

Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

- *Математика*
- *Механика*

ТОМ 26 • № 2 • 2020 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ
Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, член-корреспондент РАН, д-р тех. наук, проф., научный руководитель Самарского университета, главный научный сотрудник института акустики машин, зав. кафедрой автоматических систем энергетических установок (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики, зам. директора Межвузовского научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению (Самара, Самарский университет, РФ)

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.И. Кузнецовой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Адрес редакции: 443011, Российская

Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге

АО Агентство «Роспечать» 80307

ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 27.06.2020.

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 9.

Тираж 200 экз. (первый завод — 30 экз.). Заказ №

Центр периодических изданий Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара,

Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара,

Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самара, Самарский университет, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Саранск, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, РФ)

В.В. Иважнич, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самара, Самарский университет, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет, РФ)

Константин Панкрашжин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Орсе, Университет Париж-юг 11, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самара, Самарский университет, РФ)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики твердого тела и неравновесных систем (Самара, Самарский университет, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Милан, Миланский университет, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самара, Самарский университет, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Ханты-Мансийск, Югорский государственный университет, РФ; Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Саранск, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самара, Самарский университет, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самара, Самарский университет, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольск-на-Амуре, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, РФ)

© Самарский университет, 2020

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mechanics*

VOL. 26 • № 2 • 2020

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E.V. Shakhmatov, corresponding member of the RAS, Dr. of Science (Engineering), prof., scientific adviser of Samara National Research University, chief researcher of Machine Acoustics Institute, head of Department of Power Plant Automatic Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., professor of Department of General and Theoretical Physics, deputy director of Samara Center for Theoretical Materials Science (Samara, Samara National Research University, RF)

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, Russian Federation)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.I. Kuznetsova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Address of editorial staff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

E-mail: nsvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС 77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

**Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525**

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 27.06.2020.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 9.

Circulation 200 copies (first printing – 30 copies).

Order №

Centre of Periodical Publications of Samara University

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Russian Federation.

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm, Perm National Research Polytechnic University, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara, Samara National Research University, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Saransk, Ogarev Mordovia National University, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara, Samara National Research University, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (Orsay, University of Paris-Sud 11, France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara, Samara National Research University, RF)

A.V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Solid-State Physics and Nonequilibrium Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (Milan, University of Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara, Samara National University, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Khanty-Mansiysk, Yugra State University, RF; Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Saransk, Ogarev Mordovia National Research University, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Physics (Samara, Samara National Research University, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Differential Equations and Control Theory, prof. of the Department of Engineering Cybernetics (Samara, Samara National Research University, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov, Saratov State University, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-on-Amur, Komsomolsk-na-Amure State University, RF)

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Геккиева С.Х., Кармоков М.М., Керефов М.А. Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера	7
Киричек В.А. О гладкости решения одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения	15
Цветов В.П. Фрактальные группоиды и криптография с открытым ключом	23

Механика

Белякова Т.А., Гончаров И.А. Влияние микроструктуры металлического сплава на распределение толщины в круглой пластине при сверхпластической формовке давлением	50
Элекина Е.Н., Вронская Е.С. Динамическая задача для тонкостенного стержня моносимметричного профиля	63
<i>Требования к оформлению статей</i>	70

CONTENTS

Mathematics

Gekkieva S.Kh., Karmokov M.M., Kerefov M.A. On boundary value problem for generalized aller equation	7
Kirichek V.A. On smoothness of solution of one nonlocal problem for hyperbolic equation	15
Tsvetov V.P. Fractal magmas and public-key cryptography	23

Mechanics

Beliakova T.A., Goncharov I.A. The effect of metal alloy microstructure on the thickness distribution in the circular plate under the superplastic blow-forming.	50
Elekina E.N., Vronskaja E.S. Dynamic problem for a thin-walled bar with a monosymmetric profile	63
<i>Requirements to the design of articles</i>	70

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 4.03.2020
после рецензирования: 18.03.2020
принятия статьи: 25.05.2020

С.Х. Геккиева

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
г. Нальчик, Российская Федерация

E-mail: gekkieva_s@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2135-2115>

М.М. Кармоков

Кабардино-Балкарский государственный университет
имени Х.М. Бербекова

г. Нальчик, Российская Федерация

E-mail: mkarmokov@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5189-6538>

М.А. Керевов

Кабардино-Балкарский государственный университет
имени Х.М. Бербекова

г. Нальчик, Российская Федерация

E-mail: kerefov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7442-5402>

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

АННОТАЦИЯ

В основе математических моделей процессов фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой и памятью лежат дифференциальные уравнения дробного порядка как по временной, так и по пространственной переменной. Зависимость фрактальной размерности почвы от влажности может существенно влиять на процесс движения влаги в этой капиллярно-пористой среде.

В статье исследуется обобщенное уравнение Аллера, которое широко используется при математическом моделировании процессов, связанных с динамикой влаги и грунтовых вод в почвах с фрактальной организацией.

В качестве математической модели уравнения Аллера с дробными производными Римана – Лиувилля при определенных условиях предлагается нагруженное уравнение дробного порядка, для которого в явном виде выписано решение задачи Гурса.

Ключевые слова: уравнение Аллера, задача Гурса, оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, уравнение влагопереноса, обобщенная формула Ньютона – Лейбница, нагруженное уравнение, уравнение Вольтерра второго рода, свертка Лапласа.

Цитирование. Геккиева С.Х., Кармоков М.М., Керевов М.А. Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 7–14. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © Геккиева Сакинат Хасановна — кандидат физико-математических наук, ученый секретарь, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

© Кармоков Мухамед Мацевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

© Керэфов Марат Асланбиевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Введение

При математическом моделировании различных физических и биологических процессов, связанных с динамикой почвенной влаги и грунтовых вод, широкое применение получило уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right). \quad (1)$$

Уравнение Аллера (1) принято называть уравнением псевдопараболического типа, хотя оно является уравнением гиперболического типа. При различных краевых условиях псевдопараболическим уравнениям и уравнению (1), в частности, посвящено много работ, например [1–10].

Входящее в уравнение (1) выражение

$$\Pi(x, y) = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

как правило, интерпретируется как поток влаги $u(x, y)$, протекающий в одномерной среде $0 \leq x \leq l$ во все моменты времени y от начального $y = 0$ до расчетного $y = T$; $a = const > 0$, $b = const \geq 0$.

Если известен поток влаги на поверхности почвы $x = 0$:

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \Big|_{x=0} = f(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

то уравнение (1) можно заменить нагруженным уравнением гиперболического типа, [3, с. 60]:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x u(\xi, y) d\xi + f(y). \quad (2)$$

Предложенный А.М. Нахушевым в работе [11] метод редукции к нагруженным интегро-дифференциальным уравнениям, является одним из эффективных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений. В связи с этим вызывает интерес постановка и исследование проблемно ориентированных краевых задач для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений [3].

В работе [12] доказаны существование и единственность решения задачи Гурса и нелокальной краевой задачи для уравнения, частным случаем которого является уравнение (1). Там же доказана однозначная разрешимость задачи Гурса для нагруженного гиперболического уравнения с характеристическим вырождением порядка при $x = 0$.

Для уравнения (2) при $b \neq 0$ в работе [9] выписано решение задачи Гурса в явном виде, там же можно посмотреть библиографию работ по краевым задачам для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b D_{0y}^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3)$$

где D_{0t}^ν — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка ν , который определяется следующим образом при $\nu < 0$ [13, с. 9]:

$$D_{at}^\nu g(t) = \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\nu)} \int_a^t \frac{g(\tau) d\tau}{|t-\tau|^{\nu+1}},$$

при $\nu \geq 0$ можно определить рекурсивным соотношением

$$D_{at}^\nu g(t) = \text{sign}(t-a) \frac{d}{dt} D_{at}^{\nu-1} g(t).$$

Уравнение (3) было получено на основе уравнения (1) как пример «качественно нового уравнения влагопереноса», исходя из коллоидной капиллярно-пористой структуры почвы [13, с. 197]. При $\alpha = 1$ это уравнение совпадает с уравнением влагопереноса Аллера (1). Методом Фурье и методом априорных оценок уравнение влагопереноса Аллера с дробной производной Римана – Лиувилля (3) исследовалось в [14, гл. 3]. Единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнения (3) получена в [15].

В работе [16] для более общего уравнения с переменными коэффициентами исследованы локальные и нелокальные краевые задачи, в частности, первая краевая задача, для решения которой получена априорная оценка, из нее следует единственность решения и его устойчивость по правой части и начальному данному. Из последних работ отметим [17], где исследовано нагруженное модифицированное уравнение влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя.

В случае обобщенного уравнения Аллера (3) поток процесса, очевидно, характеризуется выражением $\Pi(x, y) = au_x + bD_{0y}^\alpha u_x$, и при известном потоке $\Pi(0, y) = f(y)$ в точке $x = 0$ для любого момента времени $y \in [0, y]$ уравнение (3) переписывается в виде

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + bD_{0y}^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} = D_{0y}^\alpha \int_0^x u(\xi, y) d\xi + f(y). \quad (4)$$

В данной работе рассматривается задача Гурса для уравнения (4).

1. Основные результаты

Задача 1.1. Найти в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < y \leq T\}$ решение $u(x, t)$ уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) &= \tau(x), \\ u(0, y) &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $b \neq 0$. Введем обозначения $\mu = -\frac{a}{b}$, $h(x, y) = D_{0y}^\alpha \int_0^x u(\xi, y) d\xi + f(y)$, тогда из (4) имеем:

$$D_{0y}^\alpha u_x - \mu u_x = h(x, y). \quad (6)$$

Поддействовав на обе части уравнения (6) оператором дробного интегрирования порядка α с учетом обобщенной формулы Ньютона – Лейбница [18, с. 18], получим

$$u_x - \mu D_{0y}^{-\alpha} u_x = D_{0y}^{-\alpha} h(x, \eta) + \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u_x, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} D_{0y}^{-\alpha} h(x, \eta) &= D_{0y}^{-\alpha} \left[D_{0y}^\alpha \int_0^x u(\xi, y) d\xi + f(y) \right] = \\ &= \int_0^x u(\xi, y) d\xi - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \int_0^x u(\xi, y) d\xi + D_{0y}^{-\alpha} f(y). \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство (7) по x от 0 до x :

$$\begin{aligned} u(x, y) - u(0, y) - \mu D_{0y}^{-\alpha} u(x, y) + \mu D_{0y}^{-\alpha} u(0, y) &= \\ = \int_0^x (x - \xi) u(\xi, y) d\xi - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \int_0^x (x - \xi) u(\xi, y) d\xi + x D_{0y}^{-\alpha} f(y) + \\ + \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(0, y). \end{aligned}$$

С учетом (5) последнее равенство переписывается в виде

$$u(x, y) - \int_0^x (x - \xi) u(\xi, y) d\xi - \mu D_{0y}^{-\alpha} u(x, y) = \gamma(x, y), \quad (8)$$

где

$$\gamma(x, y) = \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(0) + \varphi_0(y) - \mu D_{0y}^{-\alpha} \varphi_0(y) - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \xi) \tau(\xi) d\xi + x D_{0y}^{-\alpha} f(y).$$

Перепишем уравнение (8), используя обозначение оператора дробного интегро-дифференцирования в виде

$$u(x, y) - D_{0x}^{-2} u(x, y) - \mu D_{0y}^{-\alpha} u(x, y) = \gamma(x, y). \quad (9)$$

Таким образом, получено нагруженное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с частными дробными интегралами, которое в общем случае было рассмотрено в [19].

Введем в рассмотрение новую функцию

$$w(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-t} \phi(2, 1; tx^2) \phi(\alpha, 1; \mu ty^\alpha) dt,$$

где $\phi(\xi, \eta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\xi k + \eta)}$ — функция Райта [18, с. 23].

Для функции $\phi(\xi, \eta; z)$ справедливы следующие формулы [18; 20]:

$$\frac{d}{dt} \phi(\xi, \eta; z) = \phi(\xi, \eta + \xi; t), \quad (10)$$

$$D_{0z}^{-\epsilon} z^{\eta-1} \phi(\xi, \eta; tz^\xi) = z^{\eta+\epsilon-1} \phi(\xi, \eta + \epsilon; tz^\xi). \quad (11)$$

Рассмотрим выражение

$$(D_{0x}^{-2} + \mu D_{0y}^{-\alpha}) w(x, y).$$

С учетом (10), (11) получим

$$\begin{aligned} (D_{0x}^{-2} + \mu D_{0y}^{-\alpha}) w(x, y) &= (D_{0x}^{-2} + \mu D_{0y}^{-\alpha}) \int_0^{\infty} e^{-t} \phi(2, 1; tx^2) \phi(\alpha, 1; \mu ty^\alpha) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} [x^2 \phi(2, 3; tx^2) \phi(\alpha, 1; \mu ty^\alpha) + \phi(2, 1; tx^\alpha) \mu y^\alpha \phi(\alpha, 1 + \alpha; \mu ty^\alpha)] dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi(2, 1; tx^2) \phi(\alpha, 1; \mu ty^\alpha) + \phi(2, 1; tx^\alpha) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\alpha, 1; \mu ty^\alpha) \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{\partial}{\partial t} [\phi(2, 1; tx^2) \phi(\alpha, 1; \mu ty^\alpha)] dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \phi(2, 1; tx^2) \phi(\alpha, 1; \mu ty^\alpha) dt - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$w(x, y) - D_{0x}^{-2} w(x, y) - \mu D_{0y}^{-\alpha} w(x, y) = 1. \quad (12)$$

Далее рассмотрим свертку Лапласа для интегрируемых функций $\gamma(x, y)$ и $w(x, y)$:

$$(\gamma * w)(x, y) = \int_0^x \int_0^y \gamma(\xi, \eta) w(x - \xi, y - \eta) d\eta d\xi.$$

Принимая во внимание определение оператора дробного интегрирования, свойства свертки, а также учитывая (8), (12), получим

$$\begin{aligned} (\gamma * w)(x, y) &= (u(x, y) - D_{0x}^{-2} u(x, y) - \mu D_{0y}^{-\alpha} u(x, y)) w(x, y) = \\ &= u * (w(x, y) - D_{0x}^{-2} w(x, y) - \mu D_{0y}^{-\alpha} w(x, y)) = u * 1 = \int_0^x \int_0^y u(\xi, \eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Продифференцируем последнее равенство дважды по переменным x и y , в результате получим:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{d^2}{dx dy} (\gamma * w) = \frac{d^2}{dx dy} \int_0^x \int_0^y u(\xi, \eta) d\eta d\xi = \\ &= \gamma(x, y) w(0, 0) + \int_0^x \gamma(\xi, \eta) w_x(x - \xi, 0) d\xi + \int_0^y \gamma(\xi, \eta) w_y(0, y - \eta) d\eta + \\ &\quad + \int_0^x \int_0^y \gamma(\xi, \eta) w_{xy}(x - \xi, y - \eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Так как

$$w(0, 0) = \int_0^{\infty} e^{-t} \phi(2, 1; 0) \phi(\alpha, 1; 0) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt,$$

то окончательно приходим к равенству

$$u(x, y) = \gamma(x, y) + \int_0^x \gamma(\xi, y) w_x(x - \xi, 0) d\xi + \int_0^y \gamma(\xi, \eta) w_y(0, y - \eta) d\eta + \\ + \int_0^x \int_0^y \gamma(\xi, \eta) w_{xy}(x - \xi, y - \eta) d\eta d\xi. \quad (13)$$

Таким образом, единственное решение задачи 1.1 задается формулой (13).

Существование единственного интегрируемого решения уравнения следует из общей теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Имеет место

Теорема 1.1. Пусть $b \neq 0$, $\tau(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$, $\varphi \in C[0, T] \cap C^2(0, T)$ и выполнено условие $\tau(0)\varphi(0)$. Тогда единственное решение $u(x, y) \in L(\Omega)$ задачи 1.1 для уравнения (4) представимо в виде (13).

Заключение

Таким образом, в данной работе в явном виде выписано решение задачи Гурса для нагруженного уравнения влагопереноса Аллера дробного порядка, предложенного в качестве математической модели процесса переноса влаги в почвах с учетом их фрактальной структуры.

Литература

- [1] Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. Vol. 8. No. 1. P. 62–64. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00913245>.
- [2] Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 19. No. 2. P. 100–116. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00282277>.
- [3] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. Москва: Наука, 2012. 232 с. URL: <https://b-ok.global/book/2605019/1641ff>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619>.
- [4] Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 18. С. 280–285. URL: <http://www.mathnet.ru/links/82362def804d3e3d488666fa1c4a86d6/de4442.pdf>.
- [5] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 507–511. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41205662>.
- [6] Евдокимова Н.Н., Пулькина Л.С. Нелокальная задача для одного вырождающего гиперболического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета. 1999. № 2. С. 67–70.
- [7] Карсанова Ж.Т., Нахушева Ф.М. Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Владикавказский математический журнал. 2002. Т. 4. № 2. С. 31–37. URL: <http://www.mathnet.ru/links/64638f3f0a23c648c3b07b258a8970c4/vmj266.pdf>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=11636376>.
- [8] Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 815–826. URL: <http://www.mathnet.ru/links/f0aaa518cd876dfc034263a267f667c6/de11086.pdf>.
- [9] Хубиев К.У. О математической модели уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1 (16). С. 56–65. DOI: <http://doi.org/10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-56-65>.
- [10] Бештоков М.Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041. DOI: <https://www.libnauka.ru/item.php?doi=10.7868/S0044466917120092>.
- [11] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 72–81. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17962289>.

- [12] Нахушев А.М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. № 5. С. 1008–1011. URL: <http://www.mathnet.ru/links/c07c76541883e2b7e88f73589c0c715b/dan42049.pdf>.
- [13] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с. URL: <https://booksee.org/book/441848>.
- [14] Керевов М.А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 75 с. URL: <https://www.dissercat.com/content/kraevye-zadachi-dlya-modifitsirovannogo-uravneniya-vlagoperenosa-s-drobnoi-po-vremeni-proizv>.
- [15] Керевов М.А., Геккиева С.Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Физика. Математика. 2017. № 2. С. 106–112. URL: <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2017/02/2017-02-11.pdf>.
- [16] Бештоков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана – Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0374064118060055>.
- [17] Бештоков М.Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175. DOI: <http://doi.org/10.35634/vm200202>.
- [18] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005. 199 с. URL: https://www.studmed.ru/pshu-av-uravneniya-v-chastnyh-proizvodnyh-drobnogo-poryadka_a69906cee95.html.
- [19] Псху А.В. Решение двумерного интегрального уравнения Абея второго рода // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 6 (74). С. 75–80. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28140855>.
- [20] Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. Vol. 8. No. 29. P. 71–79. DOI: <http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71>



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14

Submitted: 4.03.2020

Revised: 18.03.2020

Accepted: 25.05.2020

S.Kh. Gekkieva

Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation

E-mail: gekkieva_s@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2135-2115>

M.M. Karmokov

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation

E-mail: mkarmokov@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5189-6538>

M.A. Kerefov

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation

E-mail: kerefov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7442-5402>

ON BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALIZED ALLER EQUATION

ABSTRACT

The mathematical models of fluid filtration processes in porous media with a fractal structure and memory are based on differential equations of fractional order in both time and space variables. The dependence of the soil water content can significantly affect the moisture transport in capillary-porous media. The paper investigates the generalized Aller equation widely used in mathematical modeling of the processes related to water table dynamics in view of fractal structure. As a mathematical model of the Aller equation with Riemann – Liouville fractional derivatives, a loaded fractional order equation is proposed, and a solution to the Goursat problem has been written out for this model in explicit form.

Key words: Aller equation, Goursat problem, Riemann – Liouville fractional integrodifferential operator, moisture transfer equation, generalized Newton – Leibniz formula, loaded equation, Volterra equation of the second kind, Laplace convolution.

Citation. Gekkieva S.Kh., Karmokov M.M., Kerefov M.A. On boundary value problem for generalized Aller equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 7–14. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Gekkieva Sakinat Khasanovna* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, scientific secretary, senior researcher of the Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 2, Shortanova street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

© *Karmokov Mukhamed Matsevich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, 173, Chernyshevsky street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

© *Kerefov Marat Aslanbievich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, 173, Chernyshevsky street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

References

- [1] Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 62–64. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00913245>.
- [2] Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1965, vol. 19, no. 2, pp. 100–116. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00282277>.
- [3] Nakhushhev A.M. Loaded equations and their applications. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. Available at: <https://b-ok.global/book/2605019/1641ff>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619>. (In Russ.)
- [4] Vogakhova V.A. A boundary value problem with A.M. Nakhushhev's nonlocal condition for a pseudoparabolic equation of moisture transfer. *Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/82362def804d3e3d488666fa1c4a86d6/de4442.pdf>. (In Russ.)
- [5] Soldatov A.P., Shhanukov M.H. Boundary value problems with A.A. Samarskii general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations. *Doklady Mathematics*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41205662>. (In Russ.)
- [6] Evdokimova N.N., Pulkina L.S. Non-local problem for a single degenerate hyperbolic equation. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 1999, no. 2, pp. 67–70. (In Russ.)
- [7] Karsanova Zh.T., Nakhushcheva F.M. On a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2002, vol. 4, no. 2, pp. 31–37. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/64638f3f0a23c648c3b07b258a8970c4/vmj266.pdf>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=11636376>. (In Russ.)
- [8] Kozhanov A.I. On a non-local boundary value problem with variable coefficients for the heat conduction and Aller equation. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 815–826. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0>. (In Russ.)
- [9] Khubiev K.U. On mathematical models of the Aller equation. *Vestnik KRAUNTS. Fiziko-matematicheskie nauki = Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2016, no. 4-1 (16), pp. 56–65. DOI: <http://doi.org/10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-56-65>. (In Russ.)
- [10] Beshtokov M.Kh. Differential and Difference Boundary Value Problem for Loaded Third-Order Pseudo-Parabolic Differential Equations and Difference Methods for Their Numerical Solution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1973–1993. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542517120089>. (In Russ.)
- [11] Nakhushhev A.M. An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its application to the dynamics of ground moisture and ground water. *Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 72–81. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17962289>. (In Russ.)
- [12] Nakhushhev A.M. A non-local problem and the Goursat problem for a loaded equation of hyperbolic type, and their applications to the prediction of ground moisture. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 242, no. 5, pp. 1008–1011. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/c07c76541883e2b7e88f73589c0c715b/dan42049.pdf>. (In Russ.)
- [13] Nakhushhev A.M. Fractional calculation and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p. Available at: <https://booksee.org/book/441848>. (In Russ.)

- [14] Kerefov M.A. Boundary value problems for a modified moisture transfer equation with a time-fractional derivative: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Nalchik, 2000, 75 p. Available at: <https://www.dissercat.com/content/kraevye-zadachi-dlya-modifitsirovannogo-uravneniya-vlagoperenosa-s-drobnoi-po-vremeni-proizv.> (In Russ.)
- [15] Kerefov M.A., Gekkieva S.Kh. A nonlocal boundary value problem for the generalized equation of moisture transfer. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 2, pp. 106–112. Available at: <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/phymath/2017/02/2017-02-11.pdf>. (In Russ.)
- [16] Beshtokov M.Kh. Local and non-local boundary value problems for degenerate and non-degenerate pseudo-parabolic equations with the Riemann – Liouville fractional derivative. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 763–778. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0374064118060055>. (In Russ.)
- [17] Beshtokov M.K. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 158–175. DOI: <http://doi.org/10.35634/vm200202>. (In Russ.)
- [18] Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005, 199 p. Available at: https://www.studmed.ru/pshu-av-uravneniya-v-chastnyh-proizvodnyh-drobnogo-poryadka_a69906cee95.html. (In Russ.)
- [19] Pskhu A.V. Solution of a two-dimensional Abel integral equation of the second kind. *News of the Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2016, no. 6 (74), pp. 75–80. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28140855>. (In Russ.)
- [20] Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities. *Journal of London Mathematical Society*, 1933, vol. 8, no. 29, pp. 71–79. DOI: <http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 13.03.2020
после рецензирования: 27.03.2020
принятия статьи: 25.05.2020

В.А. Киричек

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Vitalya29@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9817-863X>

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения. Условия задачи содержат производные первого порядка как по x , так и по t , что можно интерпретировать как упругое закрепление правого конца стержня при наличии некоего демпфера, а так как в условиях также присутствует интеграл от искомого решения, то это условие является нелокальным. Известно, что задачи с нелокальными интегральными условиями являются несамосопряженными, а, значит, исследование разрешимости сталкивается с трудностями, не свойственными самосопряженным задачам. Дополнительные трудности возникают и в силу того, что одно из условий является динамическим. Исследована гладкость решения нелокальной задачи. Введено понятие обобщенного решения и доказано существование производных второго порядка и принадлежность их пространству L_2 . Доказательство основано на априорных оценках, полученных в статье.

Ключевые слова: нелокальные условия, динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, пространства Соболева, гладкость решения.

Цитирование. Киричек В.А. О гладкости решения одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 15–22. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © Киричек Виталия Александровна — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443011, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Рассмотрим в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ уравнение

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим следующую задачу: найти в Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

граничному условию

$$u_x(0, t) = 0 \quad (3)$$

и нелокальному условию

$$u_x(l, t) + \gamma u_t(l, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx = 0. \quad (4)$$

Условие (4) содержит производные первого порядка как по x , так и по t , что можно интерпретировать как упругое закрепление правого конца стержня при наличии некоего демпфера [1, с. 44], а так

как в (4) присутствует интеграл от искомого решения, то это условие является нелокальным. Известно, что задачи с нелокальными интегральными условиями являются несамосопряженными и, стало быть, исследование разрешимости сталкивается с трудностями, не свойственными самосопряженным задачам [2; 3]. Дополнительные трудности возникают и в силу того, что условие (4) является динамическим. Некоторые результаты в исследовании задач с краевыми условиями, содержащими производную по времени первого порядка, для одномерных гиперболических уравнений получены в статьях [4; 5]. Заметим, что краевые задачи с динамическими условиями вызывают интерес не только как математический объект, но и в силу их прикладного значения [6–10; 12].

В [5] доказано существование единственного обобщенного решения поставленной задачи в пространстве $W(Q_T)$, т. е. решения, имеющего обобщенные производные первого порядка. Приведем здесь определение обобщенного решения задачи (1)–(4), используя обозначения, введенные в [5]:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{(x, t) : x = 0, t \in [0, T]\}, \quad \Gamma_l = \{(x, t) : x = l, t \in [0, T]\}, \\ \Gamma &= \Gamma_0 \cup \Gamma_l, \\ W(Q_T) &= \{u(x, t) : u \in W_2^1(Q_T), u_t \in L_2(\Gamma_l)\}, \\ \dot{W}(Q_T) &= \{v(x, t) : v \in W(Q_T), v(x, T) = 0\}. \end{aligned}$$

Определение. Функция $u \in W(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (1)–(4), если она удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c u v) dx dt + \int_0^T \gamma a(l, t) u_t(l, t) v(l, t) dt + \\ &+ \int_0^T a(l, t) v(l, t) \int_0^l K(x) u(x, t) dt dx = \int_0^T \int_0^l f v dx dt \end{aligned} \quad (5)$$

для любой $v \in \dot{W}(Q_T)$.

В упомянутой выше статье найдены условия на входные данные, при выполнении которых справедливо утверждение об обобщенной разрешимости поставленной задачи, что нашло отражение в теореме:

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

$$c(x, t) \in C(\bar{Q}_T), a(x, t), a_t(x, t) \in C(\bar{Q}_T), \gamma > 0, f(x, t) \in L_2(Q_T).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение поставленной задачи.

Дальнейшие исследования показали, что при выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты уравнения и его правую часть обобщенное решение имеет и производные второго порядка. Обоснование этого утверждения составляет основной результат статьи и изложено в следующем разделе.

Основной результат.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

$$c(x, t), a(x, t), a_t(x, t), a_{tt}(x, t) \in C(\bar{Q}_T), K(x) \in C^1[0, l], \gamma > 0, f_t(x, t) \in L_2(Q_T).$$

Тогда обобщенное решение задачи (1)–(4) принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением, которое позволило убедиться в существовании обобщенного решения из $W(Q_T)$, а именно

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j) dx + \gamma w_j(l) \int_0^l K(x) u^m(x, t) dx = \int_0^l f w_j dx, \quad (6)$$

где $u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) w_k(x)$, $\{w_k(x)\}$ — система функций, принадлежащая $C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$ и образующая полную систему в $W_2^1(0, l)$. Продифференцируем (6) по t , затем умножим на $c_j''(t)$, просуммируем по j от 1 до m , а затем проинтегрируем по $(0, \tau)$, где $\tau \in [0, T]$. Получим

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int_0^l [u_{ttt}^m u_{tt}^m + a u_{xt}^m u_{xtt}^m + a_t u_x^m u_{xtt}^m + c u_t^m u_{tt}^m + c_t u^m u_{tt}^m] dx dt + \int_0^\tau [\gamma a_t(l, t) u_t^m u_{tt}^m + \gamma a(l, t) (u_{tt}^m)^2] dt + \\ &+ \int_0^\tau a_t(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u^m dx dt + \int_0^\tau a(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t^m dx = \int_0^\tau \int_0^l f_t u_{tt}^m dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдем к выводу оценок. Преобразуем два первых слагаемых левой части (7).

$$\int_0^\tau \int_0^l u_{ttt}^m u_{ttt}^m dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l (u_{tt}^m(x, \tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx,$$

$$\int_0^\tau \int_0^l a u_{xt}^m u_{xtt}^m dx dt = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_{xt}^m)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l a (u_{xt}^m(x, \tau))^2 dx.$$

В силу этих преобразований (7) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + a(u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + \gamma \int_0^\tau a(l, t) (u_{tt}^m(l, t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_{xt}^m)^2 dx dt - \\ & - \int_0^\tau \int_0^l [a_t u_x^m u_{xtt}^m + c u_t^m u_{tt}^m + c_t u^m u_{tt}^m] dx dt - \gamma \int_0^\tau a_t(l, t) u_t^m u_{tt}^m dt - \int_0^\tau a_t(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u^m(x, t) dx dt - \\ & - \int_0^\tau a(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t^m(x, t) dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f_t u_{tt}^m dx dt. \end{aligned} \quad (8)$$

При выполнении условий теоремы левая часть (8) неотрицательна. Тогда из (8) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + a(u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma \int_0^\tau a(l, t) (u_{tt}^m(l, t))^2 dt \leq \left| \int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx \right| + \left| \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_{xt}^m)^2 dx dt \right| + \\ & + \left| 2 \int_0^\tau \int_0^l [a_t u_x^m u_{xtt}^m + c u_t^m u_{tt}^m + c_t u^m u_{tt}^m] dx dt \right| + \left| 2\gamma \int_0^\tau a_t(l, t) u_t^m u_{tt}^m dt \right| + \left| -2 \int_0^\tau a_t(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u^m(x, t) dx dt \right| + \\ & + \left| -2 \int_0^\tau a(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t^m(x, t) dx dt \right| + \left| 2 \int_0^\tau \int_0^l f_t u_{tt}^m dx dt \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

Оценим правую часть (9). Для этого сначала преобразуем некоторые слагаемые, интегрируя по частям

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^\tau a_t(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u^m(x, t) dx dt = 2 \int_0^\tau a_t(l, t) u_t^m(l, t) \int_0^l K(x) u_{tt}^m(x, t) dx dt + \\ & + 2 \int_0^\tau a_{tt}(l, t) u_t^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t(x, t) dx dt - 2a_t(l, \tau) u_t^m(l, \tau) \int_0^l K(x) u^m(x, \tau) dx, \\ & -2 \int_0^\tau a(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t^m(x, t) dx dt = 2 \int_0^\tau a(l, t) u_t^m(l, t) \int_0^l K(x) u_{tt}^m(x, t) dx dt + \\ & + 2 \int_0^\tau a_t(l, t) u_t^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t^m(x, t) dx dt - 2a(l, \tau) u_{tt}^m(l, \tau) \int_0^l K(x) u_t^m(x, \tau) dx. \end{aligned}$$

Тогда неравенство (9) можно записать так:

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + a(u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma \int_0^\tau a(l, t) (u_{tt}^m(l, t))^2 dt \leq \left| \int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx \right| + \left| \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_{xt}^m)^2 dx dt \right| + \\ & + \left| 2 \int_0^\tau \int_0^l c u_t^m u_{tt}^m dx dt \right| + \left| 2 \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^m u_{xtt}^m dx dt \right| + \left| 2 \int_0^\tau \int_0^l c_t u^m u_{tt}^m dx dt \right| + 2\gamma \left| \int_0^\tau a_t(l, t) u_t^m u_{tt}^m dt \right| + \\ & + 2 \left| \int_0^\tau a(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t^m(x, t) dx dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau a_t(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u^m(x, t) dx dt \right| + \left| 2 \int_0^\tau \int_0^l f_t u_{tt}^m dx dt \right|. \end{aligned} \quad (10)$$

Проведем оценки некоторых слагаемых

$$1) \quad 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l c u_t^m u_{tt}^m dx dt \right| \leq c_0 \int_0^\tau \int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{tt}^m)^2] dx dt,$$

$$2) \quad - \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^m u_{xtt}^m dx dt = \int_0^\tau \int_0^l a_{tt} u_x^m u_{xt}^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_{xt}^m)^2 dx dt - \int_0^\tau a_t u_x^m(x, \tau) u_{xt}^m(x, \tau) dx.$$

Оценим последнее слагаемое в 2), применяя неравенство Коши с ε .

$$2 \left| \int_0^\tau a_t u_x^m(x, \tau) u_{xt}^m(x, \tau) dx \right| \leq a_1 \varepsilon \int_0^l (u_{xt}^m(x, \tau))^2 dx + a_1 c(\varepsilon) \int_0^l (u_x^m(x, \tau))^2 dx,$$

так как $u_x^m = \int_0^\tau u_{xt}^m(x, t) dt$, то $\int_0^l (u_x^m(x, \tau))^2 dx \leq \tau \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m(x, t))^2 dx dt$, в результате 2) примет вид

$$2 \left| \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^m u_{xtt}^m dx dt \right| \leq a_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dx dt + a_1 \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx dt + \\ + a_1 c(\varepsilon) \tau \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx dt + a_1 \varepsilon \int_0^l (u_{xt}^m(x, \tau))^2 dx.$$

Оценим остальные слагаемые

$$3) \quad 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l c_t u^m u_{tt}^m dx dt \right| \leq c_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_{tt}^m)^2] dx dt,$$

$$4) \quad 2\gamma \left| \int_0^\tau a_t(l, t) u_t^m u_{tt}^m dt \right| \leq a_1 \delta \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + c(\delta) a_1 \gamma \int_0^\tau (u_t^m(l, t))^2 dt,$$

$$5) \quad 2 \left| \int_0^\tau a(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u_t^m(x, t) dx dt \right| \leq a_1 \delta \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + a_1 c(\delta) K_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt,$$

$$6) \quad 2 \left| \int_0^\tau a_t(l, t) u_{tt}^m(l, t) \int_0^l K(x) u^m(x, t) dx dt \right| \leq a_1 \delta \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + a_1 c(\delta) K_0 \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dx dt,$$

$$7) \quad 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l f_t u_{tt}^m dx dt \right| \leq \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m)^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f_t^2 dx dt.$$

(Здесь δ играет ту же роль, что и ε в оценках выше). Рассмотрим слагаемое $\int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx$ и оценим его. Для этого вернемся к (6), умножим его на $c_j''(t)$, просуммируем по j от 1 до m и положим $t = 0$

$$\int_0^l [(u_{tt}^m(x, 0))^2 + a u_x^m(x, 0) u_{tt}^m(x, 0) + c u^m(x, 0) u_{tt}^m(x, 0)] dx + \gamma a(l, 0) u_t^m(l, 0) u_{tt}^m(l, 0) +$$

$$+ a(l, 0) u_{tt}^m(l, 0) \int_0^l K(x) u^m(x, 0) dx = \int_0^l f(x, 0) u_{tt}^m(x, 0) dx,$$

так как $u^m(x, 0) = 0$, то и $u_x^m(x, 0) = 0$, $u_t^m(l, 0) = 0$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$\int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx = \int_0^l f(x, 0) u_{tt}^m(x, 0) dx,$$

откуда

$$\int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx \leq \int_0^l f^2(x, 0) dx. \quad (11)$$

В силу условий теоремы $|a|, |a_t|, |a_{tt}| \leq a_1$, $|c|, |c_t| \leq c_1$, $\int_0^l K^2(x) dx = K_0$, $a(x, t) \geq a_0$. С учетом приведенных выше оценок (10) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + a(u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma \int_0^\tau a(l, t)(u_{tt}^m(l, t))^2 dt \leq a_1 \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx dt + c_0 \int_0^\tau \int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{tt}^m)^2] dx dt + \\ & + a_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dx dt + a_1 \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx dt + a_1 c(\epsilon) \tau \int_0^\tau \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx dt + a_1 \epsilon \int_0^l (u_{xt}^m(x, \tau))^2 dx + \\ & + c_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_{tt}^m)^2] dx dt + a_1 \delta \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + \delta a_1 \gamma \int_0^\tau (u_t^m(l, t))^2 dt + a_1 \delta \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + \\ & + a_1 c(\delta) K_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + a_1 \delta \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + a_1 c(\delta) K_0 \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dx dt + \\ & + \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m)^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f_t^2 dx dt + \int_0^l f^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Пусть $N_1 = \max\{c_0 + a_1 c(\epsilon) K_0, a_1, c_1 + a_1 c(\delta) K_0\}$, $N_2 = \max\{3a_1 + a_1 c(\epsilon) \tau, c_0 + c_1 + 1\}$, тогда полученное неравенство переписывается

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + a_0(u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma a_0 \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt \leq N_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2] dx dt + \\ & + N_2 \int_0^\tau \int_0^l [(u_{xt}^m)^2 + (u_{tt}^m)^2] dx dt + a_1 \epsilon \int_0^l (u_{xt}^m(x, \tau))^2 dx + 3a_1 \delta \int_0^\tau (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + \int_0^\tau \int_0^l f_t^2 dx dt + \int_0^l f^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Перенесем интегралы, содержащие $(u_{xt}^m(x, \tau))^2$, $(u_{tt}^m(l, t))^2$, в левую часть, выбрав ϵ , δ так, чтобы $a_0 - a_1 \epsilon > 0$; $2\gamma - 3a_1 \delta > 0$, например, $a_0 - a_1 \epsilon \geq \frac{a_0}{2}$, то есть $\epsilon \leq \frac{a_0}{2a_1}$, и аналогично $2\gamma - 3a_1 \delta \geq \gamma$, откуда $\delta \leq \frac{\gamma}{3a_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} m_0 \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx & \leq N_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2] dx dt + \\ & + N_2 \int_0^\tau \int_0^l [(u_{xt}^m)^2 + (u_{tt}^m)^2] dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f_t^2 dx dt + \int_0^l f^2(x, 0) dx, \end{aligned}$$

где $m_0 = \min\{1 + 2\gamma a_0 + 3a_1 \delta; a_0 - a_1 \epsilon\}$. Первое слагаемое правой части ограничено, так как $u \in W_2^1(Q_T)$.

В силу условий теоремы $\int_0^\tau \int_0^l f_t^2 dx dt + \int_0^l f^2(x, 0) dx \leq N_3$, тогда

$$m_0 \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx \leq N_2 \int_0^\tau \int_0^l [(u_{xt}^m)^2 + (u_{tt}^m)^2] dx dt + N_3. \quad (12)$$

Применим к неравенству (12) лемму Гронвуолла, что приводит к неравенству

$$\int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx \leq e^{\frac{N_2}{m_0} \tau} \frac{N_3}{m_0}.$$

После интегрирования последнего неравенства по $(0, T)$ получим

$$\|u_{tt}^m\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_{xt}^m\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{N_3}{N_2} (e^{\frac{N_2}{m_0} T} - 1).$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от m , то мы приходим к выводу, что при выполнении условий теоремы 2 обобщенное решение поставленной задачи имеет производные u_{tt}, u_{xt} , принадлежащие пространству $L_2(Q_T)$. Покажем, что решение имеет и $u_{xx} \in L_2(Q_T)$. Заметим, что обобщенное решение задачи (1)–(4), имеющее производные u_{tt}, u_{xt} , удовлетворяет тождеству (5) в форме

$$\int_0^T \int_0^l (u_{tt}v + au_x v_x + cuv) dx dt + \gamma \int_0^T a(l, t) u_t(l, t) v(l, t) dt + \int_0^T a(l, t) v(l, t) \int_0^l K u dx dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt. \quad (13)$$

Положим в (13) $v(x, t) = \Phi(x)\Psi(t)$, где $\Psi \in L_2(0, T)$, $\Psi(T) = 0$, $\Phi \in W_2^1(0, l)$, $\Phi(0) = 0$, тогда из (13) следует

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi(t) \int_0^l [u_{tt}\Phi(x) + au_x \Phi'(x) + cu\Phi] dx dt + \gamma \int_0^T a(l, t) \Psi(t) u_t(l, t) \Phi(l) dt + \int_0^T a(l, t) \Phi(l) \Psi(t) \int_0^l K u dx dt = \\ = \int_0^T \int_0^l f \Psi(t) \Phi(x) dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как $\Psi(t)$ – любая функция из указанного класса, то для почти всех $t \in [0, T]$ из (14) следует выполнение соотношения

$$\int_0^l au_x \Phi'(x) dx = - \int_0^l [u_{tt} + cu - f] \Phi(x) dx - \gamma a(l, t) \Phi(l) u_t(l, t) - a(l, t) \Phi(l) \int_0^l K u dx dt. \quad (15)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти $u_x(x, t)$ из соотношений:

$$(au_x)_x = \zeta(x, t), \quad u_x(l, t) = \nu(t). \quad (16)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$au_x(x, t) = \int_0^x \zeta(\xi, t) d\xi + a(l, t) \nu(t) - \int_0^l \zeta(\xi, t) d\xi.$$

Можно также найти представление $u(x, t)$, удовлетворяющее (16)

$$u(x, t) = \int_0^x \frac{1}{a(\xi, t)} \int_0^\xi \zeta(\xi', t) d\xi' d\xi + [a(l, t) \nu(t) - \int_0^l \zeta(\xi, t) d\xi] \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi, t)}.$$

Очевидно, что это решение имеет $u_{xx} \in L_2(0, l)$ для почти всех $t \in [0, T]$, если $\zeta \in L_2(Q_T)$. Легко видеть, что функция $u(x, t)$, являясь решением (16), удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l au_x \Phi'(x) dx = - \int_0^l \zeta(x, t) \Phi(x) dx - a(l, t) \nu(t) \Phi(l)$$

для любой $\Phi \in W_2^1(0, l)$, $\Phi(0) = 0$, которое при $\zeta(x, t) = u_{tt} + cu - f$, $\nu(t) = -[\gamma u_t(l, t) + \int_0^l K u dx] \frac{1}{a(l, t)}$ совпадает с (15).

Отсюда следует, что $u_{xx} \in L_2(Q_T)$, где $u(x, t)$ – обобщенное решение задачи (1)–(4). Таким образом, $u \in W_2^2(Q_T)$.

Утверждение доказано.

Литература

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 2004. 798 с. URL: <http://volnogaz.math.msu.su/pages/books/Тихонов%20-%20Уравнения%20математической%20физики.pdf>.

- [2] Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР, 1991. Т. 321. Вып. 6. С. 1158–1163. URL: <http://www.mathnet.ru/links/45f36a10c5f06a36e54d3c020efbc746/dan5707.pdf>.
- [3] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. Вып. 2. С. 294–304.
- [4] Рогожников А.М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. 2013. Вып. 10. С. 188–214. URL: <https://istina.msu.ru/download/4446927/1ktCIB:sjvtjvFuk4heV2GZd4Cw4OWVUF4/>.
- [5] Киричек В.А. Задача с нелокальным граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучная серия. 2017. Вып. 3. С. 26–33. URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/5498>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32274170>.
- [6] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. Москва: URSS, 2010. 237 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607>.
- [7] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник Самарского ун-та. 2014. Вып. 3(114). С. 9–19. URL: <http://vestnik-old.samsu.ru/articles/3-2014-1.pdf>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21608733>.
- [8] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. Issue 28. P. 1–10. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13287682>.
- [9] Andrews K.T., Kuttler K.L., Shillor M. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 1996. Vol. 197. Issue 3. P. 781–795. DOI: <http://doi.org/10.1006/JMAA.1996.0053>.
- [10] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным динамическим условием для уравнения колебаний толстого стержня // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучная серия. 2017. Вып. 4. С. 7–18. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18>.
- [11] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian and Hendrik Viljoen. Forced wave motion with internal and boundary damping // Journal of applied physics. 2012. V. 111. P. 014702–0147028. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3674316>.
- [12] Pul'kina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation // Russian Mathematics. 2016. Vol. 60. Issue 9. P. 38–45. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X16090048>.
- [13] Pulkina L.S., Beylin A.B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // EJDE. 2019. Issue 29. P. 1–9. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38706537>; <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22

Submitted: 13.03.2020

Revised: 27.03.2020

Accepted: 25.05.2020

V.A. Kirichek

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: Vitalya29@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9817-863X>

ON SMOOTHNESS OF SOLUTION OF ONE NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION

ABSTRACT

In this paper we consider a nonlocal problem with integral boundary condition for hyperbolic equation. The conditions of the problem contain derivatives of the first order with respect to both x and t , which can be interpreted as an elastic fixation of the right end rod in the presence of a certain damper, and since the conditions also contain integral of the desired solution, this condition is nonlocal. It is known that problems with nonlocal integral conditions are non-self-adjoint and, therefore, the study of solvability encounters difficulties that are not characteristic of self-adjoint problems. Additional difficulties arise also due to the fact that one of the conditions is dynamic. The attention of the article is focused on studying the smoothness of the solution of the nonlocal problem. The concept of a generalized solution is introduced, and the existence of second-order derivatives and their belonging to the space L_2 are proved. The proof is based on a priori estimates obtained in this work.

Key words: nonlocal conditions, dynamic boundry conditions, hyperbolic equation, generalized solution, Sobolev spaces, smoothness of solution.

Citation. Kirichek V.A. On smoothness of solution of one nonlocal problem for hyperbolic equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriya = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 15–22. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Kirichek Vitaliya Alexandrovna* — postgraduate student, Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 2004, 798 p. Available at: <http://volnogaz.math.msu.su/pages/books/Тихонов%20-%20Уравнения%20математической%20физики.pdf>. (In Russ.)
- [2] Skubachevskii A.L., Steblov G.M. On the spectrum of differential operators with a domain that is not dense in $L_2,1$. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1991, vol. 321, no. 6, pp. 1158–1163. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/45f36a10c5f06a36e54d3c020efbc746/dan5707.pdf>. (In Russ.)
- [3] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/c44146f313280b7b9e3890b4495b3965/de2993.pdf>. (In Russ.)
- [4] Rogozhnikov A.M. On various types of boundary conditions for the one-dimensional equation of oscillations. *Collection of articles of young scientists of the faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of MSU*, 2013, vol. 10, pp. 188–214. Available at: <https://istina.msu.ru/download/4446927/1ktCIB:sjvtjvFuk4heV2GZd4Cw4OWVUF4/>. (In Russ.)
- [5] Kirichek V.A. Problem with nonlocal boundary condition for a hyperbolic equation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 3, pp. 26–33. Available at: <https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/5498>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32274170>. (In Russ.)
- [6] Korpusov M.O. Destruction in nonclassical wave equations. Moscow: URSS, 2010, 240 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607>. (In Russ.)
- [7] Beylin A.B., Pulkina L.S. Task on longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions. *Vestnik of Samara State University*, 2014, no. 3 (114), pp. 9–19. Available at: <http://vestnik-old.samsu.ru/articles/3-2014-1.pdf>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21608733>. (In Russ.)
- [8] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1998, vol. 28, pp. 1–10. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13287682>.
- [9] Andrews K.T., Kuttler K.L., Shillor M. Second Order Evolution Equations With Dynamic Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 197, issue 3, pp. 781–795. DOI: <http://doi.org/10.1006/JMAA.1996.0053>.
- [10] Beilin A.B., Pulkina L.S. A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, no. 4 (23), pp. 7–18. Available at: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18>. (In Russ.)
- [11] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian and Hendrik Viljoen. Forced wave motion with internal and boundary damping. *Journal of Applied Physics*, 2012, vol. 111, no. 1, pp. 014702–0147028. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3674316>.
- [12] Pul'kina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation. *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, issue 9, pp. 38–45. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X16090048>.
- [13] Pulkina L.S., Beylin A. B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2019, no. 29, pp. 1–9. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38706537>; <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-23-49

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 16.01.2020
после рецензирования: 30.01.2020
принятия статьи: 25.05.2020

В.П. Цветов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: tsf-su@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-224X>

ФРАКТАЛЬНЫЕ ГРУППОИДЫ И КРИПТОГРАФИЯ С ОТКРЫТЫМ КЛЮЧОМ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются группоиды – простейшие алгебры с одной бинарной операцией. Предложены алгоритмы порождения шкал конечных группоидов на основе принципа самоподобия их таблиц Кэли. Каждый последующий порожденный группоид имеет мощность носителя в два раза большую по сравнению с порождающим его группоидом, а его таблица Кэли – блочную самоподобную структуру. В качестве примера приложения полученных результатов рассматриваются циклическая полугруппа бинарных операций, порожденная операцией конечного группоида с носителем небольшой мощности, и построенная на ее основе модификация протокола Диффи – Хелмана – Меркла открытого распределения ключей.

Ключевые слова: группоиды, полугруппы, таблицы Кэли, циклические полугруппы бинарных операций, криптография на группоидах, протокол Диффи – Хелмана – Меркла.

Цитирование. Цветов В.П. Фрактальные группоиды и криптография с открытым ключом // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 23–49. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-23-49>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © Цветов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Напомним, что группоидом $\langle U, (*) \rangle$ называется множество (носитель) U с заданной на нем единственной бинарной операцией $*$, относительно свойств которой не делается никаких дополнительных предположений [1]. В англоязычной литературе за группоидами закреплен термин «магма», поэтому для обозначения группоидов мы будем использовать символ M . Заметим, что частный случай группоидов – квазигруппы – находят широкое применение в криптографии [2].

Конечные группоиды, т. е. группоиды с конечным носителем $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, полностью определяются таблицей Кэли, которая задает значения результата операции на значениях ее аргументов. Общий вид таблицы Кэли представлен в табл. 1.1.

Структура таблицы Кэли зависит от свойств операции, например, таблица Кэли коммутативной операции симметрична, а таблица Кэли квазигруппы – это латинский квадрат. Если операция обладает левым нейтральным элементом e_l (т.е. $e_l * u = u$ для любых $u \in U$), то в таблице Кэли ему будет соответствовать строка u_1, u_2, \dots, u_n . То же самое относится и к правому нейтральному элементу и соответствующему ему столбцу.

В дальнейшем нам будет удобно представлять элементы носителей конечных группоидов значениями их индексов в некоторой нумерации. Нумерацию элементов будем начинать с единицы, т. е. вместо $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ будем записывать $1..n = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Таблица 1.1

Общий вид таблицы Кэли

Table 1.1

General view of the Cayley table

*	u_1	...	u_j	...	u_n
u_1	$u_1 * u_1$...	$u_1 * u_j$...	$u_1 * u_n$
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
u_i	$u_i * u_1$...	$u_i * u_j$...	$u_i * u_n$
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
u_n	$u_n * u_1$...	$u_n * u_j$...	$u_n * u_n$

В свою очередь в таблице Кэли операции $*$ будем представлять целочисленной матрицей Кэли $A = (a_{i,j})$ порядка n с положительными элементами, определенными правилом

$$a_{i,j} = k,$$

где $u_k = u_i * u_j$, и $i, j, k \in 1..n \subset \mathbb{N}$.

Понятно, что если на множестве $1..n$ определить операцию $i \diamond j = a_{i,j}$, то группоиды $\langle U, (*) \rangle$ и $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ будут изоморфны.

Все последующие рассуждения имеют целью разработку математического аппарата для адаптации схемы открытого распределения ключа шифрования на основе протокола Диффи — Хелмана — Меркла (Diffie — Hellman — Merkle) [3; 4] применительно к группоидам.

2. Основные результаты

2.1. Фрактальные матрицы и шкалы фрактальных группоидов

Рассмотрим группоид $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ с матрицей Кэли A . Все дальнейшие построения опираются на «клонирование» матрицы Кэли операции исходного группоида в качестве подматриц матрицы Кэли операции группоида вдвое большей мощности.

Дадим следующие определения.

Определение 2.1.1. Диагональным расширением матрицы Кэли $A = (a_{i,j})$ порядка n будем называть матрицу $A^{(d)} = (a_{i,j}^{(d)})$ порядка $2n$, элементы которой определены правилом

$$a_{i,j}^{(d)} = \begin{cases} a_{i,j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ a_{i,j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ a_{i-n,j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ a_{i-n,j-n}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Определение 2.1.2. Строковым расширением матрицы Кэли $A = (a_{i,j})$ порядка n будем называть матрицу $A^{(r)} = (a_{i,j}^{(r)})$ порядка $2n$, элементы которой определены правилом

$$a_{i,j}^{(r)} = \begin{cases} a_{i,j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ a_{i,j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ a_{i-n,j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ a_{i-n,j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Определение 2.1.3. Столбцевым расширением матрицы Кэли $A = (a_{i,j})$ порядка n будем называть матрицу $A^{(c)} = (a_{i,j}^{(c)})$ порядка $2n$, элементы которой определены правилом

$$a_{i,j}^{(c)} = \begin{cases} a_{i,j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ a_{i,j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ a_{i-n,j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ a_{i-n,j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Определение 2.1.4. Тривиальным расширением матрицы Кэли $A = (a_{i,j})$ порядка n будем называть матрицу $A^{(t)} = (a_{i,j}^{(t)})$ порядка $2n$, элементы которой определены правилом

$$a_{i,j}^{(t)} = \begin{cases} a_{i,j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ a_{i,j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n \\ a_{i-n,j}, & i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n \\ a_{i-n,j-n}, & i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n. \end{cases} \quad (2.4)$$

Все определенные выше расширения матрицы Кэли будем называть фрактальными.

Определение 2.1.5. Фрактальным расширением группоида $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ с матрицей Кэли A будем называть любой из группоидов $\langle 1..2n, (\diamond^d) \rangle$, $\langle 1..2n, (\diamond^r) \rangle$, $\langle 1..2n, (\diamond^c) \rangle$, $\langle 1..2n, (\diamond^t) \rangle$, матрицы Кэли которых определены как $A^{(d)}$, $A^{(r)}$, $A^{(c)}$, $A^{(t)}$, соответственно. Сами операции \diamond^d , \diamond^r , \diamond^c , \diamond^t будем называть фрактальным расширением операции \diamond . При необходимости уточнения конкретного типа расширения будем говорить о диагональных, строковых, столбцевых и тривиальных расширениях.

Замечание 2.1.1. В качестве примера рассмотрим фрактальное расширение мультипликативного группоида $\langle 1..2, (\cdot \bmod 3) \rangle$ с матрицей Кэли

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

до группоида $\langle 1..4, (\diamond^d) \rangle$ с матрицей Кэли

$$A^{(d)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что группоид $\langle 1..2, (\cdot \bmod 3) \rangle$ изоморфен группоиду $\langle 2^{\{1\}}, (\Delta) \rangle$, где $2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$ — булеан над одноэлементным множеством, Δ — симметрическая разность множеств, и $1 \sim \emptyset$, $2 \sim \{1\}$.

Нетрудно понять, что группоид $\langle 1..4, (\diamond^d) \rangle$ изоморфен группоиду $\langle 2^{\{1,2\}}, (\Delta) \rangle$, где $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ и $1 \sim \emptyset$, $2 \sim \{1\}$, $3 \sim \{2\}$, $4 \sim \{1,2\}$.

В силу определения, диагональное расширение коммутативного группоида будет коммутативным группоидом. Если в исходном группоиде имелись левые или/и правые нейтральные элементы, то они будут сохранять эти свойства и в диагональном расширении. Кроме того, если матрица Кэли исходного группоида являлась латинским квадратом, то латинским квадратом будет и матрица диагонального расширения.

Также понятно, что группоид $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ является подгруппоидом своего диагонального расширения $\langle 1..2n, (\diamond^d) \rangle$.

Замечание 2.1.2. Матрица Кэли строкового расширения группоида из примера предыдущего замечания 2.1.1 будет иметь вид

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Строковое расширение группоида не может быть коммутативным. Свойство нейтрального элемента в строковом расширении будут сохранять только правые нейтральные элементы. Матрица строкового расширения не может быть латинским квадратом.

Понятно, что группоиды $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ и $\langle n+1..2n, (\diamond^r) \rangle$ являются подгруппоидами строкового расширения $\langle 1..2n, (\diamond^r) \rangle$.

Замечание 2.1.3. Матрица Кэли столбцевого расширения группоида из примера замечания 2.1.1 будет иметь вид

$$A^{(c)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Столбцевое расширение группоида не может быть коммутативным. Свойство нейтрального элемента в столбцевом расширении будут сохранять только левые нейтральные элементы. Матрица столбцевого расширения не может быть латинским квадратом.

Понятно, что группоиды $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ и $\langle n + 1..2n, (\diamond^c) \rangle$ являются подгруппоидами столбцевого расширения $\langle 1..2n, (\diamond^c) \rangle$.

Замечание 2.1.4. Матрица Кэли тривиального расширения группоида из примера замечания 2.1.1 будет иметь вид

$$A^{(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тривиальное расширение коммутативного группоида будет коммутативным. Нейтральные элементы в тривиальном расширении будут отсутствовать. Матрица тривиального расширения не может быть латинским квадратом.

Понятно, что группоид $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ является подгруппоидом своего тривиального расширения $\langle 1..2n, (\diamond^t) \rangle$.

Определение 2.1.6. Однородной шкалой фрактальных группоидов $M_k^{(\sigma)} = \langle 1..n_k, (\diamond_k^\sigma) \rangle$ будем называть систему группоидов $S_\sigma = \{M_k^{(\sigma)}\}_{k=0}^\infty$, носители и матрицы Кэли A_k которых определены следующим условием:

$$\exists \sigma \forall k \sigma \in \{d, r, c, t\} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge n_0 \in \mathbb{N} \wedge n_k = 2n_{k-1} \wedge A_k = A_{k-1}^{(\sigma)}.$$

Каждый из группоидов $M_k^{(\sigma)}$ при $k \in \mathbb{N}$ будем называть фрактальным, его индекс k — местом группоида в заданной шкале, а σ — типом расширения. Группоид $M_0^{(\sigma)} = \langle 1..n_0, (\diamond_0) \rangle$, его операцию \diamond_0 и матрицу Кэли A_0 будем называть базовыми в заданной шкале. Индексы 0 и σ в обозначениях базовых группоидов, матриц и операций обычно будем опускать. При необходимости уточнения конкретного типа шкалы будем говорить о диагональных, строковых, столбцевых или тривиальных шкалах.

В общем случае можно рассматривать смешанные шкалы, в которых тип расширений может изменяться в пределах шкалы. В данной статье смешанные шкалы не рассматриваются. Поэтому для простоты изложения однородные шкалы в дальнейшем будем называть просто шкалами.

Замечание 2.1.5. В силу определений каждая шкала $S_\sigma = \{M_k^{(\sigma)}\}_{k=0}^\infty$ с базовой матрицей Кэли A порождает при помощи сдвига места $h \in \mathbb{N}$ шкалу того же типа $S'_\sigma = \{M_{k-h}^{(\sigma)}\}_{k=h}^\infty$ с базовой матрицей Кэли A_h .

Рассмотрим последовательности из четырех первых матриц Кэли фрактальных шкал с базовым группоидом $M = \langle \{1\}, (\diamond) \rangle$, где $1 \diamond 1 = 1$.

1. Диагональные расширения (шкала S_d)

$$A = (1),$$

$$A_1^{(d)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array} \right),$$

$$A_2^{(d)} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array} \right),$$

$$A_3^{(d)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array} \right).$$

Нетрудно проверить, что соответствующая шкала группоидов изоморфна шкале групп булеанов $\langle 2^{\{1\}}, (\Delta) \rangle$, $\langle 2^{\{1,2\}}, (\Delta) \rangle$, $\langle 2^{\{1,2,3\}}, (\Delta) \rangle$ с операцией симметрической разности.

2. Строковые расширения (шкала S_r)

$$A = (1),$$

$$A_1^{(r)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{array} \right),$$

$$A_2^{(r)} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{array} \right),$$

$$A_3^{(r)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{8} & \mathbf{8} \end{array} \right).$$

Построенные расширения матриц Кэли определяют шкалу полугрупп левых нулей (правых единиц), операция которой \wr определена правилом $u_i \wr u_j = u_i$.

3. Столбцевые расширения (шкала S_c)

$$A = (\mathbf{1}),$$

$$A_1^{(c)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \right),$$

$$A_2^{(c)} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \right),$$

$$A_3^{(c)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{array} \right).$$

Построенные расширения матриц Кэли определяют шкалу полугрупп правых нулей (левых единиц), операция которой \ll определена правилом $u_i \ll u_j = u_j$.

4. Тривиальные расширения (шкала S_t)

$$A = (\mathbf{1}),$$

$$A_1^{(r)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array} \right),$$

$$A_2^{(r)} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array} \right),$$

$$A_3^{(r)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array} \right).$$

Построенные расширения матриц Кэли определяют шкалу полугрупп с нулевым умножением, операция которой \dagger определена правилом $u_1 \dagger u_j = u_1$.

Замечание 2.1.6. Понятно, что, с одной стороны, каждый из группоидов M_k (матрица Кэли $A_k = ({}^k a_{i,j})$) однозначно определяется по своему месту и базовому группоиду M (матрице A) в заданной шкале. С другой стороны, для любых значений $s, i \in 1..n_s, j \in 1..n_s$ и $k \geq s$ имеет место равенство ${}^s a_{i,j} = {}^k a_{i,j}$. Это позволяет определять элементы матриц ${}^k a_{i,j}$, исходя только из значений их индексов и элементов базовой матрицы A .

Сказанное в замечании 2.1.6 позволяет сформулировать простые рекурсивные алгоритмы определения значений элементов матриц Кэли ${}^k a_{i,j}$ фрактальной шкалы в диагональных, строковых, столбцевых и тривиальных шкалах.

2.1.1. Алгоритм определения элемента матриц Кэли диагональных шкал по его индексам (диагональный алгоритм) DA(A, i, j)

Входные данные: базовая матрица $A = (a_{i,j})$; значения индексов i, j элементов фрактальной матрицы.

1. Вычислить порядок базовой матрицы A : $n := \text{ord}(A)$.
2. Вычислить место наименьшего фрактального группоида, матрица Кэли которого содержит элемент с индексами i, j : $k := \lceil \max(\log(\frac{i}{n}), \log(\frac{j}{n})) \rceil$, где $\lceil x \rceil$ — потолок x — наименьшее целое, превосходящее или равное x .
3. Если $i \leq n \wedge j \leq n$, то
 - 3.1. Вывести $a_{i,j}$,
 иначе
 - 3.2. Если $i \leq 2^{k-1}n \wedge j > 2^{k-1}n$, то
 - 3.2.1. Вывести $DA(A, i, j - 2^{k-1}n) + 2^{k-1}n$,
 иначе
 - 3.2.2. Если $i > 2^{k-1}n \wedge j \leq 2^{k-1}n$, то
 - 3.2.2.1. Вывести $DA(A, i - 2^{k-1}n, j) + 2^{k-1}n$,
 иначе
 - 3.2.2.2. Вывести $DA(A, i - 2^{k-1}n, j - 2^{k-1}n)$.
4. Завершить работу.

2.1.2. Алгоритм определения элемента матриц Кэли строковых шкал по его индексам (строковый алгоритм) RA(A, i, j)

Входные данные: базовая матрица $A = (a_{i,j})$; значения индексов i, j элементов фрактальной матрицы.

1. Вычислить порядок базовой матрицы A : $n := \text{ord}(A)$.
2. Вычислить место наименьшего фрактального группоида, матрица Кэли которого содержит элемент с индексами i, j : $k := \lceil \max(\log(\frac{i}{n}), \log(\frac{j}{n})) \rceil$.
3. Если $i \leq n \wedge j \leq n$, то
 - 3.1. Вывести $a_{i,j}$,
 иначе
 - 3.2. Если $i \leq 2^{k-1}n \wedge j > 2^{k-1}n$, то
 - 3.2.1. Вывести $RA(A, i, j - 2^{k-1}n)$,
 иначе
 - 3.2.2. Если $i > 2^{k-1}n \wedge j \leq 2^{k-1}n$, то
 - 3.2.2.1. Вывести $RA(A, i - 2^{k-1}n, j) + 2^{k-1}n$,
 иначе
 - 3.2.2.2. Вывести $RA(A, i - 2^{k-1}n, j - 2^{k-1}n) + 2^{k-1}n$.
4. Завершить работу.

2.1.3. Алгоритм определения элемента матриц Кэли столбцевых шкал по его индексам (столбцевой алгоритм) SA(A, i, j)

Входные данные: базовая матрица $A = (a_{i,j})$; значения индексов i, j элементов фрактальной матрицы.

1. Вычислить порядок базовой матрицы A : $n := \text{ord}(A)$.
2. Вычислить место наименьшего фрактального группоида, матрица Кэли которого содержит элемент с индексами i, j : $k := \lceil \max(\log(\frac{i}{n}), \log(\frac{j}{n})) \rceil$.
3. Если $i \leq n \wedge j \leq n$, то
 - 3.1. Вывести $a_{i,j}$,
 иначе

3.2. Если $i \leq 2^{k-1}n \wedge j > 2^{k-1}n$, то
 3.2.1. Вывести $CA(A, i, j - 2^{k-1}n) + 2^{k-1}n$,

иначе

3.2.2. Если $i > 2^{k-1}n \wedge j \leq 2^{k-1}n$, то

3.2.2.1. Вывести $CA(A, i - 2^{k-1}n, j)$,

иначе

3.2.2.2. Вывести $CA(A, i - 2^{k-1}n, j - 2^{k-1}n) + 2^{k-1}n$.

4. Завершить работу.

2.1.4. Алгоритм определения элемента матриц Кэли тривиальных шкал по его индексам (тривиальный алгоритм) $TA(A, i, j)$

Входные данные: базовая матрица $A = (a_{i,j})$; значения индексов i, j элементов фрактальной матрицы.

1. Вычислить порядок базовой матрицы A : $n := \text{ord}(A)$.

2. Вычислить место наименьшего фрактального группоида, матрица Кэли которого содержит элемент с индексами i, j : $k := \lceil \max(\log(\frac{i}{n}), \log(\frac{j}{n})) \rceil$.

3. Если $i \leq n \wedge j \leq n$, то

3.1. Вывести $a_{i,j}$,

иначе

3.2. Если $i \leq 2^{k-1}n \wedge j > 2^{k-1}n$, то

3.2.1. Вывести $TA(A, i, j - 2^{k-1}n)$,

иначе

3.2.2. Если $i > 2^{k-1}n \wedge j \leq 2^{k-1}n$, то

3.2.2.1. Вывести $TA(A, i - 2^{k-1}n, j)$,

иначе

3.2.2.2. Вывести $TA(A, i - 2^{k-1}n, j - 2^{k-1}n)$.

4. Завершить работу.

2.2. Полугруппы бинарных операций и матриц Кэли

Для обозначения результатов бинарных операций на множестве U будем использовать как инфиксное $u_1 * u_2$, так и префиксное $\phi_*(u_1, u_2)$ обозначения. Множество бинарных операций будем обозначать U^{U^2} . Следуя [5], дадим следующее

Определение 2.2.1. Композицией бинарных операций $\phi_*(u_1, u_2)$ и $\phi_*(u_1, u_2)$ будем называть бинарную операцию $\phi_* \circ \phi_*(u_1, u_2)$, определяемую правилом

$$u_3 = \phi_* \circ \phi_*(u_1, u_2) = \phi_*(\phi_*(u_1, u_2), u_2) = (u_1 * u_2) * u_2.$$

В [5] было показано, что множество U^{U^2} замкнуто относительно операции \circ , а сама эта операция ассоциативна. Кроме того, она обладает нейтральным элементом — операцией полугруппы левых нулей (правых единиц) \wr , которая определена правилом $u_1 \wr u_2 = u_1$. Действительно,

$$(u_1 \wr u_2) * u_2 = u_1 * u_2 = (u_1 * u_2) \wr u_2.$$

Таким образом, алгебра $\langle U^{U^2}, (\circ) \rangle$ является полугруппой с единицей \wr , или моноидом.

Стандартным образом определим положительную степень $m \in \mathbb{N}$ бинарной операции ϕ_*

$$\begin{aligned} \phi_*^1 &= \phi_*, \\ \phi_*^{m+1} &= \phi_*^m \circ \phi_*. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим пару группоидов $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ и $\langle 1..n, (\triangleright) \rangle$ с матрицами Кэли $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$, соответственно.

Нетрудно понять, что т. к. $i \diamond j = a_{i,j}$ и $i \triangleright j = b_{i,j}$, то

$$\phi_\diamond \circ \phi_\triangleright(i, j) = \phi_\triangleright(\phi_\diamond(i, j), j) = (i \diamond j) \triangleright j = a_{i,j} \triangleright j = b_{a_{i,j}, j},$$

т. е. элементы матрицы Кэли $C = (c_{i,j})$ композиции операций $\phi_\diamond(u_1, u_2)$ и $\phi_\triangleright(u_1, u_2)$ определяются правилом

$$c_{i,j} = b_{a_{i,j}, j}. \quad (2.6)$$

В частности, элементы матрицы Кэли $A^2 = (a_{i,j}^2)$ операции ϕ_\diamond^2 — квадрата операции \diamond — имеют вид

$$a_{i,j}^2 = a_{a_{i,j}, j}. \quad (2.7)$$

Определение 2.2.2. Произведением матриц Кэли $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ одного порядка n будем называть матрицу $C = (c_{i,j})$ порядка n , элементы которой определены в соответствии с (2.6). Произведение матриц будем обозначать $A \bullet B$. Стандартным образом определим положительную степень $m \in \mathbb{N}$ матрицы A

$$\begin{aligned} A^1 &= A, \\ A^{m+1} &= A^m \bullet A. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Замечание 2.2.1.

Обозначим множество бинарных операций на конечном множестве $1..n$ как $(1..n)^{(1..n)^2}$ и рассмотрим полугруппу $\langle (1..n)^{(1..n)^2}, (\circ) \rangle$.

Обозначим множество квадратных матриц (Кэли) $A = (a_{i,j})$ порядка n с элементами $a_{i,j} \in 1..n$ как $K(1..n)$ и рассмотрим полугруппу $\langle K(1..n), (\bullet) \rangle$.

Нетрудно понять, что полугруппы $\langle (1..n)^{(1..n)^2}, (\circ) \rangle$ и $\langle K(1..n), (\bullet) \rangle$ изоморфны.

2.3. Свойства фрактальных матриц

Рассмотрим две базовые матрицы Кэли $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ одного порядка n , а также их фрактальные расширения $A^{(d)}, A^{(r)}, A^{(c)}, A^{(t)}, B^{(d)}, B^{(r)}, B^{(c)}, B^{(t)}$.

2.3.1. Произведение расширений $A^{(d)} \bullet B^{(d)}$

Рассмотрим произведение $A^{(d)} \bullet B^{(d)}$. В соответствии с (2.1), (2.6) и учетом того, что $a_{i,j}, b_{i,j} \in 1..n$ и $a_{i,j} + n, b_{i,j} + n \in n + 1..2n$, при $i, j \in 1..n$, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j} = b_{a_{i-n},j} + n.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j-n} = b_{a_{i-n},j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(d)} \bullet B^{(d)} = (a^{(d)} \bullet b^{(d)}_{i,j})$, где

$$a^{(d)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.9)$$

2.3.2. Произведение расширений $A^{(d)} \bullet B^{(r)}$

Рассмотрим произведение $A^{(d)} \bullet B^{(r)}$. В соответствии с (2.1), (2.2), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n},j} = b_{a_{i-n},j} + n.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n,j-n},j} = b_{a_{i-n,j-n},j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(d)} \bullet B^{(r)} = (a^{(d)} \bullet b^{(r)}_{i,j})$, где

$$a^{(d)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.10)$$

2.3.3. Произведение расширений $A^{(r)} \bullet B^{(d)}$

Рассмотрим произведение $A^{(r)} \bullet B^{(d)}$. В соответствии с (2.1), (2.2), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j+n} = b_{a_{i-n},j} + n.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j-n+n} = b_{a_{i-n},j-n},j-n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(r)} \bullet B^{(d)} = (a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j})$, где

$$a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.11)$$

2.3.4. Произведение расширений $A^{(d)} \bullet B^{(c)}$

Рассмотрим произведение $A^{(d)} \bullet B^{(c)}$. В соответствии с (2.1), (2.3), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j-n}+n,j} = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n},j+n} = b_{a_{i-n},j},j.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n},j-n} = b_{a_{i-n},j-n},j-n + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(d)} \bullet B^{(c)} = (a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j})$, где

$$a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3.5. Произведение расширений $A^{(c)} \bullet B^{(d)}$

Рассмотрим произведение $A^{(c)} \bullet B^{(d)}$. В соответствии с (2.1), (2.3), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j-n+n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j} = b_{a_{i-n},j}.$$

4. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j-n+n} = b_{a_{i-n},j-n,j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(c)} \bullet B^{(d)} = (a^{(c)} \bullet b^{(d)}_{i,j})$, где

$$a^{(c)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n,j-n}, & i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n. \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3.6. Произведение расширений $A^{(d)} \bullet B^{(t)}$

Рассмотрим произведение $A^{(d)} \bullet B^{(t)}$. В соответствии с (2.1), (2.4), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i,j-n+n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i-n},j+n} = b_{a_{i-n},j}.$$

4. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(d)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(d)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i-n},j-n,j} = b_{a_{i-n},j-n,j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(d)} \bullet B^{(t)} = (a^{(d)} \bullet b^{(t)}_{i,j})$, где

$$a^{(d)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n,j-n}, & i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n. \end{cases} \quad (2.14)$$

2.3.7. Произведение расширений $A^{(t)} \bullet B^{(d)}$

Рассмотрим произведение $A^{(t)} \bullet B^{(d)}$. В соответствии с (2.1), (2.4), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j,j} = b_{a_{i-n},j,j}.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(d)}_{a_{i-n},j-n,j} = b_{a_{i-n},j-n,j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(t)} \bullet B^{(d)} = (a^{(c)} \bullet b^{(d)}_{i,j})$, где

$$a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j,j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n,j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.15)$$

2.3.8. Произведение расширений $A^{(r)} \bullet B^{(r)}$

Рассмотрим произведение $A^{(r)} \bullet B^{(r)}$. В соответствии с (2.2), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n},j+n,j} = b_{a_{i-n},j,j} + n.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(d)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n},j-n+n,j} = b_{a_{i-n},j-n,j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(r)} \bullet B^{(d)} = (a^{(r)} \bullet b^{(d)}_{i,j})$, где

$$a^{(r)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j,j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n,j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.16)$$

2.3.9. Произведение расширений $A^{(r)} \bullet B^{(c)}$

Рассмотрим произведение $A^{(r)} \bullet B^{(c)}$. В соответствии с (2.2), (2.3), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n},j+n,j} = b_{a_{i-n},j,j}.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n,j-n}+n,j} = b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(r)} \bullet B^{(c)} = (a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j})$, где

$$a^{(d)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3.10. Произведение расширений $A^{(c)} \bullet B^{(r)}$

Рассмотрим произведение $A^{(c)} \bullet B^{(r)}$. В соответствии с (2.2), (2.3), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j-n}+n,j} = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n},j} = b_{a_{i-n},j}.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n,j-n}+n,j} = b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(c)} \bullet B^{(r)} = (a^{(c)} \bullet b^{(r)}_{i,j})$, где

$$a^{(c)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.18)$$

2.3.11. Произведение расширений $A^{(r)} \bullet B^{(t)}$

Рассмотрим произведение $A^{(r)} \bullet B^{(t)}$. В соответствии с (2.1), (2.4), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i-n},j} = b_{a_{i-n},j}.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(r)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(r)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i-n,j-n}+n,j} = b_{a_{i-n,j-n},j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(d)} \bullet B^{(t)} = (a^{(d)} \bullet b^{(t)}_{i,j})$, где

$$a^{(r)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.19)$$

2.3.12. Произведение расширений $A^{(t)} \bullet B^{(r)}$

Рассмотрим произведение $A^{(t)} \bullet B^{(r)}$. В соответствии с (2.2), (2.4), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n},j} = b_{a_{i-n},j}.$$

4. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = b^{(r)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(r)}_{a_{i-n},j-n} = b_{a_{i-n},j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(t)} \bullet B^{(r)} = (a^{(t)} \bullet b^{(r)}_{i,j})$, где

$$a^{(t)} \bullet b^{(r)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n}, & i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n. \end{cases} \quad (2.20)$$

2.3.13. Произведение расширений $A^{(c)} \bullet B^{(c)}$

Рассмотрим произведение $A^{(c)} \bullet B^{(c)}$. В соответствии с (2.3), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j-n}+n,j} = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n},j} = b_{a_{i-n},j}.$$

4. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n},j-n} + n = b_{a_{i-n},j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(c)} \bullet B^{(c)} = (a^{(c)} \bullet b^{(c)}_{i,j})$, где

$$a^{(c)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n \\ b_{a_{i-n},j}, & i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n},j-n} + n, & i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n. \end{cases} \quad (2.21)$$

2.3.14. Произведение расширений $A^{(c)} \bullet B^{(t)}$

Рассмотрим произведение $A^{(c)} \bullet B^{(t)}$. В соответствии с (2.3), (2.4), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i,j-n+n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i-n,j},j} = b_{a_{i-n,j},j}.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(c)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = b^{(t)}_{a^{(c)}_{i,j},j} = b^{(t)}_{a_{i-n,j-n+n},j} = b_{a_{i-n,j-n},j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(c)} \bullet B^{(t)} = (a^{(c)} \bullet b^{(t)}_{i,j})$, где

$$a^{(c)} \bullet b^{(t)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n,j},j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.22)$$

2.3.15. Произведение расширений $A^{(t)} \bullet B^{(c)}$

Рассмотрим произведение $A^{(t)} \bullet B^{(c)}$. В соответствии с (2.3), (2.4), (2.6), как и ранее, получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j},j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i,j-n},j} = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n,j},j} = b_{a_{i-n,j},j}.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a^{(t)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = b^{(c)}_{a^{(t)}_{i,j},j} = b^{(c)}_{a_{i-n,j-n},j} = b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $A^{(t)} \bullet B^{(c)} = (a^{(t)} \bullet b^{(c)}_{i,j})$, где

$$a^{(t)} \bullet b^{(c)}_{i,j} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n,j},j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.23)$$

2.3.16. Расширение произведения $(A \bullet B)^{(d)}$

Рассмотрим диагональное расширение произведения матриц $(A \bullet B)^{(d)}$. В соответствии с (2.2) и (2.6), получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b^{(d)}_{i,j} = a \bullet b_{i,j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a \bullet b^{(d)}_{i,j} = a \bullet b_{i,j-n} + n = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b^{(d)}_{i,j} = a \bullet b_{i-n,j} + n = b_{a_{i-n,j},j} + n.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(d)} = a \bullet b_{i-n,j-n} = b_{a_{i-n,j-n},j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $(A \bullet B)^{(d)} = (a \bullet b_{i,j}^{(d)})$, где

$$a \bullet b_{i,j}^{(d)} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n,j},j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3.17. Расширение произведения $(A \bullet B)^{(r)}$

Рассмотрим строковое расширение произведения матриц $(A \bullet B)^{(r)}$. В соответствии с (2.2) и (2.6), получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(r)} = a \bullet b_{i,j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(r)} = a \bullet b_{i,j-n} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(r)} = a \bullet b_{i-n,j} + n = b_{a_{i-n,j},j} + n.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(r)} = a \bullet b_{i-n,j-n} + n = b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $(A \bullet B)^{(r)} = (a \bullet b_{i,j}^{(r)})$, где

$$a \bullet b_{i,j}^{(r)} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n,j},j} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.25)$$

2.3.18. Расширение произведения $(A \bullet B)^{(c)}$

Рассмотрим столбцовое расширение произведения матриц $(A \bullet B)^{(c)}$. В соответствии с (2.3) и (2.6), получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(c)} = a \bullet b_{i,j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(c)} = a \bullet b_{i,j-n} + n = b_{a_{i,j-n},j-n} + n.$$

3. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(c)} = a \bullet b_{i-n,j} = b_{a_{i-n,j},j}.$$

4. Если $i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(c)} = a \bullet b_{i-n,j-n} + n = b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n.$$

Таким образом, имеет место равенство $(A \bullet B)^{(c)} = (a \bullet b_{i,j}^{(c)})$, где

$$a \bullet b_{i,j}^{(c)} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n} + n, & i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n \\ b_{a_{i-n,j},j}, & i \in n + 1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n} + n, & i \in n + 1..2n \wedge j \in n + 1..2n. \end{cases} \quad (2.26)$$

2.3.19. Расширение произведения $(A \bullet B)^{(t)}$

Рассмотрим тривиальное расширение произведения матриц $(A \bullet B)^{(t)}$. В соответствии с (2.4) и (2.6), получаем следующее.

1. Если $i \in 1..n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(c)} = a \bullet b_{i,j} = b_{a_{i,j},j}.$$

2. Если $i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(t)} = a \bullet b_{i,j-n} = b_{a_{i,j-n},j-n}.$$

3. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(t)} = a \bullet b_{i-n,j} = b_{a_{i-n,j},j}.$$

4. Если $i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n$, то

$$a \bullet b_{i,j}^{(t)} = a \bullet b_{i-n,j-n} = b_{a_{i-n,j-n},j-n}.$$

Таким образом, имеет место равенство $(A \bullet B)^{(t)} = (a \bullet b_{i,j}^{(t)})$, где

$$a \bullet b_{i,j}^{(t)} = \begin{cases} b_{a_{i,j},j}, & i \in 1..n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i,j-n},j-n}, & i \in 1..n \wedge j \in n+1..2n \\ b_{a_{i-n,j},j}, & i \in n+1..2n \wedge j \in 1..n \\ b_{a_{i-n,j-n},j-n}, & i \in n+1..2n \wedge j \in n+1..2n. \end{cases} \quad (2.27)$$

Из (2.9) и (2.27) следует

Утверждение 2.3.1. Пусть $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ — матрицы Кэли одного порядка n . Тогда

$$\begin{aligned} A^{(d)} \bullet B^{(d)} &= A^{(r)} \bullet B^{(r)} = (A \bullet B)^{(r)}, \\ A^{(d)} \bullet B^{(r)} &= A^{(r)} \bullet B^{(d)} = (A \bullet B)^{(d)}, \\ A^{(d)} \bullet B^{(c)} &= A^{(t)} \bullet B^{(d)} = A^{(r)} \bullet B^{(c)} = A^{(c)} \bullet B^{(r)} = A^{(c)} \bullet B^{(c)} = A^{(t)} \bullet B^{(c)} = (A \bullet B)^{(c)}, \\ A^{(c)} \bullet B^{(d)} &= A^{(d)} \bullet B^{(t)} = A^{(r)} \bullet B^{(t)} = A^{(t)} \bullet B^{(r)} = A^{(c)} \bullet B^{(t)} = (A \bullet B)^{(t)}. \end{aligned}$$

Из утверждения 2.3.1 следует

Утверждение 2.3.2. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица Кэли и $m \in \mathbb{N}$. Тогда степени фрактальных расширений матрицы Кэли A удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned} (A^{(d)})^m &= (A^m)^{(r)}, & m = 2s \wedge s \in \mathbb{N}; \\ (A^{(d)})^m &= (A^m)^{(d)}, & m = 2s - 1 \wedge s \in \mathbb{N}; \\ (A^{(r)})^m &= (A^m)^{(r)}, & m \in \mathbb{N}; \\ (A^{(c)})^m &= (A^m)^{(c)}, & m \in \mathbb{N}; \\ (A^{(t)})^m &= (A^m)^{(t)}, & m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Из утверждений 2.3.1, 2.3.2 и замечания 2.1.5 следует

Утверждение 2.3.3. Пусть $S_\sigma = \{M_k^{(\sigma)}\}_{k=1}^\infty$ — шкала фрактальных группоидов $M_k^{(\sigma)} = \langle 1..n_k, (\diamond_k) \rangle$ с матрицами Кэли A_k и базовой матрицей A . Тогда семейство группоидов $M_k^m = \langle 1..n_k, (\phi_{\diamond_k}^m) \rangle$, при фиксированном значении $m \in \mathbb{N}$, образует шкалу группоидов $S_{\sigma'}^m$ с базовой матрицей A^m , при этом тип шкалы $S_{\sigma'}^m$ будет определяться следующими условиями:

$$\begin{aligned} \sigma' &= r, & \sigma &= d \wedge m = 2s \wedge s \in \mathbb{N}; \\ \sigma' &= d, & \sigma &= d \wedge m = 2s - 1 \wedge s \in \mathbb{N}; \\ \sigma' &= \sigma, & \sigma &\in \{r, c, t\} \wedge m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Замечание 2.3.1.

Утверждение 2.3.3 фактически означает, что для представления матрицами Кэли степеней фрактальных расширений операции базового группоида нет необходимости вычислять степени матриц Кэли этих расширений, а достаточно вычислить соответствующую степень матрицы Кэли базовой операции и затем построить матрицу нужного расширения.

С учетом алгоритмов 2.1.1–2.1.4 это позволяет получить существенный выигрыш при вычислении результатов операций во фрактальных шкалах группоидов. Напомним, что порядок матрицы Кэли $A_k^{(\sigma)}$ фрактального группоида зависит от его места k в шкале и порядка $n = \text{ord}(A)$ базовой матрицы Кэли,

как $2^k n$, т. е. экспоненциально от k . В свою очередь глубина рекурсии алгоритмов 2.1.1–2.1.4 не превышает k .

В качестве примера рассмотрим конечную последовательность степеней матриц Кэли $(A_k^{(\sigma)})^m$ фрактальных шкал, построенных для базового группоида со случайной матрицей Кэли

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Степени базовой матрицы $(A^m, m \in 1..4)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Степени диагонального расширения $((A_1^{(d)})^m, m \in 1..4)$

$$(A_1^{(d)}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 5 & 5 & 4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 4 & 6 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 5 & 4 & 4 \\ \hline 5 & 5 & 4 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 4 & 6 & 6 & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ 5 & 4 & 4 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array} \right), \quad (A_1^{(d)})^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 1 & 3 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{array} \right),$$

$$(A_1^{(d)})^3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 5 & 4 & 4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 4 & 5 & 4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 5 & 6 & 4 \\ \hline 5 & 4 & 4 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 4 & 5 & 4 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 5 & 6 & 4 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array} \right), \quad (A_1^{(d)})^4 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right).$$

3. Степени диагонального расширения $((A_2^{(d)})^m, m \in 1..4)$

$$(A_2^{(d)}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & 8 & 8 & 7 & 11 & 11 & 10 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & 7 & 9 & 9 & 10 & 12 & 12 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 8 & 7 & 7 & 11 & 10 & 10 \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 11 & 11 & 10 & 8 & 8 & 7 \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 10 & 12 & 12 & 7 & 9 & 9 \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 11 & 10 & 10 & 8 & 7 & 7 \\ \hline 8 & 8 & 7 & 11 & 11 & 10 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ 7 & 9 & 9 & 10 & 12 & 12 & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} \\ 8 & 7 & 7 & 11 & 10 & 10 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ 11 & 11 & 10 & 8 & 8 & 7 & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 10 & 12 & 12 & 7 & 9 & 9 & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ 11 & 10 & 10 & 8 & 7 & 7 & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array} \right),$$

$$(A_2^{(d)})^2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ \hline 7 & 9 & 7 & 7 & 9 & 7 & 7 & 9 & 7 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ 10 & 12 & 10 & 10 & 12 & 10 & 10 & 12 & 10 & 10 & 12 & 10 \\ 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 \end{array} \right),$$

$$(A_2^{(d)})^3 = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 8 & 7 & 7 & 11 & 10 & 10 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & 7 & 8 & 7 & 10 & 11 & 10 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & 8 & 9 & 7 & 11 & 12 & 10 \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 11 & 10 & 10 & 8 & 7 & 7 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 10 & 11 & 10 & 7 & 8 & 7 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 11 & 12 & 10 & 8 & 9 & 7 \\ \hline 8 & 7 & 7 & 11 & 10 & 10 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ 7 & 8 & 7 & 10 & 11 & 10 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ 8 & 9 & 7 & 11 & 12 & 10 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ 11 & 10 & 10 & 8 & 7 & 7 & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 8 & 7 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 11 & 12 & 10 & 8 & 9 & 7 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array} \right),$$

$$(A_2^{(d)})^4 = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \hline 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 12 & 10 & 11 & 12 & 10 & 11 & 12 & 10 & 11 & 12 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array} \right).$$

4. Степени строкового расширения $((A_1^{(r)})^m, m \in 1..4)$

$$(A_1^{(r)}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right), \quad (A_1^{(r)})^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \hline 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{array} \right),$$

$$(A_1^{(r)})^3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \hline 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \end{array} \right), \quad (A_1^{(r)})^4 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right).$$

5. Степени строкового расширения $((A_2^{(r)})^m, m \in 1..4)$

$$(A_2^{(r)}) = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \hline 8 & 8 & 7 & 8 & 8 & 7 & 8 & 8 & 7 & 8 & 8 & 7 \\ 7 & 9 & 9 & 7 & 9 & 9 & 7 & 9 & 9 & 7 & 9 & 9 \\ 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 11 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 \\ 10 & 12 & 12 & 10 & 12 & 12 & 10 & 12 & 12 & 10 & 12 & 12 \\ 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 10 \end{array} \right),$$

8. Степени тривиального расширения $((A_1^{(t)})^m, m \in 1..4)$

$$\begin{aligned}
 (A_1^{(t)}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right), & (A_1^{(t)})^2 &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \\
 (A_1^{(t)})^3 &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right), & (A_1^{(t)})^4 &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

9. Степени тривиального расширения $((A_2^{(t)})^m, m \in 1..4)$

$$\begin{aligned}
 (A_2^{(t)}) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right), \\
 (A_2^{(t)})^2 &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \\
 (A_2^{(t)})^3 &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

$$(A_2^{(t)})^4 = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

2.4. Циклические полугруппы фрактальных расширений и криптография с открытым ключом

Рассмотрим базовый группоид $M = \langle 1..n, (\diamond) \rangle$ с матрицей Кэли $A = (a_{i,j})$ и некоторую шкалу его фрактальных расширений $S_\sigma = \{M_k^{(\sigma)}\}_{k=0}^\infty$. Зафиксируем место k_0 в этой шкале и соответствующий ему группоид $M_{k_0}^{(\sigma)} = \langle 1..n_{k_0}, (\diamond_{k_0}^\sigma) \rangle$. Для упрощения записи будем обозначать его как $M_* = \langle 1..N, (*) \rangle$, где $N = 2^{k_0}n$ и $\phi_* = \phi_{\diamond_{k_0}^\sigma}$. Матрицу Кэли операции $*$ обозначим как $A = (a_{i,j})$.

В дальнейшем нас будет интересовать циклическая полугруппа степеней операции $*$ — $\langle \{\phi_*^m\}_{m=1}^\infty, (\circ) \rangle \subset \langle U^{U^2}, (\circ) \rangle$.

В [5] была предложена следующая модификация протокола Диффи — Хелмана — Меркла (ДНМ) открытого распределения ключей шифрования на основе группоидов.

Протокол Диффи — Хелмана — Меркла на группоидах ДНМ-М

1. Опубликованные общедоступные значения: группоид $\langle U, (*) \rangle$; $p \in \mathbb{N}$; последовательность значений аргументов $\{(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$, $u_1^i, u_2^i \in U$, $i \in 1..p$.
2. Вычисляемые значения на стороне А: операция $\phi_* = \phi_*^m$ — m -я степень операции $*$, последовательность значений результатов операции $\{\phi_*(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$. Значения, передаваемые по открытому каналу связи: $\{\phi_*(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$. Секретное значение: m .
3. Вычисляемые значения на стороне В: операция $\phi_{*'} = \phi_*^{m'}$ — m' -я степень операции $*$, последовательность значений результатов операции $\{\phi_{*'}(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$. Значения, передаваемые по открытому каналу связи: $\{\phi_{*'}(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$. Секретное значение: m' .
4. Вычисляемое значение секретного ключа на стороне А: $K = \{\phi_*(\phi_{*'}(u_1^i, u_2^i), u_2^i)\}_{i=1}^p$.
5. Вычисляемое значение секретного ключа на стороне В: $K = \{\phi_{*'}(\phi_*(u_1^i, u_2^i), u_2^i)\}_{i=1}^p$.
6. Значения, известные третьей стороне С: $\langle U, (*) \rangle$, p , $\{(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$, $\{\phi_{*m}(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$, $\{\phi_{*m'}(u_1^i, u_2^i)\}_{i=1}^p$.

Так как в силу ассоциативности операции \circ имеет место правило степеней

$$\phi_* \circ \phi_{*'} = \phi_*^m \circ \phi_*^{m'} = \phi_*^{m+m'} = \phi_*^{m'} \circ \phi_*^m = \phi_{*'} \circ \phi_*,$$

то значения секретных ключей $\phi_*(\phi_{*'}(u_1^i, u_2^i), u_2^i) = \phi_{*'} \circ \phi_*(u_1, u_2)$ и $\phi_{*'}(\phi_*(u_1^i, u_2^i), u_2^i) = \phi_* \circ \phi_{*'}(u_1, u_2)$, вычисленные на сторонах А и В, совпадают.

Хорошо известно [6], что сложность вычисления операции $\phi_* = \phi_*^m$ с применением быстрого алгоритма возведения в степень оценивается как $O(\log(m))$ полугрупповых операций \circ .

Возможности практического применения протокола ДНМ-М в первую очередь определяются потребностями в памяти для представления операций $\phi_* = \phi_*^m$ и $\phi_{*'} = \phi_*^{m'}$ на носителе большой мощности и вычислительной сложностью алгоритма построения секретного ключа.

В [5] рассматривался способ представления операции $\phi_* = \phi_*^m$ индикатором ее графика, точнее, представлением индикатора в форме трехиндексного массива двоичных значений $r_{i,j,k}^m$, $i, j, k \in 1..N$, который в случае группоида $M_* = \langle 1..N, (*) \rangle$ определяется правилом

$$r_{i,j,k}^m = \begin{cases} 1, & \phi_*^m(i, j) = k \\ 0, & \phi_*^m(i, j) \neq k \end{cases}.$$

Нетрудно показать [5], что циклическая полугруппа $\langle \{\phi_*^m\}_{m=1}^\infty, (\circ) \rangle$ изоморфна полугруппе $\langle \{r_{i,j,k}^m\}_{m=1}^\infty, (\cdot) \rangle$, где

$$r_{i,j,s}^m \cdot r_{s,j,k}^n = \max_{s \in 1..N} (\min(r_{i,j,s}^m, r_{s,j,k}^n)),$$

$$r_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & i * j = k \\ 0, & i * j \neq k \end{cases},$$

$$r_{i,j,k}^1 = r_{i,j,k},$$

$$r_{i,j,k}^{m+1} = r_{i,j,s}^m \cdot r_{s,j,k}, \quad i, j, k \in 1..N, \quad m \in \mathbb{N}.$$

При таком способе представления сложность реализации операции \circ оценивается как $O(N^4)$ элементарных операций (взятия минимума и максимума из двоичных значений). Сложность нахождения результата операции $\phi_*^m(i, j)$ оценивается как $O(N)$ элементарных операций сравнения (двоичных значений). Грубые верхние оценки потребности в памяти и вычислительная сложность алгоритма построения секретного ключа составляют $O(N^3)$ бит и $O(N^4)$ элементарных операций, соответственно. Таким образом, даже при мощности носителя группоида $N \sim 2^{20}$ потребности в памяти и вычислительная сложность будут весьма велики и составят $O(2^{60})$ и $O(2^{80})$ единиц измерения.

Изученные в предыдущих разделах фрактальные группоиды пригодны для снижения вычислительных затрат при реализации протокола ДНМ-М. В силу замечания 2.3.1 для вычисления результата операции $\phi_*(i, j) = \phi_*^m(i, j)$ фрактального группоида $M_* = \langle 1..N, (*) \rangle$ потребуется хранение только матрицы Кэли $A = (a_{i,j})$ базового группоида $M = \langle 1..n, (\diamond) \rangle$, где $N = 2^{k_0}n$, и применение к ней одного из алгоритмов 2.1.1–2.1.4, глубина рекурсии каждого из которых не превзойдет k_0 .

Для более точных оценок рассмотрим пару матриц Кэли $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ порядка n и матричную операцию \bullet , определенную в соответствии с (2.6) как $A \bullet B = (b_{a_{i,j},j})$. Нетрудно понять, что реализация операции \bullet потребует $2n^2$ операций последовательного доступа к элементам матриц A и B и одной операции записи итогового значения в результирующий массив. Последовательность этих трех операций будем считать элементарной операцией доступа. Таким образом, вычислительная сложность операции \bullet может быть оценена как $2n^2$ элементарных операций доступа.

В силу замечания 2.2.1, циклические полугруппы $\langle \{\phi_*^m\}_{m=1}^\infty, (\circ) \rangle$ и $\langle \{A^m\}_{m=1}^\infty, (\bullet) \rangle$ изоморфны, поэтому вычислительную сложность реализации операции ϕ_*^m можно оценить как $O(mn^2)$ элементарных операций доступа.

Для представления $i \in 1..N$ потребуется не более $\log(N)+1 = k_0 + \log(n)+1$ бит. При этом потребности в памяти для представления операции ϕ_* матрицей Кэли можно оценить как $O(n^2 \log(n))$ бит.

Для оценки вычислительной сложности определения результата операции $\phi_*(i, j) = \phi_*^m(i, j)$ достаточно проанализировать операции, выполняемые на шаге 3.2 каждого из алгоритмов 2.1.1–2.1.4. На каждом уровне рекурсии будет выполняться не более двух операций вычитания для индексов $i-n, j-n$, не более одной операции сложения для возвращаемого значения процедуры $D/R/C/GTA+n$ и не более трех операций целочисленного сравнения. Таким образом, вычислительную сложность определения значения $\phi_*(i, j)$ можно оценить как $O(k_0)$ арифметических операций и операций целочисленного сравнения.

Сформулируем протокол Диффи — Хелмана — Меркла для фрактальных группоидов.

Протокол Диффи — Хелмана — Меркла на группоидах ДНМ-FM

1. Опубликованные общедоступные значения: базовый группоид $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$ (базовая матрица Кэли $A = (a_{i,j})$); тип расширения $\sigma \in \{d, r, c, t\}$, $p \in \mathbb{N}$; последовательность значений аргументов фрактальных группоидов $\{(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$, $i_s, j_s \in 1..n_{k_s}$, $s \in 1..p$.
2. Вычисляемые значения на стороне А: операция ϕ_\diamond^m — m -я степень операции \diamond , последовательность значений результатов операции $\{\phi_*(i_s, j_s)\}_{s=1}^p = \{\phi_{\diamond_{k_s}}^m(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$. Значения, передаваемые по открытому каналу связи: $\{\phi_*(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$. Секретное значение: m (для диагонального расширения — четное число).
3. Вычисляемые значения на стороне В: операция $\phi_\diamond^{m'}$ — m' -я степень операции \diamond , последовательность значений результатов операции $\{\phi_{\star'}(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$, где $\phi_{\star'}(i_s, j_s) = \phi_{\diamond_{k_s}}^{m'}(i_s, j_s)$. Значения, передаваемые по открытому каналу связи: $\{\phi_{\star'}(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$. Секретное значение: m' (для диагонального расширения — четное число).
4. Вычисляемое значение секретного ключа на стороне А: $K = \{\phi_*(\phi_{\star'}(i_s, j_s), j_s)\}_{s=1}^p$.

5. Вычисляемое значение секретного ключа на стороне В: $K = \{\phi_{\star'}(\phi_{\star}(i_s, j_s), j_s)\}_{s=1}^p$.
6. Значения, известные третьей стороне С: $\langle 1..n, (\diamond) \rangle$, p , $\{(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$, $\{\phi_{\star}(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$, $\{\phi_{\star'}(i_s, j_s)\}_{s=1}^p$.

Замечание 2.4.1

В силу замечания 2.1.6, можно считать, что целочисленные интервалы $1..n_{k_s}$ о которых идет речь в п. 1 протокола ДНМ-ФМ, являются наименьшими по включению из содержащих заданные значения $i_s, j_s \in 1..n_{k_s}$, т.е. $i_s, j_s \in 1..n_{k_s}$, и $i_s, j_s \notin 1..n_k$ для любого $n_k = 2^k n < n_{k_s} = 2^{k_s} n$.

Для вычисления значений результатов операции $\phi_{\star'}(i_s, j_s) = \phi_{\diamond_{k_s}}^{m'}(i_s, j_s)$ в зависимости от типа расширения σ применяется один из алгоритмов 2.1.1–2.1.4.

В качестве примера приведем результаты численного эксперимента реализации протокола ДНМ-ФМ.

1. Опубликованные общедоступные значения: базовая матрица Кэли

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 5 & 13 & 4 & 11 & 13 & 3 & 9 & 1 & 1 & 8 & 2 & 9 & 13 & 16 \\ 9 & 6 & 16 & 7 & 13 & 13 & 16 & 1 & 6 & 10 & 15 & 8 & 6 & 9 & 12 & 14 \\ 13 & 2 & 16 & 5 & 3 & 7 & 12 & 5 & 2 & 13 & 16 & 9 & 1 & 7 & 15 & 9 \\ 14 & 14 & 8 & 5 & 5 & 1 & 9 & 9 & 8 & 5 & 11 & 5 & 2 & 7 & 2 & 12 \\ 5 & 7 & 16 & 10 & 15 & 10 & 6 & 7 & 15 & 13 & 3 & 3 & 16 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 12 & 11 & 6 & 2 & 13 & 10 & 10 & 9 & 9 & 7 & 11 & 13 \\ 4 & 5 & 3 & 12 & 6 & 16 & 7 & 9 & 12 & 7 & 2 & 12 & 12 & 10 & 4 & 3 \\ 11 & 15 & 9 & 12 & 13 & 4 & 16 & 14 & 8 & 16 & 14 & 2 & 1 & 10 & 7 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 8 & 5 & 15 & 13 & 15 & 13 & 2 & 7 & 2 & 7 & 13 & 10 & 4 \\ 11 & 5 & 2 & 16 & 8 & 1 & 10 & 2 & 4 & 14 & 6 & 1 & 7 & 10 & 14 & 11 \\ 3 & 3 & 9 & 15 & 2 & 3 & 14 & 1 & 2 & 9 & 1 & 6 & 10 & 3 & 7 & 16 \\ 9 & 9 & 1 & 9 & 12 & 8 & 9 & 16 & 7 & 7 & 7 & 16 & 8 & 6 & 13 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 11 & 9 & 9 & 12 & 13 & 5 & 14 & 1 & 14 & 6 & 3 & 1 & 13 \\ 10 & 14 & 3 & 15 & 10 & 15 & 6 & 12 & 7 & 16 & 4 & 12 & 10 & 16 & 16 & 14 \\ 2 & 9 & 14 & 9 & 7 & 15 & 15 & 16 & 6 & 11 & 7 & 12 & 9 & 9 & 10 & 12 \\ 5 & 15 & 7 & 11 & 7 & 16 & 1 & 6 & 11 & 2 & 4 & 15 & 8 & 10 & 16 & 1 \end{pmatrix},$$

тип расширения d — диагональное, длина последовательности значений аргументов 4, последовательность значений аргументов $\{(53, 6), (3273, 234), (11529, 2149), (434490, 39752)\}$,

2. Секретное значение на стороне А: показатель степени $m = 4$. Вычисляемые значения на стороне А: степень базовой матрицы Кэли

$$A^m = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & 9 & 7 & 16 & 13 & 9 & 15 & 1 & 1 & 2 & 7 & 7 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & 16 & 8 & 15 & 15 & 12 & 7 & 15 & 2 & 15 & 2 & 12 & 7 & 13 & 14 \\ 11 & 6 & 16 & 11 & 3 & 16 & 12 & 15 & 5 & 2 & 1 & 2 & 9 & 10 & 16 & 4 \\ 3 & 14 & 16 & 11 & 6 & 7 & 9 & 6 & 8 & 16 & 1 & 2 & 7 & 10 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 16 & 15 & 12 & 3 & 6 & 16 & 5 & 2 & 11 & 8 & 2 & 5 & 12 & 12 \\ 13 & 6 & 6 & 16 & 12 & 16 & 6 & 5 & 6 & 2 & 6 & 2 & 8 & 10 & 2 & 13 \\ 11 & 7 & 3 & 12 & 12 & 16 & 7 & 6 & 7 & 7 & 2 & 12 & 2 & 10 & 13 & 12 \\ 2 & 6 & 7 & 12 & 15 & 3 & 12 & 6 & 8 & 14 & 1 & 8 & 9 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 6 & 3 & 8 & 6 & 15 & 13 & 2 & 6 & 16 & 7 & 8 & 1 & 10 & 16 & 12 \\ 2 & 7 & 3 & 9 & 5 & 7 & 10 & 5 & 8 & 10 & 10 & 8 & 1 & 10 & 16 & 16 \\ 9 & 2 & 7 & 12 & 5 & 16 & 6 & 7 & 5 & 14 & 1 & 8 & 8 & 10 & 12 & 1 \\ 13 & 2 & 7 & 9 & 12 & 11 & 9 & 1 & 12 & 7 & 7 & 16 & 6 & 10 & 1 & 12 \\ 3 & 5 & 16 & 8 & 7 & 15 & 12 & 13 & 13 & 10 & 1 & 15 & 12 & 10 & 13 & 13 \\ 13 & 14 & 3 & 12 & 9 & 15 & 6 & 2 & 12 & 14 & 1 & 12 & 8 & 10 & 16 & 14 \\ 3 & 2 & 7 & 9 & 12 & 15 & 15 & 1 & 15 & 10 & 7 & 12 & 8 & 7 & 16 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 12 & 16 & 9 & 3 & 13 & 16 & 1 & 15 & 6 & 10 & 16 & 16 \end{pmatrix}.$$

Последовательность значений результатов операции, вычисленных при помощи алгоритма 2.1.1 и передаваемых по открытому каналу связи: $\{51, 3120, 9574, 408181\}$.

3. Секретное значение на стороне В: показатель степени $m' = 10$. Вычисляемые значения на стороне В: степень базовой матрицы Кэли

$$A^{m'} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & 9 & 12 & 16 & 13 & 3 & 13 & 1 & 1 & 2 & 9 & 10 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 16 & 8 & 12 & 15 & 12 & 1 & 13 & 14 & 15 & 2 & 7 & 10 & 13 & 14 \\ 3 & 6 & 16 & 8 & 3 & 16 & 12 & 5 & 6 & 14 & 1 & 2 & 6 & 10 & 16 & 4 \\ 13 & 14 & 16 & 8 & 12 & 16 & 9 & 9 & 8 & 10 & 1 & 2 & 9 & 10 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 16 & 12 & 12 & 16 & 6 & 7 & 6 & 14 & 1 & 8 & 1 & 5 & 1 & 12 \\ 2 & 6 & 6 & 9 & 12 & 16 & 6 & 2 & 5 & 14 & 6 & 2 & 12 & 10 & 13 & 13 \\ 3 & 7 & 3 & 12 & 12 & 16 & 7 & 9 & 7 & 7 & 2 & 12 & 1 & 10 & 13 & 12 \\ 9 & 6 & 7 & 12 & 12 & 16 & 12 & 9 & 8 & 2 & 1 & 8 & 6 & 10 & 1 & 14 \\ 9 & 6 & 3 & 8 & 12 & 15 & 13 & 15 & 5 & 10 & 7 & 8 & 8 & 10 & 16 & 12 \\ 9 & 7 & 3 & 9 & 12 & 16 & 10 & 2 & 8 & 16 & 10 & 8 & 8 & 10 & 16 & 16 \\ 11 & 2 & 7 & 12 & 12 & 16 & 6 & 1 & 6 & 2 & 1 & 8 & 12 & 10 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 9 & 12 & 16 & 9 & 16 & 12 & 7 & 7 & 16 & 2 & 10 & 1 & 12 \\ 13 & 5 & 16 & 8 & 12 & 15 & 12 & 13 & 15 & 16 & 1 & 15 & 7 & 10 & 13 & 13 \\ 2 & 14 & 3 & 12 & 12 & 15 & 6 & 15 & 12 & 2 & 1 & 12 & 12 & 10 & 16 & 14 \\ 13 & 2 & 7 & 9 & 12 & 15 & 15 & 16 & 13 & 16 & 7 & 12 & 12 & 10 & 16 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 12 & 16 & 9 & 6 & 15 & 10 & 1 & 15 & 2 & 10 & 16 & 16 \end{pmatrix}.$$

Последовательность значений результатов операции, вычисленных при помощи алгоритма 2.1.1 и передаваемых по открытому каналу связи: {64, 3114, 9580, 408178}.

4. Вычисляемое при помощи алгоритма 2.1.1 значение секретного ключа на стороне А: {64, 3274, 11532, 434487}.
5. Вычисляемое при помощи алгоритма 2.1.1 значение секретного ключа на стороне В: {64, 3274, 11532, 434487}.

Выводы

В статье определены понятия фрактальных расширений конечных группоидов $M = \langle U, (*) \rangle$, а также связанные с ними понятия типов и шкал расширений. Конечный группоид полностью описывается своей таблицей Кэли, поэтому группоиды и таблицы Кэли их операций естественным образом отождествляются. Фрактальное расширение позволяет удваивать мощность носителя исходного (базового) группоида, определяя новую бинарную операцию путем «клонирования» базовой таблицы Кэли. При этом каждый группоид является подгруппоидом своего расширения. Для представления группоидов использовались целочисленные диапазоны $1..n$ и матрицы Кэли $A = (a_{i,j})$ с элементами $a_{i,j} \in 1..n$. Система последовательных расширений некоторого «базового» группоида $M = \langle 1..n, (\diamond) \rangle$ с матрицей $A = (a_{i,j})$ образует шкалу фрактальных расширений $S_\sigma = \{M_k^{(\sigma)}\}_{k=0}^\infty$ с фрактальными матрицами $A_k = ({}^k a_{i,j})$. Самоподобная структура матриц Кэли A_k позволяет сформулировать простые алгоритмы для вычисления результатов операций во фрактальных шкалах исключительно на основании базовой матрицы Кэли. Таким образом, несмотря на то что мощность носителей группоидов фрактальной шкалы возрастает экспоненциально как $2^k n$, для нахождения результатов их операций достаточно оперировать с элементами базовой матрицы порядка n , а не фрактальных матриц порядка $2^k n$. При этом сложность алгоритмов вычисления результатов оценивается как $O(k)$ целочисленных арифметических операций. Тем самым обеспечивается существенная экономия вычислительных ресурсов при расчетах.

Примечательным является тот факт, что фрактальные расширения сохраняют свойства фрактальности относительно композиции своих операций. Ранее было установлено [5], что композиция бинарных операций группоидов с общим носителем обладает свойством ассоциативности, что позволило использовать ее для модификации протокола протокола Диффи — Хелмана — Меркла открытого распределения ключей шифрования. Однако в случае произвольных группоидов данная модификация предъявляла весьма высокие требования к вычислительным ресурсам и памяти для своей реализации. Шкалы фрактальных группоидов позволяют снизить требуемые объемы вычислений до приемлемого уровня.

Все определяемые в статье понятия сопровождаются подробными примерами, также приведен пример результатов численного эксперимента по выработке общего ключа шифрования в асимметричной схеме с двумя участниками.

Литература

- [1] Мальцев А.И. Алгебраические системы. Москва: Физматлит, 1970. 392 с. URL: [http://inis.jinr.ru/sl/vol1/UH/_Ready/Mathematics/Mathematical%20logic/Mal'cev.%20Algebraicheskie%20sistemy%20\(Nauka,%201970\)%20\(ru\)\(L\)\(197s\).pdf](http://inis.jinr.ru/sl/vol1/UH/_Ready/Mathematics/Mathematical%20logic/Mal'cev.%20Algebraicheskie%20sistemy%20(Nauka,%201970)%20(ru)(L)(197s).pdf).
- [2] Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008. № 2 (2). С. 28–32. URL: <http://www.mathnet.ru/links/5f23e5e82dc9870afaea3fef5dfd757a/pdm29.pdf>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12049756>.
- [3] Diffie W., Hellman M.E. New Directions in Cryptography // IEEE Transactions on Information Theory. 1976. V. IT-22. P. 644–654. DOI: <http://doi.org/10.1109/TIT.1976.1055638>.
- [4] Merkle R.C. Secure Communications over Insecure Channels // Communications of the ACM. 1978. V. 21. No 4. P. 294–299.
- [5] Цветов В.П. Полугруппы бинарных операций и криптосистемы на группоидах // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26. № 1. С. 23–51. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-23-51>.
- [6] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. Concrete mathematics — A foundation for computer science. Advanced Book Program. Addison-Wesley, 1989. 625 p. URL: [https://notendur.hi.is/pgg/\(ebook-pdf\)%20-%20Mathematics%20-%20Concrete%20Mathematics.pdf](https://notendur.hi.is/pgg/(ebook-pdf)%20-%20Mathematics%20-%20Concrete%20Mathematics.pdf).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-23-49

Submitted: 16.01.2020

Revised: 30.01.2020

Accepted: 25.05.2020

V.P. Tsvetov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: tsf-su@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-224X>

FRACTAL MAGMAS AND PUBLIC-KEY CRYPTOGRAPHY

ABSTRACT

In this paper, we deal with magmas – the simplest algebras with a single binary operation. The main result of our research is algorithms for generating chain of finite magmas based on the self-similarity principle of its Cayley tables. In this way the cardinality of a magma’s domain is twice as large as the previous one for each magma in the chain, and its Cayley table has a block-like structure. As an example, we consider a cyclic semigroup of binary operations generated by a finite magma’s operation with a low-cardinality domain, and a modify the Diffie-Hellman-Merkle key exchange protocol for this case.

Key words: magmas, semigroups, Cayley tables, cyclic semigroup of binary operations, magma-based cryptography, Diffie-Hellman-Merkle key exchange.

Citation. Tsvetov V.P. Fractal magmas and public-key cryptography. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 23–49. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-23-49>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © Tsvetov Victor Petrovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Mal’cev A.I. Algebraic systems. Moscow: Fizmatlit, 1970, 392 p. Available at: [http://inis.jinr.ru/sl/vol1/UH/_Ready/Mathematics/Mathematical%20logic/Mal'cev.%20Algebraicheskie%20sistemy%20\(Nauka,%201970\)%20\(ru\)\(L\)\(197s\).pdf](http://inis.jinr.ru/sl/vol1/UH/_Ready/Mathematics/Mathematical%20logic/Mal'cev.%20Algebraicheskie%20sistemy%20(Nauka,%201970)%20(ru)(L)(197s).pdf). (In Russ.)

- [2] Glukhov M.M. Some applications of quasigroups in cryptography. *Applied Discrete Mathematics*, 2008, no. 2 (2), pp. 28–32. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/5f23e5e82dc9870afaea3fef5dfd757a/pdm29.pdf>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12049756>. (In Russ.)
- [3] Diffie W., Hellman M.E. New Directions in Cryptography. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1976, V. IT-22, pp. 644–654. DOI: <http://doi.org/10.1109/TIT.1976.1055638>.
- [4] Merkle R.C. Secure Communications over Insecure Channels. *Communications of the ACM*, 1978, vol. 21, no. 4, pp. 294–299. DOI: <http://doi.org/10.1145/359460.359473>.
- [5] Tsvetov V.P. Semigroups of binary operations and magma-based cryptography. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 23–51. Available at: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-23-51>. (In Russ.)
- [6] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. Concrete mathematics — A foundation for computer science. Advanced Book Program. Addison-Wesley, 1989, 625 p. Available at: [https://notendur.hi.is/pgg/\(ebook-pdf\)%20-%20Mathematics%20-%20Concrete%20Mathematics.pdf](https://notendur.hi.is/pgg/(ebook-pdf)%20-%20Mathematics%20-%20Concrete%20Mathematics.pdf).

МЕХАНИКА
MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-50-62

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 13.03.2020
после рецензирования: 27.03.2020
принятия статьи: 25.05.2020

Т.А. Белякова

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: tatiana.beliakova@math.msu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0636-816X>

И.А. Гончаров

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация E-mail: rtif91@gmail.com. ORCID:
<https://orcid.org/0000-0003-0385-6595>

**ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СПЛАВА
НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЛЩИНЫ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ
ПРИ СВЕРХПЛАСТИЧЕСКОЙ ФОРМОВКЕ ДАВЛЕНИЕМ¹**

АННОТАЦИЯ

Деформирование листовых материалов давлением газа в режиме сверхпластичности — широко используемый и интенсивно развивающийся в настоящее время способ промышленной обработки современных металлических сплавов (преимущественно на основе титана и алюминия). Для получения бездефектных конструкций с необходимыми механическими свойствами необходимо исследование эволюции микроструктурных параметров в процессе деформирования. В данной статье рассмотрено моделирование процесса листовой формовки круглой пластины давлением газа до полусферической оболочки на основе определяющих соотношений, включающих материальные параметры микроструктуры и упрочнения, вызванного накоплением пластических деформаций. Показано, что учет эволюции микроструктуры в процессе деформирования позволяет существенно уточнить технологические параметры процесса деформирования, необходимые для поддержания оптимального режима и получения наиболее однородного по толщине изделия.

Ключевые слова: сверхпластичность, металлические сплавы, обработка металлов давлением, листовая штамповка, круглые пластины, влияние микроструктуры, эволюция микроструктуры, размер зерна.

Цитирование. Белякова Т.А., Гончаров И.А. Влияние микроструктуры металлического сплава на распределение толщины в круглой пластине при сверхпластической формовке давлением // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 50–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-50-62>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © Белякова Татьяна Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории пластичности механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

© Гончаров Иннокентий Александрович — аспирант кафедры теории пластичности механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-01-00356 и Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета "Фундаментальные и прикладные проблемы исследования космоса".

Введение

Сверхпластичностью принято называть способность поликристаллических материалов при определенных температурно-скоростных условиях испытывать anomalно высокое удлинение — в сотни и даже тысячи процентов — при относительно низких напряжениях течения [1–5]. Установлено, что для деформирования металлов в режиме сверхпластичности необходимы температуры порядка $0.4 T_m$ (T_m — температура плавления в Кельвинах), скорость деформации в пределах $10^{-5} - 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ и определенным образом подготовленная микроструктура со средним размером зерен не более 10 мкм.

Сверхпластическое деформирование является предпочтительным способом промышленной обработки многих технологических сплавов, поскольку позволяет достигать высоких значений деформации без разрушения, делая возможным создание бездефектных изделий большого размера и сложной формы. Кроме того, сверхпластический режим деформирования реализуется при относительно низких напряжениях течения, которые позволяют обрабатывать с приемлемым уровнем нагрузки даже жесткие сплавы, снижают требования к используемому оборудованию и уменьшают износ частей, контактирующих с обрабатываемым изделием. Благодаря этому многие процессы обработки металлов давлением, в частности волочение, прокатка, ковка, объемная и листовая штамповка, реализуются в настоящее время в условиях сверхпластичности.

Вместе с тем для деформирования изделий в режиме сверхпластичности необходимо соблюдать определенные технологические требования. Например, при формовке листовых материалов важным технологическим параметром является толщина готового изделия. В некоторых случаях наблюдаемое истончение материала может выступать ограничивающим фактором для применения сверхпластичности как таковой либо, по крайней мере, при выборе используемых в процессе обработки скоростей и давлений [4–8]. В связи с этим разработка моделей, корректно описывающих поведение материала при сложном нагружении в подобных технологических процессах, является одной из важнейших задач сверхпластичности.

В данной статье рассмотрено моделирование процесса формовки круглой пластины давлением с применением определяющих соотношений, учитывающих эволюцию микроструктуры материала и его упрочнение, вызванное накоплением пластических деформаций.

1. Постановка задачи и возникающие проблемы

Будем рассматривать деформирование плоской круглой пластины из металлического сплава под действием приложенного с одной стороны равномерно распределенного давления $P(t)$, где P — давление, t — время. В начальном состоянии пластина имеет равномерную толщину w_0 и закреплена по периметру в цилиндрической форме радиуса $r_0 \gg w_0$. Под действием приложенного давления поверхность пластины деформируется, в результате чего постепенно принимает полусферическую форму. Введем в каждой точке локальную ортонормированную систему координат, первая ось которой направлена по касательной к меридиану в направлении от полюса, вторая перпендикулярна первой в плоскости сферы, а третья совпадает с нормалью к ее поверхности (рис. 1.1).

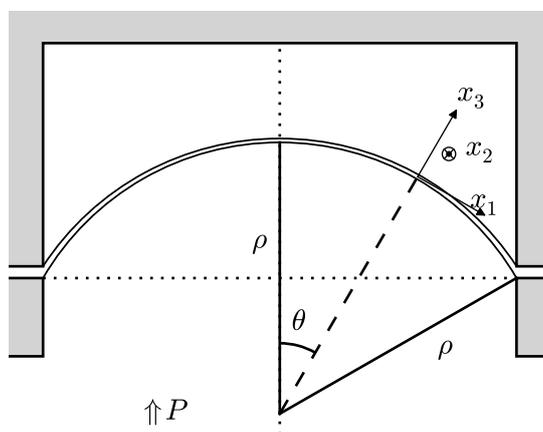


Рис. 1.1. Деформация круглой пластины давлением газа
Fig. 1.1. Deformation of a round plate by gas pressure

При моделировании процесса формовки круглой пластины давлением газа часто принимаются следующие допущения [2]:

- однородность, изотропность и несжимаемость материала;
- упругие деформации пренебрежимо малы по сравнению с пластическими;
- материал деформируется с малой скоростью (из интервала скоростей, характерных для сверхпластического течения) и при постоянной температуре;
- толщина изделия много меньше его линейных размеров;
- размер зерен в материале много меньше толщины;
- детали захватов считаются абсолютно жесткими, граничные условия в заделке соответствуют шарнирному закреплению;
- в любой момент времени при деформировании пластина представляет собой сегмент сферы радиуса ρ .

В рамках таких допущений деформирование пластины представляет собой квазистатический изотермический процесс. Малая толщина позволяет пренебречь изгибными напряжениями и описывать поведение материала с помощью безмоментной теории оболочек, согласно которой:

- компонента напряжения, направленная по нормали к сфере, много меньше других и потому пренебрежимо мала: $\sigma_3 \approx 0$;
- можно пренебречь изгибными напряжениями и положить напряжения $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Таким образом, с учетом положений безмоментной теории тензор напряжений Коши имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ_1 и σ_2 — меридиональное и окружное напряжения. Компоненты девиатора тензора напряжений, с учетом выражения для среднего напряжения

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kl} \delta_{kl} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

принимают вид:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma_1 - \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2 - \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\sigma_1 + \sigma_2) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Интенсивность касательных напряжений выражается соотношением

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}.$$

Тензор скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ связан с тензором напряжений, интенсивностью напряжений σ_e и интенсивностью скоростей пластических деформаций $\dot{p} = \sqrt{2 \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} / 3$ ассоциированным законом пластичности:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3 \dot{p}(\sigma_e, \dots)}{2 \sigma_e} S_{ij}, \quad (1.2)$$

где зависимость $\dot{p}(\sigma_e, \dots)$ задается определяющими соотношениями материала.

Таким образом, внедиагональные компоненты тензора деформаций будут также равны нулю, то есть введенная система координат совпадает с главными осями как тензора напряжений, так и тензора пластических деформаций. На диагонали последнего будут стоять меридиональная ε_1 и окружная ε_2 пластические деформации, а также деформация ε_3 , отвечающая за изменение толщины пластины.

Уравнения равновесия безмоментной теории оболочек для поверхности вращения имеют вид [9]:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_m} + \frac{\sigma_2}{\rho_c} = \frac{P}{w}, \quad (1.3)$$

$$2\pi r w \sigma_1 \sin \theta = \pi r^2 P, \quad (1.4)$$

где ρ_m и ρ_c — меридиональный и окружной радиусы кривизны поверхности, w — толщина пластины в рассматриваемой точке оболочки, r — расстояние от этой точки до оси вращения, θ — угол между осью вращения и нормалью к поверхности в данной точке. С учетом геометрического соотношения $\rho_c \sin \theta = r$ (рис. 1.1) из уравнений равновесия следуют выражения для главных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{P\rho_c}{2w}; \quad \sigma_2 = \frac{P\rho_c}{2w} \left(2 - \frac{\rho_c}{\rho_m} \right). \quad (1.5)$$

Предположение о том, что деформированная оболочка представляет собой сегмент сферы, хорошо согласуется с эмпирическими данными [2]. Поскольку для сферы $\rho_m = \rho_c = \rho$ данные соотношения принимают вид $\sigma_1 = \sigma_2 = P\rho/2w$.

В то же время условие заделки — равенство нулю окружной деформации $\varepsilon_{2b} = 0$ (индекс b здесь и далее означает величины, относящиеся к границе пластины) — на основании ассоциированного закона пластичности (1.2) приводит к соотношению:

$$0 = \dot{\varepsilon}_{2b}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_b}{\sigma_{eb}} S_{22} = \frac{\dot{p}_b}{2\sigma_{eb}} (2\sigma_{2b} - \sigma_{1b}),$$

откуда при ненулевой интенсивности скоростей пластических деформаций в заделке \dot{p}_b имеем $2\sigma_{2b} = \sigma_{1b}$, что противоречит полученному ранее из уравнений безмоментной теории равенству меридионального и окружного напряжений в любой точке пластины [2]. В окрестности заделки изгибные напряжения становятся сравнимы с компонентами σ_{1b} и σ_{2b} ; ограничиваясь же соотношениями безмоментной теории при решении поставленной задачи невозможно одновременно удовлетворить обоим уравнениям равновесия, предположению о сферической форме поверхности, ассоциированному закону пластичности и условию в заделке.

Описанная задача рассматривалась различными авторами как экспериментально, так и аналитически. При этом, оставаясь в рамках безмоментной теории, большинство авторов отказывается от строгого соблюдения одного или обоих уравнений равновесия во всех точках поверхности и применяет какие-либо дополнительные гипотезы о поведении материала в процессе деформации.

Случай строгого соблюдения уравнения равновесия поверхности (1.4) во всех точках пластины рассматривается в работе [7]. При этом уравнение равновесия элемента (1.3) не применяется, а для определения напряжений в промежуточных точках авторы разбивают исходную пластину на набор концентрических круговых полос и отслеживают состояние каждой полосы в зависимости от времени. Сверхпластическое деформирование описывается ими при помощи степенных определяющих соотношений $\sigma = K\dot{\varepsilon}^m$, где σ — напряжение, $\dot{\varepsilon}$ — скорость деформации, а K и m — постоянные коэффициенты. Авторами работы [10] был дополнительно проведен эксперимент с растяжением пакета из двух пластинок, в верхней из которых вдоль меридиана просверлены изначально круглые отверстия одинакового размера, в процессе деформации принимающие эллиптическую форму. По результатам данного эксперимента принималась гипотеза о пропорциональности изменения размеров отверстий напряжениям по соответствующим осям, что позволило ввести параметр отношения напряжений, определить его величину экспериментально и на основе установленной зависимости вычислить приращения на каждом шаге итеративного процесса. В той же работе [10] приводятся определяющие соотношения вида $\dot{\varepsilon} = A_1 (b/d)^s (\sigma/G)^n$, где A_1 , b , s , G и n — постоянные коэффициенты, а d — размер зерна. Однако авторы особо отмечают, что для сверхпластических материалов поведение размера зерна достаточно сложным образом зависит не только от времени, но и от деформации, поэтому результаты данной работы основаны на упрощенном соотношении $\dot{\varepsilon} = A_2\sigma^n$, эквивалентном степенной зависимости.

Одним из немногих примеров отказа от гипотезы сферичности купола является работа [11], в которой форма купола полагается эллиптической. Дальнейшее решение строится аналогично работе [7]. Теоретически отказ от предположения о сферичности мог бы позволить удовлетворить одновременно уравнениями равновесия безмоментной теории оболочек и ассоциированному закону пластичности. Однако в работе [11] данный вопрос не рассматривается: соотношение полуосей эллипса в конце деформации полагается известным, а в промежуточные моменты времени — пропорциональным высоте купола.

В некоторых работах при решении рассматриваемой задачи применяется какая-либо кинематическая гипотеза, позволяющая избежать разбиения оболочки на полосы и решать единую систему уравнений. Одной из первых таких работ является работа [12], в которой сделано предположение о равномерном истончении пластины. Однако, как было замечено рядом исследователей (см. например, обсуждение в [2]), гипотеза о равномерном истончении пластины в совокупности с нулевым окружным перемещением в заделке приводит к парадоксальному выводу — радиус пластины, деформированной до полусферы, оказывается в $\sqrt{2}$ раз больше начального, что противоречит предположению об абсолютной жесткости формы.

Рассмотрение возможности изменения толщины в разных точках оболочки позволило авторам работы [13] избавиться от этого противоречия и получить решение задачи в условиях недеформируемой формы. В качестве гипотезы о распределении деформаций при этом используется предположение о равномерном растяжении меридианов, что так же, как и в работе [12], позволяет решить задачу аналитически. В результате анализа была найдена требуемая функция давления, получены и сопоставлены с экспериментальными конечное распределение толщины оболочки и общее время деформирования при различных скоростях $\dot{\epsilon}$. Однако и в данной работе в качестве определяющих соотношений использована степенная зависимость между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций, не включающая в себя параметры микроструктуры. Авторами работы [14] величины окружной и меридиональной деформаций в разных точках пластины были измерены экспериментально, что позволило им выдвинуть гипотезу о параболической форме зависимости инженерной деформации от радиуса. Построенная на основе данной гипотезы модель уже не может быть решена аналитически и нуждается в численном интегрировании. Толщина пластины в рамках данной гипотезы также оказывается неравномерной, однако авторы работы [14] не обсуждают этот вопрос.

Таким образом, большинство авторов предполагают, что в промежуточные моменты времени форма пластины задается частью сферы, а в качестве гипотезы о распределении деформаций в пластине в промежуточных точках часто используются дополнительные предположения. В то же время большинство авторов пользуются степенными определяющими соотношениями в форме $\sigma = K\dot{\epsilon}^m$. Поведение пластины в рамках таких определяющих соотношений хорошо изучено, в частности, показано [7], что истончение пластины уменьшается с ростом параметра скоростной чувствительности m . Однако данные соотношения пригодны для описания поведения конкретного материала лишь в определенном, достаточно узком диапазоне скоростей деформации. В частности, хорошо известно, что кривые сверхпластического деформирования $\sigma(\dot{\epsilon})$ в логарифмических координатах имеют сигмоидальную форму [1], в то время как степенные определяющие соотношения приближают данную зависимость линейной функцией. Кроме того, из рассмотренных работ только в статье [14] использованы определяющие соотношения, зависящие от начального размера зерна в образце, но и там вопрос об эволюции параметра микроструктуры и о влиянии его на характеристики процесса деформирования не рассматривался. В основном данный вопрос поднимается в ряде экспериментальных работ и в исследованиях, посвященных моделированию деформирования листовых материалов давлением при помощи метода конечных элементов [8; 15; 16]. В частности, в работе [8] показано, что подходящая начальная микроструктура позволяет добиться более равномерного распределения толщины в готовом изделии.

В настоящей статье задача о деформировании плоской круглой пластины под действием приложенного с одной стороны равномерно распределенного давления решена на основе определяющих соотношений, учитывающих сложную эволюцию микроструктуры материала в процессе деформации. При моделировании процессов формовки листовых заготовок особую важность представляет определение оптимальных условий деформирования и функции давления, обеспечивающих поддержание режима сверхпластичности на протяжении всего процесса обработки. Для определения границ применимости соответствующих технологических процессов необходимо исследование распределения толщины в зависимости от времени в различных точках образца. Особое внимание уделяется анализу изменения микроструктуры материала в процессе деформирования, что позволяет уточнить характеристики процесса листовой формовки и предложить пути улучшения ожидаемых механических свойств готового изделия. Расчеты проводились в рамках гипотезы о параболической форме зависимости инженерной деформации от радиуса [14]. Параметры моделей определялись на основе авторского алгоритма [17] для титанового сплава Ti-6Al-4V при температуре 927 °C на основании экспериментов, приведенных в работе [18].

2. Кинематическая гипотеза и уравнения состояния пластины

Как было описано в предыдущем разделе, во введенной системе координат (рис. 1.1) тензоры напряжений и скоростей пластических деформаций имеют диагональный вид. Отличные от нуля компоненты тензора напряжений соответствуют меридиональному σ_1 и окружному σ_2 напряжениям. В полюсе купола из соображений симметрии $\sigma_{1p} = \sigma_{2p}$ (индекс p здесь и далее означает полюс). При этом интенсивность касательных напряжений в полюсе оказывается равной $\sigma_{ep} = \sigma_{1p}$. С учетом (1.1), (1.2) и условия несжимаемости для компонент тензора деформаций

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \quad (2.1)$$

получаем $\epsilon_{1p} = \epsilon_{2p} = -\epsilon_{3p}/2$. В окрестности полюса пластина деформируется свободно, при этом из уравнения равновесия элемента (1.3) с учетом предположения о том, что оболочка в любой момент

времени представляет собой сегмент сферы $\rho_m = \rho_c = \rho$, меридиональное напряжение в куполе представляется в виде $\sigma_{1p} = P\rho/2w_p$, где w_p — толщина купола в полюсе.

По условию заделки на границе купола $\varepsilon_{2b} = 0$. Будем рассматривать вариант шарнирного закрепления на границе. При постановке натуральных экспериментов для обеспечения близкого к рассматриваемой модели режима деформирования иногда применяется скругленный зажим на внутренней стороне формы (см., например, рис. 2 в работе [7]). Из этих условий с учетом (1.2) для напряжений в заделке получаем $\sigma_{1b} = 2\sigma_{2b}$, $\sigma_{eb} = \sqrt{3}\sigma_{1b}/2$ и для деформаций $\varepsilon_{1b} = -\varepsilon_{3b}$. Учитывая уравнение равновесия сегмента поверхности (1.4), для меридионального напряжения на границе пластины справедливо выражение $\sigma_{1b} = P\rho/2w_b$.

Таким образом, как в полюсе купола, так и на его границе все компоненты тензоров напряжений и деформаций могут быть выражены через меридиональное напряжение σ_1 , меридиональную пластическую деформацию ε_1 , давление газа $P(t)$, радиус кривизны оболочки ρ и ее толщину w . Чтобы определить связь деформаций и геометрических параметров оболочки, воспользуемся, во-первых, условием несжимаемости материала (2.1). Для деформации пластины по толщине выполняется равенство $\varepsilon_3 = \ln(w/w_0)$, откуда можно выразить связь толщины пластины w с деформациями:

$$w = w_0 \exp(\varepsilon_3) = w_0 \exp(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Во-вторых, в соответствии с принятой гипотезой о параболическом распределении инженерных деформаций [14] можно записать

$$\varepsilon_{\text{eng}} = \varepsilon_{\text{eng},p} + (\varepsilon_{\text{eng},b} - \varepsilon_{\text{eng},p}) \frac{x^2}{r_0^2},$$

где x — радиус, исчисляемый от оси симметрии купола ($x = 0$ соответствует полюсу пластины, $x = r_0$ — ее границе). Переходя от инженерных деформаций к логарифмическим по формуле $\varepsilon_{\text{eng}} = \exp(\varepsilon) - 1$, принятую гипотезу можно записать в виде

$$\exp(\varepsilon) = \exp(\varepsilon_p) + (\exp(\varepsilon_b) - \exp(\varepsilon_p)) \frac{x^2}{r_0^2}. \quad (2.2)$$

Вычислим длину дуги меридиана L от полюса до заделки. С одной стороны, ее можно выразить через радиус сферы и ограничивающий дугу угол: $|L| = \rho\theta = \rho \arcsin(r_0/\rho)$. С другой стороны, интегрируя по длине элемента дуги и учитывая представление (2.2), можно выразить $|L|$ через меридиональную деформацию ε_1 :

$$|L| = \int_0^{r_0} \exp(\varepsilon_1) dx = r_0 \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p}) + \exp(\varepsilon_{1b})}{3}. \quad (2.3)$$

Приравнивая данные выражения, окончательно получаем связь радиуса кривизны ρ с деформациями пластины [14]:

$$\frac{\rho}{r_0} \arcsin\left(\frac{r_0}{\rho}\right) = \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p}) + \exp(\varepsilon_{1b})}{3}. \quad (2.4)$$

В частном случае при $\varepsilon_{1p} = \varepsilon_{1b}$ такое предположение о распределении деформаций будет эквивалентно гипотезе о равномерном растяжении меридианов, применяемой в работе [13].

Уравнение (2.4) неявное, поэтому для дальнейших вычислений будет удобно записать его в дифференциальной форме. Возьмем от обеих его частей производную по времени и упростим выражение:

$$\dot{\rho} \left(\frac{1}{r_0} \arcsin\left(\frac{r_0}{\rho}\right) - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r_0^2}} \right) = \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p}) \dot{\varepsilon}_{1p} + \exp(\varepsilon_{1b}) \dot{\varepsilon}_{1b}}{3}. \quad (2.5)$$

В качестве определяющих соотношений для материала в данной работе будут использованы соотношения Дуппе и соавторов (см., например, [15]) в нормированном виде, содержащие эволюционное уравнение для размера зерна d и параметр деформационного упрочнения h .

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{A}{d^\alpha} \sinh(B(\sigma_e - h - 1)); \\ \dot{d} &= \frac{D}{d^\beta} + \frac{G}{d^\varphi} \dot{p}; \\ \dot{h} &= H(H_0 - h) \dot{p}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В совокупности с выведенными ранее уравнениями это позволяет записать полную систему, описывающую поведение пластины под действием приложенного давления $P(t)$:

$$w_p = w_0 \exp(-2\varepsilon_{1p});$$

$$\begin{aligned}
w_b &= w_0 \exp(-\varepsilon_{1b}); \\
\sigma_{1p} &= \frac{P\rho}{2w_p}; \\
\sigma_{1b} &= \frac{P\rho}{2w_b}; \\
h_p &= H_0 (1 - \exp(-2H\varepsilon_{1p})); \\
h_b &= H_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}H\varepsilon_{1b}\right) \right); \\
\dot{\rho} &= \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p})\dot{\varepsilon}_{1p} + \exp(\varepsilon_{1b})\dot{\varepsilon}_{1b}}{3 \left(\frac{1}{r_0} \arcsin\left(\frac{r_0}{\rho}\right) - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r_0^2}} \right)}; \\
2\dot{\varepsilon}_{1p} &= \frac{A}{d_p^\alpha} \sinh(B(\sigma_{1p} - h_p - 1)); \\
\dot{d}_p &= \frac{D}{d_p^\beta} + \frac{G}{d_p^\varphi} 2\dot{\varepsilon}_{1p}; \\
\frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{1b} &= \frac{A}{d_b^\alpha} \sinh\left(B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{1b} - h_b - 1\right)\right); \\
\dot{d}_b &= \frac{D}{d_b^\beta} + \frac{G}{d_b^\varphi} \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{1b}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Как можно заметить, система (2.7) является системой из пяти дифференциальных уравнений с шестью неизвестными: P , ρ , ε_{1p} , d_p , ε_{1b} , d_b . Остальные (недифференциальные) соотношения выписаны для удобства: выражаемые ими величины могут быть подставлены в дифференциальные уравнения напрямую. Таким образом, при известном законе давления $P(t)$ система (2.7) является замкнутой и может быть решена любым стандартным способом (например, методом Рунге — Кутты). Для решения обратной задачи, то есть определения функции давления, требующейся для поддержания определенного режима деформирования, необходимо дополнить систему соотношением, задающим этот режим. Чаще всего в качестве такого соотношения рассматривается условие $\dot{\varepsilon}_{1p} = \text{const}$, позволяющее реализовать технологически оптимальный режим в области наиболее интенсивного сверхпластического деформирования. В каждом из этих случаев решением системы (2.7) будут являться макрохарактеристики процесса деформирования (давление, напряжения и деформации, величина упрочнения), параметры микроструктуры (размеры зерен) и геометрические параметры образца (радиус и толщина оболочки).

3. Результаты моделирования

Как уже упоминалось, одним из важнейших параметров при сверхпластическом деформировании листовых материалов является неоднородность толщины мембраны в конце процесса, поскольку технологическими требованиями ограничиваются как минимальная толщина, так и допускаемая неравномерность толщины в готовом изделии. В рассматриваемой задаче формовки листовой пластины до полусферы минимальная толщина наблюдается в полюсе купола, а максимальная — в заделке (рис. 1.1). Для формального контроля за соотношением этих величин введем параметр истончения:

$$\bar{w} = \frac{w_b - w_p}{w_b},$$

значения которого находятся в пределах от нуля (равномерная толщина) до единицы (нулевая толщина в полюсе, прорыв мембраны).

Для определения данного параметра на основании описанных предположений было проведено моделирование деформирования пластины в различных условиях. При расчетах рассматривался режим деформирования с постоянной скоростью деформации в полюсе купола — $\dot{\varepsilon}_{1p} = \text{const}$. Для геометрических параметров пластины были приняты значения $r_0 = 35$ мм, $w_0 = 1$ мм. Моделировался процесс формовки от изначального (плоского) состояния пластины до момента превращения оболочки в полусферу, который определялся по превышению высотой купола h значения $r_0 - r_c$, где r_c — малое значение контрольной высоты (в расчетах принималось равным 0.2 мм). Это соответствует условиям реальных экспериментов, в которых момент превращения оболочки в полусферу определяется по контакту купола с датчиком, выступающим на высоту r_c из основания цилиндрической формы.

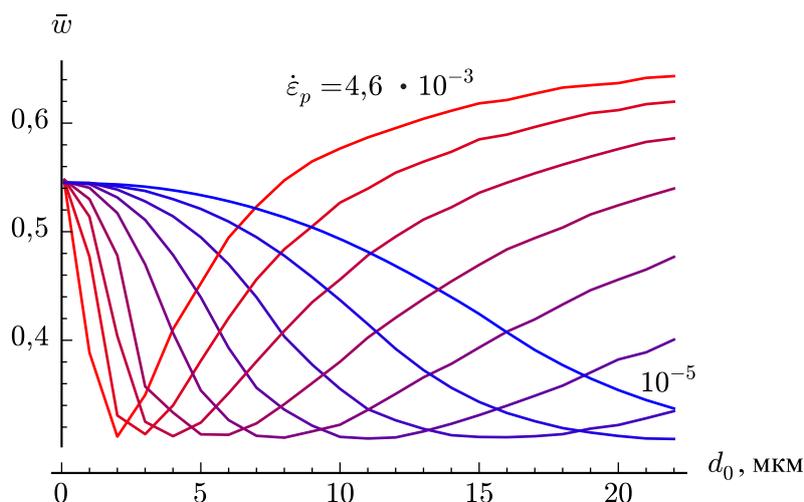


Рис. 3.1 Зависимость коэффициента истончения \bar{w} от начального размера зерна d_0 и скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_p$ в модели без роста зерен

Fig. 3.1 Dependence of the thinning coefficient \bar{w} on the initial grain size d_0 and the plastic deformation rate $\dot{\epsilon}_p$ calculated via model excluding grain growth

Материальные константы в соотношениях (2.6) определялись с использованием авторского алгоритма, который подробно описан в работе [17], на основе экспериментов [18] для титанового сплава Ti-6Al-4V при температуре 927 °С. На рис. 3.1 представлены результаты расчета для редуцированной модели, не учитывающей рост зерен в процессе деформирования. Параметры данной модели приведены в первой строке табл. 3.1.

Таблица 3.1

Значения материальных констант:
 (а) без учета роста зерен, (б) с учетом роста зерен

Table 3.1

Values of material constants:

	(a) excluding grain growth, (b) taking into account grain growth								
	<i>A</i>	<i>B</i>	α	<i>D</i>	<i>G</i>	β	φ	<i>H</i> ₀	<i>H</i>
(а)	47.8	0.0524	2.20	0.0	0.0	–	–	22.8	0.947
(б)	67.6	0.0532	2.35	0.367	10.3	2.09×10^{-5}	0.676	4.89	3.56

Можно заметить, что для каждой скорости деформации существует оптимальный начальный размер зерен d_0 , для которого итоговый коэффициент истончения \bar{w} минимален. Полученный результат хорошо согласуется с известным результатом ряда работ, посвященных задачам сверхпластической формовки, где отмечалось, что истончение уменьшается с увеличением параметра скоростной чувствительности m . Таким образом, даже модель, не учитывающая рост зерен, но описывающая сигмоидальный характер кривой сверхпластичности и зависимость поведения материала от начального размера зерен, может быть успешно использована для моделирования деформирования в достаточно широком диапазоне скоростей. В то же время минимальное значение параметра \bar{w} на рис. 3.1 не зависит от размера зерна. Если не принимать во внимание эволюцию параметров микроструктуры, можно было бы заключить, что величина начального размера зерна в материале не оказывает влияния на получаемое истончение при условии, что используется оптимальная для данной микроструктуры скорость деформирования.

Однако картина существенно изменяется при использовании полной модели, учитывающей рост зерен в процессе деформирования. Параметры этой модели приведены во второй строке табл. 3.1. Результаты расчета с использованием такой модели представлены на рис. 3.2. Минимальное значение коэффициента истончения существенно зависит от начального размера зерна. Значение \bar{w} стремится к некоторой константе для больших размеров зерен (более 10 мкм, что считается пороговым значением для проявления сверхпластического течения в металлических сплавах). При уменьшении размера зерна значение коэффициента истончения \bar{w} убывает до некоторого минимального значения, не равного нулю. Иными словами, существует теоретический предел однородности толщины изделия: получение одинаковой толщины во всех точках невозможно даже при субмикронных размерах зерен. По мере уменьшения размера зерна оптимальная скорость деформации возрастает (что

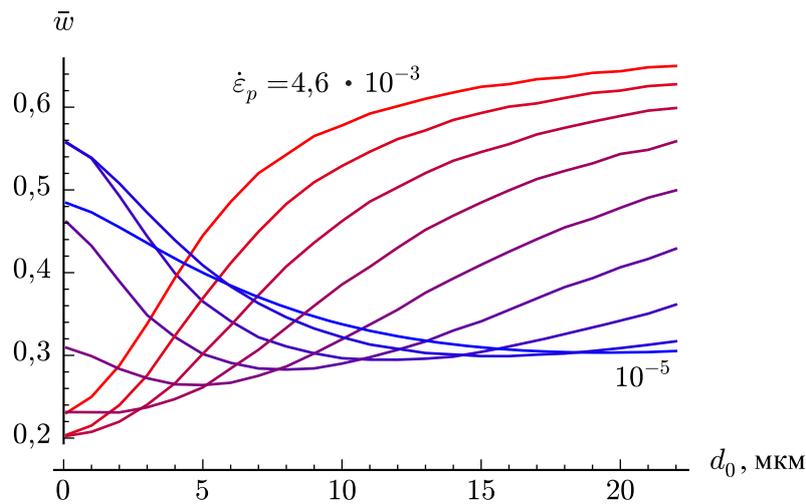


Рис. 3.2. Зависимость коэффициента истончения \bar{w} от начального размера зерна d_0 и скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_p$ в модели, учитывающей рост зерен
Fig. 3.2. Dependence of the thinning coefficient \bar{w} on the initial grain size d_0 and the plastic deformation rate $\dot{\epsilon}_p$ calculated via model taking into account grain growth

удобно для практических применений), однако минимальному истончению соответствует некоторое конкретное значение оптимальной скорости. Дальнейшее повышение скорости деформации не позволит оставаться в рамках оптимального режима сверхпластичности, сколь бы хорошо ни была подготовлена микроструктура. Это ограничивает применение высокоскоростной сверхпластичности в рассматриваемых процессах формовки.

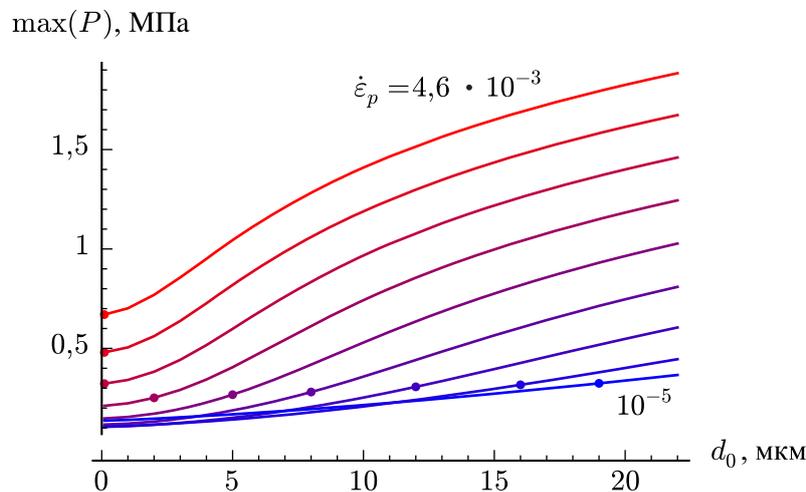


Рис. 3.3. Зависимость максимума давления газа $P(t)$ от начального размера зерна d_0 и скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_p$ в модели, учитывающей рост зерен
Fig. 3.3. Dependence of the maximum gas pressure $P(t)$ on the initial grain size d_0 and the plastic deformation rate $\dot{\epsilon}_p$ calculated via model taking into account grain growth

Немаловажным параметром процесса формовки является давление, которое необходимо приложить в ходе деформирования для поддержания постоянной скорости деформации в полюсе купола. Характерной особенностью зависимости величины давления от времени является наличие точки максимума [10; 11; 13; 14]. Значение максимального давления является одним из основных требований к применяемому оборудованию. На рис. 3.3 показана зависимость максимума давления от скорости сверхпластической формовки и начального размера зерна в заготовке. Вполне ожидаемо, рост скорости при фиксированном начальном размере зерна, как и рост размера зерна при фиксированной скорости, приводит к увеличению рабочего давления. Однако, как показывают результаты моделирования, значения, соответствующие режимам минимального истончения (на рис. 3.3 отмечены точками),

находятся приблизительно на одном уровне. Таким образом, увеличение скорости деформаций не повышает требования к применяемому оборудованию до тех пор, пока соответствующая подготовка микроструктуры позволяет оставаться в области оптимального режима сверхпластического деформирования. По достижении максимальной скорости в оптимальном режиме дальнейшее ее повышение приводит к росту требуемого давления, что согласуется с описанными выше результатами по источнику.

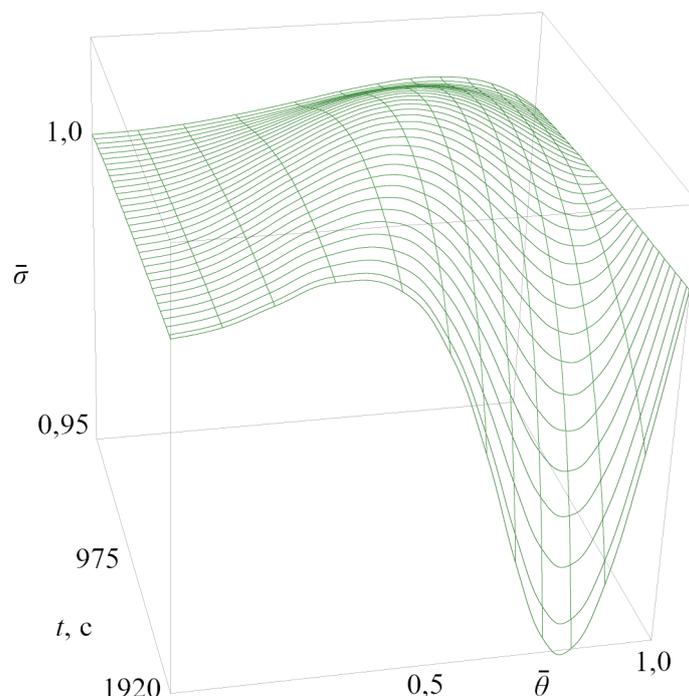


Рис. 3.4. Отношение $\bar{\sigma}$ меридионального напряжения σ_1 к значению напряжения, вычисленному по безмоментной теории оболочек, в зависимости от времени t и угловой координаты $\bar{\theta}$
Fig. 3.4. Ratio $\bar{\sigma}$ of meridional stress σ_1 to the stress value calculated by the momentless shell theory depending on time and angular coordinate θ

Как уже было отмечено, при решении поставленной задачи невозможно одновременно удовлетворить обоим уравнениям равновесия безмоментной теории, предположению о сферической форме поверхности, ассоциированному закону пластичности и условию в заделке. В соответствии с уравнением безмоментной теории на всей поверхности сферы для меридионального напряжения должно выполняться равенство (1.5), или $\bar{\sigma} = 2w\sigma_1/P\rho = 1$. На рис. 3.4 показано полученное при решении фактическое значение величины $\bar{\sigma}$ в зависимости от угловой координаты $\bar{\theta} = \theta/\theta_b$ и времени, позволяющее судить об отклонении от уравнений безмоментной теории. При $\bar{\theta} = 0$ или $\bar{\theta} = 1$ (в полюсе и в заделке) $\bar{\sigma}$ в точности равно единице, так как система уравнений (2.7) обеспечивает соблюдение уравнений равновесия в этих точках. В промежуточных точках значение отношения $\bar{\sigma}$ отличается от единицы, при этом характер отклонения зависит от времени. При малых временах $\bar{\sigma} > 1$ (расчетные напряжения оказываются выше ожидаемых). По-видимому, это связано с тем, что в начале процесса материал слабо сопротивляется давлению, и скорость деформаций сравнительно велика. Далее с течением времени радиус кривизны купола уменьшается, и вблизи периметра оболочки растет влияние заделки. По мере приближения формы купола к полусфере значение $\bar{\sigma}$ оказывается меньше единицы (расчетные напряжения ниже ожидаемых), поскольку безмоментная теория не учитывает вклад изгибных напряжений, которые играют существенную роль в области заделки.

Тем не менее, на протяжении всего процесса деформирования отклонение параметра $\bar{\sigma}$ от 1 существенно выше при $\bar{\theta} \rightarrow 1$, чем при $\bar{\theta} \rightarrow 0$. Это согласуется с принципом Сен-Венана: влияние граничных условий на периметре купола ослабевает по мере удаления от границы, и поведение оболочки все более соответствует свободному деформированию в соответствии с уравнениями равновесия безмоментной теории. Также по рис. 3.4 можно оценить максимальную величину погрешности $\bar{\sigma}$ во всем процессе деформирования — она составляет около 6%. Таким образом, использование безмоментной теории оболочек позволяет с удовлетворительной степенью точности описать поведение материала в рассматриваемой задаче.

Заключение

Деформирование листовых материалов давлением газа в режиме сверхпластичности — интенсивно используемый в настоящее время способ промышленной обработки металлов, позволяющий создавать бездефектные изделия сложной формы из современных конструкционных сплавов, преимущественно на основе титана и алюминия. Для получения изделий с необходимыми механическими свойствами важно контролировать микроструктурные параметры в процессе деформирования.

В данной работе проанализирована эффективность применения определяющих соотношений, учитывающих размер зерен в материале и деформационное упрочнение, к задаче формовки давлением круглой пластины до полусферической оболочки. Полученные результаты хорошо согласуются с широко известными исследованиями в области сверхпластичности (зависимость истончения от параметра скоростной чувствительности m , улучшение параметров течения при уменьшении размера зерен). Показано, что использование определяющих соотношений, корректно моделирующих сигмоидальную кривую сверхпластичности, позволяет расширить область применимости полученной модели материала. Учет эволюции микроструктуры в процессе деформирования существенно уточняет оценку скорости деформации, которая необходима для поддержания оптимального режима деформирования и получения по возможности однородного по толщине изделия. Проведена численная оценка погрешности в уравнении равновесия, возникающей при решении поставленной задачи в предположениях безмоментной теории оболочек.

Литература

- [1] Васин Р.А., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. Ч. 1. Уфа: Гилем, 1998. 280 с. URL: <https://b-ok.global/book/3039517/f6af87>.
- [2] Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 363 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-04367-7>.
- [3] Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. Superplasticity in metals and ceramics. NY: Cambridge University Press, 1997. 287 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511525230>.
- [4] Грабский М.В. Структурная сверхпластичность металлов. Москва: Металлургия, 1975. 272 с. URL: https://www.studmed.ru/grabskiy-m-v-strukturnaya-sverhplastichnost-metallov_3451ba47314.html.
- [5] Сверхпластичность ультрамелкозернистых сплавов: эксперимент, теория, технология / Р.Р. Мулюков [и др.]. Москва: Наука, 2014. 284 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32737541>.
- [6] Leyens C., Peters M. Titanium and Titanium Alloys. Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2003. 513 p.
- [7] Cornfield G.C., Johnson R.H. The forming of superplastic sheet metal // International Journal of Mechanical Sciences. 1970. Vol. 12. Issue 6. P. 479–490. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(70\)90075-5](http://doi.org/10.1016/0020-7403(70)90075-5).
- [8] Cheong B.H., Lin J., Ball A.A. Modelling the effect of grain-size gradients on necking in superplastic forming // Journal of Materials Processing Technology. 2003. V. 134(1) P. 10–18. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00216-9](http://doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00216-9).
- [9] Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с. URL: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/04/10/2-12_fedosev_sopromat_1999.pdf.
- [10] Guo Z.X., Ridley N. Modelling of Superplastic Bulge Forming of Domes // Materials Science and Engineering: A. 1989. V. 114. P. 97–104. DOI: [http://doi.org/10.1016/0921-5093\(89\)90849-6](http://doi.org/10.1016/0921-5093(89)90849-6).
- [11] Yang H.S., Mukherjee A.K. An analysis of the superplastic forming of a circular sheet diaphragm // International Journal of Mechanical Sciences. 1992. V. 34(4). P. 283–297. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(92\)90036-G](http://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90036-G).
- [12] Jovane F. An approximate analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm: Theory and Experiments // International Journal of Mechanical Sciences. 1968. V. 10(5). P. 403–427. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(68\)90005-2](http://doi.org/10.1016/0020-7403(68)90005-2).
- [13] Enikeev F.U., Kruglov A.A. An analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm // International Journal of Mechanical Sciences. 1995. V. 37(5). P. 473–483. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(94\)00081-T](http://doi.org/10.1016/0020-7403(94)00081-T).
- [14] Ghosh A.K., Hamilton C.H. Influences of material parameters and microstructure on superplastic forming // Metallurgical Transactions A. 1982. V. 13. P. 733–743. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02642386>.
- [15] Lin J., Dunne F.P.E. Modelling grain growth evolution and necking in superplastic blow-forming // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. V. 43(3). P. 595–609. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00055-2](http://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00055-2).
- [16] Lin J., Dean T.A. Modelling of microstructure evolution in hot forming using unified constitutive equations // Journal of Materials Processing Technology. 2005. V. 167(2–3). P. 354–362. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2005.06.026>.

- [17] Гончаров И.А., Белякова Т.А. Методы оценки точности и устойчивости алгоритма определения значений параметров моделей сверхпластичности // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11(1). С. 51–67. DOI: <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.5>.
- [18] Ghosh A.K., Hamilton C.H. Mechanical behavior and hardening characteristics of a superplastic Ti-6Al-4V alloy // Metallurgical Transactions A. 1979. V. 10. P. 699–706. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02658391>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-50-62

Submitted: 13.03.2020

Revised: 27.03.2020

Accepted: 25.05.2020

T.A. Beliakova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

E-mail: tatiana.beliakova@math.msu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0636-816X>

I.A. Goncharov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

E-mail: rtif91@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0385-6595>

THE EFFECT OF METAL ALLOY MICROSTRUCTURE ON THE THICKNESS DISTRIBUTION IN THE CIRCULAR PLATE UNDER THE SUPERPLASTIC BLOW-FORMING

ABSTRACT

The gas-blow forming of sheet specimens under the superplastic conditions is the widespread and intensive developing technological method for metal-forming of modern alloys (mainly on the aluminium and titanium base). The investigation of evolution of the microstructure parameters in the deformation process is necessary to obtain the defect-free constructions with required mechanical properties. In the present paper the blow-forming process of the thin circular plate to the hemispherical form is modelled. The stress-strain relations used include the parameters of the grain size and of the hardening depending on the accumulated plastic strain. It is shown that taking into account the evolution of the microstructure parameters in the superplastic deformation can significantly improve the estimation of the optimal characteristics of the manufacturing process and eventually can provide the most thickness-uniform engineering product.

Key words: superplasticity, metal alloys, pressure metal forming, sheet-metal forming, round plates, influence of microstructure, microstructure evolution, grain size.

Citation. Beliakova T.A., Goncharov I.A. The effect of metal alloy microstructure on the thickness distribution in the circular plate under the superplastic blow-forming. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 50–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-50-62>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Beliakova Tatiana Alexandrovna* — associated professor, Department of Plasticity Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, 1, Lenin Mountains, Moscow, 119991, Russian Federation.

© *Goncharov Innokentii Alexandrovich* — postgraduate student of the Department of Plasticity Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, 1, Lenin Mountains, Moscow, 119991, Russian Federation.

References

- [1] Vasin R.A., Enikeev F.U. Introduction to the mechanics of superplasticity. Part 1. Ufa: Gilem, 1998, 280 p. Available at: <https://b-ok.global/book/3039517/f6af87>. (In Russ.)
- [2] Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2001, 363 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-04367-7>.

- [3] Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. Superplasticity in metals and ceramics. NY: Cambridge University Press, 1997. 287 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511525230>.
- [4] Grabski M. (1975) Structural superplasticity of metals. Moscow: Metallurgiya, 1975, 272 p. Available at: https://www.studmed.ru/grabskiy-m-v-strukturnaya-sverhplastichnost-metallov_3451ba47314.html. (In Russ.)
- [5] Mulyukov R.R., Imaeva R.M., Nazarova A.A., Imaeva M.F., Imaeva V.M. Superplasticity of the ultrafine-grained alloys: experiment, theory, technology. Moscow: Nauka, 2014, 284 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32737541>. (In Russ.)
- [6] Leyens C., Peters M. Titanium and Titanium Alloys. Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2003, 513 p.
- [7] Cornfield G.C., Johnson R.H. The forming of superplastic sheet metal. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1970, vol. 12, issue 6, pp. 479–490. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(70\)90075-5](http://doi.org/10.1016/0020-7403(70)90075-5).
- [8] Cheong B.H., Lin J., Ball A.A. Modelling the effect of grain-size gradients on necking in superplastic forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 2003, vol. 134, issue 1, pp. 10–18. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00216-9](http://doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00216-9).
- [9] Feodosev V.I. Strength of materials. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 1999, 592 p. Available at: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/04/10/2-12_fedosev_sopromat_1999.pdf. (In Russ.)
- [10] Guo Z.X., Ridley N. Modelling of Superplastic Bulge Forming of Domes. *Materials Science and Engineering: A*, 1989, vol. 114, pp. 97–104. DOI: [http://doi.org/10.1016/0921-5093\(89\)90849-6](http://doi.org/10.1016/0921-5093(89)90849-6).
- [11] Yang H.S., Mukherjee A.K. An analysis of the superplastic forming of a circular sheet diaphragm. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1992, vol. 34 (4), pp. 283–297. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(92\)90036-G](http://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90036-G).
- [12] Jovane F. An approximate analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm: Theory and experiments. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1968, vol. 10(5), pp. 403–427. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(68\)90005-2](http://doi.org/10.1016/0020-7403(68)90005-2).
- [13] Enikeev F.U., Kruglov A.A. An analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1995, vol. 37, no. 5, pp. 473–483. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7403\(94\)00081-T](http://doi.org/10.1016/0020-7403(94)00081-T).
- [14] Ghosh A.K., Hamilton C.H. Influences of material parameters and microstructure on superplastic forming. *Metallurgical Transactions A*, 1982, vol. 13, pp. 733–743. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02642386>.
- [15] Lin J., Dunne F.P.E. Modelling grain growth evolution and necking in superplastic blow-forming. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, vol. 43 (3), pp. 595–609. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00055-2](http://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00055-2).
- [16] Lin J., Dean T.A. Modelling of microstructure evolution in hot forming using unified constitutive equations. *Journal of Materials Processing Technology*, 2005, vol. 167(2–3), pp. 354–362. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2005.06.026>.
- [17] Goncharov I.A., Beliakova T.A. The methods of estimating the accuracy and stability of the algorithm for determination of values of the parameters in superplasticity models. *Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11 (1), pp. 51–67. DOI: <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.5>. (In Russ.)
- [18] Ghosh A.K., Hamilton C.H. Mechanical behavior and hardening characteristics of a superplastic Ti-6Al-4V alloy. *Metallurgical Transactions A*, 1979, vol. 10, pp. 699–706. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02658391>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69

УДК 534.113

Дата: поступления статьи: 15.01.2020
после рецензирования: 30.01.2020
принятия статьи: 25.05.2020

Е.Н. Элекина

Самарский государственный технический университет
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: elekina-e1@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9516-7644>

Е.С. Вронская

Самарский государственный технический университет
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: es.vronskaja@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1304-0138>

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ МОНОСИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ

АННОТАЦИЯ

В статье приводится аналитическое решение динамической задачи для тонкостенного упругого стержня, поперечное сечение которого имеет одну ось симметрии. Решение построено для произвольной динамической нагрузки и двух типов граничных условий: шарнирного опирания при стесненном кручении и свободной деформации концевых сечений стержня; жесткого закрепления при стесненном кручении и отсутствии деформации. Особенность математической модели заключается в том, что дифференциальные уравнения движения содержат полную систему инерционных членов. Эффективным приемом решения линейных нестационарных задач механики представляются спектральные разложения, получаемые в результате применения метода интегральных преобразований. Используется структурный алгоритм метода конечных многокомпонентных интегральных преобразований, предложенный Ю.Э. Сеницким

Ключевые слова: тонкостенный стержень, симметричный профиль, краевая задача, динамическая нагрузка, собственные колебания, собственная частота колебаний, вынужденные колебания, интегральные преобразования.

Цитирование. Элекина Е.Н., Вронская Е.С. Динамическая задача для тонкостенного стержня моносимметричного профиля // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 63–69. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © Элекина Елена Николаевна — старший преподаватель кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

© Вронская Елена Сергеевна — кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Введение

Тонкостенные стержни широко применяются в качестве конструктивных элементов, поэтому задачи о колебаниях и устойчивости стержневых систем возникают в различных областях техники [1]. Большое число работ посвящено выводу и уточнению уравнений, описывающих движения, их анализу и способам решения [2–5]. Эффективный прием решения линейных нестационарных задач механики представляют спектральные разложения, получаемые в результате применения метода интегральных преобразований с конечными пределами (КИП) [6; 7].

1. Постановка задачи

Пусть тонкостенный стержень моносимметричного профиля (x -ось симметрии поперечника) подвержен действию произвольной динамической нагрузки $q(z, t)$, приложенной с эксцентриситетом $(e+a_x)$ относительно центра изгиба. При этом стержень будет совершать изгибно-крутильные колебания, описываемые связанной системой дифференциальных уравнений движения [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} + a^2 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} + a^2 a_x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= -q \frac{1}{EI_x}, \\ \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} - k^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + (c^2 + n^2 a_x^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + n^2 a_x^2 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} &= -q \frac{e + a_x}{EI_x}, \\ a^2 &= \frac{\rho A}{EI_x}, \quad n^2 = a^2 \frac{I_x}{I_\omega}, \quad k^2 = \frac{GI_\alpha}{EI_\omega}, \quad c^2 = \frac{\rho I_\rho}{EI_\omega}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $U_c(z, t)$, $\Theta(z, t)$ — искомые функции линейных перемещений и углов закручивания, $(e + a_x)$ — эксцентриситет приложения нагрузки относительно центра изгиба, A — площадь поперечного сечения; I_x , I_α , I_ρ , I_ω — соответственно моменты инерции: осевой, при чистом кручении, полярный, секториальный. Далее рассматривается общий случай начальных условий, когда считаются известными начальные перемещения и скорости перемещений:

$$U_c(z, 0) = U_0(z), \quad \frac{\partial U_c}{\partial t} = \dot{U}_0(z), \quad \Theta(z, 0) = \Theta_0(z), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0(z). \quad (1.2)$$

Исследуются два случая граничных условий, а именно шарнирное опирание при стесненном кручении и свободной деформации концевых сечений стержня:

$$\begin{aligned} U_c(z, t) = \frac{\partial^2 U_c(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=0, l} &= 0, \\ \Theta(z, t) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \Big|_{z=0, l} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и жесткое закрепление стержня при стесненном кручении и отсутствии деформации:

$$U_c(z, t) = \frac{\partial U_c}{\partial z} \Big|_{z=0, l} = 0, \quad \Theta(z, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=0, l} = 0. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1)–(1.4) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи. Уравнения (1.1) удобнее представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} + I_1 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= -\frac{q}{\rho A}, \\ \frac{1}{n^2} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} - \frac{k^2}{n^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + I_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} &= -\frac{q(e + a_x)}{\rho A}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{c^2}{n^2} + a_x^2 = \frac{a^2}{k^2} + I_3^2, \quad I_3 = a_x.$$

Особенность математической модели (1.2)–(1.5) заключается в том, что дифференциальные уравнения движения (1.5) содержат полную систему инерционных членов. Это определяет специфику дальнейшего решения задачи методом КИП.

2. Решение динамической задачи для стержня

Вводим на сегменте $[0, l]$ многокомпонентное КИП [6]. Имеем

$$\begin{aligned} F(\lambda_i, t) &= \int_0^l \left\{ \left[U_c(z, t) K_1(\lambda_i, z) + I_2 \Theta(z, t) K_2(\lambda_i, z) \right] + \right. \\ &\quad \left. + I_3 \left[U_c(z, t) K_2(\lambda_i, z) + \Theta(z, t) K_1(\lambda_i, z) \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U_c(z, t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} F(\lambda_i, t) K_1(\lambda_i, z)}{\|K_1\|^2}; \quad \Theta(z, t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} F(\lambda_i, t) K_2(\lambda_i, z)}{\|K_2\|^2}. \quad (2.2)$$

Здесь $\{K_1, K_2\}$, $F(\lambda_i, t)$ — определяемые в процессе решения компоненты вектор-функции ядра и трансформанта преобразования (2.1), (2.2), а λ_i — положительные параметры, образующие счетное

множество $i = \overline{1, \infty}$. Равенство (2.1) представляет прямое преобразование, а (2.2) — формулы обращения, которые справедливы при таком обобщенном соотношении ортогональности [6]:

$$\int_0^l \left\{ K_1(\lambda_i, z) K_1(\lambda_j, z) + I_2 K_2(\lambda_i, z) K_2(\lambda_j, z) + \right. \\ \left. + I_3 [K_1(\lambda_i, z) K_2(\lambda_j, z) + K_2(\lambda_i, z) K_1(\lambda_j, z)] \right\} dz = \delta_{ij} \|K_i\|^2, \quad (2.3)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_0^l [K_1^2(\lambda_i, z) + I_2 K_2^2(\lambda_i, z) + 2I_3 K_1(\lambda_i, z) K_2(\lambda_i, z)] dz. \quad (2.4)$$

Выражение (2.3) отличается от известного соотношения ортогональности [9] наличием востепенных членов (последние слагаемые левой части (2.3)). Следует отметить, что при условии ограниченности трансформанты $F(\lambda_i, t)$, $i = \overline{1, \infty}$ обеспечиваются единственность и среднеквадратичная сходимость разложений (2.2) [7]. Применяем к системе дифференциальных уравнений (1.5) и начальным условиям (1.2) многокомпонентное КИП по пространственной переменной z . Для этой цели умножим первое уравнение (1.5) на $K_1(\lambda_i, z) dz$ и второе соответственно на $K_2(\lambda_i, z) dz$ и проинтегрируем в интервале $[0, l]$. Имеем:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^l \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} K_1 dz + I_1 \int_0^l \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} K_1 dz + I_3 \int_0^l \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} K_1 dz = -\frac{1}{\rho A} \int_0^l q K_1 dz, \\ \frac{1}{n^2} \int_0^l \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} K_2 dz - \frac{k^2}{n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2 dz + I_2 \int_0^l \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2 dz + \\ + I_3 \int_0^l \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} K_2 dz = -\frac{(e + a_x)}{\rho A} \int_0^l q K_2 dz. \quad (2.5)$$

Одновременно аналогичную тождественную процедуру осуществляем по отношению к равенствам (1.2). При $t = 0$:

$$I_1 \int_0^l U_c(z, 0) K_1 dz = I_1 \int_0^l U_0(z) K_1 dz, \quad (2.6) \\ I_2 \int_0^l \Theta(z, 0) K_2 dz = I_2 \int_0^l \Theta_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l U_c(z, 0) K_2 dz = I_3 \int_0^l U_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l \Theta(z, 0) K_1 dz = I_3 \int_0^l \Theta_0(z) K_1 dz.$$

Соответственно

$$I_1 \int_0^l \frac{d}{dt} U_c(z, 0) K_1 dz = I_1 \int_0^l \dot{U}_0(z) K_1 dz, \quad (2.7) \\ I_2 \int_0^l \frac{d}{dt} \Theta(z, 0) K_2 dz = I_2 \int_0^l \dot{\Theta}_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l \frac{d}{dt} U_c(z, 0) K_2 dz = I_3 \int_0^l \dot{U}_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l \frac{d}{dt} \Theta(z, 0) K_1 dz = I_3 \int_0^l \dot{\Theta}_0(z) K_1 dz.$$

Складывая уравнения (2.5), а также равенства (2.6) и (2.7) находим

$$\int_0^l \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} K_1 + \left(\frac{1}{n^2} I_1 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} - \frac{k^2}{n^2} \right) K_2 \right] dz + \\ + \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (U_c K_2 + \Theta K_1)] dz = \\ = - \int_0^l \frac{\ddot{q}}{\rho A} [K_1 + (e + a_x) K_2] dz, \quad (2.8)$$

$$\int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (U_c K_2 + \Theta K_1)] dz = \int_0^l [I_1 U_0 K_1 + I_2 \Theta_0 K_2 + I_3 (U_0 K_2 + \Theta_0 K_1)] dz, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (U_c K_2 + \Theta K_1)] dz = \int_0^l [I_1 \dot{U}_0 K_1 + I_2 \dot{\Theta}_0 K_2 + I_3 (\dot{U}_0 K_2 + \dot{\Theta} K_1)] dz. \quad (2.10)$$

Интегрируя по частям члены, содержащие производные по z в полученном равенстве, и имея в виду обозначение трансформанты (2.1), получим:

$$\Phi(U_c, \Theta, K_1, K_2)|_0^l + \int_0^l \left[\frac{1}{a^2} U_c K_1^{IV} + \frac{1}{n^2} \Theta K_2^{IV} - \frac{k^2}{n^2} K_2'' \right] dz + \frac{d^2}{dt^2} F(\lambda_i, t) = \frac{1}{\rho A} P(\lambda_i, t), \quad (2.11)$$

где $P(\lambda_i, t)$ — трансформанта нагрузки, а штрих обозначает дифференцирование по z .

$$P(\lambda_i, t) = \int_0^l q(z, t) [K_1(\lambda_i, z) + (e + a_x) K_2(\lambda_i, z)] dz,$$

$$\Phi(U_c, \Theta, K_1, K_2) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3} K_1 - \frac{\partial^2 U_c}{\partial z^2} K_1' + \frac{\partial U_c}{\partial z} K_1'' - U_c K_1''' \right) +$$

$$+ \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial z^3} K_2 - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2' + \frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2'' - \Theta K_2''' \right) - \frac{k^2}{n^2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2 - \Theta K_2' \right). \quad (2.12)$$

Используем два условия структурного алгоритма метода конечных интегральных преобразований [9]

$$\Phi(U_c, \Theta, K_1, K_2) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{a^2} \int_0^l \left[U_c K_1^{IV} + \frac{a^2}{n^2} \Theta (K_2^{IV} - k^2 K_2'') \right] dz = \frac{\lambda_i^4}{a^2} \int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (\Theta K_1 + U_c K_2)] dz. \quad (2.14)$$

Равенство (2.13) представляет обращение в нуль полилинейной формы (2.12) на концах интервала $[0, l]$, а (2.14) — операционное свойство. С учетом (2.13), (2.14) дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 F(\lambda_i, t)}{dt^2} + \omega_i^2 F(\lambda_i, t) = \frac{1}{\rho A} P(\lambda_i, t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (2.15)$$

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{a} = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}}.$$

Здесь ω_i представляют круговые частоты собственных совместных изгибно-крутильных колебаний стержня. Имея в виду обозначения, введенные в (1.1) для a , n , круговые частоты собственных совместных изгибно-крутильных колебаний стержня могут быть определены также по тождественной формуле:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{a} \sqrt{\frac{I_x}{I_\omega}}, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (2.16)$$

Очевидно, что равенства (2.9), (2.10) представляют начальные условия для трансформанты $F(\lambda_i, t)$

$$F(\lambda_i, 0) = F_0(\lambda_i), \quad \frac{d}{dt} F(\lambda_i, t) = \dot{F}(\lambda_i). \quad (2.17)$$

Таким образом, для трансформанты сформировалась задача Коши (2.15), (2.17). Для произвольной правой части (функции $P(\lambda_i, t)$) неоднородного дифференциального уравнения (2.15) разыскивая его частное решение методом вариации произвольных постоянных, находим:

$$F(\lambda_i, t) = F(\lambda_i) \cos \omega_i t + \dot{F}(\lambda_i) \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i} - \frac{1}{\rho A \omega_i} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Возвращаясь к условиям (2.13), (2.14), сформулируем краевую задачу для компонентов K_1 , K_2 ядра многокомпонентного конечного интегрального преобразования (2.1), (2.2). Из операционного свойства (2.14) следует такое соотношение:

$$\frac{U_c}{a^2} [K_1^{IV} - \lambda_i^4 (K_1 + a_x K_2)] + \Theta \left\{ \frac{1}{n^2} K_2^{IV} + \frac{k^2}{n^2} K_2'' - \frac{\lambda_i^4}{a^2} \left[\left(\frac{c^2}{n^2} + a_x^2 \right) K_2 + a_x K_1 \right] \right\} = 0. \quad (2.19)$$

Поскольку $U_c(z, t)$, $\Theta(z, t)$ — независимые функции, то из последнего равенства получаем однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для K_1 , K_2 . Имеем

$$K_1^{IV} - \lambda_i^4 K_1 - \lambda_i^4 a_x K_2 = 0, \quad \frac{1}{n^2} K_2^{IV} - \frac{1}{n^2} k^2 K_2'' - \lambda_i^4 \frac{1}{a^2} \left[\left(\frac{c^2}{n^2} + a_x^2 \right) K_2 + a_x K_1 \right] = 0. \quad (2.20)$$

Воспользуемся соотношением (2.13), принимая во внимание первое уравнение системы (2.20), которое получено после умножения всех членов на a^2 , при этом учитывая выражение (2.12) и граничные условия (1.3) и (1.4). Равенство (2.13) для условий (1.3) и (1.4) записывается соответственно в следующем виде:

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3} K_1 + \frac{\partial U_c}{\partial z} \ddot{K}_1 \right) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial z^3} K_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \ddot{K}_2 \right) - \frac{k^2}{n^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2 = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3} K_1 - \frac{\partial^2 U_c}{\partial z^2} K_1' \right) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial z^3} K_2 - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2' \right) = 0. \quad (2.22)$$

Поскольку производные функций $U_c(z, t)$, $\Theta(z, t)$, содержащиеся в равенствах (2.21) и (2.22), не определены на концах интервала $[0, l]$, то (2.21) и (2.22) удовлетворяются, если выполняются такие граничные условия для K_1, K_2 :

$$K_{1,2}(\lambda_i, z) |_{z=0, l} = K_{1,2}''(\lambda_i, 0) |_{z=0, l} = 0, \quad (2.23)$$

$$K_{1,2}(\lambda_i, z) |_{z=0, l} = K_{1,2}'(\lambda_i, 0) |_{z=0, l} = 0. \quad (2.24)$$

Замечание. Краевые условия (1.3) и (1.4) для искомых функций тождественны (2.23) и (2.24) для компонентов ядра преобразования, а при соответствиях $U_c \sim K_1$, $\Theta \sim K_2$, $\frac{d}{dt} \sim a^{-2} \lambda_i^4$ система уравнений (2.20) инвариантна левой части (1.5). Инвариантность этих систем относительно преобразования (2.1) и тождественность краевых условий указывает на самосопряженность рассматриваемой краевой задачи (1.2)–(1.5). Это значит, что выполняется условие обобщенной ортогональности (2.3) и справедливы формулы обращения (2.2) [9; 10].

Таким образом, в результате применения структурного алгоритма обобщенного метода конечных интегральных преобразований сформулирована однородная краевая задача на собственные значения для компонентов ядра K_1, K_2 интегрального преобразования (2.20), (2.23) или (2.24).

Выражая из второго уравнения (2.20)

$$K_1 = e_1 K_2^{IV} - e_2 K_2'' - e_3 K_2, \quad (2.25)$$

$$e_1 = a^2 (a_x n^2 \lambda_i^4)^{-1}, e_2 = k^2 a^2, e_3 = (a_x^2 + c^2 n^{-2}) a_x^{-1},$$

приходим к такому дифференциальному уравнению восьмого порядка

$$K_2^{VIII}(\lambda_i, z) - b_1 K_2^{VI}(\lambda_i, z) - b_2 K_2^{IV}(\lambda_i, z) + b_3 K_2^{II}(\lambda_i, z) + b_4 K_2(\lambda_i, z). \quad (2.26)$$

Здесь

$$b_1 = k^2, b_2 = b_2^i = \lambda_i^4 (1 + c^2 a^{-2} + a_x^2 n^2 a^{-2}), b_3 = b_3^i = \lambda_i^4 k^2, b_4 = b_4^i = \lambda_i^8 c^2 a^{-2}.$$

Таким образом, компоненты ядра конечного интегрального преобразования $K_1(\lambda_i, z)$, $K_2(\lambda_i, z)$ являются компонентами собственной вектор-функции, а λ_i — собственными значениями однородной краевой задачи (2.25), (2.26), (2.23) или (2.24).

Определив корни r_1, r_2, \dots, r_8 соответствующего (2.26) характеристического уравнения

$$r^8 - b_1 r^6 - b_2 r^4 + b_3 r^2 + b_4 r = 0,$$

находим общие решения дифференциальных уравнений (2.25), (2.26):

$$K_2(\lambda_i, z) = \sum_{j=1}^8 (-e_1 r_k^4 - e_2 r_k^2 - e_3) C_{ij} \exp^{r_k z},$$

$$K_1(\lambda_i, z) = \sum_{j=1}^8 C_{ij} \exp^{r_k z}.$$

Располагая выражениями $K_1(\lambda_i, z)$, $K_2(\lambda_i, z)$ и их производными, после подстановки этих соотношений в граничные условия (2.23) или (2.24) получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i8}$. Разыскивая нетривиальные решения последней, приравниваем определитель системы нулю. В результате получаем трансцендентное уравнение для определения параметров (собственных значений) λ_i , а затем из оставшихся семи уравнений находят постоянные $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i7}$, с точностью до константы C_{i8} . Принимая для нее подходящее выражение, получаем окончательно все восемь постоянных $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i8}$.

Таким образом, определив компоненты ядра преобразования $K_1(\lambda_i, z)$, $K_2(\lambda_i, z)$, собственные значения λ_i , а затем по формуле (2.16) круговые частоты, а также квадрат нормы ядровой функции (2.4), для принятого воздействия (закона $q(z, t)$) и заданных начальных и краевых условий (1.2), (1.3), (1.4) вычисляются интеграл Дюамеля и трансформанта (2.18). Располагая функцией $F(\lambda_i, t)$ по формуле обращения (2.2), определяются линейные перемещения и углы закручивания.

Выводы

Таким образом, в статье получено аналитическое решение динамической задачи для стержня при произвольных условиях его закрепления и загрузки с помощью многокомпонентного конечного интегрального преобразования.

Литература

- [1] Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. и перераб. Ленинград: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1976, 320 с. URL: <https://studizba.com/files/show/pdf/16226-1-panovko-ya-g-osnovy-prikladnoy-teorii.html>.
- [2] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным условием его закрепления на части границы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23. № 2. С. 7–14. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14>.
- [3] Богатов А.В. Задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 7–12. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12>.
- [4] Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р. Собственные изгибные колебания естественно закрученного стержня // Вестник УГАТУ. 2019. Т. 23. № 4(86). С. 33–41. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41827630>; <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/download/2888/2561/>.
- [5] Каган-Розенцвейг Л.М. Метод вычисления частот собственных колебаний упругих стержней прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1 (72). С. 61–66. DOI: <http://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-61-66>.
- [6] Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Известия вузов. Сер.: Математика. 1991. № 4. С. 27–63. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23476952>.
- [7] Сеницкий Ю.Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования // Известия вузов. Сер.: Математика. 1991. № 9. С. 53–56. URL: <http://www.mathnet.ru/links/0a26e96fecf70f1717b0b1df0cb8e472/ivm5150.pdf>.
- [8] Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1971. 380 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/9881>.
- [9] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: СГУ, 1985, 176 с.
- [10] Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований — обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 3(1). С. 61–98. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69

Submitted: 15.01.2020

Revised: 30.01.2020

Accepted: 25.05.2020

E.N. Elekina

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: elekina-e1@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9516-7644>

E.S. Vronskaja

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: es.vronskaja@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1304-0138>

DYNAMIC PROBLEM FOR A THIN-WALLED BAR WITH A MONOSYMMETRIC PROFILE

ABSTRACT

The paper presents an analytical solution to the dynamic problem for a thin-walled elastic rod, the cross-section of which has one axis of symmetry. The solution is constructed for an arbitrary dynamic load and two types of boundary conditions: hinged support in constrained torsion and free warping of the end

sections of the rod; rigid fastening with constrained torsion and absence of warping. The peculiarity of the mathematical model lies in the fact that the differential equations of motion contain a complete system of inertial terms. Spectral expansions obtained as a result of using the method of integral transformations are represented as an effective method for solving linear non-stationary problems in mechanics. The structural algorithm of the method of finite multicomponent integral transformations proposed by Yu.E. Senitsky is used.

Key words: thin-walled bar, symmetric profile, boundary value problem, dynamic load, natural vibrations, natural vibration frequency, forced vibrations, integral transformations.

Citation. Elekina E.N., Vronskaja E.S. Dynamic problem for a thin-walled bar with a monosymmetric profile. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 63–69. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-63-69>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Elekina Elena Nikolaevna* — senior lecturer of the Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russian Federation.

© *Vronskaja Elena Sergeevna* — Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

- [1] Panovko Ia.G. Foundations of the applied theory of vibrations and impact. 3rd edition, enlarged and revised. Leningrad: «Mashinostroenie» (Leningr. otd-nie), 1976, 320 p. Available at: <https://studizba.com/files/show/pdf/16226-1-panovko-ya-g-osnovy-prikladnoy-teorii.html>. (In Russ.)
- [2] Beylin A.B., Pulkina L.S. A problem on vibration of a bar with unknown boundary condition on a part of the boundary. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 7–14. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14>. (In Russ.)
- [3] Bogatov A.V. Problem with an integral condition for one-dimensional hyperbolic equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 7–12. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12>. (In Russ.)
- [4] Pavlov V.P., Nusratullina L.R. Natural bending vibrations of naturally twisted rod. *Vestnik USATU*, 2019, vol. 23, no. 4 (86), pp. 33–41. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41827630>; <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/download/2888/2561/>.
- [5] Kagan-Rosenzweig L.M. The method for calculating the natural frequencies of elastic rods by application of direct integration of differential bending equation. *Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 1 (72), pp. 61–66. DOI: <http://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-61-66>. (In Russ.)
- [6] Senitskii Yu.E. A multicomponent generalized finite integral transformation and its application to nonstationary problems in mechanics. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1991, vol. 35, no. 4, pp. 55–61. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23476952>. (In Russ.)
- [7] Senitskii Yu.E. Convergence and uniqueness of representations defined by a formula for the inversion of a multicomponent generalized finite integral transformation. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1991, vol. 35, no. 9, pp. 52–54. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/0a26e96fecf70f1717b0b1df0cb8e472/ivm5150.pdf>. (In Russ.)
- [8] Vlasov V.Z. Thin-walled elastic rods. Moscow: Gos. izdat. fiz.-mat. literatury, 1971, 380 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/9881>. (In Russ.)
- [9] Senitskii Yu.E. Studying the elastic deformation of structural elements under dynamic loads using the finite transform method. Saratov: SGU, 1985, 176 p. Available at: <https://dwg.ru/lib/864>. (In Russ.)
- [10] Senitsky Yu.E. Finite integral transformations method: generalization of classic procedure for eigenvector decomposition. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, vol. 11, no. 3 (1), pp. 61–98. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89>. (In Russ.)

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru><http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронная (e-mail: nsvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\LaTeX_2\epsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций \TeX 'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами \LaTeX 'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("–"), двойной дефис ("—")¹, тройной дефис ("—")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала