СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Богатов А.В. Задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения 7
Воскресенская Г.В. Функции МакКея в пространствах высших уровней 13
Киричек В.А. О нелокальных задачах для одномерного гиперболического уравнения 19
Кириченко С.В. Об одной задаче с нелокальным по переменной времени условием для гиперболического уравнения 24
Любимов В.В., Меликджанян Р.В. Расчет числа палиндромов в двоичной системе счисления 29
Соболев В.А., Щепакина Е.А., Тропкина Е.А. Параметризация инвариантных многообразий медленных движений 33
Фирстова Н.М. Эффект влияния белого шума в динамической модели электрохимической реакции 41

Математические методы в естественных науках

Переварюха А.Ю. Моделирование флуктуаций агрессивных чужеродных видов в непрерывных моделях с независимой регуляцией 48

Сведения об авторах 59

Требования к оформлению статей 63

CONTENTS

Mathematics

Bogatov A.V. Problem with an integral condition for one-dimensional hyperbolic equation **7**
Voskresenskaya G.V. MacKay functions in spaces of higher levels **13**
Kirichek V.A. Nonlocal problems for one-dimensional hyperbolic equation **19**
Kirichenko S.V. About one task with a nonlocal condition on time variable for the hyperbolic equation **24**
Lyubimov V.V., Melikdzhanyan R.V. Calculation of the number of palindroms in a binary system **29**
Sobolev V.A., Shchepakina E.A., Tropkina E.A. Parametrization of invariant manifolds of slow motions **33**
Firstova N.M. White noise effect in the dynamic model of the electrochemical reaction **41**

Mathematical Methods in Natural Sciences

Perevaryukha A.Yu. Simulation of fluctuations of aggressive alien species in continuous models with independent regulation **48**

Information about the authors **59**

Requirements to the design of articles **63**

МАТЕМАТИКА

УДК 629.7.05 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12

А.В. Богатов[1]

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, проведено доказательство существования и единственности решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, единственность решения, разрешимость задачи.

Цитирование. Богатов А.В. Задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 7–12. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12.

Введение

В статье изучается задача для одномерного гиперболического уравнения с нелокальным интегральным условием первого рода.

Задачи с нелокальными условиями представляют собой одно из динамично развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений. Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых задаются условия, связывающие значения искомого решения или его производных в различных точках границы и каких-либо внутренних точках. Отдельного внимания заслуживает класс задач с интегральными условиями, которые являются обобщением локальных и дискретных нелокальных условий. Нелокальные интегральные условия возникают при исследовании различных физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственного измерения. Нелокальные задачи также имеют большое практическое значение при решении задач механики твердого тела, а именно, они позволяют построить математическую модель процесса неразрушающего контроля и, как следствие, управлять напряженно-деформированным состоянием.

Уравнение колебаний струны является простейшим уравнением гиперболического типа и используется для описания линейных волновых процессов различной физической природы. Например, это уравнение описывает малые поперечные колебания струны, продольные колебания тонкого стержня, применяется при рассмотрении широкого круга волновых процессов акустики, гидродинамики, электродинамики. Исследования задач с нелокальными условиями показали, что многие классические методы доказательства разрешимости начально-краевых задач не применимы в случае нелокальных задач или требуют значительной модификации. Попытка применить метод разделения переменных для исследования разрешимости задач с интегральными условиями чаще всего приводит к неортогональной и неполной системе собственных функций, что в свою очередь делает метод разделения переменных неприменимым. Серьезной причиной неприменимости классических методов для исследования нелокальных задач является тот факт, что область определения оператора, порождаемого нелокальной задачей, как правило, не является плотной в L_2. Поэтому разработка методов исследования разрешимости нелокальных задач остается актуальной. Несмотря на то, что на сегодняшний день разработан не один метод решения нелокальных задач, мы воспользовались одним из самых универсальных – методом вспомогательных задач. Суть метода вспомогательных задач в следующем: сначала решается задача с классическими (но неизвестными) граничными условиями, а затем производится попытка поиска граничных условий как

Богатов Андрей Владимирович (andrebogato@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443011, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

решения операторного уравнения, полученного в результате применения нелокального условия к решению вспомогательной задачи. Именно этим методом, хотя он тогда еще не имел названия, доказана разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности в статье Дж. Р. Кэннона [1]. Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений рассматривались многими авторами. Отметим здесь статьи [2–4], а также монографию [5] и обратим внимание на список литературы в них. Заметим, что задачи с интегральными условиями часто можно трактовать как задачи управления. Задачам управления для уравнения колебания струны посвящен ряд статей В.А. Ильина [6; 7].

Колебательные процессы могут возникать в абсолютно любой механической системе. Причины появления в зависимости от типов источников делятся на два типа: внутренние и внешние источники. Многие механизмы, как правило, представляют собой стержни переменного сечения. Например, балка моста автомобиля: к центру идет расширение диаметра стержня за счет отверстия для слива масла, крышки картера, рессорной подушки, и т.д., в авиационных двигателях – лопатки турбины, в устройствах обработки материалов — волноводы [8–10]. То есть можно сделать вывод, что в различных областях техники решаются задачи, связанные с колебаниями стержней. Для обеспечения долгой и бесперебойной работы современной техники необходимо проводить регулярные диагностические процедуры для оценки состояния и возможности дальнейшей эксплуатации оборудования. Но не всегда представляется возможным провести практическую диагностику оборудования, поэтому анализ результатов диагностики приходится проводить на основе косвенной информации о процессе колебаний (чаще всего – некоторое среднее значение). Если переходить к математической модели, то эта информация как правило поступает в виде интеграла от искомого решения.

Как было отмечено ранее, причины и следствия протекания колебательных процессов могут быть различными, то есть возникает необходимость теоретического изучения колебаний с целью определения допустимых областей изменения параметров, влияющих на протекание процесса. Исследованию математических моделей колебательных процессов посвящено большое количество статей, отметим здесь некоторые из них: [11–14].

В нашей статье рассматривается задача для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу: в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ найти решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{1.1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \phi(x), u_x(0,t) = 0, \tag{1.2}$$

и нелокальному условию

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = g(t). \tag{1.3}$$

Стоит отметить, что (1.3) — операторное уравнение первого рода, которое является некорректно поставленной задачей. Для ее решения необходимо установить ограничения на ядро и правую часть.

2. Разрешимость задачи

Теорема 2.1 Если $K_i \in C'[0,l], \triangle = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0, f \in C'(\bar{Q}_T)$, при всех $T \leqslant l$, то существует единственное решение $u \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ задачи (1.1)-(1.3)

Доказательство

На данный момент известен не один метод решения задач с нелокальными условиями, но мы применим метод вспомогательных задач, поскольку он применим в рамках поставленной задачи и является одним из самых надежных методов.

В качестве вспомогательной задачи рассмотрим первую начально-краевую задачу с неоднородными краевыми условиями

$$\begin{gathered} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t), \mu_1(t) \in W_2^2(0,T), \mu_i(t) = \mu_i'(t), t \leqslant 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Будем искать ее решение в виде суммы $u(x,t) = u^0(x,t) + v(x,t)$, где $u^0(x,t)$ — решение задачи для однородного уравнения

$$\begin{cases} u^0_{tt} - a^2 u^0_{xx} = 0, \\ u^0(0,t) = \mu_1(t), \\ u^0(l,t) = \mu_2(t), \\ u^0(x,0) = 0, \\ u^0_t = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

а $v(x,t)$ - решение задачи

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t), \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Для решения задачи (2.2) воспользуемся приемом, предложенным в статье [2]. Пусть функции $\mu_i \in W_2^2(0,T), \quad \mu_i(t) = 0$ при $t \leqslant 0$.

Тогда решение задачи (2.2) можно представить следующим образом:

$$u^0(x,t) = \mu_1(t-x) + \mu_2(t+x-l), T \leqslant l.$$

Для решения задачи (2.3) применим классический метод разделения переменных, что приведет к представлению решения

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) sin\frac{\pi n x}{l}, V_n(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t f_n(\theta) sin\frac{\pi n}{l}(t-\tau)d\tau.$$

Тогда решение вспомогательной задачи (2.1) имеет вид

$$u(x,t) = \mu_1(t-x) + \mu_2(t+x-l) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) sin\frac{\pi n x}{l} \tag{2.4}$$

Однако функции $\mu_i(t)$ нам не известны. Будем пытаться их найти, применив к (2.4) интегральные условия (2.1).

В результате мы приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered} \int_0^l K_1(x)\mu_1(t-x)dx + \int_0^l K_1(x)\mu_2(t+x-l)dx + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\int_0^l K_1(x) sin\frac{\pi n x}{l} = g_1(t), \\ \int_0^l K_2(x)\mu_1(t-x)dx + \int_0^l K_2(x)\mu_2(t+x-l)dx + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\int_0^l K_2(x) sin\frac{\pi n x}{l} = g_2(t). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Теперь нам нужно выяснить, найдутся ли функции, удовлетворяющие этой системе интегральных уравнений. При положительном ответе на этот вопрос, формула (2.4) даст решение поставленной нелокальной задачи.

В (2.5) сделаем замену переменных, положив $\xi = t-x, \xi = x+t-l$ в первых двух интегралах каждого уравнения. Тогда, учитывая свойства функции $\mu_i(t)$ получим

$$\begin{gathered} \int_0^l K_1(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^l K_1(\xi-t+l)\mu_2(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\int_0^l K_1(x) sin\frac{\pi n x}{l}dx = g_1(t), \\ \int_0^l K_2(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^l K_2(\xi-t+l)\mu_2(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\int_0^l K_2(x) sin\frac{\pi n x}{l}dx = g_2(t). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Дифференцируя уравнения (2.6) по t, в силу условия теоремы, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$K_1(0)\mu_1(t) + K_1(l)\mu_2(t) + \int_0^t K_1'(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi - \int_0^t K_1'(\xi-t+l)\mu_2(\xi)d\xi = \bar{g_1}(t), \tag{2.7}$$

$$K_2(0)\mu_1(t)+K_2(l)\mu_2(t)+\int_0^t K_2'(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi-\int_0^t K_2'(\xi-t+l)\mu_2(\xi)d\xi=\bar{g}_2(t),$$

где

$$\bar{g}_i(t)=g_i'(t)-\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)\int_0^l K_2(x)sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Так как по условию теоремы $\triangle=K_1(0)K_2(l)-K_1(l)K_2(0)\neq 0$, то (2.7) можно разрешить относительно $\mu_i(t)$:

$$\mu_1(t)+\int_0^t \aleph_{11}(\xi,t)\mu_1(\xi)d\xi+\int_0^t \aleph_{12}(\xi,t)\mu_2(\xi)d\xi=g_1(t),$$

$$\mu_2(t)+\int_0^t \aleph_{21}(\xi,t)\mu_1(\xi)d\xi+\int_0^t \aleph_{22}(\xi,t)\mu_2(\xi)d\xi=g_1(t), \tag{2.8}$$

где

$$H_{11}(\xi,t)=\frac{K_1'(t-\xi)K_2(l)-K_2'(t-\xi)K_1(l)}{\triangle},$$

$$H_{12}(\xi,t)=\frac{K_2'(t-\xi)K_1(l)-K_1'(t-\xi)K_2(l)}{\triangle},$$

$$H_{21}(\xi,t)=\frac{K_1'(t-\xi)K_2(l)-K_2'(t-\xi)K_1(l)}{\triangle},$$

$$H_{22}(\xi,t)=\frac{K_1(l)K_2'(t-\xi)-K_2(l)K_1'(t-\xi)}{\triangle},$$

$$G_1(t)=\frac{\bar{g_1}(t)K_2(l)-\bar{g_2}(t)K_1(l)}{\triangle},$$

$$G_2(t)=\frac{\bar{g_1}(t)K_2(l)-\bar{g_2}(t)K_1(l)}{\triangle}.$$

В силу условий теоремы, нетрудно убедиться в том, что $H_{ij}(\xi,t)$ ограничены, $G_i(t)$ интегрируемы на [0,T]. Тогда система (2.8) однозначно разрешима [15].

Итак, функции $\mu_i(t)$ однозначно определены из системы интегральных уравнений, которая является следствием применения интегральных условий. Тогда решение вспомогательной задачи с найденными функциями $\mu_i(t)$ в качестве граничных условий представляет собой решение поставленной задачи.

Литература

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. № 21. URL: https://www.jstor.org/stable/43635292.

[2] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74–83. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm8596.

[3] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. № 1. С. 94–103. URL: http://mi.mathnet.ru/mm832.

[4] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. 5(1). С. 31–37. URL: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf.

[5] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во Самарский университет, 2012.

[6] Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. №5. С. 692–304. URL: http://mi.mathnet.ru/de9920.

[7] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754231.

[8] Хазанов Х.С. Механические колебания систем с распределенными параметрами: учеб. пособие. Самара: Самар. Госуд. Аэрокосмич. Ун-т, 2002. 80 с.

[9] Вейц В.Л., Дондошанский В.К., Чиряев В.И. Вынужденные колебания в металлорежущих станках. М.; Л.: Машгиз, 1959. 288 с.

[10] Нерубай М.С., Штриков Б.Л., Калашников В.В. Ультразвуковая механическая обработка и сборка. Самара: Самарское книжное изд-во, 1995. 191 с.

[11] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным условием его закрепления на части границы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23. № 2. С. 7–14. DOI: http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14.

[12] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // Докдады РАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 56–61.

[13] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3(114). С. 9–19. URL: http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/3-2014-1.pdf.

[14] Бейлин А.Б. Задача о продольных колебаниях упруго закреплённого нагруженного стержня // Вестник Самарского гос. Тех. Ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 2. С. 249–258. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1474.

[15] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 241 с.

References

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, no. 21. Available at: https://www.jstor.org/stable/43635292 [in Russian].

[2] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokalnymi usloviyami I i II roda* [Boundary value problems for the hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izv. vuzov. Ser.: Matematika* [Russian Mathematics], 2012, no. 4, pp. 74–83. Available at: http://mi.mathnet.ru/ivm8596 [in Russian].

[3] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Resheniya nelokalnykh zadach dlya odnomernykh kolebanii sredy* [Solutions of nonlocal problems for one-dimensional oscillations]. *Matem. modelir.* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2000, no. 1, pp. 94–103. Available at: http://mi.mathnet.ru/mm832 [in Russian].

[4] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, no. 5(1), pp. 31–37. Available at: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf [in English].

[5] Pulkina L.S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations]. Samara: Izd-vo Samarskii universitet, 2012 [in Russian].

[6] Ilyin V.A., Tikhomirov V.V. *Volnovoe uravnenie s granichnym upravleniem na dvukh kontsakh i zadacha o polnom uspokoenii kolebatelnogo protsessa* [Wave equation with boundary control at two ends and the problem of complete calming of oscillatory process]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 1999, Vol. 35, no. 5, pp. 697–708. Available at: http://mi.mathnet.ru/de9920 [in Russian].

[7] Ilyin V.A., Moiseev E.I. *O edinstvennosti resheniya smeshannoi zadachi dlya volnovogo uravneniya s nelokalnymi granichnymi usloviyami* [On the uniqueness of solution of a mixed problem for the wave equation with nonlocal boundary conditions]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2000, Vol. 36, no. 5, pp. 728–733. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754231 [in Russian].

[8] Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniya sistem s raspredelennymi parametrami: ucheb. posobie* [Mechanical vibrations of systems with distributed parameters: textbook]. Samaara: Samar. Gosud. Aerokosmich. Un-t, 2002, 80 p. [in Russian].

[9] Veits V.L., Dondoshanskiy V.K., Chiryaev V.I. *Vynuzhdennye kolebaniya v metallorezhushchikh stankakh* [Forced oscillations in metal-cutting machines]. M.; L.: Mashgiz, 1959, 288 p. [in Russian].

[10] Nerubay M.S., Shtrikov B.L., Kalashnikov V.V. *Ultrazvukovaya mekhanicheskaya obrabotka i sborka* [Ultrasonic machining and assembly]. Samara: Samarskoe knizhnoe izd-vo, 1995, 191 p. [in Russian].

[11] Beylin A.B., Pulkina L.S. /Zadacha o kolebaniyakh sterzhnya s neizvestnym usloviem ego zakrepleniya na chasti granitsy] [The problem of oscillations of a rod with an unknown condition for its attachment to a part of the boundary]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2017. Vol. 23, no. 2, pp. 7–14. DOI: http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14 [in Russian].

[12] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. *Teoriya svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnya, osnovannaya na modeli Releya* [Theory of free and forced oscillations of a solid rod based on Rayleigh model]. *Dokdady RAN* [Doklady Mathematics], 2007, Vol. 417, no. 1, pp. 56–61 [in Russian].

[13] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodolnykh kolebaniyakh sterzhnya s dinamicheskimi granichnymi usloviyami* [Problem of longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 9–19. Available at: http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/3-2014-1.pdf [in Russian].

[14] Beylin A.B. *Zadacha o prodolnykh kolebaniyakh uprugo zakreplennogo nagruzhennogo sterzhnya* [Problem of longitudinal vibrations of an elastically fixed loaded rod]. *Vestnik Samarskogo gos. Tekh. Un-ta. Ser.: Fiz.-mat. nauki* [Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series], 2016, Vol. 20, no. 2, pp. 249–258. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1474 [in Russian].

[15] Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear partial differential equations]. M.: Vysshaya shkola, 1977, 241 p. [in Russian].

A.V. Bogatov[2]

PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION FOR ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

In this paper, we study a nonlocal problem with an integral condition for a one-dimensional hyperbolic equation arising in the study of vibrations of the rod. The conditions for the input data providing unambiguous solvability of the problem are obtained, the proof of the existence and uniqueness of the solution of the problem is carried out.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal proiblem, integral conditions, uniqueness of the solution, solvability of the problem.

Citation. Bogatov A.V. *Zadacha s integralnym usloviem dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya* [Problem with an integral condition for one-dimensional hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 4, pp. 7–12. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12 [in Russian].

Статья поступила в редакцию $4/IX/2018$.
The article received $4/IX/2018$.

[2] *Bogatov Andrey Vladimirovich* (andrebogato@mail.ru), Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 511.334 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18

Г.В. Воскресенская[1]

ФУНКЦИИ МАККЕЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЫСШИХ УРОВНЕЙ

В статье доказаны структурные теоремы для пространств параболических форм уровней, которые кратны минимальным уровням для функций МакКея. Существует 28 эта-произведений с мультипликативными коэффициентами Фурье целого веса. Их называют функциями МакКея. Пусть $f(z)$ — такая функция. Она лежит в пространстве $S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ для минимального уровня N. Любое пространство уровня N допускает точное рассечение функцией $f(z)$. Функция $f(z)$ является также параболической формой для кратных уровней. В этом случае точное рассечение уже не имеет места, возникают дополнительные пространства. В статье найдены условия на дивизор для функций, делящихся на $f(z)$, изучена структура дополнительных пространств. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна — Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, структурные теоремы, формула Коэна — Остерле, формула Биаджиоли.

Цитирование. Воскресенская Г.В. Функции МакКея в пространствах высших уровней // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018, no. 24, no. 4, pp. 13–18. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18.

1. Предварительные сведения

В статье доказаны структурные теоремы для пространств параболических форм уровней, кратных уровням, соответствующим функциям МакКея. Обозначения и утверждения теории модулярных форм, которые используются в тексте, можно найти в книгах [1–3]. В работе [4] было показано, что функции МакКея обеспечивают точное рассечение в пространствах минимальных уровней. Они также рассекают пространства кратных уровней, но здесь уже возникают дополнительные пространства, природу которых мы и исследуем в статье. Будем использовать свойства модулярных форм, являющихся эта-частными и эта-произведениями. Их определение и основные свойства содержатся в статьях [5–8]. Размерности вычисляются по формуле Коэна — Остерле [9], порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли [10]. Теорема 1.1 цитируется, теоремы 2.2, 2.3, 2.4 и лемма 2.1 являются новыми.

1.1. Функции МакКея и точное рассечение

В 1985 году Дж. МакКей, Д. Даммит, Х. Кисилевски доказали в статье [8], что эта-произведений с мультипликативными коэффициентами целого веса существует ровно 28. Их полный список с указанием весов, уровней и характеров можно найти также в статье [5]. В математической литературе для их обозначения используются два названия: "мультипликативные эта-произведения" и "функции МакКея" в честь первого из авторов, вклад которого в открытие был существенным.

Пусть $f(z)$ — такая функция. Она имеет в каждой параболической вершине относительно $\Gamma_0(N)$, где N — минимальный возможный уровень, порядок 1. В работе [4] была доказана следующая теорема о точном рассечении.

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Теорема 1.1.

Пусть χ — квадратичный характер по модулю $N \neq 3, 17, 19$ такой, что $\chi(-1) = (-1)^k$, $k, l \in \mathbf{N}$. Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi^k) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-l}),$$

где $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi^l)$,
в том и только в том случае, когда $f(z)$ — функция МакКея.

Для уровня 3 рассекающая функция может быть функцией МакКея $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, но возможны и другие варианты. Для уровней $N = 17, 19$ рассекающая функция не является даже эта-произведением.

1.2. Формула Коэна — Остерле

Эта формула открыта в 1977 году в работе [9]. Мы используем этот результат для доказательства структурных теорем.

Введем обозначения:

$$D_0 = \frac{|\Gamma : \Gamma_0(N)|}{12} = \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

Рассмотрим характер Дирихле χ с условием $\chi(-1) = (-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p такую степень, что $p^{r_p}||N$, через через s_p такую степень, что $p^{s_p}||f$. Обозначим

$$D_{1,\chi} = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r' + 1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p \geqslant r_p. \end{cases}$$

$$D_{2,\chi} = \sum_{x : x^2 + 1 \equiv 0 (N)} \chi(x), \quad D_{3,\chi} = \sum_{x : x^2 + x + 1 \equiv 0 (N)} \chi(x).$$

$$n_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$m_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 3), \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Если $\chi = \chi_0$ — единичный характер, то $D_{j,\chi} = D_j$.

Число $D_{2,\chi} = 0$, если N делится на 4 или на простое число $p \equiv 3 \ (mod\ 4)$, $D_{3,\chi} = 0$, если N делится на 2 или 9 или на простое число $p \equiv 2 \ (mod\ 3)$. Число $D_{1,\chi}$ равно количеству параболических вершин $\mu_\infty(N)$ относительно группы $\Gamma_0(N)$, если для любого простого числа p выполнено условие $s_p \leqslant r_p$. Величины $D_{2,\chi}$ и $D_{3,\chi}$ учитывают эллиптические точки, лежащие над i и над $\omega = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ соответственно [3].

Тогда по теореме Коэна — Остерле имеет место соотношение:

$$dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) - dim M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)D_0 - \frac{1}{2}D_{1,\chi} + n_k D_{2,\chi} + m_k D_{3,\chi}.$$

Для $k = 1$ эта формула не позволяет найти размерности пространств $S_1(\Gamma_0(N), \chi)$ и $M_1(\Gamma_0(N), \chi)$, а только их разность, и требуются дополнительные соображения. Для $k = 0$ тоже требуется специальное рассмотрение Если $\chi = \chi_0$, то $dim\ M_0\ (\Gamma_0(N)) = 1$ для любого уровня N. Пространство $M_0\ (\Gamma_0(N))$ состоит только из констант. Если χ — неединичный характер, то $dim\ M_0\ (\Gamma_0(N), \chi) = 0$.

$$dim\ S_2(\Gamma_0(N), \chi) = 1 + D_0 - \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4} \cdot D_{2,\chi} - \frac{1}{3}D_{3,\chi}.$$

Для $k > 2$ из формулы Коэна — Остерле получаем

$$dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)D_0 - \frac{1}{2}D_{1,\chi} + n_k D_{2,\chi} + m_k D_{3,\chi}.$$

$$dim M_k(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)D_0 + \frac{1}{2}D_{1,\chi} - n_k D_{2,\chi} - m_k D_{3,\chi}.$$

Заметим, что $dim\ M_k(\Gamma_0(N), \chi) - dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ зависит только от уровня и характера, но не зависит от веса, определяется количеством параболических вершин с некоторой поправкой на действие характера и учетом эллиптических точек. Во многих случаях эта поправка равна 0, и разность размерностей равна количеству параболических вершин.

2. Основные результаты

2.1. Условия на дивизор для параболической формы кратной функции МакКея

Здесь мы сначала докажем лемму о вычислении порядков эта—частных при переходе к кратным уровням, а затем определим условия на дивизор для параболической формы кратной функции МакКея.

Лемма 2.1.

Пусть N, M — натуральные числа, $f(z)=\prod_{j=1}^{s}\eta(a_jz)^{t_j}$ — эта-частное уровня N, $r=\frac{m}{n}$ — параболическая вершина, $(m,n)=1$. Обозначим через $\alpha(r)$ — порядок $f(z)$ в вершине r как функции уровня N, а через $\beta(r)$ — порядок $f(z)$ в вершине r как функции уровня MN.

Тогда

1) $\beta(\infty)=\alpha(\infty)$; 2) $\beta(0)=M\cdot\alpha(0)$; 3) если $n|N,(n,M)=1$, то $\beta(r)=M\cdot\alpha(r)$; 4) если $n|M,(n,N)=1$, то $\beta(r)=\frac{M}{n}\cdot\alpha(1)$; 5) если $(n,N)=n_1>1$, $(n,M)=n_2>1$, то $\beta(r)=\frac{[n,\frac{MN}{n}]}{[n,N]}\cdot\alpha(\frac{1}{n_1})$.

Доказательство.

Как показано в книге [1] всегда можно выбрать n делителем MN, и все a_j делят N. Заметим, что из формулы Биаджиоли следует, что значение порядка эта–частного в параболической вершине зависит только от знаменателя: $\alpha(\frac{1}{n})=\alpha(\frac{m}{n})$, $(m,n)=1$ (также и для β.) Параболическая вершина ∞ эквивалентна $\frac{1}{MN}$.

Для удобства обозначим через

$$S(n)=\sum_{j=1}^{s}\frac{t_j(a_j,n)^2}{a_j}.$$

По формуле Биаджиоли [10] имеем:

$$\alpha(r)=\frac{N}{24\cdot(n,\frac{N}{n})n}\cdot S(n)=\frac{[N,n]}{24n}S(n).$$

1) Очевидно. 2) Из формулы для $\alpha(r)$ следует, что

$$\alpha(1)=\frac{N}{24}S(1).$$

Так $0=\frac{0}{1}$, то $\alpha(1)=\alpha(0)$, $\beta(1)=\beta(0)$.

Вычислим значение

$$\beta(0)=\frac{MN}{24}S(1)=M\alpha(0).$$

3) Рассмотрим третий случай.

$$\beta(r)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})n}S(n)=\frac{MN}{24(n,\frac{N}{n})n}S(n)=M\alpha(r).$$

4) Рассмотрим четвертый случай.

$$\beta(r)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})n}S(n)=\frac{MN}{24(n,\frac{M}{n})n}S(1)=\frac{[n,\frac{M}{n}]}{n}\alpha(1)=\frac{M}{n}\alpha(1).$$

5) И, наконец, пятый — самый сложный случай.

$$\beta(r)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})n}S(n)=\frac{MN}{24(n,\frac{MN}{n})\frac{n}{(n,N)}n_1}S(n_1)=\frac{MN(n,N)}{nN(n,\frac{MN}{n})}\alpha\left(\frac{1}{n_1}\right)=\frac{[n,\frac{MN}{n}]}{[n,N]}\alpha\left(\frac{1}{n_1}\right).$$

Теорема 2.2.

Пусть $f(z)\in S_k(\Gamma_0(M\cdot N),\psi)$ — функция МакКея, N — ее минимальный уровень, M — натуральное число, $r=\frac{m}{n}$ — параболическая вершина относительно $\Gamma_0(M\cdot N)$.

Пусть, далее

$$\beta(r) = \begin{cases} 1, & n = MN, \\ M, & n|N, (n, M) = 1, \\ \frac{MN}{n}, & n|M, (n, N) = 1, \\ \frac{[n, \frac{MN}{n}]}{[n,N]}, & (n, N) > 1, \ (n, M) > 1 \end{cases}$$

Функция $g(z) \in S_k(\Gamma_0(MN))$ представляется в виде $g(z) = f(z) \cdot h(z)$, где $h(z) \in M_{k-l}(\Gamma_0(MN), \psi_1)$, $\chi = \psi \cdot \psi_1$, в том и только том случае, когда $ord_r g(z) \geqslant \beta(r)$.

Доказательство.

В силу леммы $\beta(r) = ord_r f(z)$, так как $\alpha(r) = 1$ для функции МакКея $f(z)$ в любой параболической вершине r. Тогда, если $ord_r(g(z) \geqslant \beta(r)$ функция $\frac{g(z)}{f(z)}$ не имеет полюсов и удовлетвряет условию автоморфности относительно $\Gamma_0(MN)$ с характером $\psi_1 = \chi \cdot \psi^{-1}$. Обратное включение очевидно.

2.2. Структурные теоремы

Переходим к основной цели статьи - изучению рассечения пространств кратных уровней функциями МакКея.Рассмотрим отдельно случай четного веса и единичного характера и нечетного веса и неединичного характера. Доказательство теоремы 2.4 отличается от доказательства теоремы 2.3 лишь в нескольких деталях, связанных с учетом характера в формуле размерности.

Теорема 2.3. *Пусть*

1) NM *— таково, что* $D_2 = D_3 = 0$;
2) $k, l \in 2\mathbf{Z}$, $k \geqslant l + 8$;
3) $f(z)$ *— функция МакКея веса* l*, уровня* N*;*
4) $\{u_1(z), ..., u_t(z)\}$ *— базис ортогонального дополнения* U *к пространству* $f(z)M_2(\Gamma_0(N))$ *в пространстве* $S_{l+2}(\Gamma_0(N))$.
Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \oplus W,$$

где базис пространства W *состоит из функций* $u_1(z)h(z), ..., u_t(z)h(z)$*, где*

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l + 2 \ (mod \ 4), \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l \ (mod \ 4). \end{cases}$$

$$dim \ W = t = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \mu_\infty(N).$$

Доказательство.

Используя формулы и предыдущего параграфа, вычислим

$$t = dim \ S_k(\Gamma_0(N)) - dim M_{k-l}(\Gamma_0(N)) = l \cdot D_0 - D_1 = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \mu_\infty(N).$$

Размерность пространства U из условия теоремы равна t.

Функции $u_1(z)h(z), ..., u_t(z)h(z)$ принадлежат пространству $S_k(\Gamma_0(N))$ и линейно независимы, так как в противном случае были бы линейно зависимы функции $u_1(z), ..., u_t(z)$, а это не так. Рассмотрим пространство $W = Span\{u_1(z), ..., u_t(z)\}$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что $W \cap f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)) = \{0\}$. Обозначим через $u(z) = c_1u_1(z) + ... + c_tu_t(z)$. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1u_1(z)h(z) + ... + c_tu_t(z)h(z) = u(z)h(z)$. Так как функции $h(z)$ не имеют нулей вне параболических вершин, то из того, что $u(z)h(z) \in f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ следует, что в любой параболической вершине r $ord_r(u(z)) \geqslant ord_r(f(z))$, и $u(z) \in f(z)M_2(\Gamma_0(N))$, а это противоречит выбору $u_j(z)$.

Теорема 2.4.

Пусть

1) NM *— таково, что* $D_2 = D_{2,\chi} = D_3 = D_{3,\chi} = 0$;

2) $k, l, (k \geqslant l+8)$ *— нечетные числа;*

3) χ*—характер Дирихле по модулю* N, $\chi(-1) = -1$;

4) $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ *функция МакКея;*

5) $\{g_1(z), ..., g_t(z)\}$ *— базис ортогонального дополнения* U *к пространству* $f(z)M_2(\Gamma_0(N))$ *в пространстве* $S_{l+2}(\Gamma_0(N), \chi)$.

Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \oplus W,$$

базис пространства W *состоит из функций* $g_1(z)h(z), ..., g_t(z)h(z)$, *где*

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l+2 \pmod 4, \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l \pmod 4. \end{cases}$$

$$dim\ W = t = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \frac{1}{2}(D_1 + D_{1,\chi}).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3.

Выводы

Таким образом, в данной работе была изучена структура пространствах модулярных форм уровней, кратных минимальным уровням функций МакКея. В статье было показано, что существенную часть в этих пространствах составляют подпространства, допускающие точное рассечение функциями МакКея, изучена структура дополнительных пространств.

Литература

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S. Providence. 2004. 216 p.

[2] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[3] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004. 488 с.

[4] Воскресенская Г.В. Точное рассечение в пространствах параболических форм с характерами // Матем. заметки, 2018. Т. 103. № 6. С. 818–830. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618050243.

[5] Воскресенская Г.В. Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техники. Сер.: Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. 2017. Т. 136. С. 103–137. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-018-4093-5.

[6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η-products // L.N.M. 1987. V. 1395. P. 173–200.

[7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262. URL: http://www.numdam.org/article/JTNB_1999_11_1_247_0.pdf.

[8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // L.N.M. 1976. V. 627. P. 69–78.

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300.

References

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p. [in English].

[2] Koblitz N. *Vvedenie v ellipticheskie krivye i modulyarnye formy* [Introduction in elliptic curves and modular forms]. M.: Mir, 1988, 320 p. [in Russian].

[3] Knapp A. *Ellipticheskie krivye* [Elliptic curves]. M.: Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].

[4] Voskresenskaya G.V. *Tochnoe rassechenie v prostranstvakh parabolicheskikh form s kharakterami* [Exact cutting in spaces of cusp forms with characters]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 2018, Vol. 103, no 6, pp. 881–891. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618050243 [in Russian].

[5] Voskresenskaya G.V. *Eta-funktsiya Dedekinda v sovremennykh issledovaniyakh* [Dedekind η—function in modern research]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Journal of Mathematical Sciences (New York), 2018, Vol. 235, no. 6, pp. 788–833. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-018-4093-5 [in Russian].

[6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products. L.N.M., 1987, Vol. 1395, pp. 173–200 [in English].

[7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262. Available at: http://www.numdam.org/article/JTNB_1999_11_1_247_0.pdf [in English].

[8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions. *Contemp.Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 89–98 [in English].

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. LNM., 1976, Vol. 627, pp. 69–78 [in French].

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm.*, 1990, Vol. LIV., no. 4, pp. 273–300 [in English].

G.V. Voskresenskaya[2]

MACKAY FUNCTIONS IN SPACES OF HIGHER LEVELS

In the article we prove structure theorems for spaces of cusps forms with the levels that are divisible by the minimal levels for MakKay functions. There are 28 eta–products with multiplicative Fourier coefficients. They are called MacKay functions. Let $f(z)$ be such function. It belongs to the space $S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ for a minimal level N. In each space of the level N there is the exact cutting by the function $f(z)$. Also the function $f(z)$ is a cusp form for multiple levels. In this case the exact cutting doesn't take place and the additional spaces exist. In this article we find the conditions for the divisor of functions that are divisible by $f(z)$ and we study the structure of additional spaces. Dimensions of the spaces are calculated by the Cohen — Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, cusps, Eisenstein series, structure theorems, Cohen — Oesterle formula Biagioli formula

Citation. Voskresenskaya G.V. *Funktsii MakKeya v prostranstvakh vysshikh urovnei* [MacKay functions in spaces of higher levels]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 13–18. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18 [in Russian].

Статья поступила в редакцию $16/IX/2018$.
The article received $16/IX/2018$.

[2] *Voskresenskaya Galina Valentinovna* (`galvosk@mail.ru`), Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

УДК 517.95 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-19-23

В.А. Киричек[1]

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей статье рассмотрен круг задач, для исследовании разрешимости которых оказался весьма эффективным метод, основанный на сведении их к задачам для нагруженного уравнения. Это задачи с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений. Сведение задачи с нелокальными условиями к задаче для нагруженного уравнения, но с классическими условиями позволяет использовать многие известные методы обоснования разрешимости, что часто оказывается невозможным в случае нелокальных условий. В статье рассмотрена задача с нелокальными интегральными условиями для одномерного гиперболического уравнения и доказана ее эквивалентность задаче с классическими граничными условиями для нагруженного уравнения.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральные условия, гиперболическое уравнение, нагруженное уравнение.

Цитирование. Киричек В.А. О нелокальных задачах для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 19–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-19-23.

Введение

Отправной точкой ряда исследований, посвященных нелокальным задачам для уравнений с частными производными, явилась статья Адама Маремовича Нахушева [1], опубликованная в 1976 году. В ней дано определение нагруженных дифференциальных уравнений и установлена их связь с задачами со смещением. Это наблюдение способствовало развитию новых методов исследования разрешимости задач с неклассическими условиями, а также дало возможность построения математических моделей многих явлений и процессов, представляющих значительный интерес для современного естествознания [2]. Результаты исследований нагруженных уравнений и задач, приводящим к ним при математическом моделировании, обобщены в монографии [3]. К настоящему времени известно большое количество работ, посвященных разработке методов исследования задач с нелокальными интегральными условиями [6–10]. Оказалось, что для одномерного гиперболического уравнения можно модифицировать некоторые из них так, что исследование нелокальной задачи значительно упращается. В статье рассматривается один из таких случаев.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, где $l, T < \infty$, уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1.1}$$

Задача 1. Найти в области Q_T решение $u(x,t) \in C(\bar{Q_T}) \cap C^2(Q_T)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.2}$$

и нелокальным условиям

$$\int\limits_0^l k_i(x)u(x,t)dx = 0, \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

Киричек Виталия Александровна (vitalya29@gmail.com), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Условия (1.3) — интегральные условия первого рода, что создает много трудностей при исследовании разрешимости задачи. В статье [4] найдены условия на входные данные, которые позволяют свести условия первого рода к интегральным условиям второго рода. Приведем некоторые промежуточные выкладки из этой статьи, так как они нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.3). Умножим (1.1) на $k_i(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Получим:

$$\begin{aligned}&k_1(0)u_x(0,t)-k_1(l)u_x(l,t)-k_{1x}(0)u(0,t)+k_{1x}(l)u(l,t)+\\&+\int_0^l(k_{1xx}-ck_1)udx+\int_0^l k_1fdx=0,\\&k_2(0)u_x(0,t)-k_2(l)u_x(l,t)-k_{2x}(0)u(0,t)+k_{2x}(l)u(l,t)+\\&+\int_0^l(k_{2xx}-ck_2)udx+\int_0^l k_2fdx=0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Если

$$\Delta=k_1(0)k_2(l)-k_1(l)k_2(0)\neq 0,$$

$$c(x,t)\in C(\bar{Q}_T)\cap C^2(Q_T), f(x,t)\in L_2(Q_T), k_i(x)\in C^2[0,l]$$

и выполнены условия согласования

$$\int_0^l k_i(x)\varphi(x)dx=0,\quad \int_0^l k_i(x)\psi(x)dx=0,\tag{1.5}$$

то нелокальные условия первого рода (1.3) эквивалентны нелокальным условиям второго рода

$$\begin{aligned}u_x(0,t)=\alpha_1u(0,t)+\beta_1u(l,t)+\int_0^l M_1(x,t)u(x,t)dx+\int_0^l P_1(x)fdx,\\u_x(l,t)=\alpha_2u(0,t)+\beta_2u(l,t)+\int_0^l M_2(x,t)u(x,t)dx+\int_0^l P_2(x)fdx,\end{aligned}\tag{1.6}$$

где α_i, β_i, $M_i(x,t)$ $P_i(x)$ выражаются через $k_i(x)$, $c(x,t)$.

Для обоснования разрешимости нелокальной задачи с условиями (1.6) оказалось возможным применение известных методов ([5], с.209-215), основную роль в реализации которых играют априорные оценки в пространстве $W_2^1(Q_T)$. Оценки удалось получить и тем самым доказать существование единственного обобщенного решения [4].

Если же $\Delta=k_1(0)k_2(l)-k_1(l)k_2(0)=0$, но

$$\Delta_1=k_{1x}(0)k_{2x}(l)-k_{1x}(l)k_{2x}(0)\neq 0,$$

то при некоторых дополнительных условиях на ядра $k_i(x)$ условия (1.3) могут быть сведены к условиям второго рода такого вида:

$$\begin{aligned}u(0,t)+\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx=g_1(t),\\u(l,t)+\int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx=g_2(t).\end{aligned}\tag{1.7}$$

В этом случае упомянутый выше метод оказался неэффективным. Покажем, что задачу с нелокальными условиями (1.7) можно свести к задаче с классическими условиями, но для нагруженного уравнения. Заметим, что условия, наложенные на $k_i(x)$, $c(x,t)$, влекут за собой наличие свойства $K_i(x,t)\in C(\bar{Q_T})\cap C^2(Q_T)$. Обозначим

$$H(x,\xi,t)=\frac{l-x}{l}K_1(\xi,t)+\frac{x}{l}K_2(\xi,t)$$

и введем новую неизвестную функцию с помощью формулы

$$v(x,t)=u(x,t)+\int_0^l H(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi.$$

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи 1. Тогда функция $v(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$v_{tt}-v_{xx}+cv-\int_0^l(H_{tt}(x,\xi,t)u(\xi,t)+2H_t(x,\xi,t)u_t(\xi,t))d\xi-$$

$$-\int_0^l H(x,\xi,t)u_{tt}(\xi,t)d\xi + \int_0^l H_{xx}(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi -$$

$$-c(x,t)\int_0^l H(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi = f(x,t). \tag{1.8}$$

Преобразуем слагаемое $\int\limits_0^l H(x,\xi,t)u_{tt}(\xi,t)d\xi$ следующим образом: учитывая предположение о том, что $u(x,t)$ — решение уравнения (1.1), получим равенство:

$$\int_0^l Hu_{tt}d\xi = \int_0^l H(x,\xi,t)[u_{\xi\xi} - c(\xi,t)u + f(\xi,t)]d\xi.$$

Интегрирование первого слагаемого правой части этого равенства позволяет записать уравнение (1.8) в виде:

$$v_{tt} - v_{xx} + cv - \int_0^l N(x,\xi,t)ud\xi + \int_0^l (H_\xi u_\xi - 2H_t u_t)d\xi -$$

$$-H(x,l,t)u_x(l,t) + H(x,0,t)u_x(0,t) = f(x,t) + \int_0^l Hfd\xi, \tag{1.9}$$

где обозначено

$$N(x,\xi,t) = [c(x,t) - c(\xi,t)]H(x,\xi,t) + H_{tt}(x,\xi,t) - H_{xx}(x,\xi,t).$$

Будем предполагать, что $||H(\cdot,\cdot,t)||_{L_2((0,l)\times(0,l))} < 1$. Заметим, что равенство

$$Bu \equiv u(x,t) + \int_0^l H(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi = v(x,t), \tag{1.10}$$

с помощью которого введена новая неизвестная функция, можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма. В силу сделанного предположения о норме ядра, существует единственное его решение $u(x,t)$, которое в силу свойств гладкости ядра $H(x,\xi,t)$, вытекающих из сделанных предположений относительно функций $K_i(x,t)$, принадлежит пространству $C^2(Q_T)$. Стало быть, можно выразить u через v, подставить в уравнение (1.9) и убедиться в том, что полученное уравнение является нагруженным дифференциальным уравнением.

Заметим, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет классическим граничным условиям $v(0,t) = g_1(t)$, $v(l,t) = g_2(t)$. Не составляет труда найти начальные условия для $v(x,t)$, и мы приходим к следующей задаче.

Задача 2. Найти в области Q_T решение уравнения (1.9), где функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ связаны равенством

$$v(x,t) = u(x,t) + \int_0^l H(x,\xi,t)u(x,\xi)d\xi, \tag{1.11}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \varphi(x) + \int_0^l H(x,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi = v_0(x), \\ v_t(x,0) &= \psi(x) + \int_0^l H_t(x,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^l H(x,\xi,0)\psi(\xi)d\xi = v_1(x) \end{aligned} \tag{1.12}$$

и граничным условиям

$$v(0,t) = g_1(t),\ \ v(l,t) = g_2(t). \tag{1.13}$$

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться и в обратном: если функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.9) и условиям (1.12), (1.13),то функция $u(x,t)$, связанная с $v(x,t)$ соотношением (1.11), является решением задачи 1. Действительно, заметив, что

$$Lv = LBu = Lu + \int_0^l [(Hu)_{tt} - H_{xx} + Hc(x,t)u]d\xi,$$

$$BLu = Lu + \int\limits_0^l H(x,\xi,t)(u_{tt} - u_{\xi\xi} + c(\xi,t)u)d\xi,$$

а правая часть (1.9) есть не что иное как Bf, можем записать (1.9) следующим образом:

$$B(Lu - f) = 0.$$

Так как в силу сделанных предположений уравнение (1.10) однозначно разрешимо, то из последнего равенства следует, что $Lu = f$. Выполнение условий (1.2) и (1.3) вытекает из (1.10).

Замечание. Полученные результаты нетрудно распространить на случай более общего уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t).$$

Частный случай рассмотрен лишь для избежания громоздких выкладок.

Литература

[1] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108. URL: http://mi.mathnet.ru/de2654.

[2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с. URL: https://www.studmed.ru/nahushev-am-uravneniya-matematicheskoy-biologii_5f9b3ede6d5.html.

[3] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

[4] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf.

[5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики М.: Наука, 1973. 407 с. URL: https://mexalib.com/view/25085.

[6] Дюжева А.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с интегральными условиями первого рода // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2011. Вып. 5(86). С. 29–36. URL: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4830.

[7] Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения четвертого порядка // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2014. Вып. 10(121). С. 26–37. URL: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4507.

[8] Стригун М.В. Об одной нелокальной задаче с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2009. Вып. 8(74). С. 78–87.

[9] Кожанов А.И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. матем. 2004. Т. 7. № 1. С. 51–60. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458.

[10] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Science. 2011. Vol. 5. № 1. P. 31–37. URL: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf.

References

[1] Nahushev A.M. *O zadache Darbu dlya odnogo vyrozhdayushchegosya nagruzhennogo integro-differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka* [On the Darboux problem for a nondegenerate loaded integrodifferential equation of the second order]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1976, Vol. 12, no. 1, pp. 103–108. Available at: http://mi.mathnet.ru/de2654 [in Russian].

[2] Nahushev A.M. *Uravneniya matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. M.: Vysshaya shkola, 1995, 301 p. Available at: https://www.studmed.ru/nahushev-am-uravneniya-matematicheskoy-biologii_5f9b3ede6d5.html [in Russian].

[3] Nahushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and their applications]. M.: Nauka, 2012, 232 p. [in Russian].

[4] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokalnymi usloviyami 1 i 2-go roda* [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2012, no. 4, pp. 74–83. Available at: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf [in Russian].

[5] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://mexalib.com/view/25085 [in Russian].

[6] Dyuzheva A.V. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlya giperbolicheskogo uravneniya s integralnymi usloviyami pervogo roda* [On certain nonlocal problem for hyperbolic equation with integral conditions of the first kind]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2011, no. 5(86), pp. 29–36. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4830 [in Russian].

[7] Beilina N.V. *Nelokal'naya zadacha s integral'nym usloviem dlya uravneniya chetvertogo poryadka* [Nonlocal problem with integral condition for a fourth order equation]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 10(121), pp. 26–37. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4507 [in Russian].

[8] Strigun M.V. *Ob odnoi nelokal'noi zadache s integral'nym granichnym usloviem dlya giperbolicheskogo uravneniya* [On certain nonlocal problem with integral boundary condition for hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2009, no. 8(74), pp. 78–87. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4810 [in Russian].

[9] Kozhanov A. I. *Nelokalnaya po vremeni kraevaya zadacha dlya lineinykh parabolicheskikh uravnenii* [A time-nonlocal boundary problem for linear parabolic equations]. *Sib. zhurn. industr. matem.* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2004, vol. 7, No. 1, pp. 51–60. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458 [in Russian].

[10] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Science*, 2011, Vol. 5, no. 1, pp. 31–37. Available at: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf [in Englsih].

V.A. Kirichek[2]

NONLOCAL PROBLEMS FOR ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

This article discusses some nonlocal problems and methods of proving solvability of them. We show that choosing of effective method depends on the form of nonlocal conditions. One of these methods is based on reducing nonlocal problem to a boundary-value problem for a loaded equation and allows us to use many well-known methods of justification solvability. In the article, we consider the problem with nonlocal integral conditions for a one-dimensional hyperbolic equation and prove the equivalence to a problem with classical boundary conditions for a loaded equation.

Key words: nonlocal problem, integral condition, hyperbolic equation, loaded equation.

Citation. Kirichek V.A. *O nelokalnykh zadachakh dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya* [Nonlocal Problems For One-Dimensional Hyperbolic Equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 19–23. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-19-23 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 11/*IX*/2018.
The article received 11/*IX*/2018.

[2]*Kirichek Vitaliia Alexandrovna* (vitalya29@gmail.com), Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517.956 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-24-28

С.В. Кириченко[1]

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ПЕРЕМЕННОЙ ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрена краевая задача с нелокальным по переменной времени условием для одномерного гиперболического уравнения. Основным результатом является доказательство единственности решения. Важным этапом обоснования этого утверждения является доказательство эквивалентности поставленной нелокальной задачи и краевой задачи с классическими начальными условиями для нагруженного уравнения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальные условия, интегральное условие второго рода.

Цитирование. Кириченко С.В. Об одной задаче с нелокальным по переменной времени условием для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 24–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-24-28.

Введение

Задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных активно изучаются в настоящее время и результаты их исследований опубликованы в многочисленных статьях. Отметим лишь некоторые из них, а именно те, в которых рассматриваются задачи с нелокальными интегральными условиями [1–6] и обратим внимание на список литературы в них.

Интерес к ним вызван необходимостью обобщения классических задач математической физики в связи с математическим моделированием ряда физических процессов, изучаемых современным естествознанием [7; 8]. В тех случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для непосредственных измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости соответствующей математической задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме.

В предлагаемой статье рассмотрена задача с нелокальным по времени интегральным условием для гиперболического уравнения.

1. Постановка задачи и основной результат

В конечной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(x)u_{tt} - au_{xx} + bu_t + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) + \int_0^T H(t)u(x,t)dt = 0. \tag{4}$$

В условии (4) $H(t)$ задана в $[0, T]$ и такова, что $h = ||H||_{L_2(0,T)} < 1$.

Кириченко Светлана Викторовна (svkirichenko@mail.ru), кафедра прикладной математики, информатики и информационных систем, Самарский государственный университет путей сообщения, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

Теорема. Пусть выполняются условия

$$a \in C^1(\bar{Q}_T), c \in C(\bar{Q}_T), c_t \in C(\bar{Q}_T), b \in C(\bar{Q}_T), K \in C[0,l], H \in C^2(0,T) \cap C^1[0,T];$$

$$a(x,t) \geqslant a_0 > 0, c(x,t) \geqslant c_0 > 0, K(x) \geqslant k_0 > 0, H(T) = H'(T) = 0, hT < 1;$$

Тогда существует не более одного решения задачи (1)—(4).

Доказательство.

На первом шаге доказательства покажем, что задача (1)—(4) эквивалентна задаче с классическими начальными данными для некоторого нагруженного уравнения.

Введем оператор B формулой

$$Bu \equiv u(x,t) + \int_0^T H(t)u(x,t)dt$$

и будем обозначать $v(x,t) = Bu$.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)—(4). Тогда, как нетрудно видеть, функция $v = Bu$ удовлетворяет условиям

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \ \ v_t(x,0) = 0$$

и уравнению

$$Lv - L(\int_0^T H(t)u(x,t)dt) = f(x,t).$$

Преобразуем последнее слагаемое левой части этого уравнения.

$$L(\int_0^T H(t)u(x,t)dt) = -\int_0^T H(\tau)a(x,\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau + c(x,t)\int_0^T H(\tau)u(x,\tau)d\tau.$$

Так как по предположению $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), то

$$au_{xx} = K(x)u_{tt} + bu_t + cu - f(x,t).$$

Это представление дает нам возможность сделать преобразования, а именно, возможность интегрирования по частям, которые приводят к равенству, в котором уже учтены условия теоремы:

$$K(x)v_{tt} - av_{xx} + bv_t + cv + B(x,t)u(x,0) +$$
$$+ \int_0^T \tilde{P}(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f(x,t) + \int_0^T Hf d\tau.$$

В этом равенстве обозначено:

$$[a(x,t)H'(0) - b(x,0)H(0)]K(x) = B(x,t),$$

$$[H''(\tau) - (H(\tau)b(x,\tau))_\tau + H(\tau)c(x,\tau)]K(x) - c(x,t)H(\tau) = \tilde{P}(x,t,\tau).$$

Так как функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию (4), то последнее равенство приобретает вид

$$K(x)v_{tt} - av_{xx} + bv_t + cv + B(x,t)\int_0^T P(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau = G(x,t), \tag{5}$$

где $P(x,t,\tau) = \tilde{P}(x,t,\tau) - B(x,t)H(\tau)$, $G(x,t) = f(x,t) + \int\limits_0^T H(t)f(x,t)dt$.

Итак, показано, что если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)—(4), то функция $v(x,t)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \ \ v_t(x,0) = 0 \tag{6}$$

а функции u, v связаны соотношением

$$u(x,t) + \int_0^T H(t)u(x,t)dt = v(x,t). \tag{7}$$

Пусть теперь $v(x,t)$—решение задачи (5)—(7). Заметим, что уравнение (5) можно записать в виде

$$LBu - L(Bu-u) = Bf - f.$$

Из этого равенства моментально следует, что $Lu = f$. Из условий (6) и соотношения (7) следует выполнение условий (2)—(4). Эквивалентность доказана.

Таким образом, для обоснования разрешимости задачи (1)—(4) может быть рассмотрена эквивалентная ей задача (5)—(6), где функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ связаны равенством (7).

Так как уравнения (5) и (7) линейны, то достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Умножим равенство (5) с $G(x,t) = 0$ на v_t и проинтегрируем по Q_τ, где $\tau \in [0,T]$.

После стандартных преобразований [9] получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l [K(x)v_t^2(x,\tau) + a(x,\tau)v_x^2(x,\tau) + c(x,\tau v^2(x,\tau))]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [a_t v_x^2 + c_t v^2 - b v_t^2]dxdt+$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_x v_x v_t dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l v_t(x,t)\int\limits_0^\tau P(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau dxdt. \tag{8}$$

Для оценки правой части (8) получим предварительно неравенство. Умножим обе части равенства

$$u(x,t) = v(x,t) - \int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt$$

на $u(x,t)$ скалярно. Из полученного равенства вытекает неравенство

$$||u||_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{(1-\sqrt{hT})}||v||_{L_2(Q_T)}. \tag{9}$$

Теперь мы можем получить оценку (8). Заметим, что в силу условий теоремы существуют положительные числа p_i такие, что

$$|a_t| \leqslant p_1, |c_t| \leqslant p_2, |b| \leqslant p_3, |a_x| \leqslant p_4.$$

Тогда, применив неравенство Коши, получим

$$\Big|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_x v_x v_t dxdt\Big| \leqslant p_4\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v_x^2 + v_t^2)dxdt.$$

Теперь из равенства (8) следует неравенство

$$m\int\limits_0^l [v^2(x,\tau) + v_t^2(x,\tau) + v_x^2(x,\tau)]dx \leqslant M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v^2 + v_t^2 + v_x^2)dxdt, \tag{10}$$

где $m = \min\{a_0, c_0, k_0\}$, $M = 2\max\{p_i, 1\}$.

Применив к неравенству (10) лемму Гроноулла, получим, что $v(x,t) = 0$. Но тогда функция $u(x,t) = = 0$ как решение однородного интегрального уравнения Фредгольма

$$u(x,t) + \int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt = 0.$$

Теорема доказана.

Литература

[1] Кэннон Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. № 21. P. 155–160. URL: https://www.jstor.org/stable/43635292.

[2] Гущин А.К., Михайлов В.П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v081n01ABEH003617.

[3] Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-008-9218-9.

[4] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103. URL: http://mi.mathnet.ru/mm832.

[5] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023.

[6] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf.

[7] Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935. URL: http://mi.mathnet.ru/de4116.

[8] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics, 2002. P. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 408 с. URL: https://mexalib.com/view/25085.

References

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, no. 21, pp. 155–160 [in English].

[2] Gushchin A.K., Mihailov V.P. *O razreshimosti nelokalnykh zadach dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka* [About a solubility of nonlocal tasks for an elliptical equation of the second order]. *Matem. sb.* [Russian Academy of Sciences. Sbornik: Mathematics], 1995, 81:1, pp. 101–136. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM1995v081n01ABEH003617 [in Russian].

[3] Skubachevsky A.L. *Neklassicheskie kraevye zadachi. I* [Nonclassical boundary value problems]. *Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya* [Journal of Mathematical Sciences], 2008, 155:2, pp. 199–334. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-008-9218-9 [in Russian].

[4] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Resheniya nelokal'nykh zadach dlya odnomernykh kolebanii sredy* [Solutions of Nonlocal Problems for One-Dimensional Oscillations of the Medium]. *Matem. modelir.* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2000, Vol. 12, no. 1, pp. 94–103. Available at: http://mi.mathnet.ru/mm832 [in Russian].

[5] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii* [On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimentional Hyperbolic Equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023 [in Russian].

[6] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokalnymi usloviyami 1 i 2-go roda* [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2012, Vol. 56, no. 4, pp. 74–83. Available at: https://kpfu.ru/portal/docs/F19962257/08_04ref.pdf [in Russian].

[7] Samarskii A.A. *O nekotorykh problemakh sovremennoi teorii differentsial'nykh uravnenii* [About some problems of modern theory of differential equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 1980, Vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: http://mi.mathnet.ru/de4116 [in Russian].

[8] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics*, 2002, pp. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119) [in English].

[9] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://mexalib.com/view/25085 [in Russian].

S.V. Kirichenko[2]

ABOUT ONE TASK WITH A NONLOCAL CONDITION ON TIME VARIABLE FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

In this article, boundary value problem for hyperbolic equation with nonlocal initial data in integral form is considered. The main result is that the nonlocal problem is equivalent to the classical boundary value problem for a loaded equation. This fact helps to prove the uniqueness of a solution to the problem.
Key words: hyperbolic equation, nonlocal conditions, second kind integral condition

Citation. Kirichenko S.V. *Ob odnoi zadache s nelokalnym po peremennoi vremeni usloviem dlya giperbolicheskogo uravneniya* [About one task with a nonlocal condition on time variable for the hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 24–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-24-28 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 11/*IX*/2018.
The article received 11/*IX*/2018.

[2]*Kirichenko Svetlana Viktorovna* (svkirichenko@mail.ru), Department of Applied Mathematics, Informatics and Information Systems, Samara State University of Railway Transport, 18, 1st Besymanniy per., Samara, 443066, Russian Federation.

УДК 511(075.8) DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-29-32

В.В. Любимов, Р.В. Меликджанян[1]

РАСЧЕТ ЧИСЛА ПАЛИНДРОМОВ В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

В работе рассматриваются симметричные числа в двоичной системе счисления, называемые палиндромами. Целью работы является вывод зависимости количества палиндромов от их разряда. Отдельно получены зависимости числа палиндромов для четных и нечетных разрядов.

Ключевые слова: палиндромы, двоичная система счисления, теория чисел, формула.

Цитирование. Любимов В.В., Меликджанян Р.В. Расчет числа палиндромов в двоичной системе счисления // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 29–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-29-32.

Введение

Числовой палиндром — это натуральное число, которое читается слева направо и справа налево одинаково. Слово "палиндром" возникло в 17 веке (от др.-греч. $\pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu$ — "назад, снова" и др.-греч. $\delta\rho\acute{o}\mu o\varsigma$ — "бег, движение") [1]. Примерами палиндромов являются числа 101; 12321; 55688655 и т.д. В частности, в статье "Применение числовых палиндромов" Гундиной М.А. и Гусачека Д.А. на основе алгоритма итеративного процесса "перевернуть и сложить" исследовалось количество шагов получения палиндромов для чисел от 1 до 500 [2]. Существует мнение, пишет М. Гарднер, что описанная процедура в применении к любому целому числу даст палиндром после конечного числа сложений [3]. Но калифорнийский математик Чарльз Тригг сомневается в справедливости этого предположения. Среди чисел меньше 10000 он нашел 251 число, каждое из которых не дает палиндрома при первых ста сложениях. При этом наименьшее из этих чисел равно 196. Дьюи Дункан, показал, что в двоичной системе описанный процесс не всегда дает палиндром. Действительно, из двоичного числа 10110 никогда не получится палиндром.

Существуют так же палиндромные матрицы, которые подробно исследуются в следующих работах [4–6].

Наша же задача состоит в том, чтобы определить количество числовых палиндромов двоичной системы счисления для конкретного разряда. Далее кратко "Палиндром двоичной системы счисления" будет обозначаться ПДСС. Для ответа на этот вопрос разберемся в структуре ПДСС.

1. Структура ПДСС для нечетных разрядов

Исследование проведем на примере ПДСС 7 разряда. Запишем всевозможные их варианты. В результате получим:

1000001

1001001

1010101

1011101

1100011

1101011

Любимов Владислав Васильевич (vlubimov@mail.ru), кафедра высшей математики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Меликджанян Регина Валерьевна (melikdzhanyan99@mail.ru), Институт информатики, математики и электроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1110111

1111111

Число 7 разряда состоит из 7 цифр (в нашем случае, из нулей и единиц). Так как палиндром симметричен, следовательно, для 7 разряда первые и последние 3 цифры должны быть "зеркальными"; цифра же, стоящая посередине (четвертая), может быть любой для двоичный системы: либо 0, либо 1. На рисунке 1 представлено условное изображение палиндрома 7 разряда.

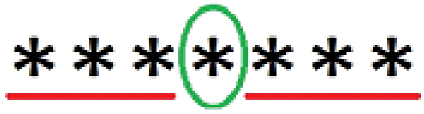

Рис. 1. Условное изображение палиндрома 7 разряда

На месте первых и последних трех цифр может стоять любая комбинация цифр 1 и 0, кроме той, где 0 стоит на первом месте, например, 000; 001; 010; 011, так как число не может начинаться с нуля. Из этого следует вывод, что задача нахождения количества ПДСС 7 разряда сводится к задаче нахождения количества всех существующих чисел двоичной системы счисления 3 разряда. Запишем всевозможные их варианты. В результате получаем:

100

101

110

111

Следовательно, их количество равно четырем.

Для того, чтобы понять, как связано количество чисел некого разряда с номером разряда, запишем числа в двоичной системе для первых четырех разрядов:

Разряд 1: 1

Разряд 2: 10; 11

Разряд 3: 100; 101; 110; 111

Разряд 4: 1000; 1001; 1010; 1011; 1100; 1101; 1110; 1111

Заметим, что с каждым разрядом количество чисел увеличивается в два раза.

Далее запишем формулу для вычисления количества существующих чисел двоичной системы счисления для n разряда:

$J_n = 2^{n-1}$, n — номер разряда

Вернемся к нашему палиндрому 7 разряда. Так как цифра, стоящая посередине (четвертая), может быть любой (для двоичной системы либо 0, либо 1), то количество палиндромов будет в два раза больше, чем значение J_n. Действительно, сначала перебираются варианты, когда посередине стоит нуль, затем — те же числа, когда посередине стоит единица.

Из данных рассуждений выведем формулу для определения количества палиндромов ***нечетных*** разрядов. Она примет следующий вид:

$$S_k = 2 * J_n,$$

где k — нечетный номер разряда для палиндрома.

Пусть числа n и k зависят между собой следующим образом:

$n = \frac{k-1}{2}$, k — нечетный номер разряда для палиндрома

Тогда получаем следующую формулу для определения количества палиндромов ***нечетных*** разрядов:

$$S_k = 2^{\frac{k-1}{2}}, \tag{1.1}$$

где k — нечетный номер разряда для палиндрома.

2. Структура ПДСС для четных разрядов

Рассмотрим всевозможные палиндромы четных разрядов, в частности, для шестого разряда имеем:

100001

101101

111111

110011

Они также состоят из всех существующих чисел двоичной системы счисления третьего разряда, но их отличие заключается в отсутствии единицы или нуля посередине (т.к. количество цифр четное, оно нацело делятся на две симметричные части). На рисунке 2 представлено условное изображение палиндрома для шестого разряда.

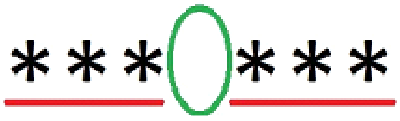

Рис. 2. Условное изображение палиндрома 6 разряда

Здесь количество палиндромов для четных разрядов k^* равно количеству всех существующих чисел разряда n^*, из которых оно состоит.

Запишем формулу для определения количества палиндромов ***четных*** разрядов:

$$S_{k^*} = J_{n^*} = 2^{n^*-1},$$

где $n^* = \frac{k^*}{2}$, k^* — четный номер разряда для палиндрома.

В окончательном варианте, формула примет вид:

$$S_{k^*} = 2^{\frac{k^*-2}{2}}, \tag{2.2}$$

где k^* — четный номер разряда для палиндрома.

Вывод

Таким образом, в работе изучена структура палиндромов двоичной системы. В итоге, мы установили, что количество палиндромов зависит от такого фактора, как четность и нечетность номера его разряда. Учитывая это, были получены формулы для расчета числа палиндромов нечетных и четных разрядов, соответственно:

$$S_k = 2^{\frac{k-1}{2}}, \;\; k = 2m+1, \;\; m = 0,1,2\ldots n$$

$$S_{k^*} = 2^{\frac{k^*-2}{2}}, \;\; k^* = 2m, \;\; m = 0,1,2\ldots n$$

Литература

[1] Nishiyama Y. Numerical palindromes and the 196 problem // IJPAM. Vol. 80. № 3. 2012. P. 375–384. URL: https://ijpam.eu/contents/2012-80-3/9/9.pdf.

[2] Гундина М.А., Гусачек Д.А. Применение числовых палиндромов // IX Машеровские чтения: материалы Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 25 сентября 2015 г. Витебск: Изд-во ВГУ им. П.М. Машерова, 2015. С. 13–15.

[3] Гарднер М. Этот левый, правый мир. М.: Мир, 1967. 267 с.

[4] Iannazzo B., Meini B. Palindromic matrix polynomials, matrix functions and integral representations // Linear Algebra Appl. Vol. 434. Issue 1. 2011. P. 174–184. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.09.013.

[5] Structured polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations / D.S. Mackey [et al.] // SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 28. 2006. P. 1029–1051. URL: http://eprints.maths.manchester.ac.uk/id/eprint/190.

[6] Gemignani L., Noferini V. The Ehrlich-Aberth method for palindromic matrix polynomials represented in the Dickson basis // Linear Algebra Appl. Vol. 438. 2013. P. 1645–1666. DOI: 10.1016/j.laa.2011.10.035.

References

[1] Nishiyama Y. Numerical palindromes and the 196 problem. *IJPAM*, Vol. 80, no. 3, 2012, pp. 375–384. Available at: https://ijpam.eu/contents/2012-80-3/9/9.pdf [in English].

[2] Gundina M.A., Gusachek D.A. *Primenenie chislovykh palindromov* [Application of numerical palindromes]. In: *IX Masherovskie chteniya: materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh, Vitebsk, 25 sentyabrya 2015 g.* [IX Masherovskie readings: materials of the International research and practical conference of students, postgraduate students and young scientists, Vitebsk, 25 September, 2015]. Vitebsk: Izd-vo VGU im. P.M. Masherova, 2015, pp. 13–15 [in Russian].

[3] Gardner M. *Etot levyi, pravyi mir* [This left, right world]. M.: Mir, 1967, 267 p. [in Russian].

[4] Iannazzo B., Meini B. Palindromic matrix polynomials, matrix functions and integral representations. *Linear Algebra Appl.*, Vol. 434, Issue 1, 2011, pp. 174–184. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.09.013 [in English].

[5] D.S. Mackey [et al.] Structured polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. 28, 2006, pp. 1029–1051. Available at: http://eprints.maths.manchester.ac.uk/id/eprint/190 [in English].

[6] Gemignani L., Noferini V. The Ehrlich-Aberth method for palindromic matrix polynomials represented in the Dickson basis. *Linear Algebra Appl.*, Vol. 438, 2013, pp. 1645–1666. DOI: 10.1016/j.laa.2011.10.035 [in English].

V.V. Lyubimov, R.V. Melikdzhanyan[2]

CALCULATION OF THE NUMBER OF PALINDROMS IN A BINARY SYSTEM

The work deals with symmetric numbers in the binary number system, called palindromes. The aim of the work is to derive the dependence of the number of palindromes on their digit. The dependences of the number of palindromes for even and odd digits are obtained separately.

Key words: palindromes, binary number system, number theory, formula.

Citation. Lyubimov V.V., Melikdzhanyan R.V. *Raschet chisla palindromov v dvoichnoi sisteme schisleniya* [Calculation of the number of palindroms in a binary system] [Calculation of the number of palindroms in a binary system]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 29–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-29-32 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 15/X/2018.
The article received 15/X/2018.

[2] *Lyubimov Vladislav Vasilievich* (`vlubimov@mail.ru`), Department of Higher Mathematics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Melikdzhanyan Regina Valerievna (`melikdzhanyan99@mail.ru`), Institute of Informatics, Mathematics and Electronics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517.928 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-33-40

В.А. Соболев, Е.А. Щепакина, Е.А. Тропкина[1]

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ[2]

Метод интегральных многообразий применяется для исследования многомерных систем дифференциальных уравнений. Он позволяет решать важную задачу понижения размерности. Часто задать инвариантное многообразие в явном виде не удается. В таких случаях для редукции систем дифференциальных уравнений возможно использовать параметрическое задание медленных инвариантных многообразий. При этом в качестве параметров могут выступать либо часть быстрых переменных, либо быстрые переменные, дополненные некоторым количеством медленных.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, редукция, интегральное многообразие, асимптотическое разложение, дифференциальные уравнения, параметризация, быстрые переменные, медленные переменные.

Цитирование. Соболев В.А., Щепакина Е.А., Тропкина Е.А. Параметризация инвариантных многообразий медленных движений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 33–40. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-33-40.

1. Предварительные сведения

Понижение размерности моделей является основным приемом исследования сложных систем любой природы. В статье рассматривается метод редукции системы, основывающийся на теории инвариантных многообразий, в которой исходная система заменяется другой системой на инвариантном многообразии меньшей размерности [1–3].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \tag{1.1}$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \tag{1.2}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^n$, ε – малый положительный параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$. Функции f и g определены и непрерывны по совокупности переменных при всех $x \in R^n$, $y \in D \subset R^m$ (D — некоторая область в пространстве R^m).

Под инвариантным многообразием системы (1.1), (1.2) будем понимать такую поверхность S, что для любой точки $(t_0, x_0, y_0) \in S$ траектория

$$(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)),$$

для которой выполняется условие

$$x(t_0,\varepsilon) = x_0, \qquad y(t_0,\varepsilon) = y_0,$$

принадлежит S для всех $t \in \mathbb{R}$.

Соболев Владимир Андреевич (v.sobolev@ssau.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Щепакина Елена Анатольевна (shchepakina@yahoo.com), кафедра технической кибернетики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Тропкина Елена Андреевна (elena_a.85@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научных проектов № 16-41-630524 р_а и № 16-41-630529 р_а и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013—2020).

Если медленное инвариантное многообразие притягивающее, то анализ исходной системы можно заменить исследованием медленной подсистемы. Асимптотические разложения инвариантных многообразий в окрестности медленных поверхностей были предложены в работах [3–9].

Будем предполагать, что для системы (1.1), (1.2) выполнены следующие условия:

I. Уравнение $g(x, y, 0) = 0$ имеет изолированное решение $y = \psi_0(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

II. В области $\Omega_0 = \{(x, y, \varepsilon)|\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|y - \psi_0(x)\| < \rho, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$ функции f, g равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по всем переменным до $(k+2)$-го порядка включительно $(k \geqslant 0)$.

III. Собственные значения $\lambda_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ матрицы

$$B(x) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, \psi_0(x), 0)$$

подчиняются неравенству

$$Re\lambda_i(x) \leqslant -2\gamma < 0. \tag{1.3}$$

Положив в системе (1.1), (1.2) $\varepsilon = 0$, получим вырожденную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, 0), \\ 0 &= g(x, y, 0). \end{aligned} \tag{1.4}$$

При построении асимптотических разложений медленных инвариантных многообразий принято считать, что вырожденное уравнение позволяет найти явное выражение для медленной поверхности. Однако, часто уравнения, входящие в систему (1.4) оказываются либо трансцендентыми, либо полиномами высокой степени относительно y, что не позволяет найти решение этой системы в виде $y = \psi_0(x)$. Тогда для редукции систем дифференциальных уравнений возможно использовать параметрическое задание медленных инвариантных многообразий [1; 10]. Ниже рассмотрим три случая, в которых в качестве параметров могут выступать либо быстрые переменные, либо только часть быстрых переменных, либо быстрые переменные, дополненные некоторым количеством медленных.

2. Основные результаты

2.1. Случай равенства размерностей быстрых и медленных переменных

Пусть размерность вектора переменных x совпадает с размерностью вектора переменных y. Предположим, что систему (1.4) удается разрешить относительно x, а именно записать решение в виде $x = \varphi_0(y)$ [1]. В качестве параметра удобно выбрать вектор быстрых переменных y. Тогда и медленное инвариантное многообразие целесообразно искать в параметрической форме

$$x = \varphi(y, \varepsilon). \tag{2.1}$$

Уравнение инвариантности получим, подставив (2.1) в (1.1). Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} g(\varphi, y, \varepsilon) = \varepsilon f(\varphi, y, \varepsilon). \tag{2.2}$$

Для всех функций, входящих в (2.2), запишем формальные асимптотические разложения по степеням малого параметра ε :

$$x = \varphi(y, \varepsilon) = \varphi_0(y) + \varepsilon\varphi_1(y) + ... + \varepsilon^k\varphi_k(y) + ..., \tag{2.3}$$

$$f\left(\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \varphi_k, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k f^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, y),$$

$$g\left(\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \varphi_k, y, \varepsilon\right) = g^{(0)}(\varphi_0, y) + B(y)\sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k \varphi_k + \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k g^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, y),$$

где $g_x(\varphi_0, y, 0) = B(y)$, $g^{(0)}(\varphi_0, y) = g(\varphi_0, y, 0)$, матрица $B(y)$ — невырожденная [1, 2, 6].

С учетом этих разложений уравнение инвариантности (2.2) примет вид:

$$\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\left(g^{(0)} + B\sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k \varphi_k + \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k g^{(k)}\right) = \varepsilon \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k f^{(k)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, при $\det\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right) \neq 0$ однозначно находим коэффициенты асимптотического разложения функции x :

$\varepsilon^0: \ g(\varphi_0, y, 0) = 0$. Решением системы является функция $\varphi_0(y)$.

$\varepsilon^1: \ \varphi_1 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} B\right)^{-1} \left(f^{(0)} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} g^{(1)}\right).$

...

$\varepsilon^k: \ \varphi_k = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} B\right)^{-1} \left[f^{(k-1)} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} g^{(k)} - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \left(B\varphi_i + g^{(k-i)}\right)\right].$

...

Таким образом, формула (2.3) задает медленное инвариантное многообразие системы (1.1), (1.2) в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого $\varphi_k, \ \ k = 0, 1, ...$ определены выше.

2.2. Размерность медленных переменных меньше размерности быстрых

Рассмотрим снова систему (1.1), (1.2). Предположим, что количество быстрых переменных превышает количество медленных. В этом случае система (1.4) содержит m уравнений и n неизвестных, причем $n < m$. Чтобы найти решение системы, в качестве неизвестных возьмем вектор переменных x ($\dim x = n$), дополненный $m - n$ компонентами вектора y. Благодаря этому в системе (1.4) количество уравнений и неизвестных будут совпадать. Предположим, что решение системы удается записать в параметрической форме

$$x = \varphi_0(y_2), \ \ y_1 = \psi_0(y_2),$$

где $y = (y_1, y_2)^T, \ y_2$ играет роль параметра, $\dim y_2 = n$.

Систему (1.1), (1.2) в таком случае удобнее переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= g_1(x, y_1, y_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= g_2(x, y_1, y_2, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Медленное инвариантное многообразие будем искать в параметрическом виде

$$x = \varphi(y_2, \varepsilon), \ \ y_1 = \psi(y_2, \varepsilon). \tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в первые две подсистемы системы (2.4), получим уравнения инвариантности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon) = \varepsilon f(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_2} g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon) = g_1(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon).$$

Для функций $f(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon), \ g_1(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon), \ g_2(\varphi, \psi, y_2, \varepsilon), \ \varphi(y_2, \varepsilon), \ \psi(y_2, \varepsilon)$ запишем формальные асимптотические разложения:

$$\varphi(y_2, \varepsilon) = \varphi_0(y_2) + \varepsilon \varphi_1(y_2) + ... + \varepsilon^k \varphi_k(y_2) + ..., \tag{2.6}$$

$$\psi(y_2, \varepsilon) = \psi_0(y_2) + \varepsilon \psi_1(y_2) + ... + \varepsilon^k \psi_k(y_2) + ..., \tag{2.7}$$

$$f\left(\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \varphi_k, \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \psi_k, y_2, \varepsilon\right) = \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k f^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, \psi_0, ..., \psi_k, y_2),$$

$$g_1\left(\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \varphi_k, \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \psi_k, y_2, \varepsilon\right) = g_1^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) + G_1(y_2) \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k \varphi_k +$$
$$+ B_1(y_2) \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k \psi_k + \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k g_1^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, \psi_0, ..., \psi_{k-1}, y_2),$$

$$g_2\left(\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \varphi_k, \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k \psi_k, y_2, \varepsilon\right) = g_2^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) + G_2(y_2) \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k \varphi_k +$$
$$+ B_2(y_2) \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k \psi_k + \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k g_2^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, \psi_0, ..., \psi_{k-1}, y_2),$$

где $G_1(y_2) = g_{1x}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0), \ G_2(y_2) = g_{2x}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0), \ B_1(y_2) = g_{1y_1}(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0), \ g_1^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) = g_1(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0), \ g_2^{(0)}(\varphi_0, \psi_0, y_2) = g_2(\varphi_0, \psi_0, y_2, 0)$.

Полученные формальные разложения подставим в уравнения инвариантности. Имеем

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_2}\left(g_2^{(0)}+G_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+B_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_2^{(k)}\right)=\varepsilon\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f^{(k)},$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\frac{\partial\psi_k}{\partial y_2}\left(g_2^{(0)}+G_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+B_2\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_2^{(k)}\right)=$$

$$=g_1^{(0)}+G_1\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k+B_1\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\psi_k+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g_1^{(k)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Так при ε^0 получим:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}g_2^0=0,$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}g_2^0=g_1^0.$$

Пусть $\det\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\neq 0$. Следовательно, получим систему уравнений

$$g_1(\varphi_0,\psi_0,y_2,0)=0,$$

$$g_2(\varphi_0,\psi_0,y_2,0)=0,$$

решением которой являются функции $\varphi_0(y_2)$, $\psi_0(y_2)$.

При ε^1 имеем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=f^{(0)},$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=G_1\varphi_1+B_1\psi_1+g_1^{(1)}.$$

Разрешим систему относительно $\varphi_1(y_2)$ и $\psi_1(y_2)$:

$$\varphi_1=A_1^{-1}\left[g_1^{(1)}+B_1\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}g_2^{(1)}-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2-B_1\right)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\right)^{-1}f^{(0)}\right],$$

$$\psi_1=A_2^{-1}\left[g_1^{(1)}+G_1G_2^{-1}g_2^{(1)}-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}G_2-G_1\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}G_2\right)^{-1}f^{(0)}\right],$$

где $A_1=B_1\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}G_2-G_1,\ A_2=G_1G_2^{-1}B_2-B_1.$

...

Далее, при ε^k :

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_k+B_2\psi_k+g_2^{(k)}\right)+\ldots+\frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=f^{(k-1)},$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_k+B_2\psi_k+g_2^{(k)}\right)+\ldots+\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_1+B_2\psi_1+g_2^{(1)}\right)=G_1\varphi_k+B_1\psi_k+g_1^{(k)}.$$

Следовательно,

$$\varphi_k=A_1^{-1}\left[g_1^{(k)}+B_1\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}g_2^{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2-B_1\right)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}B_2\right)^{-1}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}\right)^{-1}\left(f^{(k-1)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)\right)\right],$$

$$\psi_k=A_2^{-1}\left[g_1^{(k)}+G_1G_2^{-1}g_2^{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y_2}G_2-G_1\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_2}G_2\right)^{-1}\left(f^{(k-1)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2}\left(G_2\varphi_{k-i}+g_2^{(k-i)}\right)\right)\right],$$

Таким образом, удалось однозначно определить все коэффициенты разложения медленного инвариантного многообразия (2.6), (2.7).

2.3. Размерность медленных переменных больше размерности быстрых

Рассмотрим случай, когда размерность медленных переменных больше размерности быстрых. Обратим внимание на вырожденную подсистему (1.4). Она содержит m уравнений и n неизвестных, причем $n > m$. Тогда в качестве параметров следует взять все быстрые переменные y и $n-m$ медленных. Решение системы (1.4) можно записать в параметрической форме

$$x_1 = \varphi_0(x_2, y),$$

где $x = (x_1, x_2)^T$, x_2 и y – параметры, $\dim x_2 = n - m$.

Систему (1.1), (1.2) целесообразно будет переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g_2(x_1, x_2, y, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Медленное инвариантное многообразие будем искать также в параметрической форме

$$x_1 = \varphi(x_2, y, \varepsilon). \tag{2.9}$$

Для того, чтобы получить уравнение инвариантности, подставим соотношение (2.9) в систему (2.8):

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} f_2(\varphi, x_2, y, \varepsilon) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} g(\varphi, x_2, y, \varepsilon) = \varepsilon f_1(\varphi, x_2, y, \varepsilon). \tag{2.10}$$

Разложив все функции, входящие в (2.10) в формальные ряды по степеням ε :

$$\varphi(x_2, y, \varepsilon) = \varphi_0(x_2, y) + \varepsilon\varphi_1(x_2, y) + ... + \varepsilon^k\varphi_k(x_2, y) + ..., \tag{2.11}$$

$$f_1\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_1^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, x_2, y),$$

$$f_2\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_2^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_k, x_2, y),$$

$$g\left(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\varphi_k, x_2, y, \varepsilon\right) = g^{(0)}(\varphi_0, x_2, y) + B(x_2, y)\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k + \sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g^{(k)}(\varphi_0, ..., \varphi_{k-1}, x_2, y),$$

где $g_{x_1}(\varphi_0, x_2, y, 0) = G(x_2, y)$, получим

$$\varepsilon\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_2^{(k)} + \sum_{k\geqslant 0}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\left(g^{(0)} + G\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\varphi_k + \sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k g^{(k)}\right) = \varepsilon\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_1^{(k)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

При ε^0 имеем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} g(\varphi_0, y, 0) = 0.$$

При $\det\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right) \neq 0$ решением системы является функция $\varphi_0(x_2, y)$.

При ε^1 получим:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(0)} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\left(G\varphi_1 + g^{(1)}\right) = f_1^{(0)}.$$

Следовательно, при $\det\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}G\right) \neq 0$ имеем

$$\varphi_1 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}G\right)^{-1}\left(f_1^{(0)} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(0)} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} g^{(1)}\right).$$

...

Выражение при ε^k имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} f_2^{(k-1)} + ... + \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial x_2} f_2^{(0)} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\left(G\varphi_k + g^{(k)}\right) + ... + \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial y}\left(G\varphi_1 + g^{(1)}\right) = f_1^{(k-1)}.$$

Откуда

$$\varphi_k = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}G\right)^{-1}\left[f_1^{(k-1)} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2} f^{(k-i-1)} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\left(B\varphi_{k-i} + g^{(k-i)}\right) - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} g^{(k)}\right].$$

...

Таким образом, формула (2.11) задает медленное инвариантное многообразие системы (2.8) в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого φ_k, $k = 0, 1, ...$, определены выше.

2.4. Пример

В качестве примера рассмотрим следующую систему, состоящую из трех уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= y, \\ \varepsilon\dot{y} &= -y - e^y - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

В данном случае система имеет одну быструю переменную и две медленные. Положив $\varepsilon = 0$, получим вырожденную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= y, \\ 0 &= -y - e^y - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Последнее уравнение системы (2.13) не может быть разрешено относительно y. Но можно заметить, что одна из медленных переменных выражается через быструю переменную и другую медленную:

$$x_1 = -x_2 - y - e^y.$$

Таким образом, в качестве параметров могут быть выбраны переменные x_2 и y. Тогда инвариантное многообразие следует искать в параметрическом виде

$$x_1 = \varphi(x_2, y, \varepsilon). \tag{2.14}$$

Уравнение инвариантности получим, подставив (2.14) в первое уравнение системы (2.12). Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{1}{\varepsilon}(-y - e^y - \varphi - x_2) = x_2. \tag{2.15}$$

Разложим инвариантное многообразие (2.14) в асимптотический ряд по степеням малого параметра ε $(\varepsilon \to 0)$:

$$\varphi(x_2, y, \varepsilon) = \varphi_0(x_2, y) + \varepsilon\varphi_1(x_2, y) + \varepsilon^2\varphi_2(x_2, y) + O(\varepsilon^3). \tag{2.16}$$

Подставим разложение (2.16) в уравнение инвариантности (2.15):

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \ldots\right)\left(-y - e^y - x_2 - \varphi_0 - \varepsilon\varphi_1 - \varepsilon^2\varphi_2 - \ldots\right) +$$
$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \ldots\right)y = \varepsilon x_2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях параметра ε.

При ε^0 имеем:

$$-y - e^y - x_2 - \varphi_0 = 0.$$

Решением уравнения является функция

$$\varphi_0 = -y - e^y - x_2.$$

При ε^1 имеем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}y - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\varphi_1 = x_2.$$

Выразим искомую функцию $\varphi_1(x_2, y)$:

$$\varphi_1 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}y - x_2\right).$$

После подстановки значения для φ_0, имеем

$$\varphi_1 = \frac{y + x_2}{1 + e^y}.$$

Далее, при ε^2 :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}y - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\varphi_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\varphi_1 = 0.$$

Выразим функцию $\varphi_2(x_2, y)$:

$$\varphi_2 = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}y - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\varphi_1\right).$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = \frac{1}{(1+e^y)^4}\left[(y+x_2)(1+e^y(1-y-x_2)) - y(1+e^y)^2)\right].$$

Таким образом, получили асимптотическое приближение вида

$$x_1 = -y - e^y - x_2 + \varepsilon\frac{y+x_2}{1+e^y} + \varepsilon^2\frac{(y+x_2)(1+e^y(1-y-x_2)) - y(1+e^y)^2)}{(1+e^y)^4} + O(\varepsilon^3).$$

Выводы

В статье рассмотрена задача параметризации медленных инвариантных многообразий многомерных систем дифференциальных уравнений. Получены алгоритмы построения медленных инвариантных многообразий в случае различных размерностей быстрой и медленной переменных. Следует отметить, что медленные инвариантные многообразия используются для понижения размерности систем дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. 319 с.

[2] Strygin V.V., Sobolev V.A. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of satellites with double spin // Cosmic Research. 1976. № 14(3). С. 331–335. URL: http://adsabs.harvard.edu/abs/1976CosRe..14..331S.

[3] Кононенко Л.И., Соболев В.А. Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 6. С. 1264–1278. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02104713.

[4] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.

[5] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. The Method of Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics // Contributions to Differential Equations. 1963. № 2. pp. 123–196.

[6] Sobolev V.A. Decomposition of control systems with singular perturbations // Proc. 10th Congr. IFAC. Munich. 1987. Vol. 8. P. 172–176.

[7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: *Lect. Notes in Math.*, vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelber–London: Springer (2014). URL: https://www.springer.com/us/book/9783319095691.

[8] Соболев В.А., Тропкина Е.А. Асимптотические разложения медленных инвариантных многообразий и редукция моделей химической кинетики // Ж. выч. мат. и мат. физики. 2012. Т. 52. № 1. С. 81–96. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542512010125.

[9] Тропкина Е.А. Итерационный метод приближенного построения интегральных многообразий медленных движений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 4(78). С. 78–88. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgu171.

[10] Тропкина Е.А. Параметризация медленных инвариантных многообразий в модели распространения малярии // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 6(97). С. 66–74.

References

[1] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. *Reduktsiya modelei i kriticheskie yavleniya v makrokinetike* [Reduction of Models and Critical Phenomena in Macrokinetics]. M.: Fizmatlit, 2010, 319 p. [in Russian].

[2] Strygin V.V., Sobolev V.A. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of satellites with double spin. *Cosmic Research*, 1976, no. 14(3), pp. 331–335. Available at: http://adsabs.harvard.edu/abs/1976CosRe..14..331S [in English].

[3] Kononenko L.I., Sobolev V.A. *(*Asimptoticheskie razlozheniya medlennykh integralnykh mnogoobrazii) [Asymptotic expansion of slow integral manifolds]. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1994, no. 35(6), pp. 1119–1132. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02104713 [in Russian].

[4] Vasilieva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushchenii* [Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations]. M.: Vyssh. shk., 1990, 208 p. [in Russian].

[5] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. The Method of Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics. *Contributions to Differential Equations*, 1963, no. 2, pp. 123–196.

[6] Sobolev V.A. Decomposition of control systems with singular perturbations. In: Proc. 10th Congr. IFAC. Munich, 1987, Vol. 8, pp. 172–176 [in English].

[7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: *Lect. Notes in Math.*, 2014, Vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelber–London: Springer. URL: https://www.springer.com/us/book/9783319095691 [in English].

[8] Sobolev V.A., Tropkina E.A. *Asimptoticheskie razlozheniya medlennykh invariantnykh mnogoobrazii i reduktsiya modelei khimicheskoi kinetiki* [Asymptotic expansions of slow invariant manifolds and reduction of chemical kinetics models]. *Zh. vych. mat. i mat. fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2012, no. 52(1), pp. 75–89. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542512010125 [in Russian].

[9] Tropkina E.A. *Iteratsionnyi metod priblizhennogo postroeniya integralnykh mnogoobrazii medlennykh dvizhenii* [Iterative Method for Approxinate Construction of Slow Integral Manifolds]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2010, no. 4(78), pp. 78–88. Available at: http://mi.mathnet.ru/vsgu171 [in Russian].

[10] Tropkina E.A. *Parametrizatsiya medlennykh invariantnykh mnogoobrazii v modeli rasprostraneniya malyarii* [Parameterization of slow invariant manifolds in the model of the spread of malaria]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2012, no. 6(97), pp. 66–74 . Available at: http://mi.mathnet.ru/vsgu32 [in Russian].

V.A. Sobolev, E.A. Shchepakina, E.A. Tropkina[3]

PARAMETRIZATION OF INVARIANT MANIFOLDS OF SLOW MOTIONS[4]

The method of integral manifolds is used to study the multidimensional systems of differential equations. This approach allows to solve an important problem of order reduction of differential systems. If a slow invariant manifold cannot be described explicitly then its parametrization is used for the system order reduction. In this case, either a part of the fast variables, or all fast variables, supplemented by a certain number of slow variables, can play a role of the parameters.

Key words: singular perturbations, integral manifold, order reduction, asymptotic expansion, parametrization, differential equations, fast variables, slow variables.

Citation. Sobolev V.A., Shchepakina E.A., Tropkina E.A. *Parametrizatsiya invariantnykh mnogoobrazii medlennykh dvizhenii* [Parametrization of invariant manifolds of slow motions] [Parametrization of invariant manifolds of slow motions]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 33–40. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-33-40 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 26/*IX*/2018.
The article received 26/*IX*/2018.

[3]*Sobolev Vladimir Andreevich* (v.sobolev@ssau.ru), Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Shchepakina Elena Anatolievna (shchepakina@yahoo.com), Department of Technical Cybernetics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Tropkina Elena Andreevna (elena_a.85@mail.ru), Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

[4]The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Samara Region within the framework of research projects No. 16-41-630524 p_a and No. 16-41-630529 p_a and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the Samara University competitiveness improvement program (2013–2020).

УДК 517.951 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-41-47

Н.М. Фирстова[1]

ЭФФЕКТ ВЛИЯНИЯ БЕЛОГО ШУМА В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ[2]

Работа посвящена проблеме влияния гауссовского белого шума на цикл–утку в динамической модели электрохимической реакции. Это исследование проводится на примере электрохимической реакции типа Купера — Слайтера. Выполнен анализ индуцированных шумом переходов. Исследовано воздействие внешних возмущений на предельный цикл, в каждой точке которого была найдена чувствительность цикла к шуму. Получено значение критической интенсивности шума, при которой колебания малой амплитуды преобразуются в колебания смешанного типа. Показано, что увеличение интенсивности случайных возмущений может привести к значительным деформациям режимов в модели вплоть до их разрушения.

Ключевые слова: случайные возмущения, белый шум, стохастическая чувствительность, стабильность системы, критические явления, траектории–утки, дифференциальные уравнения, стохастические уравнения.

Цитирование. Фирстова Н.М. Эффект влияния белого шума в динамической модели электрохимической реакции // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 41–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-41-47.

Введение

Анализ вызванных случайными возмущениями изменений в поведении динамических систем привлекает внимание исследователей в различных областях естествознания. Стохастические флуктуации часто вызывают неожиданный отклик в работе электронных генераторов и лазеров, приводят к смене динамических режимов функционирования химических и биологических систем. Конструктивная роль шумов подтверждается такими явлениями, как стохастических резонанс, идуцированные шумом переходы, индуцированный шумом порядок, индуцированный шумом хаос.

Даже небольшие случайные возмущения могут привести к глубоким качественным изменениям в нелинейной динамике системы. Ситуация может стать нестабильной не только из-за в корне неправильных действий, но и из-за небольших изменений определенных параметров. В химической системе роль таких случайных возмущений могут сыграть различные примеси, тепловые колебания и многие другие внешние факторы.

Целью данной работы является исследование влияния шума [1, 2] на критический режим динамической модели электрохимической реакции Купера — Слайтера [3], лежащей в основе работы электрохимических реакторов.

1. Динамическая модель

Исследуется модель электрохимической реакции типа Купера — Слайтера [4]. В безразмерном виде динамическая модель электрохимической реакции представляет собой систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = -k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) + k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta + 1 - u, \tag{1.1}$$

Фирстова Наталья Михайловна (firstova.natalia@yandex.ru), кафедра технической кибернетики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта No 16-41-630529 р_а и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013–2020).

$$\beta \frac{d\theta}{dt} = k_a e^{\gamma\theta/2} u(1-\theta) - k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta - k_e e^{\alpha_0 \zeta E}\theta, \tag{1.2}$$

где переменная u — это безразмерная концентрация электролита X по поверхности (поверхностная концентрация), β — безразмерная объемная концентрация X. Безразмерная переменная θ отражает количество адсорбированного на поверхности электрода вещества X, E — потенциал электрода, β — коэффициент покрытия адсорбата, α_0 — коэффициент симметрии для переноса электронов. Плотность тока задается в безразмерной форме посредством уравнения $J = k_e e^{\alpha_0 \zeta E}\theta; \zeta = F/(RT)$, где R — универсальная газовая постоянная, F — постоянная Фарадея, T — температура.

Так как параметр β является малым, то система (1.1), (1.2) является сингулярно возмущенной.

В работах [5–8] был проведен детальный анализ детерминированной модели с помощью методов теории сингулярных возмущений и численными методами и показано, что критический режим моделируется траекторией-уткой. Такой режим играет роль своеобразного водораздела между двумя основными типами режимов протекания реакции: устойчивым циклом и релаксационными колебаниями [9–13].

1.1. Критический режим в модели

В работе [5] было показано, что в системе есть несколько вариантов расположения особой точки. В первом случае особая точка располагается на устойчивом участке нулевого приближения медленного инвариантного многообразия [14]. Тип особой точки — устойчивый фокус. Во втором случае особая точка находится на неустойчивой части нулевого приближения медленного инвариантного многообразия. Если она удалена от точек срыва на значительное расстояние, то в системе наблюдаются релаксационные колебания.

При дальнейших незначительных изменениях управляющего параметра (значения остальных параметров будут фиксированы), особая точка перемещается на неустойчивую часть нулевого приближения медленного инвариантного многообразия, оставаясь в малой, порядка $O(\beta)$ при $\beta \to 0$, окрестности точки срыва. Особая точка становится неустойчивым фокусом, и от нее отделяется замкнутая траектория, амплитуда которой растет пропорционально квадратному корню от приращения управляющего параметра, то есть в системе наблюдается бифуркация Андронова — Хопфа. Бифуркация Андронова — Хопфа устанавливает связь между потерей устойчивости положений равновесия и возникновением периодических решений в системах дифференциальных уравнении. В экспериментах при значениях параметра, близких к бифуркационному, возникающее периодическое решение мало отличается от стационарного решения, поскольку его ампитуда очень мала и может теряться в экспериментальном шуме. Однако при достижении параметром уточного значения ситуация резко меняется: незначительное изменение параметра приводит к так называемому *уточному взрыву*, когда амплитуда концентрационных колебаний практически мгновенно принимает достаточно большие значения. Это означает, что уточное значение параметра должно рассматриваться как граница безопасного протекания процесса [9–13].

Траектория–утка и значение управляющего параметра k_e^* могут быть представлены в виде асиммтотического разложения по степеням малого параметра β [15]:

$$u = \Phi(\theta, \beta) = u_0(\theta) + \beta u_1(\theta) + \beta^2 u_2(\theta) + \dots, \tag{1.3}$$

$$k_e^* = \chi(\beta) = \chi_0 + \beta\chi_1 + \beta^2\chi_2 + \dots \ . \tag{1.4}$$

Для того, чтобы найти асимптотическое представление траектории-утки мы подставляем уравнения (1.3) и (1.4) в уравнение инвариантности

$$\frac{du}{d\theta} g(u, \theta) = \beta f(u, \theta). \tag{1.5}$$

полученное из системы (1.1), (1.2). После подстановки получим:

$$u_0(\theta) = \frac{(k_d e^{-\gamma\theta/2} + \chi_0 e^{\alpha_0 \zeta E})\theta}{k_a e^{\gamma\theta/2}(1-\theta)}, \tag{1.6}$$

$$u_1(\theta) = \frac{-k_a u_0(\theta)(1-\theta)e^{\gamma\theta/2} + k_d e^{-\gamma\theta/2}\theta + 1 - u_0(\theta) + \chi_1 e^{\alpha_0\zeta E}\theta u_0'(\theta)}{k_a e^{\gamma\theta/2} u_0'(\theta)}, \tag{1.7}$$

$$\chi_0 = \frac{k_a(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2} - k_d e^{-\gamma\bar\theta/2}\bar\theta}{(k_a(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2} - 1)e^{\alpha_0\zeta E}\bar\theta}, \tag{1.8}$$

$$\chi_1 = -\frac{k_a u_1(\bar\theta)(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2} + u_1(\bar\theta) + k_a u_1(\bar\theta)u_1'(\bar\theta)(1-\bar\theta)e^{\gamma\bar\theta/2}}{e^{\alpha_0\zeta E}\bar\theta u_1'(\bar\theta)}, \tag{1.9}$$

где значение $\theta = \bar\theta$ — значение в точке срыва.

Уравнения (1.6)–(1.9) определяют первое приближение для траектории–утки, проходящей через точку срыва $(u(\bar{\theta}), \bar{\theta})$ системы (1.1), (1.2).

Во время проведения исследования мы столкнулись с проблемой влияния внешнего шума на критический режим в модели. Так как этот режим моделируется траекторией–уткой, необходимо изучить, как изменяется ее форма, размер и сама возможность существования под действием внешних возмущений. [16; 17].

2. Стохастическая модель

Исследуется модель электрохимической реакции типа Купера — Слайтера с учетом случайных возмущений. Предполагается, что в системе присутствует белый шум малой интенсивности:

$$\frac{du}{dt} = -k_a exp(\gamma\theta/2)u(1-\theta) + k_d exp(-\gamma\theta/2)\theta + 1 - u + \epsilon\xi_1, \tag{2.1}$$

$$\beta\frac{d\theta}{dt} = k_a exp(\gamma\theta/2)u(1-\theta) - k_d exp(-\gamma\theta/2)\theta - k_e exp(\alpha_0 f E)\theta + \epsilon\xi_2. \tag{2.2}$$

Зафиксируем следующие значения параметров $\epsilon = 0.2,\ \gamma = 8.99,\ k_a = 10,\ k_d = 100, k_e = 0{,}85, \alpha_0 = 0{,}5, f = 38{,}7, E = 0{,}207$ если только другие значения не указаны в подписях к рисункам.

Начнем с анализа стохастической чувствительности равновесия системы в зависимости от управляющего параметра k_e.

3. Теоретическая чувствительность к шуму

Для анализа чувствительности к шуму стохастического равновесия динамической системы в работах [18–19] был использован метод функции стохастической чувствительности (ФСЧ). Он основан на вычислении матрицы стохастической чувствительности W. Это положительно определенная матрица, характеризующая разброс случайных траекторий системы вокруг положения равновесия. Собственные числа матрицы W являются теоретическими характеристиками чувствительности к шуму.

Матрица W находится из решения матричного уравнения:

$$FW + WF^T + S = 0, \tag{3.1}$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{(\bar{u},\bar{\theta})}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22}. \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

Элементы матрицы W могут быть получены из (3.1):

$$w_{11} = \frac{-1 - 2f_\theta w_{12}}{2f_u}, \quad w_{22} = \frac{-1 - 2g_u w_{12}}{2g_\theta}, \quad w_{12} = \frac{f_u f_\theta + g_u g_\theta}{2(f_\theta^2 g_\theta + g_\theta^2 f_u - f_u f_\theta g_u - f_u g_u g_\theta)},$$

и собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{w_{11} + w_{22} \pm \sqrt{(w_{11} + w_{12})^2 - 4(w_{11}w_{22} - w_{12}^2)}}{2}. \tag{3.3}$$

где

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u},\bar{\theta}), \quad f_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\bar{u},\bar{\theta}), \quad g_u = \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u},\bar{\theta}), \quad g_\theta = \frac{\partial g}{\partial \theta}(\bar{u},\bar{\theta}).$$

Результаты, полученные теоретическим методом, представлены на рисунке 1.

Можно увидеть, что одно из собственных значений (3.3) очень мало (рис. 1, красная линия), таким образом стохастическая чувствительность определяется наибольшим из собственных значений. График показывает, что стохастическое равновесие становится более чувствительным к шуму по мере увеличения управляющего параметра k_e.

4. Индуцированные шумом переходы

В стохастической модели при воздействии шума возможны качественные изменения — при достижении некоторого критического значения интенсивности шума ϵ_{cr}происходит переход из одного детерминированного аттрактора (точки покоя) в другой (предельный цикл). Такие качественные изменения в системе называют индуцированные шумом переходы. Рассмотрим изменение стохастического фазового портрета, в зависимости от интенсивности шума.

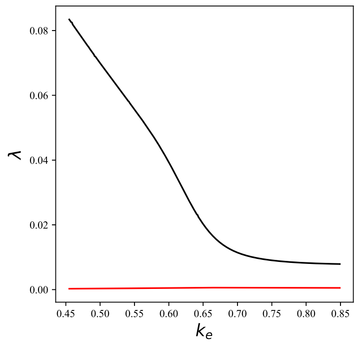

Рис. 1. Теоретическая чувствительность к шуму

При малом шуме разброс случайных состояний всегда находится в окрестности равновесия. С ростом интенсивности шума появляются редкие переходы через неустойчивый цикл на предельный цикл и обратно. То есть наблюдаются колебания смешанного типа (рис. 2). Однако, с ростом бифуркационного параметра и приближением к зоне, где точка покоя теряет устойчивость, колебания принимают вид большеамплитудных (рис. 3). При дальнейшем увеличении интенсивности шума переходы становятся более частыми.

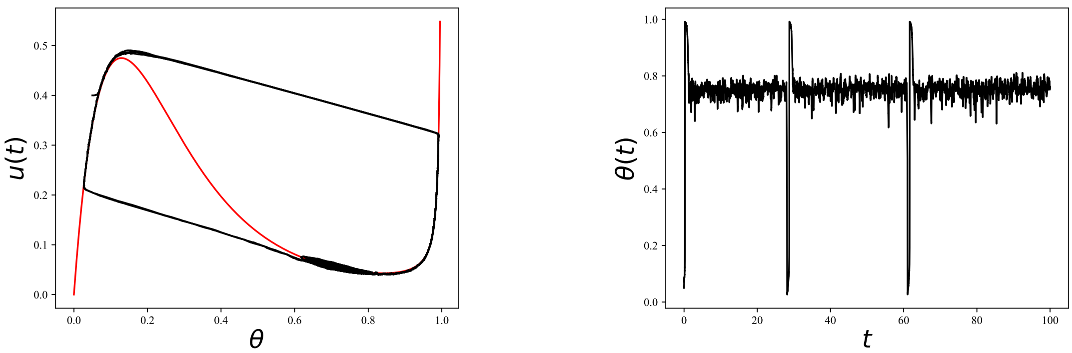

Рис. 2. Индуцированный шумом переход для значения управляющего параметра и величины шума $k_e = 0.85, \epsilon = 0.0098$

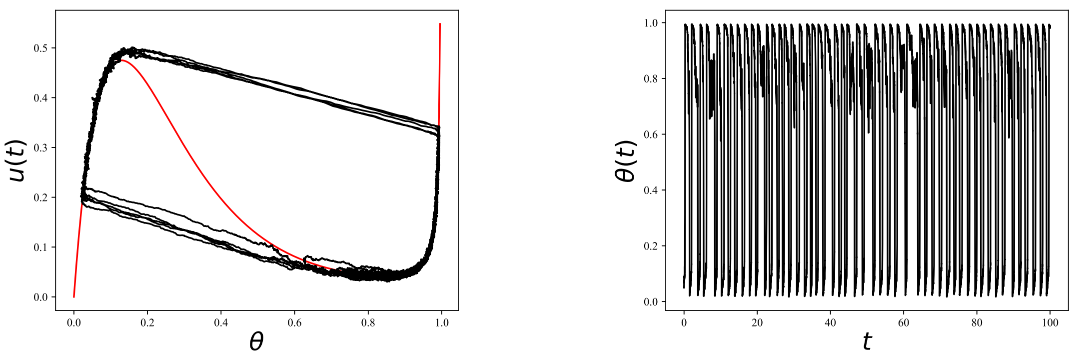

Рис. 3. Индуцированный шумом переход для значения управляющего параметра и величины шума $k_e = 0.85, \epsilon = 0.02$

Таким образом, используя аппарат функции стохастической чувствительности (ФСЧ), мы можем предсказать значение интенсивности шума ϵ_{cr} соответствующее началу переходов. Например, для управляющего параметра $k_e = 0.85$, на котором были продемонстрированы индуцированные шумом переходы, критическое значение интенсивности шума примерно равно $\epsilon_{cr} \approx 0.009495$.

Выполнив поиск критических значений интенсивности шума для значений параметра k_e из устойчивой зоны, мы получили зависимость ϵ_{cr} от управляющего параметра. Из графика (4) видно, что с ростом величины бифуркационного параметра значение интенсивности шума, при котором начинают проявляться переходы между аттракторами, уменьшается.

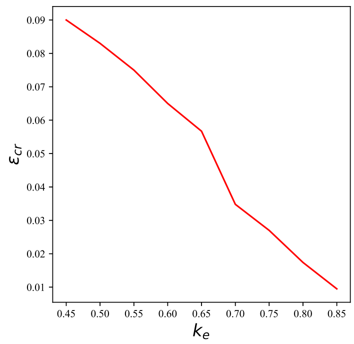

Рис. 4. Зависимость критического значения шума от управляющего параметра k_e

Выводы

Было проведено исследование влияния гауссовского белого шума на цикл–утку в динамической модели электрохимической реакции. Был выполнен анализ индуцированных шумом переходов, исследовано воздействие внешних возмущений на предельный цикл, в каждой точке которого была найдена чувствительность цикла к шуму. Получена критическая интенсивность шума, при которой колебания малой амплитуды преобразуются в колебания смешанного типа. Основой исследования является техника функций стохастической чувствительности. Эффективность данного аналитического подхода подтверждается хорошим соответствием теоретических оценок и результатов прямого численного моделирования.

Литература

[1] Berglund N., Gentz B., Kuehn C. Hunting french ducks in a noisy environment // Journal of Differential Equations. 2012. Vol. 252(9). P. 4786–4841. DOI:10.1016/j.jde.2012.01.015.

[2] Grasman J. Asymptotic analysis of nonlinear systems with small stochastic perturbations // Mathematics and Computers in Simulation. 1989. Vol. 31(1-2). P. 41–54. URL: https://socionet.ru/d/repec:eee:matcom:v:31:y:1989:i:1:p:41-54/http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378475489900529.

[3] Berthier F., Diard J.P., Nugues S. On the nature of the spontaneous oscillations observed for the Koper-Sluyters electrocatalitic reaction // Journal of Electroanalytical Chemistry. 1997. Vol. 436(1). P. 35–42.

[4] Koper M.T.M., Sluyters J.H. Instabilities and oscillations in simple models of electrocatalytic surface reactions // Journal of Electroanalytical Chemistry. 1994. Vol. 371(1). P. 149. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0728(93)03248-N.

[5] Фирстова Н.М. Исследование критических явлений в модели электрохимического реактора // Вестник Самарского государственного университета. 2013. Т. 110(9/2). С. 221–226. URL: http://repo.ssau.ru/bitstream/Informacionnye-tehnologii-i-nanotehnologii/Modelirovanie-kriticheskih-yavlenii-v-modeli-elektrohimicheskogo-reaktora-s-uchetom-vneshnego-soprotivleniya-cepi-63841/1/paper%20180_1020-1024.pdf.

[6] Shchepakina E.A., Firstova N.M. Study of oscillatory processes in the one model of electrochemical reactor // CEUR Workshop Proceedings. 2016. Vol. 1638. P. 731. DOI: 10.18287/1613-0073-2016-1638-731-741.

[7] Firstova N., Shchepakina E. Conditions for the critical phenomena in a dynamic model of an electrocatalytic reaction // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 811. P. 151.

[8] Firstova N., Shchepakina E. Modelling of Critical Conditions for an Electrochemical Reactor Model // Procedia Engineering. 2017. Vol. 201. P. 495–502. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.621.

[9] Щепакина Е.А. Условия безопасности воспламенения горючей жидкости в пористом изоляционном материале // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5. № 3(11). С. 162–169. URL: http://mi.mathnet.ru/sjim253.

[10] Щепакина Е.А. Сингулярные возмущения в задаче моделирования безопасных режимов горения // Матем. моделирование. 2003. Т. 15. № 8. С. 113–117. URL: http://mi.mathnet.ru/mm414.

[11] Shchepakina E.A. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2003. Vol. 4. P. 45–50. DOI: https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3.

[12] Щепакина Е.А. Сингулярно возмущенные модели горения в многофазных средах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 4(16). С. 142–157. URL: http://mi.mathnet.ru/sjim429.

[13] Голодова Е.С., Щепакина Е.А. Моделирование безопасных процессов горения с максимальной температурой // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 5. С. 55–68. URL: http://mi.mathnet.ru/mm2390.

[14] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010, 319 с.

[15] Shchepakina E.A. Critical phenomena in a model of fuel's heating in a porous medium // CEUR Workshop Proceedings. 2015. Vol. 1490. P. 179. DOI: 10.18287/1613-0073-2015-1490-179-189.

[16] De Swart H.E., Grasman J. Effect of stochastic perturbations on a low-order spectral model of the atmospheric circulation // Tellus. 1987. Vol. 39A. P. 10–24. DOI: https://doi.org/10.3402/tellusa.v39i1.11735.

[17] Grasman J. Asymptotic analysis of nonlinear systems with small stochastic perturbations // Mathematics and Computers in Simulation. 1989. Vol. 31. P. 41–54. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378475489900529.

[18] Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // Physica A. 2000. Vol. 278. P. 126–139. DOI: https://doi.org/10.1016/S0378-4371(99)00453.

[19] Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced excitement in a prey–predator plankton system // Frontiers in Life Science. 2011. Vol. 5. P. 141–148. DOI: https://doi.org/10.1080/21553769.2012.702666.

References

[1] Berglund N., Gentz B., Kuehn C. Hunting french ducks in a noisy environment. *Journal of Differential Equations*, 2012, Vol. 252, no. 9, pp. 4786–4841. DOI:10.1016/j.jde.2012.01.015 [in English].

[2] Grasman J. Asymptotic analysis of nonlinear systems with small stochastic perturbations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1989, Vol. 31. no. 1-2, pp. 41–54. Available at: https://socionet.ru/d/repec:eee:matcom:v:31:y:1989:i:1:p:41-54/http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378475489900529 [in English].

[3] Berthier F., Diard J.P., Nugues S. On the nature of the spontaneous oscillations observed for the Koper-Sluyters electrocatalitic reaction. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 1997, Vol. 436, no. 1, pp. 35–42 [in English].

[4] Koper M.T.M., Sluyters J.H. Instabilities and oscillations in simple models of electrocatalytic surface reactions. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 1994, Vol. 371, no. 1, p. 149. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0728(93)03248-N [in English].

[5] Firstova N. *Issledovanie kriticheskikh yavlenii v modeli elektrokhimicheskogo reaktora* [Study of the critical phenomena in the model of electrochemical reactor]. *Vestnik of Samara State University*, 2013, Vol. 110, no. 9/2, pp. 221–226. Available at: http://repo.ssau.ru/bitstream/Informacionnye-tehnologii-i-nanotehnologii/Modelirovanie-kriticheskih-yavlenii -v-modeli-elektrohimicheskogo-reaktora-s-uchetom-vneshnego-soprotivleniya-cepi-63841/1/paper%20180_1020-1024.pdf [in Russian].

[6] Shchepakina E.A., Firstova N.M. Study of oscillatory processes in the one model of electrochemical reactor. *CEUR Workshop Proceedings*, 2016, Vol. 1638, pp. 731–741. DOI: 10.18287/1613-0073-2016-1638-731-741 [in English].

[7] Firstova N., Shchepakina E. Conditions for the critical phenomena in a dynamic model of an electrocatalytic reaction. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, Vol. 811, pp. 151 [in English].

[8] Firstova N., Shchepakina E. Modelling of Critical Conditions for an Electrochemical Reactor Model. *Procedia Engineering*, 2017, Vol. 201, pp. 495–502. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.621 [in English].

[9] Shchepakina E.A. *Usloviya bezopasnosti vosplameneniya goryuchei zhidkosti v poristom izolyatsionnom materiale* [Conditions of safe ignition of combustible fluids in a porous insulating material]. *Sibirskii zhurnal industrialnoi matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2002, Vol. 5, no. 3(11), pp. 162–169. Available at: http://mi.mathnet.ru/sjim253 [in Russian].

[10] Shchepakina E.A. *Singulyarnye vozmushcheniya v zadache modelirovaniya bezopasnykh rezhimov goreniya* [Singular perturbations in one problem of safe combustion regimes modelling]. *Matem. modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2003, Vol. 15, no.8. pp. 113–117. Available at: http://mi.mathnet.ru/mm414 [in Russian].

[11] Shchepakina E.A. Black swans and canards in self-ignition problem. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2003, Vol. 4, pp. 45–50. DOI: https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3 [in English].

[12] Shchepakina E.A. *Singulyarno vozmushchennye modeli goreniya v mnogofaznykh sredakh* [Singularly perturbed models of combustion in multiphase media]. *Sibirskii zhurnal industrialnoi matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2003, Vol. 6, no. 4(16), pp. 142–157. Available at: http://mi.mathnet.ru/sjim429 [in Russian].

[13] Golodova E.S., Shchepakina E.A. *Modelirovanie bezopasnykh protsessov goreniya s maksimalnoi temperaturoi* [Modelling of safe combustion with maximal temperature]. *Matem. modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2008, Vol. 20, no. 5. pp. 55–68. Available at: http://mi.mathnet.ru/mm2390 [in Russian].

[14] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. *Reduktsiya modelei i kriticheskie yavleniya v makrokinetike* [Model reduction and critical phenomena in macrokinetics]. M.: Fizmatlit, 2010, 319 p. [in Russian].

[15] Shchepakina E.A. Critical phenomena in a model of fuel's heating in a porous medium. *CEUR Workshop Proceedings*, 2015, Vol. 1490, pp. 179–189. DOI: 10.18287/1613-0073-2015-1490-179-189 [in English].

[16] De Swart H.E., Grasman J. Effect of stochastic perturbations on a low-order spectral model of the atmospheric circulation *Tellus*, 1987, Vol. 39A, pp. 10–24. DOI: https://doi.org/10.3402/tellusa.v39i1.11735.

[17] Grasman J. Asymptotic analysis of nonlinear systems with small stochastic perturbations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1989, Vol. 31, pp. 41–54. Available at: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378475489900529 [in English].

[18] Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator. *Physica A*, 2000, Vol. 278, pp. 126–139. DOI: https://doi.org/10.1016/S0378-4371(99)00453 [in English].

[19] Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced excitement in a prey–predator plankton system *Frontiers in Life Science*, 2011, Vol. 5, pp. 141–148. DOI: https://doi.org/10.1080/21553769.2012.702666.

N.M. Firstova[3]

WHITE NOISE EFFECT IN THE DYNAMIC MODEL OF THE ELECTROCHEMICAL REACTION[4]

The work is devoted to the problem of the Gaussian white noise influence on a canard cycle in a dynamic model of an electrochemical reaction. This study is conducted on the example of an electrochemical reaction of the Cooper-Slyter type. An analysis of noise-induced transitions was performed, the effect of external disturbances on the limit cycle is investigated, the sensitivity of the cycle to the noise is found. A critical noise intensity, at which the small-amplitude oscillations are transformed into mixed-mode oscillations, is obtained. It is shown that an increase in the intensity of random perturbations can lead to significant deformations of the modes in the model up to their destruction.

Key words: random perturbations, Gaussian white noise, stochastic sensitivity, system stability, canard cycle, differential equations, stochastic equations.

Citation. Firstova N.M. *Effekt vliyaniya belogo shuma v dinamicheskoi modeli elektrokhimicheskoi reaktsii* [White noise effect in the dynamic model of the electrochemical reaction]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 41–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-41-47 [in Russian].

Статья поступила в редакцию $10/IX/2018$.
The article received $10/IX/2018$.

[3] *Firstova Natalia Mikhailovna* (`firstova.natalia@yandex.ru`), Department of Technical Cybernetics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

[4]The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Samara Region within the framework of research projects No. 16-41-630524 p_a and No. 16-41-630529 p_a and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the Samara University competitiveness improvement program (2013–2020).

УДК 573.22, 629.7.05 DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-4-48-58

А.Ю. Переварюха[1]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ АГРЕССИВНЫХ ЧУЖЕРОДНЫХ ВИДОВ В НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЯХ С НЕЗАВИСИМОЙ РЕГУЛЯЦИЕЙ[2]

Традиционные модели не описывают экстраординарные ситуации при перемешивании видового состава биологических сообществ. В статье рассматриваются уравнения колебательной и недиссипативной популяционной динамики для особых экологических ситуаций, которые связаны с чужеродными агрессивными видами в экосистемах. При вторжении новых видов сопротивление биотической среды значительное, но конечное время может полностью отсутствовать. В условиях большой удельной плодовитости развиваются нестационарные режимы изменения численности. Реализуется вспышка с фазой взрывообразного роста. Вспышки описываются как краткие экстремальные эпизоды, которые завершаются новым балансом среды и вида. Варианты завершения разнообразны даже для одного вредоного вида гребневика *Mnemiopsis leidyi* в водах Азовского и Каспийского морей. После перехода к колебаниям новый вид может стать малочисленным или исчезнуть. Нами предлагаются непрерывные модели на основе запаздывающей регуляции для сценариев поведения популяций в новой среде. В вычислительных экспериментах показаны условия для стабилизации после вспышки в предельно малой группе особей и для полного исчезновения с циклическим решением в $\min N_*(t;\tau r)=0$ при независимой регуляции. Бифуркационный сценарий при флуктуациях со значительной амплитудой описывает полное исчерпание ресурсов среды. Наиболее актуален модельный сценарий стабилизации на минимальных значениях после быстрой смены фаз вспышка→депрессия численности насекомых в модификации дифференциального уравнения Базыкина с логарифмической регуляцией. Равновесное состояние для малой группы на порядки меньше, чем на пике фазы вспышки численности.

Ключевые слова: модели динамики популяций, колебательные режимы, инвазии, вспышки насекомых, бифуркация Андронова-Хопфа, уравнение Базыкина, уравнение Хатчинсона, когнитивные графы, вымирание видов.

Цитирование. Переварюха А.Ю. Моделирование флуктуаций агрессивных чужеродных видов в непрерывных моделях с независимой регуляцией // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 48–58. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-48-58.

Введение

В рамках междисциплинарного проекта нами проводятся исследования по анализу распространения чужеродных видов с точки зрения динамических характеристик процессов их расселения при взаимодействии с автохтонной биотой. Не всегда появления вселенцев несут ощутимые перемены и угрозы в экосистемах, если это постепенное расширение ареала. Азово-Черноморские виды медленно, но неуклонно осваивают Волго-Каспийский бассейн выше Самары. В 1968 азовская тюлька заселила Самарскую Луку, а в 2001 добралась до реки Шексны, это естественное явление для короткоциклового вида. Более сложные эффекты возникают, когда вид-пришелец способен трансформировать свое новое биотическое окружение. Для подобных специфических, быстро начинающихся и внезапно завещающихся переходных процессов, необходимы новые методы математической биологии. Традиционные модели колебаний или ограниченного асимптотического роста предлагались для описания устоявшихся популяционных взаимоотношений.

Переварюха Андрей Юрьевич (madelf@rambler.ru), Лаборатория прикладной информатики и проблем информатизации общества, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, 199178, Российская Федерация, г. Санкт–Петербург, 14-Линия Васильевского острова, 39.

[2]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, грант №17-07-00125.

В предыдущих работах мы строили структурно-динамические модели экосистемного уровня на основе когнитивных графов [1]. С использованием импульсных процессов в конкурирующих контурах когнитивного графа выявили ключевые зависимости, которые моделировали системой уравнений на интервале онтогенеза $t \in [0, \mathfrak{T}]$. От общей концептуальной модели 12-факторного графа переходили к рассмотрению проблем жизненного цикла рыб. Для осетровых рыб в Волге это были скорость роста особей и выживаемость партий искусственно выращенных рыб. Мы построили специальную модель замедления размерного развития волжских осетровых [2] при выпуске чрезмерно больших партий молоди. Впервые предложена функция $\Theta(N)$ плотностного давления на скорость роста рыб $P > z, \rho > b$:

$$\Theta(N) = \frac{N}{z \exp\left(-bN(Pe^{-\rho N} + 1)\right)}.$$

$\Theta(N)$ включалась в уравнение роста Берталанфи с конкурентной составляющей:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\eta}{\xi\Theta(N(t))}\sqrt[3]{w(t)^{\zeta}} - kw(t)^{\sigma}, w(0) = w_0.$$

В настоящей работе мы следуем индуктивным методом моделирования и рассмотрим непрерывные модели трансформаций отдельных составляющих биосистем в актуальных сейчас "экстремальных" случаях.

Наиболее интересные случаи нелинейной популяционной динамики связаны со стремительными фазами роста и сокращения численности вселенца. Вариативность динамики при вселении видов с большой плодовитостью велика. Иногда латентный период до вспышки может длиться десятилетиями, а иногда скрытой фазы не бывает вовсе. После фазы быстрого роста численности, как правило, следует не сразу фаза стабилизации, а резкий минимум-депрессия. Потом колебательная динамика, где уменьшение амплитуды колебаний необязательный аспект.

У насекомых вспышки после вселений проходят наиболее ярко и наглядно. Проникновение новой бабочки может вызывать спорадически гибель гектаров ценного леса. Регулярно поражают леса Приволжской возвышенности вспышки шелкопряда *Lymantria dispar*, его численность перспективно регулировать энтомофагами [3]. В лесной энтомологии выделяют характерные этапы нашествий вредителей. Проднормальная фаза сменяется эруптивной фазой вспышки, за которой следует фаза кризиса и переход к колебаниям. Для инвазионных явлений характерна череда смены фаз, которые математически можно отразить бифуркациями. Цель работы заключается в моделировании условий резкого перехода между тремя фазами популяционного процесса для инвазионных сценариев.

1. Дискретные циклы и их интерпретация

Бифуркации возникают в дискретных и в непрерывных моделях, но их свойства различаются. Рассмотрим дискретный подход. В итерациях функций $R_{j+1} = \psi(R_j)$ имеющих максимум $\psi\prime(R_m) = 0, \psi\prime\prime(R_m) < 0$, как например:

$$R_{j+1} = aR_j e^{-bR_j}, a > 1, 0 < b < 1. \tag{1.1}$$

При $a > e^2$ возникают циклы разнообразных периодов $p \to \infty$. Насколько реально итерационные циклы соотносятся с популяционными колебательными режимами?

Помимо периода p циклы итераций отличаются взаимным расположением точек. При бифуркациях удвоения периода вокруг теряющей устойчивость циклической x_i^* возникнет две новые, сохраняя симметрию ветвей на бифуркационной диаграмме. Короткие циклы грызунов леммингов это монотонные перестановки с $\max\{x_i^*\}_{i=1}^{p}$, — в конце периода $i = p$ и никак не похожи на четные циклы.

Циклы и апериодические режимы, возникшие при бифуркациях удвоения с переходом $p \to \infty$ не очень пригодны для описания сценария экстремальной численности из ряда соображений математического характера.

Траектория итерации, множество $\{\psi^{(n)}\}_{n \geqslant 0}$, где $x_0, x_1, x_2 \ldots$— последовательность точек, определенных условием $x_{n+1} = \psi(x_n)$ стремится к некоторому предельному замкнутому инвариантному множеству $\mathcal{A}$ аттрактору $\forall x_0 \lim_{n\to\infty} \{\psi^{(n)}\} = \mathcal{A}$. Открытое множество точек фазового пространства $\Omega_{\mathcal{A}}$, которые под действием оператора эволюции ψ достигают $\mathcal{A}$, и так образует область притяжения $\mathcal{A}$. Граница $\partial\Omega_{\mathcal{A}}$ аналогично инвариантное множество.

Состояние равновесия $x^* = \psi(x^*)$ в (1.1) достигается при $x^* = (\ln a)/b$. Нужно оценить, насколько это равновесие устойчиво. Тогда $\{\psi^{(n)}(x_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ будет сохраняться в окрестности x^* при малых внешних возмущениях ς.

Определение 1. Траекторию динамической системы $\{\psi^{(n)}(x_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ будем называть устойчивой, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует число $\delta(\epsilon)$, такое что при всех y_0 удовлетворяющих условию $|x_0 - y_0| < \delta(\epsilon)$ для $\forall n \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение:

$$|\psi^n(x_0) - \psi^n(y_0)| < \epsilon.$$

Пусть присутствует малое возмущение ς_n, изменяющееся так, что $x_n = x^* + \varsigma_n$. Тогда в окрестности равновесия $f(x^*) = x^*$ при разложении мы можем (это позволяет теорема Зигеля о голоморфной локальной эквивалентности дискретного отображения и его линейной части в неподвижной точке, доказательство которой приведено в книге [4],§ 28) отбросить члены ряда Тейлора выше первого порядка:

$$x_{n+1} = f(x^* + \varsigma_n) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}\varsigma_n.$$

Очевидно, что условия **Определения 1** не выполняются при $|f'(x^*)| > 1$, начальное возмущение будет нарастать так как соотношение между величинами отклонения ς_n и ς_{n+1} составляет геометрическую прогрессию и $f'(x^*)$ ее знаменатель. В критическом случае $f'(x^*) = -1$ по поведению линеаризованной зависимости мы не можем судить об устойчивости неподвижной точки.

Для анализируемой итерационной модели (1.1) получаем:

$$\frac{d\psi(x^*)}{dx} = a\mathbf{e}^{-b\frac{\ln a}{b}} - b\frac{\ln a}{b}a\mathbf{e}^{-b\frac{\ln a}{b}} = \frac{a(1-\ln a)}{\mathbf{e}^{\ln a}} = 1 - \ln a.$$

Отсюда находим, равновесное состояние становится критическим при $\bar{a} = \mathbf{e}^2$ в (1.1), но сохраняет устойчивость. Неустойчивое $x^* = \psi(x^*)$ не притягивается к циклам, как и прямые прообразы $\forall x^{i*}, \psi^i(x) = x^*$.

При $a = \bar{a}$ неподвижная точка $x^* = 2/b$ совпадает с точкой перегиба $\psi''(x^*) = 0$. Можно показать, что для рассматриваемого случая, так как $\psi''(x)$ меняет знак, то при выполнении $d^3\psi^2(x)/dx^3 < 0$ в критическом состоянии x^* соблюдаются условия **Определения 1**.

Превышая $a > \mathbf{e}^2$ наблюдаем бифуркацию удвоения периода, следующую из свойств второй итерации $\psi(\psi(x))$ любой унимодальной функции. При $a = \bar{a}$ соотношения производных второй итерации функции $\psi^2(x)$:

$$\frac{d\psi^2(x^*)}{dx} = 1, \frac{d^2\psi^2(x^*)}{dx^2} = 0.$$

Так производная $d\psi^2(x)/dx$ при x^* имеет локальный экстремум и для возникновения стационарных точек $x_1^* < x^* < x_2^*$ у $\psi^2(x)$, являющихся циклом периода $p = 2$ для $\psi(x)$ необходимо наличие максимума. Необходимо: $d^3\psi^2(x)/dx^3 < 0$. Будет ли $\forall i, \psi^i(x^*)$ выполняться условие $d^3\psi^{i+2}(x)/dx^{i+3} < 0$ позволяет оценить дифференциальный инвариант, который сохраняет свой знак для старших итераций функции:

$$H_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right)^2, \text{ соответственно } H_{\psi^2(x^*)} = \frac{d^3\psi^2(x)}{dx^3}.$$

Для исследуемой функции H_ψ :

$$H_\psi = b^2\frac{-b^2x^2 + 4bx - 6}{2(1-bx)^2} \text{ и очевидно } H_\psi < 0, x \in \mathbb{R}.$$

Теорема Сайнджера из [5] говорит, что итерации унимодальных $\psi(x)$ с всюду отрицательным инвариантом $H_\psi < 0$ обладают общими важными свойствами: имеют не более одной устойчивой периодической траектории; данная траектория является ω-предельным множеством для точки $c : \psi'(c) = 0$. Данные свойства позволяют бифуркациям удвоения периода цикла $p = 2^i, i = 1\ldots\infty$ происходить неограниченное число раз. У итераций с последействием $x_{n+1} = ax_n e^{-bx_{n-h} - qx_n}$ возможны альтернативные циклы $p = 2^i$ и теорема Сайнжера для них не применима.

После $a = \mathbf{e}^2 + \kappa$ образуются две точки устойчивого цикла $\psi^n(x^*) = \psi^{n+2}(x^*)$, являющиеся неподвижными точками второй итерации $\psi^2(x)$. Амплитуда цикла $|x_1^* - x_2^*| \sim \sqrt{\kappa}$. При дальнейшем увеличении $a \to a^\infty$ неподвижные точки $\psi^2(x)$ потеряют устойчивость. $a = 12{,}49$ появится цикл $p = 2^2$ из точек $\psi^4(x)$, и далее аналогично для четных итераций при $\psi^{n\prime}(x_i^*) = -1$ вплоть до особого состояния $p \to \infty$. Состояние без замкнутого цикла отмечается в вычислительных экспериментах популяционных моделей по экспоненциальному разбеганию близких траекторий $|\psi^n(x_0 + \epsilon) - \psi^n(x_0)| \propto \mathbf{e}^{n\lambda}$ и $\lambda > 0$. Тогда можно сказать, что поведение популяции при росте ее репродуктивного потенциала соответствует хаотическим флуктуациям. Появление режима автоколебаний может быть оценено как положительное свойство для популяционной модели, но возникает проблема *биологической интерпретации* увеличения репродуктивного параметра в связи с дальнейшим усложнением поведения траектории и ростом амплитуды ациклических флуктуаций $a > a^\infty \approx 14{,}77$, сменяемых промежутками с нечетными устойчивыми циклами.

В контексте проблем популяционной интерпретации будет интересна структура образующегося при $a = a^\infty + \kappa$ аттрактора Λ, а не только видимое поведение хаотической траектории.

Очевидно, теряющие устойчивость две циклические точки x_1^*, x_2^* делят интервал $\mathbf{I}_\psi$ на непересекающиеся субинтервалы $\Upsilon_0, \Upsilon_1, \Upsilon_2$. К вновь образовавшемуся аттрактору $2p$ притягиваются почти все точки, кроме циклических точек-репеллеров $x_1^*, x_2^*, \dots x_j^*$, а так же всех их прообразов: множества $\mathcal{F} = \bigcup_j^{2^n} \psi^{-n}(x_j^*)$.

Интервалы $\cup\Upsilon_i \subset \mathbf{I}$ образуют в бифуркационном процессе упорядоченную структуру $\bigcup_{i=1}^{2^n-1} \Upsilon_i^{(n)}$ с линейным индексом и рангом, соответствующим появлению цикла 2^n, так, что $\Upsilon_i^{(n)} \subset \Upsilon_i^{(n+1)} \cup \Upsilon_{i+2^n}^{(n+1)}$. Множество

$$\Lambda = \bigcap_n^\infty \bigcup_{i=0}^{2^{n-1}} \Upsilon_i^{(n)}$$

является аттрактором траектории с областью притяжения $\Omega = \{x | x \in \mathbf{I} \backslash \bigcup_n \mathcal{F}\}$ и имеет структуру канторовского множества [6], замкнутого множества, не содержащего как внутренних, так и изолированных точек. Из-за сокращения $\max|\Upsilon_i^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$, то в любой $\epsilon-$окрестности $R_0 \in \Upsilon_i^{(n)}$ существует $\hat{R}_0 \in \Upsilon_{i+1}^{(n)}$. Это определяет для итераций функции $\psi^n : \mathbf{I} \mapsto \mathbf{I}$ эффект чувствительной зависимости от точности задания начальной точки. Однако у нас популяции и $\forall x^* \in \mathbb{N}$.

Возникновение циклических и апериодических режимов итераций сложно трактовать на конечном и ограниченном множестве, которым является любая биологическая популяция, измеряемая натуральными числами. Рассмотрим колебания в непрерывной динамике и предложим актуальные формы регуляции с последействием для фаз вспышка$\to$депрессия.

2. Уравнение Хатчинсона

Из данных о лабораторных экспериментах с мухами энтомолога Николсона стало ясно, что колебания численности могут появляться у изолированной популяции. Группы животных, обитающих при постоянных условиях и получающих фиксированное количество корма, испытывают нерегулярные флуктуации. В [7] была предложена модификация $\dot{N} = rN(1 - N/K)$, которая исходит из запаздывающего действия саморегуляции, что привело к уравнению с отклоняющимся по времени τ аргументом:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right). \tag{2.1}$$

Возникающие в подобных уравнениях режимы исследованы в работах многих математиков и обсуждались биологами с применением численных методов [8]. При малых значениях запаздывания τ и небольшом репродуктивном потенциале r динамика модели Хатчинсона опишет затухающие колебания $N(t) \to K$. В (2.1) установлена возможность возникновение бифуркации Андронова-Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла $N_*(t, r)$, где нарушение критерия устойчивости состояния равновесия зависит от величины $r\tau$. Дальнейшее увеличение $r\tau > \pi/2$ вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Однако, быстрое увеличение амплитуды колебаний выраженной негармонической формы при малом временном промежутке между максимумами и стремящимися к нулю минимумами выводят такой релаксационный цикл за рамки понятного экологического обоснования.

Существует много модификаций на основе модели Хатчинсона, но мы откажемся от степенной формы регуляции. Усложнение колебаний и рост амплитуды в моделях на основе (2.1) будут сопровождаться понижением минимума цикла до $\epsilon-$окрестности нуля, и вряд ли могут соотноситься с наблюдением за общей численностью популяции.

3. Модификации моделей с $N(t-\tau)$ и логарифмической регуляцией

Вместо квадратичной как в (2.1), или экспоненциальной как в (1.1), новую модификацию колебательной модели с запаздыванием (предысторией $l(u) = 1, u \in [-\tau, 0]$) мы предложим с функцией регуляции $f(N) = \ln(K/N)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right). \tag{3.1}$$

Вариант (3.1) базовый для дальнейших модификаций в рамках проекта. Уравнение (3.1) опишет актуальный для развития инвазии чужеродного вида сценарий развития единичной, почти катастрофической вспышки численности. Взрывообразный рост при исчерпании ресурсов приходит к малочисленному состоянию и далее медленно уравновешивается к не воздействующему на среду балансу K. На (рис. 1) показано сравнение динамики (2.1) и (3.1) при одинаковых значениях $K, \tau, N(0) = 10^3$. Для варианта (2.1) видны два резких пика при стремящихся к нулю минимумах. При полном соответствии параметров, то $r\tau < \pi/2$ в сценарии траектория уравнения Хатчинсона $N(0) = 10^3 < K$ монотонно $N(t) \to K$, повторяя поведение модели Ферхюлста–Пирла.

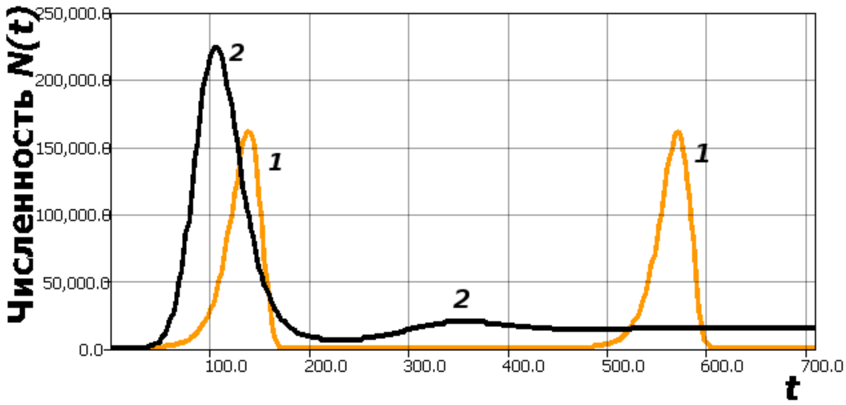

Рис. 1. *1* — релаксационный цикл в уравнении (2.1) при $r = 0.049$, *2* — однократная вспышка в с переходом в депрессию (3.1) $K = 15000, \tau = 48, r = 0.0173$.

Описываемая уравнением (3.1) ситуация вспышка→депрессия развивалась для акклиматизированного для борьбы с инвазионным сорняком амброзией фитофага жука-листоеда *Zigogramma suturalis*. Популяция листоеда образовала волну, распространилась фронтом большой плотности, но далее прошла состояния малой группы и теперь не обнаруживается. Насекомые фитофаги или паразиты могут выступать более совершенным средством биологического подавления вселенцев, если смогут преодолеть фазу малой группы — "бутылочного горлышка".

4. Сценарий вымирающей чужеродной популяции

Популяции вымирают по различным причинам. При дополнении (3.1) сомножителем $\sqrt[3]{(N-L)}$:

$$\frac{dN}{dt} = r_g \ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) N \times \sqrt[3]{(N-L)}, \tag{4.1}$$

аналогичным уравнению Базыкина [9] (только со степенью 1/3):

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)(N-L),$$

то получим, что прохождения состояния "бутылочного горлышка" после максимума не наблюдается — популяция чужеродного вида после катастрофической вспышки $N(t) = 0$. L — явный критический порог низкой численности группы особей. Данный сценарий реализуется при внутренней регуляции, более актуальна ситуация исчезновения при независимой регуляции.

Возможность вымирания популяций необходимо рассматривать в модельных сценариях экстремальных состояний, пусть даже связанных со вспышками численности. После вспышки всегда следует спад и депрессия. Интересный результат можно получить и более естественным средством, чем явным, но не видимым наблюдателю порогом L. Добавим в правую часть параметр независимой регуляции $qN(t-h)$, который может отражать целенаправленное изъятие в целях борьбы с опасным вселенцем:

$$\frac{dN}{dt} = r_g \ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) N(t) - qN(t-h), \tag{4.2}$$

и это небольшое дополнение изменит качественный характер осциллирующего решения. В (4.2) после первой вспышки при инвазии следует следующая, действительно катастрофическая, но второй глубокий минимум становится последним — вычислительный эксперимент завершается, так как $N(t) < 0$ недопустимо. Сравнение на рис. 2 при $q = \bar{q} = 0.007$ тех же параметрах и (4.3) модификации (2.1):

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) - qN(t-\varsigma). \tag{4.3}$$

Остановка расчетов, так значения не могут быть $N(t) < 0$.

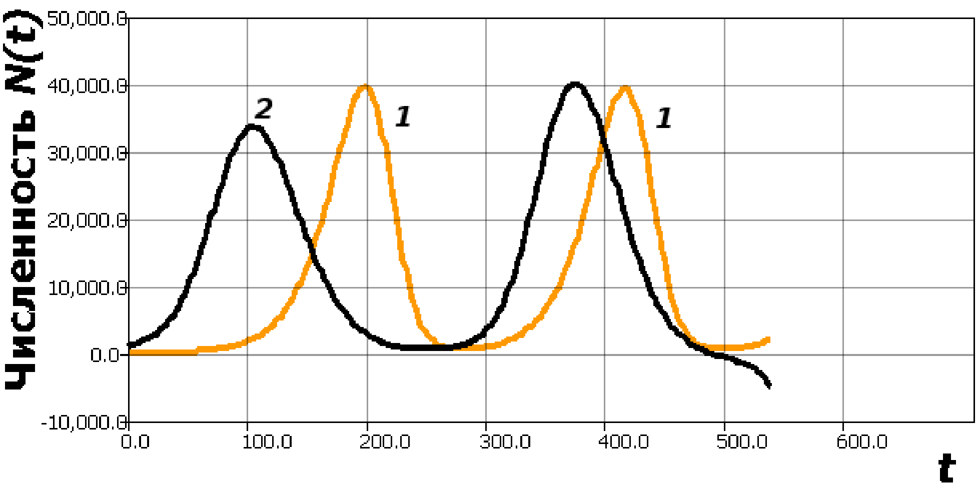

Рис. 2. *1* — релаксационный цикл (4.3) $r = 0.055, \varsigma = 5$, *2* — повторная катастрофическая вспышка и гибель популяции по (4.2) $K = 15000, \tau = 48, r = 0.01725, q = 007, h = 49$.

5. Сценарий завершения вспышки вселенца

При $q < \bar{q}, h < \bar{h}$ мы получим второй пик меньше первого и классические затухающие колебания. Сценарий (рис. 3) показывает эффективность включения борьбы с чужеродным видом именно в период минимумов.

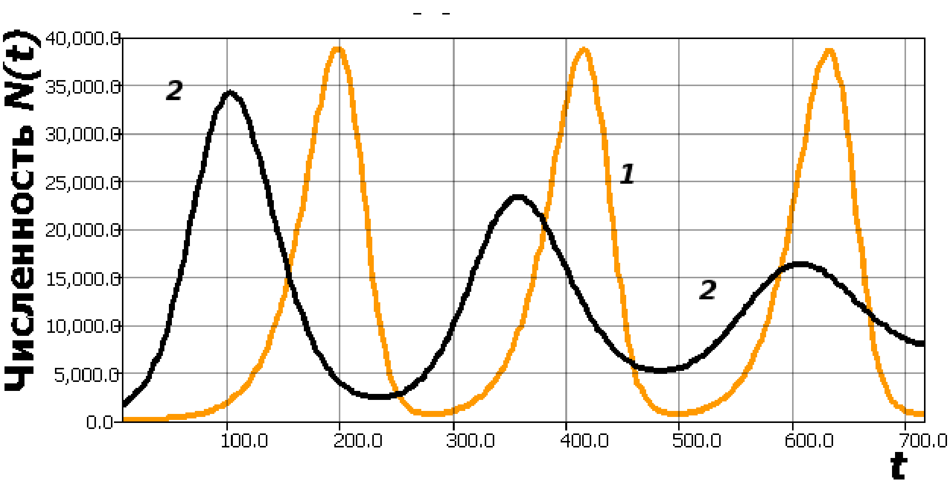

Рис. 3. *1* — Релаксационный цикл (2.1), *2* — затухающие колебания в фазе "бутылочного горлышка" (4.2) $K = 15000, \tau = h = 48, r = 0.017, q = 006, N(0) = 10^3$.

В (4.3) можно получить сценарий $\exists t_M : N(r\tau, t_M) > K, lim_{t\to\infty} = K$, но подобный режим модели Хатчинсона не будет предкатастрофической вспышкой. Мы увидим незначительное переполнение экологической ниши, и не получим фазу прохождения минимально возможных значений численности. Добавление независимой убыли в (4.3) улучшает свойства цикла и положение $\min N_*(t, r\tau)$. Сомножитель $\sqrt[3]{(N - L)}$ применим во всех уравнениях.

Формы колебаний для автохтонных и инвазионных, формирующихся в новой среде популяций, могут быть различными. Помимо затухающих и гармонических колебаний может возникать и противоположное явление —– возникновение флуктуации с затяжными пиками численности. Для отдельных насекомых вредителей (как *Loxostege sticticalis* луговой мотылек) характерна ситуация с переходом к пилообразной вспышке численности в виде серии коротких пиков между длительной депрессией [10], которую можно описать при некотором дополнении модели. За вспышкой всегда следует долгий период депрессии мотылька.

Дополнения "репродуктивной" части $rN(t - \nu)f[N(t), N(t - \tau)]$ запаздыванием, где $\nu > \tau$ не несут экологического истолкования.

Амплитуду цикла $N_*(t,r)$ можно корректировать известными методами. В [11] рассмотрена модификация модели (2.1) (с приведенными коэффициентами):

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f\left(N(t-1)\right), \tag{5.1}$$

где f — бесконечно дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, вполне удовлетворяет: $f(x) = (1-x)/(1+\Upsilon x)$. Для (5.1) установлено существование единственного устойчивого релаксационного цикла неклассической формы. В модели (5.1) коэффициент $\Upsilon > 0$ становится еще одним параметром, определяющим характеристики цикла [12]. При увеличении Υ сжимается амплитуда, но $\min_{0<t<T_*} N_*(t,r) \to 0$ сохраняется. Можно считать такие уравнения моделями со смешанной регуляцией при наличии в уравнении $-N(t)N(t-\tau)$.

В завершении мы предложим модификацию модели для осцилляций агрессивного вселенца, которая будет противоположна по смыслу модели Базыкина.

6. Сценарий продолжения осциллирующей вспышки

Мы получили модификацию уравнения, где описали сценарий короткой вспышки, который назвали "предкатастрофическим". Рассмотрим теперь действительно катастрофический сценарий завершения инвазионного процесса. Во время нашествий насекомых могут полностью уничтожаться сотни гектаров лесов. r это абстрактный репродуктивный параметр, и в реальности он не константа. Пусть для популяции существует режим, когда она способна максимально реализовать плодовитость $\mathfrak{D}$ — известный эффект Олли, только наоборот. Мы считаем, что бифуркационный параметр именно r, но r только реализованная величина потенциала плодовитости $\mathfrak{D}$.

Предположим существование некоторого значимого порогового уровня $H < K$ при котором реализация репродуктивного потенциала максимальна $r \to \mathfrak{D}$. Положим, что достижение значения численности K означает не уравновешивание, но непоправимую деградацию для среды обитания. Переход через мягкий порог имеет значение для скрытых от нас механизмов контроля внутрипопуляционной структуры. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение $(H - N(t-\tau_2))$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. Дополним модель Хатчинсона следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)\left(H - N(t-\tau_2)\right). \tag{6.1}$$

Можно считать, что при смене знака отклонения $\delta = (H - N(t-\tau_2))$ члены правой части меняются своими функциональными ролями (воспроизводства и регуляции) в нашей модели.

При малом значении запаздывания в (6.1) получаем затухающие осцилляции с $N \to H, N(0) < H$. Очевидно, что при увеличении r в таком уравнении (необходимо масштабирование $r_1 = 10^{-3}r$) возникнет устойчивый цикл рис. 4 ($K = 15000, H = 5000, N(0) = H + 0.9, r_1 = 0.00003, \tau = 5, \tau_2 = 20$).

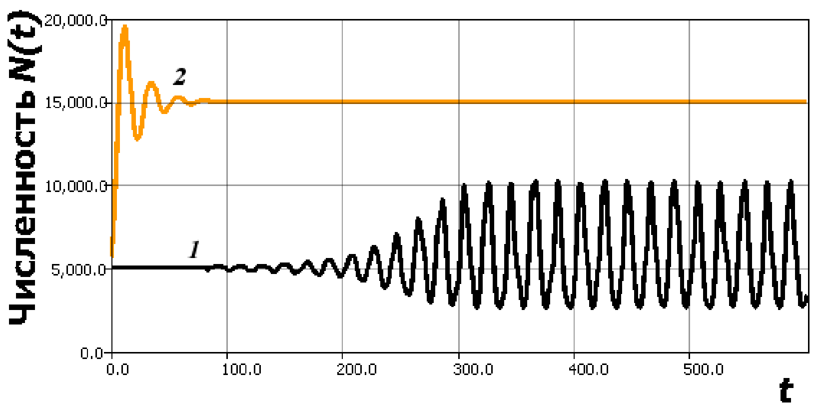

Рис. 4. *1* — цикл после бифуркации в (6.1), *2* — динамика (2.1) при параметрах $K = 15000, \tau = 8, r = 1,4 \times 10^3 r_1$.

На рис. 4 динамика после плавного прохождения бифуркационного изменения по сценарию Андронова-Хопфа при увеличении r_1, (в вычислительном эксперименте параметры модели сохраняются) показывающая установление цикла при $N(0) = H + \varsigma, 0 < \varsigma < 1, H = 5000, K = 15000$.

Цикл быстро становится релаксационным, но амплитуда колебаний в отличие аналогичного случая модели (4.3) не возрастает до нереалистичных величин, но остается в разумных для биологии границах. Негармоническая форма колебаний даже более похожа на реальные данные популяционной динамики мелких млекопитающих [13], чем циклы 2^i дискретных итераций $x_{n+1} = \psi(x_n)$. Поведение модели с $\delta = (H - N(t - \tau_2))$ зависит от начальных условий $N(0)$ интереснее, чем (2.1) и (4.2). При $N(0) < H$ переход к установившимся флуктуациям $N_*(t; r_1\tau\tau_2)$ происходит через скачкообразный переходный режим.

При более сильном увеличении значения $r_1\tau$ произойдет другое резкое изменение поведения траектории от $N(0) < K$, которая перестанет притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства. При бифуркации траектория системы вместо установления из переходного режима цикла с все увеличивающейся огромной амплитудой будет резко выброшена за пределы допустимых для ее существования значений при $N(t - \tau) > K$. Потеря неустановившегося режима колебаний считается катастрофической. На рис. 5 ситуация после бифуркации, где в результате единственного изменения параметра $r_1 + 0.000003$, $N(0) < H$ (в сравнении с аналогичным изменением r в (2.1) в момент $t = 150$) траектория в релаксационных колебаниях преодолевает значение K. Далее существование биосистемы невозможно: $N(t) \to \infty$.

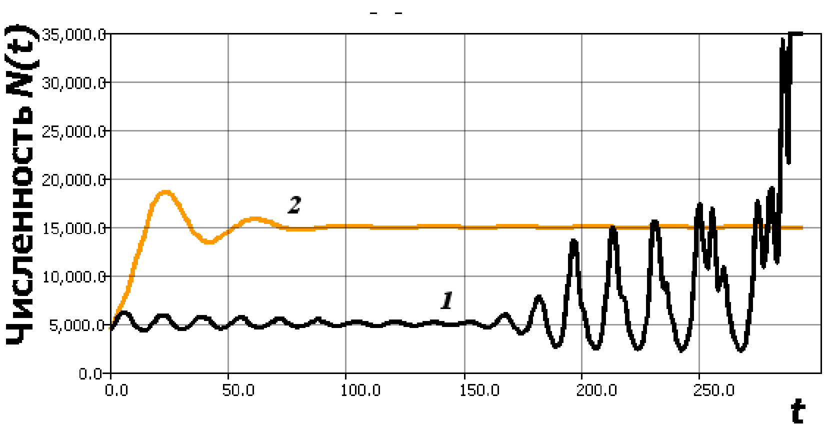

Рис. 5. *1* — выброс за границы емкости среды $N_*(t) \to \infty$ в (6.1) $r_1 = 0.000033$, *2* — динамика (2.1) при аналогичном изменении репродуктивного параметра.

Цикл сжимается и разрушается. Мы видим, что происходит потеря диссипативных свойств, но с сохранением псевдопериодической компоненты у неограниченной траектории. Вычислительный эксперимент останавливается техническим сообщением инструментальной среды *AnyLogic* об ошибке в памяти. Произойдет переполнение регистров при вычислениях особым методом Рунге–Кутты "корректор-предиктор", которые применяются для таких задач [14].

Выводы

В статье были рассмотрены четыре возможных сценария развития процесса расселения агрессивного чужеродного вида в модификациях уравнений с запаздыванием. Модели рассматривают 1) гибель вида с $\min N_*(t; \tau r) = 0$ при независимой регуляции, 2) успешное преодоление кризиса, 3) закрепление вселенца на некотором допустимом малом пороге численности "бутылочного горлышка", который не угнетает среду, 4) разрушение циклов в (6.1) при $N(\hat{t}) > K$ и появление псевдопериодической траектории в момент $t > \hat{t} + \tau_2$.

Для возникающих резких режимов флуктуаций выбраны уравнения с запаздыванием формы $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - \varsigma(N(t - \nu))$, так как подобные явления наблюдаются у популяций при постоянных лабораторных условиях и без участия хищников. Для некоторых видов значимы пороговые эффекты для запуска вспышки [15], для других, как непарный шелкопряд, пороговые значения совсем не важны. В модели нет возможности перевести ситуацию к системе уравнений с классической потерей устойчивости точки-фокуса и бифуркацией Андронова-Хопфа, но возможно рассмотреть независимое изъятие с $-N(t - h)$.

Наиболее актуальным для практики является модельный сценарий подавления флуктуаций и перевод популяции чужеродного вида вредителя через диапазон минимальной численности к новому незначительному стационарному уровню, не воздействующему на среду. Прохождение критического минимума "бутылочного горлышка" после вспышки численности — экстремальное состояние популяции. Отличается форма существования вида высокой вероятностью гибели от случайных факторов. Многие популяции оказывались в размерах малой группы, включая человеческую. Еще больше популяций вымерло в результате неблагоприятных факторов и трагических случайностей.

Скрытая проблема метода состоит в экологической интерпретации запаздывания [16]. Мы исходили из теории, что запаздывание не только атрибут биологического вида (время его взросления). Запаздывание возникает (или наоборот не наблюдается) при взаимодействии вида именно с конкретным биотическим окружением. Таким окружением могут стать антитела плазмы крови. Наиболее очевидно запаздывание для модели, когда мы имеем дело не с чужеродным видом, а с вирусной инфекцией в нашем организме. С вирусом с некоторым опозданием начинает бороться иммунная система. У каждого организма иммунитет немного отличен. Часто это опоздание приводит к фатальным последствиям. Победой одной из сторон не всегда завершается ход борьбы с инфекцией, есть важные промежуточные варианты. Эффективность вакцинации организма с математической точки зрения описывается именно в уравнениях с запаздывающим действием и сложной формой противодействия $\Gamma(N(t-\nu(t)))$, что обсудим в следующей работе.

Литература

[1] Переварюха А.Ю. Нелинейная модель перелова волжских популяций на основе когнитивного графа взаимодействия экологических факторов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2016. № 1-2. С. 92–106. URL: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4269.

[2] Переварюха А.Ю. Графовая модель взаимодействия антропогенных и биотических факторов в продуктивности Каспийского моря // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2015. № 10. С. 181–198. URL: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4460.

[3] Панина Н.Б., Белов А.Н. Эффективность энтомофагов непарного шелкопряда в комплексных очагах насекомых-фитофагов в дубравах Приволжской возвышенности // Лесохозяйственная информация. 2012. № 1. С. 26–34. URL: http://lhi.vniilm.ru/index.php/ru/okhrana-i-zashchita-lesov-str-26-34.

[4] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск, 2000. 400 с.

[5] Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM journal of applied math. 1978. Vol. 35. P. 260–268.

[6] Farmer J., Ott E., Yorke J. The dimension of chaotic attractors // Physica D. 1983. Vol. 7. P. 153–170. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-21830-4_11.

[7] Hutchinson G.E. An Introduction to Population Ecology. Yale University Press.: New Haven, 1978. 125 p.

[8] Arino J. An alternative formulation for a delayed logistic equation // Journal of Theoretical Biology. 2006. Vol. 241. P. 109–119. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.11.007.

[9] Bazykin A. Theoretical and mathematical ecology: dangerous boundaries and criteria of approach them // Mathematics and Modelling. / Ed. by A. Bazykin and Yu. Zarkhin. Nova Sci. Publishers, Inc., 1993. P. 321–328. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21044685.

[10] Frolov A.N. The beet webworm Loxostege sticticalis l. (Lepidoptera, Crambidae) in the focus of agricultural entomology objectives: The periodicity of pest outbreaks // Entomological Review. 2015. № 2. P. 147–156. DOI: https://doi.org/10.1134/S0013873815020013.

[11] Gopalsamy K. Global stability in the Delay-Logistic Equation with discrete delays // Houston J. Math. 1990. Vol. 16. P. 347–356.

[12] Arino O., Hbid M.L. Delay Differential Equations and Applications. Springer: Dordrecht, 2006. 581 p. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/1-4020-3647-7.

[13] Krebs C.J., Myers J.H. Population Cycles in Small Mammals // Advances in Ecological Research. 1974. Vol. 8. P. 267—399. DOI: 10.1016/S0065-2504(08)60280-9.

[14] Baker T.H., Paul A.H. Computing stability regions Runge-Kutta methods for delay differential equations // IMA Journal of Numerical Analysis. 1994. Vol. 14. P. 347–362. URL: https://arch.neicon.ru/xmlui/bitstream/handle/123456789/3624934/ IMAJournalofNumerical Analysisimanum_14_3_14-3-347.pdf?sequence=1.

[15] Perevaryukha A.Y. Uncertainty of asymptotic dynamics in bioresource management simulation // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2011. Vol. 50. № 3. P. 491–498. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711010151.

[16] Ruan S. Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // Delay Differential Equations and Applications. Springer, Berlin. 2006. P. 477–517. DOI: https://doi.org/10.1007/1-4020-3647-7_11.

References

[1] Perevaryukha A.Yu. *Nelineinaya model' perelova volzhskikh populyatsii na osnove kognitivnogo grafa vzaimodeistviya ekologicheskikh faktorov* [Nonlinear model of overfishing of Volga populations based on a cognitive graph of interaction of environmental factors]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Yestestvennonauchnaya seriya* [*Bulletin of the Samara University. Natural science series*], 2016, no. 1-2, pp. 92–106. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4269 [in Russian].

[2] Perevaryukha A.Y. *Grafovaya model' vzaimodeistviya antropogennykh i bioticheskikh faktorov v produktivnosti Kaspiiskogo morya* [Graph model of the interaction of anthropogenic and biotic factors for the productivity of the Caspian Sea]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2015, no. 10, pp. 181–198. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/4460 [in Russian].

[3] Panina N.B., Belov A.N. *Effektivnost' entomofagov neparnogo shelkopryada v kompleksnykh ochagakh nasekomykh-fitofagov v dubravakh Privolzhskoi vozvyshennosti* [Efficiency of entomophages of an unpaired silkworm in complex foci of phytophagous insects in the oak forests of the Volga Upland]. *Lesokhozyaistvennaya informatsiya* [Forestry information], 2012, no. 1, pp. 26–34. Available at: http://lhi.vniilm.ru/index.php/ru/okhrana-i-zashchita-lesov-str-26-34 [in Russian].

[4] Arnold V.I. *Geometricheskie metody v teorii obyknovennykh differentsialnykh uravnenii* [Geometric methods in the theory of ordinary differential equations]. Izhevsk, 2000. 400 p. [in Russian].

[5] Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval. *SIAM journal of applied math*, 1978, Vol. 35, pp. 260–268 [in English].

[6] Farmer J., Ott E., Yorke J. The dimension of chaotic attractors. *Physica D.*, 1983, Vol. 7, pp. 153–170. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-21830-4_11 [in English].

[7] Hutchinson G.E. An Introduction to Population Ecology. Yale University Press.: New Haven, 1978, 125 p. [in English].

[8] Arino J. An alternative formulation for a Delayed Logistic Equation. *Journal of Theoretical Biology*, 2006, Vol. 241, pp. 109–119. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.11.007 [in English].

[9] Bazykin A. Theoretical and mathematical ecology: dangerous boundaries and criteria of approach them. *Mathematics and Modelling.* Ed. by A. Bazykin and Yu. Zarkhin, Nova Sci. Publishers, Inc., 1993, pp. 321–328. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=21044685 [in English].

[10] Frolov A.N. The beet webworm *Loxostege sticticalis l.* (Lepidoptera, Crambidae) in the focus of agricultural entomology objectives: The periodicity of pest outbreaks. *Entomological Review*, 2015, no. 2. pp. 147–156. DOI: https://doi.org/10.1134/S0013873815020013 [in English].

[11] Gopalsamy K. Global stability in the Delay-Logistic Equation with discrete delays. *Houston J. Math*, 1990, Vol. 16, pp. 347–356.

[12] Arino O., Hbid M.L. Delay Differential Equations and Applications. Springer: Dordrecht, 2006, 581 p. Available at: https://link.springer.com/book/10.1007/1-4020-3647-7 [in English].

[13] Krebs C.J., Myers J.H. Population Cycles in Small Mammals. *Advances in Ecological Research*, 1974, Vol. 8, pp. 267–399. DOI: 10.1016/S0065-2504(08)60280-9 [in English].

[14] Baker T.H., Paul A.H. Computing stability regions Runge-Kutta methods for delay differential equations. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1994, Vol. 14, pp. 47–362. URL: https://arch.neicon.ru/xmlui/bitstream/handle/123456789/3624934/IMAJournalofNumerical Analysisimanum_14_3_14-3-347.pdf?sequence=1 [in English].

[15] Perevaryukha A.Yu. Uncertainty of asymptotic dynamics in bioresource management simulation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2011, Vol. 50, no. 3, pp. 491–498. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711010151 [in English].

[16] Ruan S. Delay Differential Equations in Single Species Dynamics. *Delay Differential Equations and Applications.* Springer, Berlin, 2006, pp. 477–517. DOI: https://doi.org/10.1007/1-4020-3647-7_11 [in English].

A. Yu. Perevaryukha[3]

SIMULATION OF FLUCTUATIONS OF AGGRESSIVE ALIEN SPECIES IN CONTINUOUS MODELS WITH INDEPENDENT REGULATION[4]

Traditional models in biology do not describe modern extraordinary situations when the whole species composition is mixed. The article deals with oscillatory equations and non-dissipative population dynamics for specific environmental situations that are associated with alien species in ecosystems. During the invasion of new species, the resistance of the biotic environment may be completely absent for a considerable time. Under such conditions, with a high specific fecundity, nonstationary regimes of change in numbers arise. A pest outbreak is realized with an explosive growth phase. All outbreaks of fish and insects are some brief extreme episodes that end with a new state of the environment and the aggressive new species. Completion options are varied even in the example of one malicious species of comb jelly *Mnemiopsis leidyi* in Azov and Caspian Sea. Transition to relaxation oscillations after a comb jelly outbreak is possible. A new species may become a small group or even disappear in case $\min N_*(t;\tau r) = 0$. The paper proposes a model based on the lagging regulation for actual scenarios of population behaviour in a new environment. In computational experiments we have shown the conditions for stabilization after an outbreak in an extremely small group of individuals or complete disappearance after collapse. A separate scenario describes the complete depletion of environmental resources during fluctuations with a significant amplitude. The most relevant is the model scenario of stabilization at minimum values after a rapid change in the phases of the outbreak and a transition to the depression of the pest number in the modification of the differential equation of Bazykin and Hutchinson model.

Key words: models of population dynamics, oscillatory regimes, biology invasions, insect outbreaks, Andronov–Hopf bifurcation, Bazykin equation, Hutchinson equation, cognitive graphs, extinction of biological species.

Citation. Perevaryukha A.Yu. *Modelirovanie fluktuatsii agressivnykh chuzherodnykh vidov v nepreryvnykh modelyakh s nezavisimoi regulyatsiei* [Simulation of fluctuations of aggressive alien species in continuous models with independent regulation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 4, pp. 48–58. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-48-58 [in Russian].

Статья поступила в редакцию 8/*IX*/2018.
The article received 8/*IX*/2018.

[3]*Perevaryukha Andrey Yurievich* (madelf@pisem.net), Laboratory of Applied Informatics and Problems of Information Society, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, no. 39, 14-th Linia, VI, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation.

[4]The article is made with the support from the grant of the Russian Foundation for Basic Research, grant № 17-07-00125.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Богатов Андрей Владимирович, магистрант кафедры уравнений математической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, в 2017 г. окончил Самарский университет по специальности "Прикладная математика и информатика".

Область научных интересов: уравнения математической физики, задачи с нелокальными условиями.

Воскресенская Галина Валентиновна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и геометрии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Модулярные формы с дивизором в параболических вершинах" (защ. в 1993 году); тема докт. дис.: "Конечные группы и модулярные формы" (защ. в 2010 году). Автор 39 научных работ.

Область научных интересов: теория модулярных групп, представления групп, теория чисел.

Киричек Виталия Александровна, аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, окончила Самарский университет по специальности "Математика и механика".

Область научных интересов: уравнения с частными производными, граничные и нелокальные задачи для гиперболических уравнений.

Кириченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и информационных систем Самарского государственного университета путей сообщения. Тема канд. дис.: "Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического, псевдогиперболического и смешанного типов" (защ. в 2015 г.). Автор и соавтор 22 научных работ.

Область научных интересов: задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных.

Любимов Владислав Васильевич, д-р техн. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Вторичный резонансный эффект при движении твердого тела с малой асимметрией в атмосфере" (защ. в 1998 г.); тема докт. дис.: "Внешняя устойчивость резонансов в динамике движения космических аппаратов с малой асимметрией" (защ. в 2009 г.). Автор и соавтор 119 научных работ, в т. ч. монографий "Вторичные резонансные эффекты и устойчивость при движении твердого тела в атмосфере" (2005 г.), "Внешняя устойчивость резонансов в динамике полета космических аппаратов с малой асимметрией" (2013 г.) и учебного пособия "Математическая теория устойчивости с приложениями" (2018 г.).

Область научных интересов: математическое моделирование и теория устойчивости.

Меликджанян Регина Валерьевна, студентка Института информатики, математики и электроники Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

Область научных интересов: математическое моделирование.

Соболев Владимир Андреевич, д-р физ. мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. В 1971 г. окончил Воронежский государственный университет по специальности "Математика". Тема канд. дис.: "Интегральные многообразия сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и их применение в теории гироскопических систем" (защ. в 1980 г.); тема докт. дис.: "Декомпозиция сингулярно возмущенных систем управления" (защ. в 1991 г.). Автор и соавтор более 100 научных работ, в т. ч. монографий "Разделение движений методом интегральных многообразий" (Наука, 1988), "Singular Perturbations ana Hysteresis" (SIAM, 2005 г.), "Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем" (ФИЗМАТЛИТ, 2009), "Редукция моделей и критические явления в макрокинетике" (ФИЗМАТЛИТ, 2010), "Singular Perturbations Introduction to System Order Reduction Methods with Applications" (Springer, 2014 г.).

Область научных интересов: механика систем твердых тел и гироскопов, управление летательными аппаратами и робототехническими устройствами, дифференциальные уравнения и динамические системы, сингулярные возмущения, разнотемповые модели в лазерных и реакционных системах, математическая теория горения, математическое моделирование в биологии, медицине и химической кинетике.

Щепакина Елена Анатольевна, д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления Самарского университета. В 1987 г. окончила Куйбышевский государственный университет по специальности "Математика". Тема канд. дис.: "Интегральные многообразия и траектории-утки в задачах теории теплового взрыва" (защ. в 1995 г.); тема докт. дис.: "Интегральные многообразия со сменой устойчивости и моделирование критических явлений в химических системах" (защ. в 2004 г.). Автор и соавтор около 100 научных работ, в т. ч. монографий "Редукция моделей и критические явления в макрокинетике" (ФИЗМАТЛИТ, 2010), "Singular Perturbations: Introduction to System Order

Reduction Methods with Applications" (Springer, 2014 г.).

Область научных интересов: дифференциальные уравнения и динамические системы, сингулярные возмущения, геометрические методы и теория интегральных многообразий, разнотемповые модели в лазерных и реакционных системах, математическая теория горения, математическое моделирование в биологии, медицине и химической кинетике, взаимодействие света с естественными средами.

Тропкина Елена Андреевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, в 2008 г. окончила Самарский государственный университет по специальности "Математика". Тема канд. дис.: "Геометрические методы понижения размерности сингулярно возмущенных дифференциальных систем" (защ. в 2013 г.). Автор и соавтор 13 научных работ.

Область научных интересов: дифференциальные уравнения и динамические системы; сингулярные возмущения; геометрические методы и теория интегральных многообразий; математическое моделирование в биологии, медицине и химической кинетике.

Фирстова Наталья Михайловна, аспирант кафедры технической кибернетики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, в 2014 г. окончила Самарский государственный аэрокосмический университет по специальности "Суперкомпьютинг".

Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов и систем.

Переварюха Андрей Юрьевич, канд. техн. наук, с.н.с. Лаборатории прикладной информатики и проблем информатизации общества Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук. Тема канд. дис.: "Анализ динамики возобновляемых биоресурсов с использованием комплекса гибридных моделей" (защ. в 2010 г.). Автор 99 научных работ.

Область научных интересов: моделирование экологических систем, исследование нестационарных и переходных режимов биологических процессов, нелинейные эффекты в динамике популяций, прогнозирование состояния фауны Каспийского моря, гибридные динамические системы, вспышки численности насекомых, классификация инвазий чужеродных видов, бифуркации неунимодальных отображений.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Bogatov Andrey Vladimirovish, undergraduate, Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, in 2013 graduated from Samara State University with a degree in "Applied mathematics and Informatics".

Research interests: equations of mathematical physics, problems with nonlocal conditions.

Voskresenskaya Galina Valentinovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis "Modular forms with divisor in cusps" (1993); subject of Doctoral thesis "Finite groups and modular forms" (defended in 2010). Author of 39 scientific works.

Research interests: theory of modular forms, representations of groups, theory of numbers.

Kirichek Vitaliia Alexandrovna, postgraduate student of the 1st year of study, Department of Differential Equations and Theory of Management, Samara National Research University. Graduated from Samara University with a degree in "Mathematics and Mechanics".

Research interests: differential equations with partial derivatives, boundary and nonlocal problems for hyperbolic equations.

Kirichenko Svetlana Viktorovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics, Informatics and Information Systems, Samara State University of Railway Transport. Subject of Candidate's thesis: "Non-local problems with integral conditions for the equations of hyperbolic, pseudo-hyperbolic and mixed types" (2015). Author and coauthor of 22 scientific works.

Research interests: tasks with integral conditions for partial equations.

Lyubimov Vladislav Vasilievich, Doctor of Engineering Science, associate professor, head of the Department of Further Mathematics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Secondary resonance effect during the motion of a solid body with a small asymmetry in the atmosphere" (1998); subject of Doctoral thesis: "External stability of resonances in the dynamics of motion of spacecraft with small asymmetry" (2009). Author and coauthor of 119 scientific papers, including monographs "Secondary resonance effects and stability when a solid moves in the atmosphere" (2005), "External stability of resonances in the flight dynamics of low-asymmetry spacecraft" (2013) and the textbook "Mathematical Theory of Sustainability with Applications" (2018).

Research interests: mathematical modeling and stability theory.

Melikdzhanyan Regina Valerievna, student of the Institute of Informatics, Mathematics and Electronics, Samara National Research University.

Research interests: mathematical modeling.

Sobolev Vladimir Andreevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University. In 1971 graduated from Voronezh State University with a degree in Mathematics. Subject of Candidate's thesis: "Integral manifolds of singularly perturbed differential equations and their application in the theory of gyroscopic systems" (1980); subject of Doctoral thesis: "Decomposition of singularly perturbed control systems" (1991). Author and coauthor of more than 100 scientific papers, including the monographs "Separation of motions by the method of integral manifolds" (Nauka, 1988), "Singular Perturbations ana Hysteresis" (SIAM, 2005), "Geometrical decomposition of singularly perturbed systems" (FIZMATLIT, 2009), "Reduction of models and critical phenomena in macrokinetics" (FIZMATLIT, 2010), "Singular Perturbations: System Order Reduction Methods with Applications" (Springer, 2014).

Research interests: mechanics of systems of solids and gyroscopes, control of aircraft and robotic devices, differential equations and dynamic systems, singular perturbations, multi-temporal models in laser and reaction systems, mathematical theory of combustion, mathematical modeling in biology, medicine and chemical kinetics.

Shchepakina Elena Anatolievna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University. In 1987 graduated from Kuibyshev State University with a degree in Mathematics. Subject of Candidate's thesis: "Integral manifolds and duck trajectories in problems of the theory of thermal explosion" (1995); subject of Doctoral thesis: "Integral manifolds with the change of stability and modeling of critical phenomena in chemical systems" (2004). Author and coauthor of about 100 scientific papers, including the monographs "Model Reduction and Critical Phenomena in Macrokinetics" (FIZMATLIT, 2010), "Singular Perturbations: Introduction to System Order Reduction Methods with Applications" (Springer, 2014).

Research interests: differential equations and dynamical systems, singular perturbations, geometric methods and the theory of integral manifolds, multirate models in laser and reaction systems, mathematical theory of combustion, mathematical modeling in biology, medicine and chemical kinetics, light interaction with natural media.

Tropkina Elena Andreevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, in 2012 graduated from Samara State

University with a degree in "Mathematic". Subject of Candidate's thesis: "Geometric methods for reducing the dimension of singularly perturbed differential systems" (2013). Author and coauthor of 13 scientific works.

Research interests:: differential equations and dynamical systems; singular perturbations; geometric methods and the theory of integral manifolds; mathematical modeling in biology, medicine and chemical kinetics.

Firstova Natalia Mikhailovna, postgraduate student of the Department of Technical Cybernetics, Samara National Research University, in 2014 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Supercomputing".

Research interests: mathematical modeling of physical processes and systems.

Perevaryukha Andrey Yurievich, Candidate of Engineering Sciences, senior research fellow of Laboratory of Applied Informatics and Problems of Information Society, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences. Subject of Candidate's thesis: "Analysis of the dynamics of renewable bio-resources using complex hybrid models" (2010). The author of 99 scientific papers.

Research interests: modeling of ecological systems, study of non-stationary and transient regimes of biological processes, nonlinear effects in the dynamics of populations, forecasting of a condition of fauna of the Caspian Sea, hybrid dynamic systems.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским государственным университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу *http://vestnik.samsu.ruhttp://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*.

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегий журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: nsvestnik@samsu.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\LaTeX 2_\varepsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций TEX'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами LATEX'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("-"), двойной дефис ("–")[1], тройной дефис ("—")[2]. Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных"фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные

[1]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--~`

[2]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Уважаемые авторы, просим предоставить сведения для размещения в журнале на странице "Сведения об авторах"

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры ……., в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности "………".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of ………, in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in "…………".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.

Редакция журнала