \overline{1, 2n}, \\ \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[-C_{\nu\mu}^{1,1} g_1^\nu + C_{\nu\mu}^{2,1} g_1^\nu - C_{\nu\mu}^{2,2} g_2^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,1}}{\partial u_1^\mu} (u_2^\sigma - u_1^\sigma) g_1^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,1}}{\partial u_1^\mu} (u_1^\sigma - u_0^\sigma) g_1^\nu + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,2}}{\partial u_1^\mu} (u_2^\sigma - u_1^\sigma) g_2^\nu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\nu^1}{\partial u_1^\mu} g_1^\nu \right] = \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[C_{\mu\nu}^{1,1} (g_2^\nu - g_1^\nu) + C_{\mu\nu}^{2,1} g_1^\nu + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,1}}{\partial u_1^\nu} g_1^\nu (u_2^\sigma - u_1^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,1}}{\partial u_1^\nu} g_1^\nu (u_1^\sigma - u_0^\sigma) + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^1}{\partial u_1^\nu} g_1^\nu \right], \mu = \overline{1, 2n}, \\ \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[C_{\nu\mu}^{1,m-2} g_{m-2}^\nu - C_{\nu\mu}^{1,m-1} g_{m-1}^\nu + C_{\nu\mu}^{2,m-1} g_{m-1}^\nu + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,m-1}}{\partial u_{m-1}^\mu} (u_m^\sigma - u_{m-1}^\sigma) g_{m-1}^\nu + \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,m-1}}{\partial u_{m-1}^\mu} (u_{m-1}^\sigma - u_{m-2}^\sigma) g_{m-1}^\nu + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\nu^{m-1}}{\partial u_{m-1}^\mu} g_{m-1}^\nu \right] = \\ &= \sum_{\nu, \sigma=1}^{2n} \left[-C_{\mu\nu}^{1,m-1} g_{m-1}^\nu + C_{\mu\nu}^{2,m-1} (g_{m-1}^\nu - g_{m-2}^\nu) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,m-1}}{\partial u_{m-1}^\nu} g_{m-1}^\nu (u_m^\sigma - u_{m-1}^\sigma) + \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,m-1}}{\partial u_{m-1}^\nu} g_{m-1}^\nu (u_{m-1}^\sigma - u_{m-2}^\sigma) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,m-1}}{\partial u_{m-2}^\nu} g_{m-2}^\nu (u_{m-1}^\sigma - u_{m-2}^\sigma) + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^{m-1}}{\partial u_{m-1}^\nu} g_{m-1}^\nu \right], \mu = \overline{1, 2n}. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности элементов g_k^ν отсюда находим условия

$$C_{\nu\mu}^{1,k-1} + C_{\mu\nu}^{2,k} = \sum_{\sigma=1}^{2n} \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\mu} (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) \quad (k = \overline{2, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} -C_{\nu\mu}^{1,k} + C_{\nu\mu}^{2,k} + C_{\mu\nu}^{1,k} - C_{\mu\nu}^{2,k} + \frac{l}{m} \frac{\partial E_\nu^k}{\partial u_k^\mu} - \frac{l}{m} \frac{\partial E_\mu^k}{\partial u_k^\nu} = \\ = \sum_{\sigma=1}^{2n} \left[\left(\frac{\partial C_{\mu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} - \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{2,k}}{\partial u_k^\mu} \right) (u_k^\sigma - u_{k-1}^\sigma) \right] \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2n} \left(\frac{\partial C_{\mu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\mu} - \frac{\partial C_{\nu\sigma}^{1,k}}{\partial u_k^\mu} \right) = 0 \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}). \quad (2.6)$$

Таким образом, выше доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. Система (1.4) является потенциальной в области $D(\bar{N}_p)$ относительно билинейной формы (2.3) тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.4) – (2.6).

Остается вопрос построения функционала – потенциала оператора \bar{N}_p – аналога действия по Гамильтону.

3. Построение действия по Гамильтону

При выполнении условий (2.4) – (2.6) искомый функционал $F_{\bar{N}_p}$ может быть построен по формуле (2.2). К этому вопросу можно подойти по-другому. Ищем потенциал оператора \bar{N}_p в виде

$$F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p] = \frac{l}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{\nu=1}^{2n} R_{\nu}^k \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} - B^k \right), \quad (3.1)$$

где $R_{\nu}(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\nu = \overline{1, 2n}$), $B(t, u) : [0, l] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ – неизвестные непрерывно дифференцируемые функции, а $R_{\nu}^k = R_{\nu}(t_k, u_k)$, $R^k = (R_1^k, R_2^k, \dots, R_{2n}^k)$, $B^k = B(t_k, u_k)$ ($k = \overline{1, m-1}$).

Из определения потенциальности имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p + \varepsilon \bar{h}_p] - F_{\bar{N}_p}[\bar{u}_p]}{\varepsilon} &= \frac{l}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} h_k^{\mu} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} + R_{\nu}^k \frac{h_{k+1}^{\nu} - h_k^{\nu}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} h_k^{\mu} \right) = \\ &= \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} - \frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} \right) h_k^{\mu} = \\ &= (\bar{N}_m(\bar{u}_m), \bar{h}_m) = \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \left(C_{\mu\nu}^{1,k} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} + C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k \right) h_k^{\mu}. \end{aligned}$$

Считая, что элементы h_k^{μ} произвольные, отсюда получаем

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} - \frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} = \sum_{\nu=1}^{2n} \left(C_{\mu\nu}^{1,k} \frac{u_{k+1}^{\nu} - u_k^{\nu}}{\tau} + C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} \right) + E_{\mu}^k \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu = \overline{1, 2n}). \quad (3.2)$$

Сравнивая левую и правую части тождеств (3.2), находим

$$C_{\mu\nu}^{1,k} = \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}} \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu, \nu = \overline{1, 2n}), \quad (3.3)$$

$$-\frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} = \sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu = \overline{1, 2n}). \quad (3.4)$$

Если существуют функции R_{μ}^k , удовлетворяющие этим условиям, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} \left(-\frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} \right) &= \frac{\partial R_{\mu}^{k-1}}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} \left(\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k \right) = -\frac{1}{\tau} C_{\mu\sigma}^{2,k} + \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau}. \end{aligned}$$

В силу условий (2.4) имеем

$$-C_{\mu\sigma}^{2,k} + \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^{\sigma}} (u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}) = C_{\sigma\mu}^{1,k-1}.$$

Таким образом, получаем $C_{\mu\nu}^{1,k} = \frac{\partial R_{\nu}^k}{\partial u_k^{\mu}}$. Значит, условия (3.3) являются следствием условий (3.4).

Итак, чтобы определить функции R^k , B^k , нужно решить следующую систему уравнений:

$$-\frac{R_{\mu}^k - R_{\mu}^{k-1}}{\tau} - \frac{\partial B^k}{\partial u_k^{\mu}} = \sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} \frac{u_k^{\nu} - u_{k-1}^{\nu}}{\tau} + E_{\mu}^k, \quad (k = \overline{1, m-1}, \mu = \overline{1, 2n}).$$

Укажем некоторые частные случаи, для которых можно решить эти уравнения относительно R^k , B^k .

- Пусть существуют функции $\Phi_\mu^1(t_k, u_k), \Phi_\mu^2(t_k, u_k)$ такие, что

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) = \Phi_\mu^1(t_k, u_k) + \Phi_\mu^2(t_{k-1}, u_{k-1}).$$

Тогда

$$\begin{cases} R_\mu^k = \Phi_\mu^2(t_k, u_k), \mu = \overline{1, 2n}, \\ B^k = -\sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu \int_0^1 \left[E_\mu^k(t_k, \lambda u_k) + \frac{\Phi_\mu^1(k, \lambda u_k) + \Phi_\mu^2(k, \lambda u_k)}{\tau} \right] d\lambda. \end{cases}$$

- Пусть $C_{\mu\nu}^{2,k}$ зависят только от k . Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k} (u_k^\nu - u_{k-1}^\nu) = \sum_{\nu=1}^{2n} \left[(C_{\mu\nu}^{2,k+1} u_k^\nu - C_{\mu\nu}^{2,k} u_{k-1}^\nu) - u_k^\nu (C_{\mu\nu}^{2,k+1} - C_{\mu\nu}^{2,k}) \right].$$

Получаем

$$\begin{cases} R_\mu^k = -\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k+1} u_k^\nu, \mu = \overline{1, 2n}, \\ B^k = -\sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu \int_0^1 \left[E_\mu^k(t_k, \lambda u_k) - \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda u_k^\nu \frac{C_{\mu\nu}^{2,k+1} - C_{\mu\nu}^{2,k}}{\tau} \right] d\lambda. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к действию по Гамильтону $F_{\overline{N}_p}$.

4. Пример

Рассмотрим систему уравнений движения точки единичной массы в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости [7]

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Ky^2 \\ -y \end{pmatrix} = 0, \\ (x(0), y(0)) = (\phi_1, \phi_2), \\ (x(1), y(1)) = (\phi_3, \phi_4), \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\dot{x} = y$ скорость частицы, K – постоянный коэффициент.

Запишем разностную схему этой системы

$$\begin{aligned} \overline{N}_p(\overline{u}_p) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau} \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y_k}{y_{k-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_k-x_{k-1}}{\tau} \\ \frac{y_k-y_{k-1}}{\tau} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -Ky_k^2 \\ -y_k \end{pmatrix} = 0, \\ u_0 = (\phi_1, \phi_2)^T, u_m = (\phi_3, \phi_4)^T, \end{aligned}$$

где $u_k = (x_k, y_k)^T$.

Поскольку

$$C_{12}^{1,k-1} + C_{21}^{2,k} \neq \frac{\partial C_{11}^{2,k}}{\partial y_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) + \frac{\partial C_{12}^{2,k}}{\partial y_{k-1}} (y_k - y_{k-1}),$$

то разностная схема непотенциальная.

С помощью условий (2.4) – (2.6) можно найти матричный вариационный множитель

$$M_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_k^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_k} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M_k \overline{N}_p(\overline{u}_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y_k^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau} \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y_k y_{k-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_k-x_{k-1}}{\tau} \\ \frac{y_k-y_{k-1}}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K \\ -\frac{1}{y_k} \end{pmatrix},$$

потенциальный оператор и

$$\begin{cases} R_1^k - R_1^{k-1} = \frac{1}{y_k y_{k-1}} (y_k - y_{k-1}) = -\frac{1}{y_k} + \frac{1}{y_{k-1}} \Rightarrow R_1^k = -\frac{1}{y_k}, \\ R_2^k - R_2^{k-1} = 0 \Rightarrow R_2^k = 0, \\ \frac{\partial B^k}{\partial x_k} + \frac{\partial B^k}{\partial y_k} = K + \frac{1}{y_k} \Rightarrow B^k = Kx_k + \ln y_k. \end{cases}$$

Искомый функционал равен

$$F_{M_k \bar{N}_p} [\bar{u}_p] = -\frac{l}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau y_k} + K x_k + \ln y_k \right).$$

В случае непрерывного времени он имеет вид [7]

$$J = -\int_0^1 \left(\frac{1}{2y} \dot{x} + \frac{x}{2y^2} \dot{y} + Kx + \ln y \right) dt.$$

Обозначим

- $\bar{u}_p^1 = (\bar{x}_p^1, \bar{y}_p^1)^T$ – точное решение задачи (4.1),
- $\bar{u}_p^2 = (\bar{x}_p^2, \bar{y}_p^2)^T$ – решение, полученное при переходе к вариационному множителю и дальнейшей дискретизации функционала,
- $\bar{u}_p^3 = (\bar{x}_p^3, \bar{y}_p^3)^T$ – решение, полученное при прямом использовании метода Рунге – Кутты.

Для оценки погрешности решений \bar{u}_p^i ($i = 2, 3$) используем норму $\|\bar{u}_p^i - \bar{u}_p^1\|$ по формуле (1.3).

Положим $m = 4, K = 1, u_0 = (0, 1)^T, u_m = (\frac{1}{2}, \ln 2)^T$, находим

$$u^1(t_k) = \left(\ln(1 + t_k), \frac{1}{1 + t_k} \right)^T.$$

С помощью Matlab получаем таблицу значений и графики вышеперечисленных решений (рис. 4.1, 4.2).

Значения решений в точках и погрешности решений

Таблица

Table

Solution values at points and solution errors

Решение	$k = 1 (t = 0, 25)$	$k = 2 (t = 0, 5)$	$k = 3 (t = 0, 75)$	Погрешность
\bar{u}_6^1	$\begin{pmatrix} 0, 2231 \\ 0, 8000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 4055 \\ 0, 6667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 5596 \\ 0, 5714 \end{pmatrix}$	0
\bar{u}_6^2	$\begin{pmatrix} 0, 2000 \\ 0, 8333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 3667 \\ 0, 7143 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 5095 \\ 0, 6250 \end{pmatrix}$	0, 0329
\bar{u}_6^3	$\begin{pmatrix} 0, 1800 \\ 0, 7867 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 3248 \\ 0, 6528 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 4467 \\ 0, 5597 \end{pmatrix}$	0, 0418

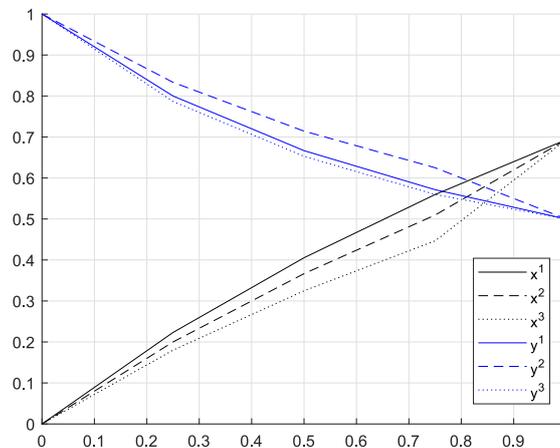


Рис. 4.1. Графики решений $\bar{u}_6^1, \bar{u}_6^2, \bar{u}_6^3$
 Fig. 4.1. Graph of solutions $\bar{u}_6^1, \bar{u}_6^2, \bar{u}_6^3$

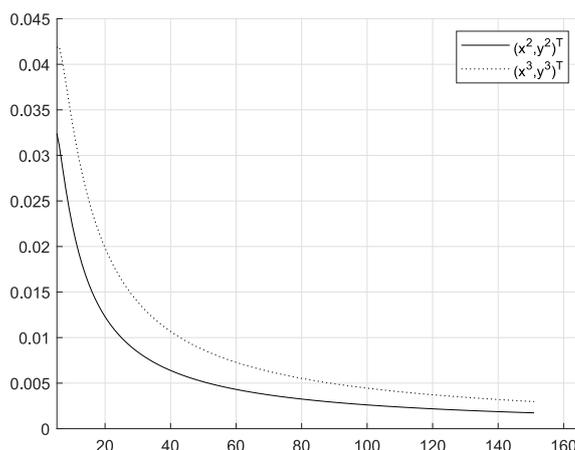


Рис. 4.2. Зависимость погрешности от количества узлов m
Fig. 4.2. Dependence of the error on the number of nodes m

Выводы

Получены разностные уравнения, соответствующие системе вида $C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0$ с непрерывным временем. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности рассматриваемой разностной системы относительно заданной билинейной формы. Представлен алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону. Дан иллюстрирующий пример.

Литература

- [1] Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник. 3-е изд. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 с. URL: <https://booksee.org/book/443580>.
- [2] Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983. 371 p. URL: <http://www.santilli-foundation.org/docs/santilli-69.pdf>.
- [3] Kong X., Wu H., Mei F. Discrete optimal control for Birkhoffian systems // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 74. pp. 711–719. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11071-013-0999-0>.
- [4] Zhang H., Chen L., Gu S., Liu C. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems // Chinese Physics. 2007. Vol. 16, № 3. pp. 582–587. DOI: <http://doi.org/10.1088/1009-1963/16/3/004>.
- [5] Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1992. Т. 40 С. 3–176. URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/intd/v40/p3>.
- [6] Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. Москва: РУДН, 1991. 237 с.
- [7] Галлиулин А.С., Гафаров Г.Г., Малайшка Р.П., Хван А.М. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. Москва: Редакция ж-ла УФН, 1997. 324 с.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82

Submitted: 27.09.2021

Revised: 28.10.2021

Accepted: 15.11.2021

V.M. Savchin

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation
E-mail: savchin-vm@rudn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3850-6747>

P.T. Trinh

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation
E-mail: tr.phuoc@oan@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7707-322X>

ON DISCRETE SYSTEMS WITH POTENTIAL OPERATORS²

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the potentiality of a discrete system obtained from the system of the form $C(t, u)\dot{u}(t) + E(t, u) = 0$ with continuous time. The definition of potentiality of the corresponding discrete system is introduced. Necessary and sufficient conditions for its potentiality with respect to a given bilinear form are obtained. The algorithm for the construction of the corresponding functional—the analogue of the Hamiltonian action—is presented. The illustrative example is given.

Key words: potential operators; discrete systems.

Citation. Savchin V.M., Trinh P.T. On discrete systems with potential operators. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 74–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Savchin V.M., 2021

Vladimir M. Savchin— professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, S.M. Nikolskii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation.

© Trinh P.T., 2021

Phuoc T. Trinh— PhD student, S.M. Nikolskii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation.

References

- [1] Trenogin V.A. Functional Analysis: textbook. 3rd edition. Moscow: FIZMATLIT, 2002, 488 p. Available at: <https://booksee.org/book/443580>. (In Russ.)
- [2] Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983, 371 p. Available at: <http://www.santilli-foundation.org/docs/santilli-69.pdf>.
- [3] Kong X., Wu H., Mei F. Discrete optimal control for Birkhoffian systems. *Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 74, pp. 711–719. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11071-013-0999-0>.
- [4] Zhang H., Chen L., Gu S., Liu C. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems. *Chinese Physics*, 2007, vol. 16, no. 3, pp. 582–587. DOI: <http://doi.org/10.1088/1009-1963/16/3/004>.
- [5] Filippov V.M., Savchin V.M., Shorokhov S.G. Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 1994, vol. 68, no. 3, pp. 275–398. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01252319>. (English; Russian original)
- [6] Savchin V.M. Mathematical methods in mechanics of infinite dimensional nonpotential systems. Moscow: RUDN, 1991, 237 p. (In Russ.)
- [7] Galiullin A.S., Gafarov G.G., Malaishka R.P., Khwan A.M. Analytical dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu systems. Moscow: Redaktsiya zh-la UFN, 1997, 324 p. (In Russ.)

²This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-83-88

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 23.09.2021
после рецензирования: 27.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

М.А. Сметанников

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ssmetannikoff@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ ЭНЗИМНОЙ КИНЕТИКИ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В ЗАДАЧЕ СУИЦИДНОГО СУБСТРАТА

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматривается пример кооперативного явления, субстрат в котором известен как субстрат «смертника», или суицидный субстрат, потому что он связывается с активным ферментом как субстрат, но фермент превращает его в ингибитор, который необратимо инактивирует фермент. Таким образом, фермент «совершает самоубийство». Цель работы состоит в применении метода интегральных многообразий к редукции системы кинетики суицидного субстрата. В данной статье приводятся результаты применения методов декомпозиции и интегральных многообразий к системам кинетики суицидного субстрата и сравнения решений исходной и конечной систем. Сравнения решений для четырех уравнений приводятся графически, графики созданы посредством программы Microsoft Excel.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; метод декомпозиции; интегральное многообразие; кооперативное явление; энзимная кинетика; суицидный субстрат.

Цитирование. Сметанников М.А. Декомпозиция систем энзимной кинетики с быстрыми и медленными переменными в задаче суицидного субстрата // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 83–88. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-83-88>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Сметанников М.А., 2021

Михаил Андреевич Сметанников — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Среди главных инструментов прикладного анализа особая роль отводится методам возмущений, идея которых заключается в выделении основной и детализирующей структур сложной системы. При этом детализирующая структура рассматривается как возмущение основной. Анализ основной структуры сводится к рассмотрению существенно более простых моделей и часто сопровождается понижением размерности модели. Поведение исходной модели изучается путём композиции результатов раздельного исследования основной структуры и детализирующих факторов [1–10]. В моделях химической кинетики наличие малого параметра связано с тем, что в химической системе одновременно происходят резко отличающиеся по скорости процессы. Имеется значительное число публикаций по теории и приложениям как методов упрощения моделей макроскопической кинетики [11–13], так и моделирования крити-

ческих явлений [14–16]. При этом большое разнообразие задач сочетается со сравнительно небольшим арсеналом применяемых средств анализа и довольно распространенным мнением, что эти задачи не имеют ничего общего как по своей постановке, так и по методам решения. Понижение размерности моделей является основным приемом исследования сложных систем любой природы, а критические явления исключительно важны и сами по себе, и как инструмент познания сложных процессов. Авторы книг [1] и [3], основываясь на геометрической теории сингулярных возмущений, предложили подход, позволяющий с единых позиций этой теории рассматривать и методы редукции кинетических систем, и методы математического моделирования критических явлений в таких системах. В энзимной кинетике важность субстратов смертников во многом определяется их возможностью нацелить специфичный фермент на инактивацию. Они особенно полезны при введении лекарственных средств, из соображения о том, что они не вредны в их общей форме и только обозначенный фермент может превратить их в их ингибирующую форму. В качестве примеров их важности субстраты смертников были исследованы для применения при лечении депрессии, эпилепсии и некоторых опухолей.

1. Постановка задачи

Ферментная система [2] включает в себя переменные S, P, E, X и Y , обозначающие субстрат, продукт, ингибитор и промежуточные продукты фермента и субстрата, после обезразмеривания системы сменяющиеся на s, e_i, ξ, ζ .

Исходная система, рассматриваемая в данной статье, имеет вид:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -s((\epsilon p + 1) - \epsilon p \xi - (\epsilon p + 1)\zeta - \frac{(\epsilon p + 1)(\eta - \phi \zeta)}{\psi}) + \frac{\rho}{1 + \rho} \xi, \quad (1.1)$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \frac{p\phi}{(1 + \epsilon p)(1 + \rho)} \xi, \quad (1.2)$$

$$\epsilon \frac{d\xi(t)}{dt} = s((\epsilon p + 1) - \epsilon p \xi - (\epsilon p + 1)\zeta - \frac{(\epsilon p + 1)(\eta - \phi \zeta)}{\psi}) - \xi, \quad (1.3)$$

$$\epsilon \frac{d\zeta(t)}{dt} = \frac{\epsilon p}{(1 + \epsilon p)(1 + \rho)} \xi - \psi \zeta \quad (1.4)$$

с учётом замен:

$$\sigma = \epsilon p,$$

$$\eta = \phi \zeta + \psi e_i.$$

И с начальными условиями:

$$s(0) = 1, \xi(0) = 0, \zeta(0) = 0, e_i(0) = 0.$$

2. Исходная и конечная системы с числовыми коэффициентами

При значениях коэффициентов $\rho = \frac{1}{3}, \sigma = \frac{1}{16}, \psi = \frac{3}{4}, p = 1$ исходная система (1.1)–(1.4) выглядит следующим образом:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -s((\epsilon + 1) - \epsilon \xi - (\epsilon + 1)\zeta - \frac{(\epsilon + 1)(\eta - 0,125\zeta)}{0,75}) + 0,25\xi,$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \frac{0,09375}{(1 + \epsilon)} \xi,$$

$$\epsilon \frac{d\xi(t)}{dt} = s((\epsilon + 1) - \epsilon \xi - (\epsilon + 1)\zeta - \frac{(\epsilon + 1)(\eta - 0,125\zeta)}{0,75}) - \xi,$$

$$\epsilon \frac{d\zeta(t)}{dt} = \frac{0,75\epsilon}{(1 + \epsilon)} \xi - \psi \zeta.$$

Вид системы после применения метода интегральных многообразий:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_1 w_2 - \frac{3}{4} w_1 + \epsilon \left(\frac{5}{6} w_1 w_2 - \frac{13}{16} w_1 + \frac{1}{3} w_1 w_2^2 - \frac{7}{8} w_1^2 w_2 + \frac{21}{32} w_1^2 \right), \\ \dot{w}_2 &= -\frac{1}{8} w_1 w_2 + \frac{3}{32} w_1 + \epsilon \left(\frac{1}{8} w_1 w_2^2 - \frac{3}{16} w_1 w_2 + \frac{9}{128} w_1 + \frac{17}{192} w_1^2 w_2 - \frac{17}{256} w_1^2 \right), \\ \epsilon \dot{z} &= B(w + \epsilon H(t, w, z, \epsilon), t, \epsilon) z. \end{aligned}$$

3. Численное сравнение решений

На рис. 3.1–3.4 приведено численное сравнение решений исходной и конечной систем переменных при значении малого параметра $\epsilon = 0,1$.

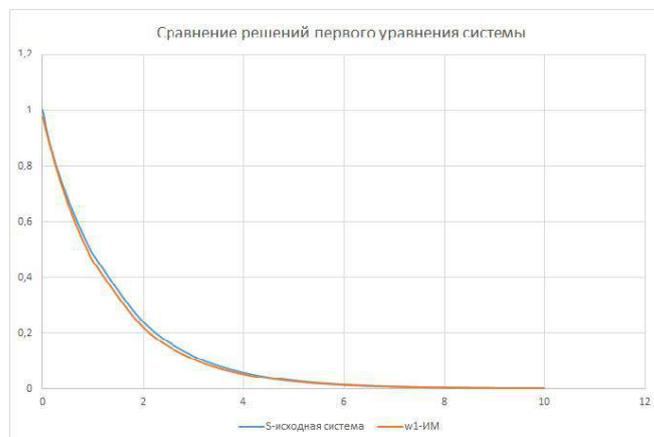


Рис. 3.1. Сравнение решений для первого уравнения задачи до и после построения интегрального многообразия при $\epsilon = 0,1$

Fig. 3.1. Difference between results of the first equation before using and after two methods $\epsilon = 0,1$

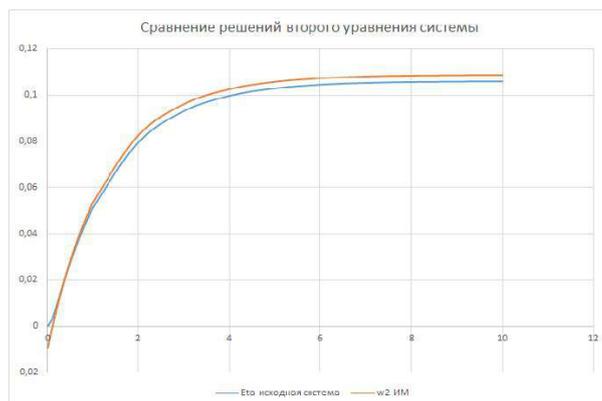


Рис. 3.2. Сравнение решений для второго уравнения задачи до и после построения интегрального многообразия при $\epsilon = 0,1$

Fig. 3.2. Difference between results of the second equation before and after using two methods $\epsilon = 0,1$

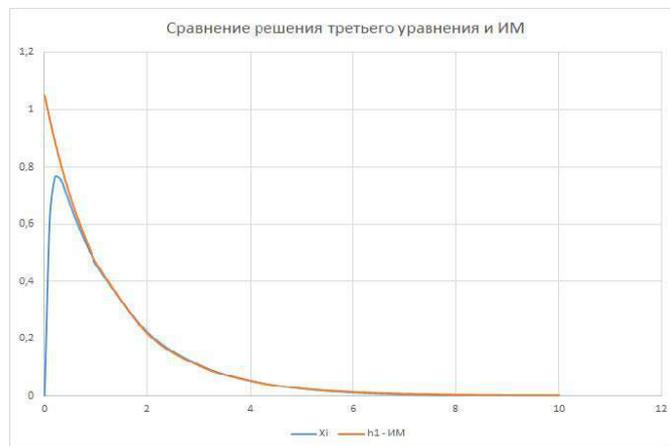


Рис. 3.3. Сравнение решений для третьего уравнения задачи до и после построения интегрального многообразия при $\epsilon = 0,1$

Fig. 3.3. Difference between results of the third equation before and after using two methods $\epsilon = 0,1$

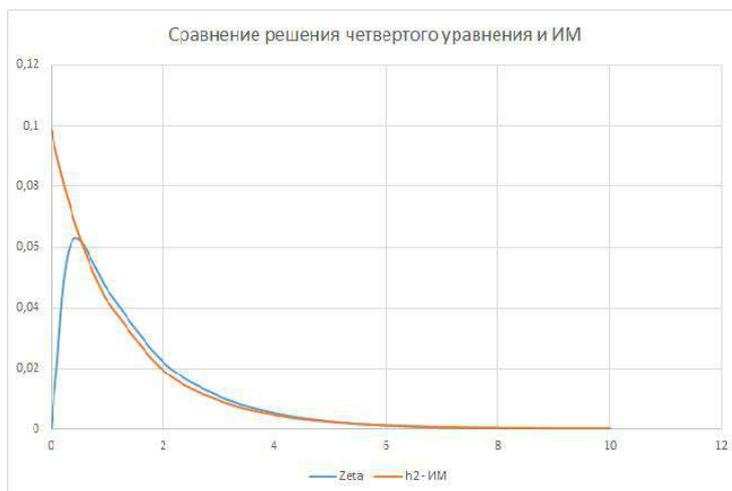


Рис. 3.4. Сравнение решений для четвертого уравнения задачи до и после построения интегрального многообразия при $\epsilon = 0,1$

Fig. 3.4. Difference between results of the fourth equation before and after using two methods $\epsilon = 0,1$

Заключение

В данной статье рассмотрены математические модели задачи динамики суицидного субстрата. К представленной в безразмерной форме математической модели применяется метод интегральных многообразий, существенно упрощающий сложность вычислительных операций. Сравнение численных решений исходной задачи и задачи пониженной размерности при значении малого параметра $\epsilon = 0,1$ приводится графически.

Литература

- [1] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. Москва: ФИЗМАЛИТ, 2010. 320 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://elibrary.ru/ryrtfh>.
- [2] Murray J.D. Mathematical Biology I. An Introduction. New York: Springer, 2001. 551 p. URL: <https://booksee.org/book/1008393>.
- [3] Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. Москва: ФИЗМАЛИТ, 2009. 256 с. URL: <https://booksee.org/book/1500476>.
- [4] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. Москва: Наука, 1988. 256 с. URL: <https://booksee.org/book/483890>.
- [5] Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР, Сиб. отд-ние, 1988. 154 с.
- [6] Щепакина Е.А. Интегральные многообразия, траектории-утки и тепловой взрыв // Вестник Самарского гос. университета. 1995. Спец. вып.
- [7] Shchpakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, vol. 44, issue 7, pp. 897–908. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](http://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [8] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system // Systems & Control Letters. 1984. Vol. 5, Issue 3, pp. 169–179. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(84\)80099-7](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7).
- [9] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. Москва: Наука, 1973. URL: <https://booksee.org/book/789024>.
- [10] Knobloch H.-W., Aulbach B. Singular perturbations and integral manifolds // J. Math. Sci. 1984. V. 18. No. 5.
- [11] Seiler N., Jung M.J., Koch-Weser J. Enzyme-activated Irreversible Inhibitors. Elsevier/North-Holland, Oxford, 1978.
- [12] Walsh C.T. Suicide substrates, mechanism-based enzyme inactivators: recent developments // Annu. Rev. Biochem., 1984. Vol. 53. P. 493–535. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev.bi.53.070184.002425>.
- [13] Berding C., Keymer A.E., Murray J.D., Slater A.F.G. The population dynamics of acquired immunity to helminth infections // J. Theor. Biol., 1986. Vol. 122. Issue 4. P. 459–471. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0022-5193\(86\)80186-2](https://doi.org/10.1016/s0022-5193(86)80186-2).

- [14] Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. Москва: Магистр, 1998. 658 с.
- [15] Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г. Структурные преобразования и пространственная декомпозиция дискретных регулируемых систем – метод квазиразщепления // Техн. кибернетика. 1986. № 6. С. 118–128.
- [16] Коровин С.К., Мамедов И.Г., Мамедова А.П. Равномерная по малому параметру устойчивость и стабилизация дискретных сингулярно возмущенных динамических систем // Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 21–29.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-83-88

Submitted: 23.09.2021

Revised: 27.10.2021

Accepted: 15.11.2021

M.A. Smetannikov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: ssmetannikoff@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

DECOMPOSITION OF ENZYME KINETICS SYSTEM WITH FAST AND SLOW VARIABLES IN SUICIDE SUBSTRATE PROBLEM

ABSTRACT

In this paper an example of cooperative phenomenon, in which the substrate is known as suicide substrate, because it binds to the active enzyme as a substrate, inactivates because enzyme turns it into an inhibitor and provides an irreversible reaction is considered. In this case the substrate “commits suicide”. The aim of the work is to apply the method of integral manifolds to the reduction of the system of kinetics of suicide substrate. Work describes in detail the rationale for the decomposition algorithm of the enzyme kinetics problem for dynamical systems with fast and slow variables and the construction of integral manifolds for such systems, this article presents the results of applying the above methods to systems of the suicide substrate kinetics and compares solutions for four equations graphically. Comparisons of solutions for four equations are given graphically, the graphs are created using Microsoft Excel.

Key words: differential equations; decomposition method; integral manifolds; cooperative phenomenon; enzyme kinetics; suicide substrate.

Citation. Smetannikov M.A. Decomposition of enzyme kinetics system with fast and slow variables in suicide substrate problem. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 83–88. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-83-88>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Smetannikov M.A., 2021

Mikhail A. Smetannikov — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Model reduction and critical phenomena in macrokinetics. Moscow: FIZMATLIT, 2010, 320 p. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://elibrary.ru/ryrtfh>. (In Russ.)
- [2] Murray J.D. Mathematical Biology I. An Introduction. Springer. New York, 2001. - 551 p. Available at: <https://booksee.org/book/1008393>.
- [3] Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometric decomposition of singularly perturbed systems. Moscow: FIZMATLIT, 2009, 256 p. Available at: <https://booksee.org/book/1500476>. (In Russ.)
- [4] Strygin V.V., Sobolev V.A. Separation of motions by the method of integral manifolds. Moscow: Nauka, 1988, 256 p. Available at: <https://booksee.org/book/483890>. (In Russ.)

- [5] Goldshtein V.M., Sobolev V.A. Qualitative analysis of singularly perturbed systems. Novosibirsk: In-t matematiki AN SSSR, Sib. otd-nie, 1988, 154 p. (In Russ.)
- [6] Shchepakina E.A. Integral manifolds, duck trajectories and heat explosion. *Vestnik of Samara State University*, 1995, special issue. (In Russ.)
- [7] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2001, vol. 44, issue 7, pp. 897–908. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [8] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system. *Systems & Control Letters*, 1984, vol. 5, issue 3, pp. 169–179. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(84\)80099-7](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7).
- [9] Mitropolskiy U.A., Lykova O.B. Integral manifolds in nonlinear mechanics. Moscow: Nauka, 1973. Available at: <https://booksee.org/book/789024> (In Russ.)
- [10] Knobloch H.-W., Aulbach B. Singular perturbations and integral manifolds. *J. Math. Phys. Sci.*, 1984, vol. 18, no. 5, pp. 415–424.
- [11] Seiler N., Jung M.J., Koch-Weser J. Enzyme-activated Irreversible Inhibitors. Oxford: Elsevier/North-Holland, 1978.
- [12] Walsh C.T. Suicide substrates, mechanism-based enzyme inactivators: recent developments. *Annu. Rev. Biochem.*, 1984, vol. 53, pp. 493–535. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev.bi.53.070184.002425>.
- [13] Berding C., Keymer A.E., Murray J.D., Slater A.F.G. The population dynamics of acquired immunity to helminth infections. *Journal of Theoretical Biology*, 1986, vol. 122, issue 4, pp. 459–471. DOI: [http://doi.org/10.1016/s0022-5193\(86\)80186-2](http://doi.org/10.1016/s0022-5193(86)80186-2).
- [14] Bobylev N.A., Emelyanov S.V., Korovin S.K. Geometric methods in variational problems. Moscow: Magistr, 1998, 658 p. (In Russ.)
- [15] Emelyanov S.V., Korovin S.K., Mamedov I.V. Structural transformations and spatial decomposition of discrete controlled systems – quasi-splitting method. *Tekhn. kibernetika*, 1986, no. 6, pp. 118–128. (In Russ.)
- [16] Korovin S.K., Mamedov I.G., Mamedova A.P. Uniform stability with respect to a small parameter and stabilization of discrete singularly perturbed dynamical systems. *Tekhn. kibernetika*, 1989, no. 1, pp. 21–29. (In Russ.)

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru> <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронная (e-mail: nsvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы L^AT_EX₂_ε с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций T_EX'a крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами L^AT_EX'a. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("--")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала