

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

**(ВЕСТНИК САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА)**

- *Математика*
- *Математическое моделирование*
- *Математические методы в естественных науках*

ТОМ 24 • № 3 • 2018 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНИТИ URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, д-р тех. наук, проф.

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф.

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф.

Ответственный секретарь:

А.В. Дюжеева, канд. физ.-мат. наук, доц.

Редактирование

Л.С. Пулькина

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Оформление выходных данных

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельников

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге

АО Агентство «Роспечать» 80307

ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 25.10.2018 г.

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 8

Тираж 200 экз. (первый завод — 50 экз.). Заказ №

Центр периодических изданий Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара,
Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара,
Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

В.В. Ивазник, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Институт математики им. С.Л. Соболева сибирского отделения РАН, Новосибирск, Российская Федерация)

Константин Панкрашикин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. (Миланский университет, Милан, Италия)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф. (Югорский госуниверситет, Ханты-Мансийск, Новосибирский госуниверситет, Российская Федерация)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

Стасис Руткаускас, д-р физ.-мат. наук, проф. (Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY**
NATURAL SCIENCE SERIES

**(VESTNIK OF SAMARA
STATE UNIVERSITY)**

- *Mathematics*
- *Mathematical
Modelling*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*

VOL. 24 • № 3 • 2018

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E. V. Shakhmatov, Dr. of Engineering, prof.

Deputy chief editors:

A. F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

L. S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

Executive editor:

A. V. Dyuzheva, Cand. of Phys.-Math. Sci., assistant prof.

Editing

L. S. Pulkina

Computer makeup, dummy

M. A. Likhobabenko

Making the output

T. A. Murzinova

Information in English

M. S. Strel'nikov

Address of editorial staff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

E-mail: nsvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media **ПМ № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

**Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525**

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 25.10.2018.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 8.

Circulation 200 copies (first printing – 50 copies).

Order №

Centre of Periodical Publications of Samara University

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Russian Federation.

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

S. V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)

V. V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. I. Kozhanov, Dr. of Physics and Mathematics, prof. (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Universite Paris-Sud 11, Orsay, France)

A. N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. (Milan University, Milan, Italy)

S. G. Pyatkov, Dr. of Physics and Mathematics, prof. (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Novosibirsk State University, Russian Federation)

V. V. Revin, Dr. of Biological Sciences, prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)

Stasis Rutkauskas, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Vilnius University, Vilnius, Lithuania)

V. A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

V. A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

© Samara University, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании	7
Иванова О.А., Мелихов С.Н. О топологических алгебрах аналитических функционалов с умножением, определяемым сдвигами	14
Керефов М.А., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью	23
Яковлева Ю.О. Задача Коши для гиперболического уравнения третьего порядка	30

Математическое моделирование

Лосанова Ф.М. Задача с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии	35
Черепанов А.А. Веб-приложение PHP для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости	41

Математические методы в естественных науках

Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю. Модель автоколебаний без гармоник основной частоты	53
<i>Сведения об авторах</i>	60
<i>Требования к оформлению статей</i>	63

CONTENTS

Mathematics

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On fractional differentiation	7
Ivanova O.A., Melikhov S.N. On topological algebras of analytic functionals with a multiplication defined by translations	14
Kerefov M.A., Nakhushева F.M., Gekkieva S.Kh. Boundary value problem for the Aller — Lykov moisture transport generalized equation with concentrated heat capacity	23
Yakovleva J.O. Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the third order	30

Mathematical Modelling

Losanova F.M. A problem with nonlocal displacement for fractional diffusion equation	35
Cherepanov A.A. PhaPL web application for automatic building and research of phase portraits on plane.	41

Mathematical Methods in Natural Sciences

Zaitsev V.V., Fedyunin E.Yu. Model of self-oscillations without harmonicas of the base frequency	53
<i>Information about the authors</i>	60
<i>Requirements to the design of articles</i>	63

С.О. Гладков, С.Б. Богданова¹

К ВОПРОСУ О ДРОБНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

Благодаря операции дробного дифференцирования, вводимой с помощью интеграла Фурье, приведены результаты вычисления дробных производных для некоторых типов элементарных функций. С помощью метода численного интегрирования вычислены значения дробных производных для произвольной размерности ε , где ε — любое число больше нуля. Доказано, что при целых значениях ε получаются обычные производные первого, второго и т. д. порядков. В качестве примера рассмотрено уравнение теплопроводности Фурье, пространственное дифференцирование в котором осуществляется с помощью производных дробного порядка. Приведено его решение через интеграл Фурье и показано, что в частном случае целого ε решение переходит в известные результаты, получаемые в n -мерном случае, где $n = 1, 2, \dots$ и т. д.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, интеграл Фурье, интеграл Римана, теплопроводность, фрактал, дробная размерность, уравнение Фурье, мера.

Цитирование. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 7–13. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-7-13>.

Введение

Вопросы, связанные с практическим применением методов дробного дифференцирования в различного рода прикладных задачах, например, в теории диффузии или в теории теплопроводности (см., к примеру, [1; 2]), вызывают неподдельное любопытство широкого круга исследователей, область интересов которых связана с изучением физических свойств объектов нецелой размерности, к числу которых можно отнести любые фрактальные многообразия [3–6].

Надо сказать, что с формальной точки зрения дробное дифференцирование применялось, например, в работах [7; 8], при исследовании процесса теплопереноса и магнитной восприимчивости в квазиодномерных структурах. А, например, в работах [9; 10] авторами ставился эксперимент при решении ряда задач теории пластичности. Для описания результата ими была использована формула дробного дифференцирования в виде интеграла Фурье. Заметим, что сами авторы отмечали в своих работах, что применение дробного дифференцирования в форме интеграла Римана (который, кстати, используют очень многие авторы (см. к примеру работы [11–13], а также монографию [14])) чрезвычайно неудобно и аналитически нерешаемо (некоторые примеры, подтверждающие сказанное, приведены чуть ниже).

1. Основные результаты

Целью настоящей статьи является проверка корректности формулы дробного дифференцирования, которая была применена в упомянутых выше работах [1; 2], и которая была введена в виде

$$\partial^{1+\varepsilon} f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^{1+\varepsilon} e^{ikx} f_k dk \quad (1)$$

¹© Гладков С.О., Богданова С.Б., 2018

Гладков Сергей Октябрьевич (sglad51@mail.ru), кафедра прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (МАИ), 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Богданова Софья Борисовна (sonjaf@list.ru), кафедра прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (МАИ), 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

где f_k – Фурье-образ функции $f(x)$, для класса которых существует интеграл (1), а ε любое неотрицательное число. В качестве примеров, иллюстрирующих корректность формулы (1), рассмотрим следующие.

1. $f(x) = \sin ax$.

В результате вычисления с помощью программы Maple-17 получаем

$$\partial^{1+\varepsilon} \sin(ax) = \frac{a}{2} \left((ai)^\varepsilon \cdot e^{iax} + (-ai)^\varepsilon \cdot e^{-iax} \right) \quad (2)$$

Как видим, при $\varepsilon = 0$ мы приходим к обычной производной от $\sin ax$ то есть $f' = a \cos ax$. Если положить в (2) $\varepsilon = 1$, то приходим к выражению для второй производной от $\sin ax$, то есть $f'' = -a^2 \sin ax$. Легко проверить, что при любых целых $\varepsilon = 1, 2, 3, 4, \dots$ будут получаться обычные производные соответствующего порядка.

2. $f(x) = \cos ax$.

Тогда

$$\partial^{1+\varepsilon} \cos(ax) = \frac{ia}{2} \left((ai)^\varepsilon \cdot e^{iax} - (-ai)^\varepsilon \cdot e^{-iax} \right) \quad (3)$$

Отсюда также, как и в примере 1, будет следовать, что при всех целых $\varepsilon = 1, 2, \dots$ мы получим правильные выражения для соответствующих производных от $\cos ax$.

3. $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\begin{aligned} \partial^{1+\varepsilon} (\exp(-ax^2)) &= \frac{1}{4 \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) \cdot 2^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \cdot a^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \cdot \\ &\cdot (i \cdot e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, \sqrt{2a} \cdot x) + \\ &+ i \cdot e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, -\sqrt{2a} \cdot x) - \\ &- i \cdot e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, \sqrt{2a} \cdot x) - \\ &- i \cdot e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, -\sqrt{2a} \cdot x) - \\ &- e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, \sqrt{2a} \cdot x) + \\ &+ e^{-\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, -\sqrt{2a} \cdot x) - \\ &- e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, \sqrt{2a} \cdot x) + \\ &e^{\frac{i\pi\varepsilon}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \cdot \text{CylinderD}(1+\varepsilon, -\sqrt{2a} \cdot x)) \end{aligned} \quad (4)$$

Имеем где $\text{CylinderD}(a, x)$ – функция параболического цилиндра, для которой имеет место равенство $\text{CylinderD}(-a - \frac{1}{2}, x) = \text{CylinderU}(a, x) = y(x)$, где $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y'' - (\frac{1}{4}x^2 + a) \cdot y = 0$. Благодаря свойствам функций параболического цилиндра можно легко показать, что при $\varepsilon = 0$ из общего выражения (2.4) получается правильная производная $f' = -2xe^{-x^2}$. Для любых других целых значений также получаются, в чем можно весьма просто убедиться, правильные выражения для высших производных от функции распределения Гаусса.

4. $f(x) = x^m$,

где m – любое целое неотрицательное число. Для $m = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \partial^{1+\varepsilon}(x^1) &= i \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \left(-\frac{(ik)^{1+\varepsilon} e^{ikx}}{k} - i(ik)^{1+\varepsilon} x e^{ikx} \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} (ik)^\varepsilon e^{ikx} (\varepsilon + 1 + ikx) \end{aligned} \quad (5)$$

Если $\varepsilon = 0$ получаем $f' = 1$, а для всех остальных целых значений ε , как и должно быть, получаются нули. В случае $m = 2$ имеем

$$\begin{aligned} & \partial^{1+\varepsilon}(x^2) = \\ & = -\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 e^{ikx}}{k^2} - \frac{(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)e^{ikx}}{k^2} + \frac{2i(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 x e^{ikx}}{k} - (ik)^{1+\varepsilon} x^2 e^{ikx} \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow 0} (ik)^\varepsilon e^{ikx} \left(-\frac{i\varepsilon(1+\varepsilon)}{k} + 2(1+\varepsilon)x + ikx^2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Как видно, при $\varepsilon = 0$ получаем отсюда $f' = 2x$, а при $\varepsilon = 1$ легко найти, что $f' = 2$. Для $m = 3$ находим $f'' = 2$. Для $m = 3$ находим

$$\begin{aligned} & \partial^{1+\varepsilon}(x^3) = \\ & = -i \lim_{k \rightarrow 0} \left(-\frac{(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^3 e^{ikx}}{k^3} + \frac{3(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 e^{ikx}}{k^3} - \frac{3i(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 x e^{ikx}}{k^2} - \right. \\ & \left. - \frac{2(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)e^{ikx}}{k^3} + \frac{3i(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)x e^{ikx}}{k^2} + \frac{3(ik)^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)x^2 e^{ikx}}{k} + i(ik)^{1+\varepsilon} x^3 e^{ikx} \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow 0} (ik)^\varepsilon e^{ikx} \left(\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}{k^2} - \frac{3i\varepsilon(1+\varepsilon)x}{k} + 3(1+\varepsilon)x^2 + ikx^3 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

и если $\varepsilon = 0$, то $f' = 3x^2$. При $\varepsilon = 1$ $f'' = 6x$, а при $\varepsilon = 2$ $f'' = 6$. Как видно из (2.5)–(2.7), общая рекуррентная формула для степенной функции x^n будет такой

$$\begin{aligned} & \partial^{1+\varepsilon}(x^n) = \\ & = \lim_{k \rightarrow 0} (ik)^\varepsilon \exp(ikx) \left(-\frac{i^{n-1}(n-1-\varepsilon)\dots(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)\varepsilon}{k^{n-1}} + \frac{ni^{n-2}\varepsilon(1+\varepsilon)x^{n-2}}{k^{n-2}} + \right. \\ & \left. + \dots + n(1+\varepsilon)x^{n-1} + ikx^n \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, на примерах 1–4 мы убедились, что формула (1) является вполне корректной, и ей можно пользоваться с целью вычисления любых производных дробного порядка. Стоит также обратить внимание, что вычисление дробных производных с помощью интеграла Римана — Лиувилля, который используется в огромном количестве работ, и в частности, в уже отмеченных выше статьях [11–13], а также в монографии [14], приводит к несколько иным формулам, использование которых, мягко говоря, даже в простейших случаях довольно проблематично. Действительно, рассмотрим производную дробного порядка по Риману — Лиувиллю, которую представим в виде интеграла на отрезке, как, например, в [14], а именно

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n-1}} \quad (9)$$

где α любое число, а n целая часть α плюс один. В качестве примера пусть будет $f(x) = \sin ax$, а $\alpha = \frac{1}{11}$. Программа Maple–17 отказывается вычислить этот интеграл, и возвращает его в первоначальном виде.

Понятно, что использование подходов (1) и (9) диктуется только вкусами авторов, однако, применение этих выражений в конкретных вычислениях позволяет сделать вывод об очевидном, на наш взгляд, преимуществе формулы (1). В самом деле, в ней не заложено ограничение на величину ε , как в формуле (8) на α . Кроме того, она описывает более широкий спектр функций, так как в случае применения формулы (1) речь идет не о действительном пространстве, а о комплексном.

В случае целочисленных значений α в соответствии с (9) мы имеем дело с обычной производной. Например, пусть $\alpha = 2$, тогда из (9) следует

$$\partial^1 f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_a^x f(t)dt = f'(x) \quad (10)$$

Остановимся еще на одном конкретном примере приложения формулы (1) к чисто физической задаче. Вычислим распределение температуры по топологически одномерному фрактальному объекту размерности $1 + \varepsilon$. Как известно [15], в одномерном случае уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (11)$$

где $T = T(x, t)$ — температура, а χ — коэффициент температуропроводности. В том случае, когда речь идет о фрактальном объекте, вместо (11) мы должны использовать уравнение (см., например, работы [16]) вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi_{1+\varepsilon} \frac{\partial^{1+\varepsilon} T}{\partial x^{1+\varepsilon}} = \frac{\chi_{1+\varepsilon}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^{1+\varepsilon} e^{ikx} T_k(t) dk, \quad (12)$$

где $T_k(t)$ — Фурье-образ функции $T(x, t)$. В соответствии с (12) уравнение относительно Фурье-образа T_k имеет вид

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \chi_{1+\varepsilon} (ik)^{1+\varepsilon} T_k. \quad (13)$$

Откуда

$$T_k(t) = T_k(0) e^{\chi_{1+\varepsilon} (ik)^{1+\varepsilon} t} \quad (14)$$

где $T_k(0) = T_k(t)|_{t=0}$ значение Фурье — образа температуры в начальный момент времени. Оно определяется как

$$T_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, 0) e^{-ikx} dx, \quad (15)$$

где $T(x, 0)$ начальное распределение температуры. Это означает, что решение следует представить в виде

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_k(0) e^{\chi_{1+\varepsilon} (ik)^{1+\varepsilon} t + ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x', 0) e^{\chi_{1+\varepsilon} (ik)^{1+\varepsilon} t + ik(x-x')} dk dx' \end{aligned}$$

В более компактной форме распределение температуры по фрактальному квазиодномерному объекту удобно записать как

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(x-x', t) T(x', 0) dx', \quad (16)$$

где функция

$$J(x-x', t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Au^{1+\varepsilon} + iub} du \quad (17)$$

здесь новый безразмерный аргумент $u = \frac{x'}{L}$, L — параметр длины, $b = x - x'$, $A = a_\varepsilon \left(\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) - i \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \right)$ и $a_\varepsilon = \frac{\chi_{1+\varepsilon} t}{L^{1+\varepsilon}}$. Сходимость интеграла (17) скрыта в условии, накладываемом на ε , а именно должно быть $0 < \varepsilon \leq 1$. Заметим, что это неравенство автоматически следует и из определения рассматриваемой нами фрактальной структуры, которая по условию является квазиодномерной. В случае квазидвухмерного или квазитрехмерного объекта вместо (17) мы автоматически получили бы соответственно двойной и тройной интегралы. Кроме того, необходимо заметить, что фрактальность структуры и порядок дробного дифференцирования должны быть одинаковыми. К сожалению, вычисление интеграла (17) с помощью программы Maple-17 оказывается невозможным. Однако, благодаря методу перевала (см., например, [16]) можно получить аналитический ответ. В частном случае при $\varepsilon = 1$ получаем традиционное решение, приведенное в [15]. Из сказанного выше можно сделать следующий вывод. При исследовании огромного многообразия каких-либо физических процессов, приводящих с необходимостью к рациональным или иррациональным размерностям, удобно использовать формальный математический аппарат дробного дифференцирования либо в форме (1), либо в форме (9), что диктуется, на наш взгляд, только внутренним убеждением авторов.

Литература

- [1] Гладков С.О. К теории гидродинамических явлений в квазиодномерных системах // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 11. С. 130–132. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/38956>.
- [2] Гладков С.О. К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 7. С. 8–12. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/33167>.

- [3] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск.: РХД, 2002. 665 с.
- [4] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 524 с.
- [5] Синергетика и фракталы в материаловедении / В.С. Иванова [и др.]. М.: Наука, 1994. 383 с.
- [6] Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск.: РХД, 2001. 528 с.
- [7] Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории продольной магнитной восприимчивости квазитрехмерных ферромагнитных диэлектриков // ФТТ. 2012. Т. 54. № 1. С. 70–73. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/482>.
- [8] Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о магнитной восприимчивости фрактальных ферромагнитных проволок // Известия вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 4. С. 44–47. URL: <http://i.uran.ru/webcab/system/files/journalspdf/izvestiya-vuzov.ser.fizika/izvestiya-vuzov.ser.fizika-2014-t.57-n-4/42014.pdf>.
- [9] Bagley R.L., Torvik P.J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity // Journal of Rheology. 1983. Vol. 27(201). P. 201–210. DOI: 10.1122/1.549724.
- [10] On the fractional calculus model of viscoelastic behavior/ R. L. Bagley, P. J. Torvik // Journal of Rheology. 1986. Vol. 30 (1). P. 133–155. DOI: 10.1122/1.549887.
- [11] Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С.660–670. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=7144&option_lang=rus.
- [12] Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tmf&paperid=5547&option_lang=rus.
- [13] Нахушев А.М. Структурные и качественные свойства оператора, обратного оператору дробного интегро-дифференцирования с фиксированным началом и концом // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1093–1100. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754189>.
- [14] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [16] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional system // Physica B: Condensed Matter. 2010. Vol. 405. P. 1973–1975.

References

- [1] Gladkov S.O. *K teorii gidrodinamicheskikh iavlenii v kvaziodnomernykh sistemakh* [On the theory of hydrodynamic phenomena in quasi-one-dimensional systems]. *ZhTF* [Technical Physics (Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki)], 2001, Vol. 71, no 11, pp. 130–132. Available at: <https://journals.ioffe.ru/articles/38956> [in Russian].
- [2] Gladkov S.O. *K teorii odnomernoi i kvaziodnomernoi teploprovodnosti* [On the theory of one-dimensional and quasi-one-dimensional thermal conductivity]. *ZhTF* [Technical Physics (Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki)], 1997, Vol. 67, no 7, pp. 8–12. Available at: <https://journals.ioffe.ru/articles/33167> [in Russian].
- [3] Mandelbrot B. *Fraktal'naia geometriia prirody* [Fractal geometry of nature]. Izhevsk: RKhD, 2002, 665 p. [in Russian].
- [4] Feder J. *Fraktaly* [Fractals]. M.: Mir, 1991, 524 p. [in Russian].
- [5] Ivanova V.S. [et al.] *Sinergetika i fraktaly v materialovedenii* [Synergetics and fractals in materials science]. M.: Nauka, 1994, 383 p. [in Russian].
- [6] Schroeder M. *Fraktaly, khaos, stepennye zakony* [Fractals, Chaos, Power Laws]. Izhevsk: RKhD, 2001, 528 p. [in Russian].
- [7] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *K teorii prodol'noi magnitnoi vospriimchivosti kvazitrehmernykh ferromagnitnykh dielektrikov* [On the theory of longitudinal magnetic susceptibility of quasi-three-dimensional ferromagnetic dielectrics]. *FTT* [Solid-State Physics], 2012, Vol. 54, no 1, pp. 70–73. Available at: <https://journals.ioffe.ru/articles/482> [in Russian].
- [8] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *K voprosu o magnitnoi vospriimchivosti fraktal'nykh ferromagnitnykh provolok* [On the Question of the Magnetic Susceptibility of Ferromagnetic Wires]. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 2014, Vol. 57, no 4, pp. 44–47. Available at: <http://i.uran.ru/webcab/system/files/journalspdf/izvestiya-vuzov.ser.fizika/izvestiya-vuzov.ser.fizika-2014-t.57-n-4/42014.pdf> [in Russian].
- [9] Bagley R.L., Torvik P.J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 1983, Vol. 27 (201), pp. 201–210. DOI: 10.1122/1.549724 [in English].
- [10] Bagley R.L., Torvik P.J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 1986, Vol. 30 (1), pp. 133–155. DOI: 10.1122/1.549887 [in English].

- [11] Kochubey A.N. *Diffuziia drobnogo poriadka* [Fractional order diffusion]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1990, Vol. 26, no 4, pp. 660–670. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=7144&option_lang=rus [in Russian].
- [12] Nigmatullin R.R. *Drobnyi integral i ego fizicheskaia interpretatsiia* [Fractional integral and its physical interpretation]. *Teoreticheskaia i matematicheskaia fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 1992, Vol. 90, no 3, pp. 354–368. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tmf&paperid=5547&option_lang=rus [in Russian].
- [13] Nakhushev A.M. *Strukturnye i kachestvennye svoistva operatora, obratnogo operatoru drobnogo integro-differentsirovaniia s fiksirovannym nachalom i kontsom* [Structural and qualitative properties of the operator, inverse to the operator of fractional integro-differentiation with fixed start and end]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2000, Vol. 36, no 8, pp. 1093–1100. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754189> [in Russian].
- [14] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. [in Russian].
- [15] Landau L.D., Lifshits Ye.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. M.: Nauka, 1986, 736 p. [in Russian].
- [16] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional system. *Physica B: Condensed Matter*, 2010, Vol. 405, pp. 1973–1975 [in English].

S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova²

ON FRACTIONAL DIFFERENTIATION

Due to the operation of fractional differentiation introduced with the help of Fourier integral, the results of calculating fractional derivatives for certain types of functions are given. Using the numerical method of integration, the values of fractional derivatives for arbitrary dimensionality ε , (where ε is any number greater than zero) are calculated. It is proved that for *integer* values of ε we obtain ordinary derivatives of the first, second and more high orders. As an example it was considered heat conduction equation of Fourier, where spatial derivation was realized with the use of fractional derivatives. Its solution *is* given *by* Fourier integral. *Moreover*, it was shown that integral went into the required results in special case of the whole ε obtained in n -dimensional case, where $n = 1, 2, \dots$, etc.

Key words: fractional differentiation, Fourier integral, Riemann integral, heat conduction, fractal, fractional dimension, Fourier equation, measure.

Citation. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. *К вопросу о дробном дифференцировании* [On fractional differentiation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 7–13. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-7-13> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 4/VIII/2018.

The article received 4/VIII/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

² Gladkov Sergey Oktyabrinovich (sglad51@mail.ru), Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Bogdanova Sofya Borisovna (sonjaf@list.ru), Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

О.А. Иванова, С.Н. Мелихов¹

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ С УМНОЖЕНИЕМ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМ СДВИГАМИ

В топологическом сопряженном к счетному индуктивному пределу E весовых пространств Фреше целых функций многих комплексных переменных с помощью обычных сдвигов определено умножение — свертка. Полученная алгебра изоморфна коммутанту системы операторов частного дифференцирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов, действующих в E . В построенной алгебре аналитических функционалов в двух несмешанных случаях введена топология, с которой эта алгебра становится топологической и уже топологически изоморфна указанному коммутанту с соответствующей (естественной) операторной топологией. Доказано, что в этих ситуациях данная алгебра не имеет делителей нуля при условии, что многочлены плотны в E . Показана существенность этого предположения для справедливости последнего утверждения.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, алгебра аналитических функционалов, топологическая алгебра, коммутант, оператор свертки.

Цитирование. Иванова О.А., Мелихов С.Н. О топологических алгебрах аналитических функционалов с умножением, определяемым сдвигами // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 14–22. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-14-22>.

Введение

Начиная с 30-х годов прошлого века интенсивно развивается теория банаховых алгебр, в частности, \mathbb{C}^* -алгебр, нашедшая многочисленные применения не только в математике, но и в физике (например, в квантовой механике). Топологические алгебры, не являющиеся банаховыми, даже близкие к ним, не обладают рядом их важных свойств. Например, одним из центральных моментов в теории банаховых алгебр является использование достаточного набора ненулевых мультипликативных линейных функционалов. Для топологической алгебры, не являющейся банаховой, такие линейные непрерывные функционалы на ней могут и не существовать. Несмотря на это, и небанахов случай имеет широкое поле применений (см. [1; 2]). Отметим также использование небанаховых алгебр при исследовании операторов обобщенного интегрирования [3], в спектральной теории в пространствах аналитических функционалов [4–5] (изучаемые в [3–5] объекты близки к рассматриваемым в этой работе), в теории операторов обобщенного сдвига [6], групп Ли [7] и алгебр Ли [8]. В настоящей статье исследуется алгебра, имеющая “хорошее” представление в ненормируемом весовом пространстве целых функций. Именно, здесь изучается алгебра линейных непрерывных функционалов (аналитических функционалов) на счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых (в \mathbb{C}^N) функций, введенная в [9]. Многие локально выпуклые пространства и их сопряженные, используемые в комплексном анализе, анализе Фурье, в теории распределений и ультрараспределений, реализуются с помощью преобразования Фурье-Лапласа и его аналогов в виде пространства E . Умножение \odot в сопряженном E' к E задается обычными сдвигами, т.е. является стандартной сверткой функционалов. Алгебра (E', \odot) изоморфна коммутанту $\mathcal{K}(\partial)$ системы операторов частного дифференцирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов в E с обычным умножением — композицией операторов. Ненулевыми мультипликативными функционалами на ней, задаваемыми элементами E , являются те и только те, которые соответствуют принадлежащим E экспонентам [9, замечание 4]. Значит, если E не содержит ни одной экспоненты, то таких функционалов нет. Мы показываем, что в несмешанных случаях, когда E является счетным индуктивным пределом

¹© Иванова О.А., Мелихов С.Н., 2018

Иванова Ольга Александровна (neo_ivolga@mail.ru), кафедра математического анализа и геометрии, Южный федеральный университет, 344090, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а.

Мелихов Сергей Николаевич (melih@math.rsu.ru), кафедра алгебры и дискретной математики, Южный федеральный университет, 344090, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а; Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, 362027, Российская Федерация, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53.

банаховых пространств или пространством Фреше, построенная алгебра является топологической при наделении E' соответствующей топологией сопряженного пространства. В этих случаях указанный изоморфизм (E', \odot) и $\mathcal{K}(\partial)$ является и топологическим, если в $\mathcal{K}(\partial)$ вводится естественная операторная топология. (В общем случае топологичность изоморфизма имеет место, если E' наделено слабой, а $\mathcal{K}(\partial)$ — слабо-операторной топологией [9].) В общей, смешанной, ситуации доказаны достаточные условия топологического характера для наличия алгебраического свойства — отсутствия делителей нуля в (E', \odot) . В частности, в рассмотренных "чистых" ситуациях (E', \odot) не имеет делителей нуля при предположении, что многочлены плотны в E . Это предположение существенно, как показывает пример пространства E , изоморфному сильному сопряженному к $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Отсутствие делителей нуля в (E', \odot) означает инъективность оператора свертки в E' , заданного ненулевым функционалом, что полезно, в частности, при исследовании уравнений свертки в конкретных пространствах.

Далее мы используем сведения из теории локально выпуклых пространств из [10–12]. Всюду ниже алгебра — это комплексное линейное пространство \mathcal{A} с умножением, т. е. билинейным отображением $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Она называется топологической, если \mathcal{A} является локально выпуклым пространством и умножение непрерывно из $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в \mathcal{A} .

1. Предварительные сведения

1.1. Основные пространства

Приведем необходимые сведения из статьи [9]. Пусть $N \in \mathbb{N}$; $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, — двойная последовательность непрерывных функций такая, что в \mathbb{C}^N

$$v_{n,k+1} \leq v_{n,k} \leq v_{n+1,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Символ $A(\mathbb{C}^N)$ обозначает пространство всех целых (в \mathbb{C}^N) функций. Для $n, k \in \mathbb{N}$ определим весовые банаховы пространства

$$E_{n,k} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}^N) \mid \|f\|_{n,k} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v_{n,k}(z))} < +\infty \right\}$$

и пространства Фреше $E_n := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_{n,k}$. Топология в E_n задается последовательностью норм $\|\cdot\|_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Каждое пространство E_n непрерывно вложено в E_{n+1} .

Положим $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ и введем в E топологию индуктивного предела пространств Фреше E_n , $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений вложения E_n в E .

Далее $|z| := \left(\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \right)^{1/2}$ для $z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$. Определим условия

(V1) $\forall n \exists m \forall k \exists s$:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(\inf_{|t-z| \leq 1} v_{m,k}(t) - \sup_{|t-z| \leq 1} v_{n,s}(t) \right) = +\infty$$

и

(V2) $\forall n \exists m \forall k \exists s \exists C < +\infty : \forall t, z \in \mathbb{C}^N$

$$v_{n,s}(t+z) \leq v_{m,k}(t) + v_{m,k}(z) + C.$$

Пусть $\partial_j f := \frac{\partial f}{\partial z_j}$, $1 \leq j \leq N$. Введем операторы сдвига

$$\tau_z(f)(t) := f(t+z), \quad z, t \in \mathbb{C}^N, \quad f \in E.$$

Замечание 1. Пусть выполняется условие (V1).

- (i) Все операторы ∂_j , $1 \leq j \leq N$, и τ_z , $z \in \mathbb{C}^N$, линейно и непрерывно отображают E в E .
- (ii) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m . При этом m для каждого n можно выбрать таким, как в условии (V1).

Конкретные примеры введенных пространств E , описание их свойств можно найти в [9; 13; 14].

1.2. Умножение в E'

Пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов в E . Оно является алгеброй с умножением — композицией операторов. Введем коммутант $\mathcal{K}(\partial)$ системы $\{\partial_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ в $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(\partial) := \{A \in \mathcal{L}(E) \mid A\partial_j = \partial_j A \text{ в } E, 1 \leq j \leq N\}$$

и коммутант $\mathcal{K}(\tau)$ системы операторов сдвига в $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(\tau) := \{A \in \mathcal{L}(E) \mid \forall z \in \mathbb{C}^N \ A\tau_z = \tau_z A \text{ в } E\}.$$

Умножение в E' оказывается непосредственно связанным с введенными коммутантами. Приведем их описание.

Теорема 1. [9] Пусть выполняются условия (V1) и (V2). Следующие утверждения равносильны:

- (i) $A \in \mathcal{K}(\partial)$.
- (ii) $A \in \mathcal{K}(\tau)$.
- (iii) Существует $\varphi \in E'$ такое, что $A(f)(z) = \varphi(\tau_z(f))$, $f \in E$, $z \in \mathbb{C}^N$.

Далее предполагаем, что последовательность $(v_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (V1) и (V2). Определим в E' операцию умножения \odot . Для $\varphi, \psi \in E'$ положим

$$(\varphi \odot \psi)(f) := \varphi_z(\psi(\tau_z(f))), \quad f \in E.$$

Здесь нижний индекс у функционала показывает, по какой переменной действует функционал. Операция \odot определена корректно, а отображение $\omega : E' \rightarrow \mathcal{K}(\partial)$,

$$\omega(\varphi)(f)(z) := \varphi(\tau_z(f)), \quad \varphi \in E', \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

биективно. При этом ω — изоморфизм алгебр (E', \odot) и $\mathcal{K}(\partial)$, и обе они ассоциативны и коммутативны.

Пусть $\delta_z(f) := f(z)$, $f \in E$, $z \in \mathbb{C}^N$. Все функционалы δ_z линейны и непрерывны на E . Отметим, что для любого $A \in \mathcal{K}(\partial)$ выполняется равенство $\omega^{-1}(A) = \delta_0 A$.

2. Топологический изоморфизм E' и $\mathcal{K}(\partial)$

2.1. О топологической алгебре (E', \odot)

Положим $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j$ для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$. Введем функционалы

$$\varphi_\alpha(f) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_N^{\alpha_N}}(0), \quad f \in E, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Ясно, что $\varphi_\alpha \in E'$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Отметим равенство $\varphi_\alpha \odot \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$.

Символом $\sigma(E', E)$ обозначим слабую топологию в E' , определяемую естественной двойственностью между E и E' . Система $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $(E', \sigma(E', E))$, т.е. замыкание ее линейной оболочки в $(E', \sigma(E', E))$ совпадает с E' . Действительно, если $f \in E$ и $\varphi_\alpha(f) = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, то по теореме единственности $f = 0$.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ определим дуальные к $\|\cdot\|_{n,k}$ "нормы": для $\varphi \in E'_n$

$$\|\varphi\|'_{n,k} := \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,k} \leq 1} |\varphi(f)|.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в E'_n введем топологию λ_n индуктивного предела пространств

$$\tilde{E}_{n,k} := \{\varphi \in E'_n \mid \|\varphi\|'_{n,k} < +\infty\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

относительно отображений вложения $\tilde{E}_{n,k}$ в E'_n . При этом $\tilde{E}_{n,k}$ — банахово пространство с нормой $\|\varphi\|'_{n,k}$ (см. [10, гл. 8, 8.4.14]). В E' зададим топологию λ проективного предела последовательности пространств (E'_n, λ_n) , $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений сужения $j'_n : E' \rightarrow E'_n$, $\varphi \mapsto \varphi|_{E_n}$, сопряженных к вложениям $j_n : E_n \rightarrow E$.

Следующая лемма проясняет характер непрерывности операторов вида $\omega(\varphi)$ в E .

Лемма 1. Пусть выполняются условия (V1) и (V2). Тогда $\forall n \exists m \forall k \exists s \exists D < +\infty$: для любого $\varphi \in E'$ такого, что $j'_m(\varphi) \in \tilde{E}_{m,k}$, любого $f \in E_n$

$$\|\omega(\varphi)(f)\|_{m,k} \leq D \|j'_m(\varphi)\|'_{m,k} \|f\|_{n,s}.$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Выберем m и для k определим s и C по (V2). Тогда для любого $\varphi \in E'$, для которого $j'_m(\varphi) \in \tilde{E}_{m,k}$, любого $f \in E_n$

$$\begin{aligned} \|\omega(\varphi)(f)\|_{m,k} &= \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|\varphi(\tau_z(f))|}{\exp(v_{m,k}(z))} \leq \|j'_m(\varphi)\|'_{m,k} \sup_{z,t \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(t+z)|}{\exp(v_{m,k}(z) + v_{m,k}(t))} \leq \\ &e^C \|j'_m(\varphi)\|'_{m,k} \sup_{z,t \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(t+z)|}{\exp(v_{n,s}(z+t))} = e^C \|j'_m(\varphi)\|'_{m,k} \|f\|_{n,s}. \end{aligned}$$

Мы докажем топологичность алгебры (E', \odot) в двух частных, "чистых" случаях. Пусть $v_{n,k} = v_{n,1}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. В этой ситуации каждое пространство E_n является банаховым с нормой $\|\cdot\|_{n,1}$. Вследствие замечания 1(ii) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется m такое, что вложение E_n в E_m компактно. Поэтому [12, теорема 25.20, замечание 24.24] (E', λ) — пространство Фреше-Шварца с фундаментальной последовательностью непрерывных преднорм $\|j'_n(\varphi)\|'_{n,1}$, $\varphi \in E'$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае топологию μ в $\mathcal{K}(\partial)$ зададим последовательностью преднорм $q_n(A) := \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leq 1} \|A(f)\|_{m(n),1}$, $A \in \mathcal{K}(\partial)$, где $m(n)$ выбрано для n по лемме 1. Заметим, что $(\mathcal{K}(\partial), \mu)$ является пространством Фреше. Это влечет, что топология μ не зависит от выбора $m(n)$.

Пусть теперь функции $v_{n,k}$ не зависят от n , т.е. $v_{n,k} = v_{1,k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. В этом случае E является монтелевским пространством Фреше (см. [10, гл. 8, 8.4.7], [12, гл. 3, §24]), а (E', λ) — индуктивным пределом последовательности банаховых пространств $\tilde{E}_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в E' . Для $k \in \mathbb{N}$ введем пространства $\mathcal{K}_k(\partial) = \{A \in \mathcal{K}(\partial) \mid t_k(A) = \sup_{f \in E, \|f\|_{1,s(k)} \leq 1} \|A(f)\|_{1,k} < +\infty\}$, где $s(k)$ выбрано для k по лемме 1. При этом t_k — норма в $\mathcal{K}_k(\partial)$ и $\mathcal{K}(\partial) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_k(\partial)$. В данном случае топология μ в $\mathcal{K}(\partial)$ — это топология индуктивного предела последовательности нормированных пространств $\mathcal{K}_k(\partial)$ с нормами t_k , $k \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $\mathcal{K}(\partial)$. (Из теоремы 4, доказываемой ниже, следует, что μ не зависит от выбора $s(k)$.)

Для обеих описанных несмешанных топологических структур топология λ в E' согласуется с двойственностью между E' и E , т.е. она мажорирует слабую $\sigma(E', E)$ и мажорируется топологией Макки $\tau(E', E)$ [11, гл. IV, § 3].

Теорема 2. Пусть выполняются условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не зависят от k или n . Тогда (E', λ) с умножением \odot является топологической алгеброй.

Доказательство. Пусть $v_{n,k} = v_{n,1}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и выберем m по условию (V2). По лемме 1 существует $C_1 < +\infty$ такое, что для любых $\varphi, \psi \in E'$

$$\begin{aligned} \|j'_n(\varphi \odot \psi)\|'_{n,1} &= \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leq 1} |\varphi(\omega(\psi)(f))| \leq \\ &\|j'_m(\varphi)\|'_{m,1} \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leq 1} \|\omega(\psi)(f)\|_{m,1} \leq C_1 \|j'_m(\varphi)\|'_{m,1} \|j'_m(\psi)\|'_{m,1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что отображение $\odot : (E', \lambda) \times (E', \lambda) \rightarrow (E', \lambda)$ непрерывно.

Пусть теперь $v_{n,k} = v_{1,k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $(E', \lambda) = \text{ind}_{k \rightarrow} \tilde{E}_{1,k}$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и выберем s по (V2). По лемме 1 существует $C_2 < +\infty$ такое, что для любых $\varphi, \psi \in \tilde{E}_{1,s}$

$$\begin{aligned} \|\varphi \odot \psi\|'_{1,s} &= \sup_{f \in E, \|f\|_{1,s} \leq 1} |\varphi(\omega(\psi)(f))| \leq \\ &\|\varphi\|'_{1,k} \sup_{f \in E, \|f\|_{1,s} \leq 1} \|\omega(\psi)(f)\|_{1,k} \leq C_2 \|\varphi\|'_{1,k} \|\psi\|'_{1,k}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Заметим, что $E' \times E' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\tilde{E}_{1,k} \times \tilde{E}_{1,k})$. Кроме того, из теоремы об открытом отображении [12, теорема 24.30] следует, что произведение $(E', \lambda) \times (E', \lambda)$ является индуктивным пределом последовательности произведений $\tilde{E}_{1,k} \times \tilde{E}_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $(E', \lambda) \times (E', \lambda)$. (Пространство $\text{ind}_{k \rightarrow} (\tilde{E}_{1,k} \times \tilde{E}_{1,k})$ имеет сеть, а $(E', \lambda) \times (E', \lambda)$ ультраборнологично.) Это и неравенство (2.1) влекут, что отображение $\odot : (E', \lambda) \times (E', \lambda) \rightarrow (E', \lambda)$ непрерывно.

2.2. Условия, при которых ω — топологический изоморфизм

Приведем вначале результат из [9] для общего случая, когда рассматриваемые пространства снабжены слабыми и с ними связанными топологиями. Обозначим символом $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$ пространство $\mathcal{K}(\partial)$ со

слабо-операторной топологией, т. е. топологией поточечной сходимости, когда в E введена слабая топология $\sigma(E, E')$ (см. [11, гл. III, § 3, пример 4 (а), с. 104]). Отметим, что вследствие бочечности E пространство всех линейных слабо непрерывных операторов в E алгебраически совпадает с $\mathcal{L}(E)$ [10, гл. 8, § 8.6, с. 703; теорема 8.6.1].

Теорема 3. [9, теорема 3] Отображение ω является топологическим изоморфизмом локально выпуклых пространств $(E', \sigma(E', E))$ и $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$.

В несмешанных ситуациях этот результат имеет место для более естественных топологий.

Теорема 4. Предположим, что выполняются условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не зависят от k или n . Тогда алгебраический изоморфизм $\omega : (E', \odot) \rightarrow \mathcal{K}(\partial)$ является также и топологическим изоморфизмом пространств E' и $\mathcal{K}(\partial)$ при надделении их топологиями λ и μ соответственно.

Доказательство. Пусть $v_{n,k} = v_{n,1}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Поскольку для любых $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in E'$ (число $m = m(n)$, выбранное для n по лемме 1, участвует в определении топологии μ)

$$\begin{aligned} \|j'_n(\omega^{-1}(\omega(\varphi)))\|'_{n,1} &= \|j'_n(\delta_0\omega(\varphi))\|'_{n,1} = \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leq 1} |\omega(\varphi)(f)(0)| \leq \\ &e^{v_{m,1}(0)} \sup_{f \in E_n, \|f\|_{n,1} \leq 1} \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|\omega(\varphi)(f)(z)|}{\exp(v_{m,1}(z))} = e^{v_{m,1}(0)} q_n(\omega(\varphi)), \end{aligned}$$

то отображение ω^{-1} непрерывно из $(\mathcal{K}(\partial), \mu)$ в (E', λ) . По теореме об открытом отображении ω — топологический изоморфизм (E', λ) на $(\mathcal{K}(\partial), \mu)$.

Пусть теперь $v_{n,k} = v_{1,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Как и выше, для любых $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in E'$ справедливо следующее неравенство, в котором $s = s(k)$, выбранное для k по лемме 1, участвует в определении топологии μ :

$$\|\omega^{-1}(\omega(\varphi))\|'_{1,s} \leq e^{v_{1,k}(0)} t_k(\omega(\varphi)).$$

Это влечет непрерывность отображения ω^{-1} из $\mathcal{K}_k(\partial)$ в $\tilde{E}_{1,s}$. Значит, $\omega^{-1} : (\mathcal{K}(\partial), \mu) \rightarrow (E', \lambda)$ непрерывно. Вследствие леммы 1 для любых $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \tilde{E}_{1,k}$ выполняется неравенство $t_k(\omega(\varphi)) \leq D\|\varphi\|'_{1,k}$. Поэтому отображение $\omega : (E', \lambda) \rightarrow (\mathcal{K}(\partial), \mu)$ также непрерывно.

Пусть $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_N^{\alpha_N}}$ для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$; $\mathbb{C}(\partial) := \text{span}\{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$, т. е. $\mathbb{C}(\partial)$ — множество всех многочленов от операторов ∂_j , $1 \leq j \leq N$.

Следствие 1. Предположим, что выполняются условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не зависят от k или n . Множество $\mathbb{C}(\partial)$ плотно в $(\mathcal{K}(\partial), \mu)$.

Следствие 1 вытекает из плотности системы функционалов $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ в (E', λ) и того, что $\omega(\varphi_\alpha) = \partial^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Укажем, при каких условиях $\mathbb{C}(\partial)$ обладает более сильным аппроксимационным свойством, а именно, когда всякий оператор из $\mathcal{K}(\partial)$ является дифференциальным оператором бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Ряд достаточных условий этого для пространств целых функций, реализуемых в виде пространств последовательностей, получен в [15].

Следствие 2. Предположим, что выполняются условия (V1) и (V2) и функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не зависят от k или n . Следующие утверждения равносильны:

- (i) $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ — базис в (E', λ) .
- (ii) $\{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ — базис в $(\mathcal{K}(\partial), \mu)$.

3. Ассоциированный оператор свертки

Зафиксируем $\varphi \in E'$ и положим $T_\varphi(\psi) := \varphi \odot \psi$, $\psi \in E'$. Оператор T_φ назовем оператором свертки. Он отображает E' в E' . Положим $A_\varphi := \omega(\varphi)$, т. е. $A_\varphi(f)(z) = \varphi(\tau_z(f))$, $f \in E$, $z \in \mathbb{C}^N$. Поскольку для любых $\psi \in E'$, $f \in E$

$$T_\varphi(\psi)(f) = (\psi \odot \varphi)(f) = \psi(A_\varphi(f)), \quad (3.2)$$

то T_φ непрерывен в $(E', \sigma(E', E))$. Из (3.2) следует также, что $T_\varphi : E' \rightarrow E'$ — оператор, сопряженный к $A_\varphi : E \rightarrow E$.

Далее докажем утверждение об отсутствии делителей нуля в (E', \odot) , справедливое при выполнении некоторых топологических условий. Ниже $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \dots z_N^{\alpha_N}$, $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_N!$, $z \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Теорема 5. Предположим, что все многочлены содержатся в E и плотны в E . Пусть, кроме того, существует локально выпуклая топология $\tilde{\lambda}$ в E' , согласующаяся с двойственностью между E' и E , такая, что $(E', \tilde{\lambda})$ является топологической алгеброй с умножением \odot . Тогда E' с умножением \odot не имеет делителей нуля.

Доказательство. Пусть $\varphi \odot \psi = 0$, $\varphi, \psi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Поскольку множество $\Omega := \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в $(E', \sigma(E', E))$ и топология $\tilde{\lambda}$ согласуется с двойственностью между E' и E , то Ω полно и в $(E', \tilde{\lambda})$ [11, гл. IV, § 3, 3.1]. Значит, существуют сети

$$R_\xi = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} a_{\gamma, \xi} \varphi_\gamma, \quad \xi \in \Lambda, \quad \text{и} \quad S_\eta = \sum_{\zeta \in \mathbb{N}_0^N} b_{\zeta, \eta} \varphi_\zeta, \quad \eta \in \Delta,$$

сходящиеся в $(E', \tilde{\lambda})$ к φ и ψ соответственно. При этом для любых $\xi \in \Lambda$ и $\eta \in \Delta$ не более конечного числа коэффициентов $a_{\gamma, \xi} \in \mathbb{C}$ и $b_{\zeta, \eta} \in \mathbb{C}$ отлично от нуля. Тогда, учитывая, что $\varphi_\gamma \odot \varphi_\zeta = \varphi_{\gamma+\zeta}$, и непрерывность умножения $\odot : (E', \tilde{\lambda}) \times (E', \tilde{\lambda}) \rightarrow (E', \tilde{\lambda})$, получим:

$$0 = \varphi \odot \psi = \left(\lim_{\xi \in \Lambda} R_\xi \right) \odot \left(\lim_{\eta \in \Delta} S_\eta \right) = \lim_{(\xi, \eta) \in \Lambda \times \Delta} \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^N} \left(\sum_{\gamma+\zeta=\nu} a_{\gamma, \xi} b_{\zeta, \eta} \right) \varphi_\nu \quad (3.3)$$

(последний предел существует и равен 0 в $(E', \tilde{\lambda})$). Поскольку $(\varphi_\alpha)_z (z^\beta / \beta!) = \delta_{\alpha, \beta}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, то в \mathbb{C} для любых $\gamma, \zeta \in \mathbb{N}_0^N$ существуют $\lim_{\xi \in \Lambda} a_{\gamma, \xi}$, равный $\varphi_z(z^\gamma / \gamma!) =: a_\gamma$, и $\lim_{\eta \in \Delta} b_{\zeta, \eta}$, равный $\psi_z(z^\zeta / \zeta!) =: b_\zeta$. Кроме того, с учетом (3.3), для любого $\nu \in \mathbb{N}_0^N$ имеет место равенство

$$0 = \sum_{\gamma+\zeta=\nu} a_\gamma b_\zeta.$$

Так как множество всех многочленов плотно в E , то существует $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ такое, что $a_\gamma \neq 0$. Поскольку кольцо формальных степенных рядов от N переменных (над полем \mathbb{C}) целостное (см., например, [16, гл. 2, § 4, 4.1], [17, доказательство теоремы 9.12]), то $b_\zeta = 0$ для любого $\zeta \in \mathbb{N}_0^N$. Поэтому $\psi = 0$.

Следствие 3. Пусть выполняются предположения теоремы 5. Тогда для любого $\varphi \in E' \setminus \{0\}$ множество $A_\varphi(E)$ плотно в E .

Доказательство. По предыдущей теореме оператор свертки $T_\varphi : E' \rightarrow E'$ инъективен. Отсюда и того, что T_φ — сопряженный к отображению $A_\varphi : E \rightarrow E$, вытекает плотность $A_\varphi(E)$ в E [10, гл. 8, 8.6, с. 706].

Следствие 4. Предположим, что функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не зависят от k или n и множество всех многочленов содержится и плотно в E . Тогда алгебра E' с умножением \odot не имеет делителей нуля и для любого $\varphi \in E' \setminus \{0\}$ множество $A_\varphi(E)$ плотно в E .

Замечание 2. (i) Условие плотности множества всех многочленов в E существенно для справедливости следствия 4. Пусть E задается последовательностью $v_{n,k}(z) = v_{n,1}(z) := n(|\operatorname{Im} z| + \log(1 + |z|))$, $n, k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^N$ (функции $v_{n,k}$ от k не зависят и удовлетворяют условиям (V1) и (V2)). По теореме Пэли-Винера-Шварца [18, теорема 7.3.1] преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F} : \varphi \mapsto \varphi_x(e^{-i\langle x, t \rangle})$, $t \in \mathbb{C}^N$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)'$, является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к пространству Фреше $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ всех бесконечно дифференцируемых в \mathbb{R}^N функций на E (здесь $\langle x, t \rangle := \sum_{j=1}^N x_j t_j$). При этом

множество $\mathbb{C}[z]$ всех многочленов переменных z_1, \dots, z_N содержится в E , не совпадает с E и замкнуто в E . (Его замкнутость следует из конечномерности всех пересечений $\mathbb{C}[z] \cap E_n$, $n \in \mathbb{N}$.) Значит, оно не плотно в E . Преобразование $\tilde{\mathcal{F}} : \varphi \mapsto \varphi_z(e^{-i\langle z, t \rangle})$, $t \in \mathbb{R}^N$, $\varphi \in E'$, является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к E на $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. При этом $\tilde{\mathcal{F}}$ — отображение, сопряженное к $\mathcal{F} : C^\infty(\mathbb{R}^N)' \rightarrow E$ относительно дуальных пар $(C^\infty(\mathbb{R}^N)', C^\infty(\mathbb{R}^N))$ и (E, E') .

Положим $\hat{\varphi} := \tilde{\mathcal{F}}(\varphi)$, $\varphi \in E'$. Для $T_\varphi : E' \rightarrow E'$ отображение $\tilde{\mathcal{F}} T_\varphi \tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ является оператором умножения на функцию $\hat{\varphi}$. Значит, для любого ненулевого функционала $\varphi \in E'$ такого, что на некотором открытом подмножестве \mathbb{R}^N функция $\hat{\varphi}$ нулевая, оператор свертки $T_\varphi : E' \rightarrow E'$ неинъективен.

(ii) В конкретных ситуациях в [15; 17, гл. 9, § 3; 19] доказаны условия, при которых операторы из $\mathcal{K}(\partial)$ сюръективны или являются топологическими изоморфизмами счетных индуктивных или проективных пределов весовых банаховых пространств целых функций. Ситуации, рассмотренные в упомянутых работах, специфичны, и для них выполняются определенные условия, связанные с природой рассматриваемых пространств.

Литература

- [1] Хелемский А.Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986. 288 с.
- [2] Хелемский А.Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989. 466 с.
- [3] Ткаченко В.А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Матем. заметки. 1979. Т. 25. Вып. 2. С. 271–282. URL: <http://mi.mathnet.ru/mz8303>.
- [4] Ткаченко В.А. Спектральные разложения в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 654–713. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/IM1980v014n03ABEH001146>.
- [5] Ткаченко В.А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). № 3(7). С. 421–466. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001833>.
- [6] Гуревич Д.И. Операторы обобщенного сдвига с правым инфинитезимальным оператором Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 1979. Т. 25. Вып. 3. С. 393–408. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01159513>.
- [7] Литвинов Г.Л. О преобразовании Лапласа на группах Ли // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. В. 1. С. 83–84. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01075519>.
- [8] Рашевский П.К. Ассоциативная сверхоболочка алгебры Ли, ее регулярное представление и идеалы // Тр. ММО. 1966. Т. 15. С. 3–54.
- [9] Иванова О.А., Мелихов С.Н., Мелихов Ю.Н. О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций // Уфимский матем. журн. 2017. Т. 9. № 3. С. 38–49.
- [10] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1072 с.
- [11] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.
- [12] Meise R., Vogt D. Introduction to Functional Analysis. Oxford: Clarendon, 1997. 448 p.
- [13] Иванова О.А., Мелихов С.Н. Об операторах, перестановочных с оператором типа Помье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28. № 2. С. 114–137. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1447>.
- [14] Ivanova O.A., Melikhov S.N. On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions // Complex Analysis and Operator Theory. 2017. V. 11. P. 1407–1424. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11785-016-0617-5>.
- [15] Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В. Общий вид изоморфизмов, перестановочных с оператором дифференцирования, в пространствах целых функций медленного роста // Матем. сб. 1973. Т. 91(133). № 4. С. 475–487. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM1973v020n04ABEH001886>.
- [16] Городенцев А.Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Ч. 1. М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 486 с.
- [17] Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989. 352 с.
- [18] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 464 с.
- [19] Martineau A. Equations differentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math. France. 1967. V. 95. P. 109–154.

References

- [1] Helemskii A.Ya. *Gomologiia v banakhovykh i topologicheskikh algebrakh* [Homology of Banach and topological algebras]. M.: Izd-vo MGU, 1986, 288 p. [in Russian].
- [2] Helemskii A.Ya. *Banakhovy i polinormirovannye algebrы: obshchaia teoriia, predstavleniia, gomologii* [Banach and multi-normed algebras: general theory, presentations, gomologies]. M.: Nauka, 1989, 466 p. [in Russian].
- [3] Tkachenko V.A. *Ob operatorakh, kommutiruiushchikh s obobshchennym integrirovaniem v prostranstvakh analiticheskikh funktsionalov* [On operators that commute with generalized integration in spaces of analytic functionals]. *Matem. zametki* [Mathematical notes], 1979, Vol. 25, no 2, pp. 141–146. Available at: <http://mi.mathnet.ru/mz8303> [in Russian].
- [4] Tkachenko V.A. *Spektral'nye razlozheniia v prostranstvakh analiticheskikh funktsionalov* [Spectral decompositions in spaces of analytic functionals]. *Izv. AN SSSR. Ser. matem.* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 1980, Vol. 14, no. 3, pp. 597–651. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/IM1980v014n03ABEH001146> [in Russian].
- [5] Tkachenko V.A. *Spektral'naiia teoriia v prostranstvakh analiticheskikh funktsionalov dlia operatorov, porozhdaemykh umnozheniem na nezavisimuiu peremennuiu* [Spectral theory in spaces of analytic functionals for operator generated by multiplication by the independent variable]. *Matem. sb.* [Mathematics of the USSR-Sbornik], 1981, Vol. 40, no 3, pp. 387–427. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001833> [in Russian].

- [6] Gurevich D.I. *Operatory obobshchennogo sdviga s pravym infinitezimal'nyim operatorom Shturma–Liuvillia* [Generalized displacement operators with a right infinitesimal Sturm-Liouville operator]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1979, Vol. 25, no. 3, pp. 208–215. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01159513> [in Russian].
- [7] Litvinov G.L. *O preobrazovanii Laplasya na gruppakh Li* [On Laplace transform on Lie groups]. *Funkts. analiz i ego pril.* [Functional Analysis and Its Applications], 1972, Vol. 6, no 1, pp. 76–77. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01075519> [in Russian].
- [8] Rashevskii P.K. *Assotsiativnaia sverkhobolochka algebrы Li, ee reguliarnoe predstavlenie i idealy* [Associative ultra-envelope of Lie algebra, its regular presentation and ideals]. *Tr. MMO* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 1966, Vol. 15, pp. 3–54. [in Russian].
- [9] Ivanova O.A., Melikhov S.N., Melikhov Yu.N. *O kommutante operatorov differentsirovaniia i sdviga v vesovykh prostranstvakh tselykh funktsii* [On the commutant of differentiation and translation operators in weighted spaces of entire functions]. *Ufimskii matem. zhurn.* [Ufa Mathematical Journal], 2017, Vol. 9, no 3, pp. 37–47. DOI: <https://doi.org/10.13108/2017-9-3-37>.
- [10] Edwards R.E. *Funktsional'nyi analiz. Teoriia i prilozheniia* [Functional Analysis. Theory and Applications]. M.: Mir, 1969, 1072 p. [in Russian].
- [11] Schaefer H. *Topologicheskie vektornye prostranstva* [Topological vector spaces]. M.: Mir, 1971, 360 p. [in Russian].
- [12] Meise R., Vogt D. *Introduction to Functional Analysis*. Oxford: Clarendon, 1997, 448 p. [in English].
- [13] Ivanova O.A., Melikhov S.N. *Ob operatorakh, perestanovochnykh s operatorom tipa Pomm'e v vesovykh prostranstvakh tselykh funktsii* [On Operators Commuting with a Pommiez type Operator in Weighted Spaces of Entire Functions]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal], 2017, Vol. 28, no 2, pp. 209–224. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1447> [in Russian].
- [14] Ivanova O.A., Melikhov S.N. On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions. *Complex Analysis and Operator Theory*, 2017, Vol. 11, pp. 1407–1424. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11785-016-0617-5> [in English].
- [15] Korobeinik Yu.F., Morzhakov V.V. *Obshchii vid izomorfizmov, perestanovochnykh s operatorom differentsirovaniia, v prostranstvakh tselykh funktsii medlennogo rosta* [General form of isomorphisms commuting with differentiation in spaces of entire functions of slow growth]. *Matem. sb.* [Mathematics of the USSR-Sbornik], 1973, Vol. 20, no 4, pp. 493–505. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM1973v020n04ABEH001886> [in Russian].
- [16] Gorodentsev A.L. *Algebra. Uchebnik dlia studentov-matematikov. Ch. 1* [Algebra. Textbook for students of mathematics. Part 1]. M.: Izd-vo MTsNMO, 2013, 486 p. [in Russian].
- [17] Lelong P., Gruman L. *Tselye funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Entire Functions of Several Complex Variables]. M.: Mir, 1989, 352 p. [in Russian].
- [18] Hörmander L. *Analiz lineinykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriia raspredelenii i analiz Fur'e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. I: Distribution Theory and Fourier Analysis]. M.: Mir, 1986, 464 p. [in Russian].
- [19] Martineau A. Equations differentielles d'ordre infini. *Bull. Soc. Math. France*, 1967, Vol. 95, pp. 109–154 [in French].

О.А. Иванова, С.Н. Мелихов²

ON TOPOLOGICAL ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONALS WITH A MULTIPLICATION DEFINED BY TRANSLATIONS

We define a multiplication — convolution in the dual of a countable inductive limit E of weighted Fréchet spaces of entire functions of several variables. This algebra is isomorphic to the commutant of the system of partial derivatives in the algebra of all continuous linear operators in E . In the constructed algebra of analytic functionals in two pure cases a topology is defined. With this topology the mentioned algebra is topological and it is now topologically isomorphic to the considered commutant with its natural operator topology. It is proved that in this pure situations the present algebra has no zero divisors provided that polynomials are dense in E . We show that this condition is essential for the validity of the last statement.

Key words: weighted space of entire functions, algebra of analytic functionals, topological algebra, commutant, convolution operator.

Citation. Ivanova O.A., Melikhov S.N. *O topologicheskikh algebrakh analiticheskikh funktsionalov s umnozheniem, opredeliaemym sdvigami* [On topological algebras of analytic functionals with a multiplication defined by translations]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 14–22. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-14-22> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 4/IX/2018.
The article received 4/IX/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²*Ivanova Olga Alexandrovna* (neo_ivolga@mail.ru), Institute for Mathematics, Mechanics and Computer Science in the name of I.I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42, Bolshaya Sadovaya Street, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation.
Melikhov Sergej Nikolaevich (melih@math.rsu.ru), Institute for Mathematics, Mechanics and Computer Science in the name of I.I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42, Bolshaya Sadovaya Street, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation; Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 53, Vatutina Street, Vladikavkaz, 362027, Republic of North Ossetia-Alania, Russian Federation.

М.А. Керефов, Ф.М. Нахушева, С.Х. Геккиева¹

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА АЛЛЕРА — ЛЫКОВА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ

Работа посвящена рассмотрению уравнения Аллера — Лыкова с дробной по времени производной Римана — Лиувилля с краевыми условиями третьего рода, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Подобные условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость. Аналогичные условия возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка. Для рассматриваемой задачи с помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана — Лиувилля, из которой следует единственность решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Аллера — Лыкова, дробная производная, нелокальная задача, обобщенное уравнение влагопереноса, сосредоточенная теплоемкость, метод энергетических неравенств, априорная оценка, краевая задача.

Цитирование. Керефов М.А., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 23–29. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-23-29>.

Введение

В основе математических моделей, описывающих процессы фильтрации жидкости в пористых средах [1; 2], передачи тепла в гетерогенной среде [3; 4], переноса почвенной влаги в зоне аэрации с учетом ее движения против потенциала влажности [5; 6] лежат уравнения в частных производных третьего порядка. В настоящее время активно изучаются локальные и нелокальные краевые задачи для указанных уравнений, в том числе краевые задачи, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Такие задачи возникают в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка [7, с. 233]. Отметим в этом направлении работы [8–10], в которых рассмотрены краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью.

В данной работе исследована краевая задача с сосредоточенной теплоемкостью для уравнения вида

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

где D_{0t}^{α} — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля [11, с. 9], $0 < \alpha < 1$, $A_1, A = \text{const} > 0$.

¹© Керефов М.А., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х., 2018

Керефов Марат Асланбиевич (kerefov@mail.ru), кафедра прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Нахушева Фатима Мухамедовна (fatima_nakhushева@mail.ru), кафедра прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Геккиева Сакинат Хасановна (gekkieva_s@mail.ru), отдел математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением Аллера — Лыкова, которое впервые было предложено Куликом В.Я. [12] для описания процессов испарения и инфильтрации влаги в почве. Такого рода уравнения рассмотрены в работах [13–16].

1. Постановка задачи

В области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим уравнение (1).

Регулярным решением уравнения (1) в области Q_T назовем функцию $u = u(x, t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x, t), D_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\bar{Q}_T); D_{0t}^{\alpha+1}u(x, t), u_{xx}(x, t), D_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(Q_T)$, которая удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q_T$. Сформулируем нелокальную краевую задачу для уравнения (1).

Задача. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Q_T , удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \Pi(x, t) = \chi_1 D_{0t}^\alpha u(x, t) - \mu_1(t), & x = 0, \\ -\Pi(x, t) = \chi_2 D_{0t}^\alpha u(x, t) - \mu_2(t), & x = l, \end{cases} \quad (1)$$

и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \tau(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha u(x, t) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

где $\tau(x), \nu(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ — заданные функции, $\Pi(x, t) = k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}$ — поток влаги через сечение x в единицу времени, $\chi_1(t), \chi_2(t)$ — сосредоточенная теплоемкость на границах области по направлению x .

Пусть существует регулярное решение задачи. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $k_x(x, t), k_t(x, t), f(x, t) \in C(\bar{Q}_T), \nu(x) \in C[0, l], \tau(x) \in C^2[0, l], k \geq c_1 > 0, k_t \leq 0, \chi_1, \chi_2 \geq 0, \chi_1 + \chi_2 > 0$ всюду на \bar{Q}_T и выполнено условие $\tau(0) = \tau(l) = \tau'(0) = \tau'(l) = 0$, тогда для решения задачи (1), (1), (2) справедлива априорная оценка:

$$\begin{aligned} & \|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2, Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_{2, Q_t}^2 \leq \\ & \leq M_1(t) \left(\|f\|_{2, Q_t}^2 + \|\tau'(x)\|_0^2 + \|\tau''(x)\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Аналогично [16] введем новую неизвестную функцию $g(x, t)$, полагая

$$u(x, t) = g(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x)$$

так, что $g(x, t)$ представляет собой отклонение функции $u(x, t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x)$. С учетом $D_{0t}^{\alpha+1} t^{\alpha-1} = 0, D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} = 0$ [17, с. 15] функция $g(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g + D_{0t}^\alpha g - (kg_x)_x - AD_{0t}^\alpha g_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} g(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) \right) = \tau(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha g(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) \right) = \nu(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} = \nu(x) \end{aligned} \quad (5)$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} \Pi(x, t) = \chi_1 D_{0t}^\alpha g(x, t) - \mu_1(t), & x = 0, \\ -\Pi(x, t) = \chi_2 D_{0t}^\alpha g(x, t) - \mu_2(t), & x = l, \end{cases} \quad (6)$$

где $\Pi(x, t) = k(x, t) \frac{\partial g}{\partial x} + AD_{0t}^\alpha \frac{\partial g}{\partial x}, F(x, t) = f(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (k_x \tau'(x) + k \tau''(x))$.

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана — Лиувилля, для чего умножим уравнение (4) скалярно на $D_{0t}^\alpha g$:

$$A_1 (D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^\alpha g) + (D_{0t}^\alpha g, D_{0t}^\alpha g) - ((kg_x)_x, D_{0t}^\alpha g) - A (D_{0t}^\alpha g_{xx}, D_{0t}^\alpha g) = (F, D_{0t}^\alpha g), \quad (7)$$

где $(u, v) = \int_0^l uv dx, (u, u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем слагаемые тождества (7) с учетом (5), (6):

$$A_1 (D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^\alpha g) = \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2,$$

$$\begin{aligned}
 (D_{0t}^\alpha g, D_{0t}^\alpha g) &= \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \\
 ((kg_x)_x, D_{0t}^\alpha g) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l (kg_x)_x \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l - \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \right\} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} k(l, t) g_x(l, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(l, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} k(0, t) g_x(0, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(0, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx, \\
 A(D_{0t}^\alpha g_{xx}, D_{0t}^\alpha g) &= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_{xx}(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\
 &= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l \right\} - A \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2, \\
 (F, D_{0t}^\alpha g) &\leq \frac{1}{2} \|F\|_0^2 + \frac{1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2.
 \end{aligned}$$

С учетом полученных неравенств из (7) получим:

$$\begin{aligned}
 &\frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} k(l, t) g_x(l, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(l, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} k(0, t) g_x(0, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(0, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx - \\
 &- \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l \right\} + A \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|F\|_0^2 + \frac{1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство с учетом граничных условий (6) примет вид:

$$\begin{aligned}
 &\frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx + A \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 + \\
 &+ ((\chi_2 D_{0t}^\alpha g(l, t) - \mu_2(t)) D_{0t}^\alpha g(l, t) + (\chi_1 D_{0t}^\alpha g(0, t) - \mu_1(t)) D_{0t}^\alpha g(0, t)) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \|F\|_0^2 + \frac{1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Последние слагаемые в левой части неравенства (8) оценим так:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 D_{0t}^\alpha g(0, t) + \mu_2 D_{0t}^\alpha g(l, t) &\leq \frac{1}{2} (\mu_1^2 + \mu_2^2) + \frac{1}{2} \left((D_{0t}^\alpha g(0, t))^2 + (D_{0t}^\alpha g(l, t))^2 \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} (\mu_1^2 + \mu_2^2) + \left(\varepsilon \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 + c_\varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 \right).
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известной оценкой [18, с. 173]:

$$\|u\|_c^2 \leq \varepsilon \|u_x\|_0^2 + c_\varepsilon \|u\|_0^2,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная, $c_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$.

Учитывая условия $\chi_1, \chi_2 \geq 0$, $\chi_1 + \chi_2 > 0$, усилим неравенство (8). Тогда получим

$$\frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx + A \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +\chi_1 (D_{0t}^\alpha g(0, t))^2 + \chi_2 (D_{0t}^\alpha g(l, t))^2 \leq \\
& \leq \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 + \left(c_\varepsilon + \frac{1}{2}\right) \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \frac{1}{2} (\mu_1^2 + \mu_2^2) + \frac{1}{2} \|F\|_0^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Проинтегрируем (9) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned}
& \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - c_\varepsilon\right) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g\|_0^2 d\tau + \\
& + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^l k g_x(x, t) \int_0^\tau \frac{g_x(x, \xi) d\xi}{(\tau - \xi)^\alpha} dx d\tau + (A - \varepsilon) \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g_x\|_0^2 d\tau \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \|F\|_{2, Q_t}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g(x, 0)\|_0^2.
\end{aligned}$$

Предположим, что $k_t \leq 0$, тогда неотрицательность тройного интеграла в левой части последнего неравенства доказывается так же, как в [11, с. 43]. Усиливая это неравенство, получим:

$$A_1 \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + 2\nu \|D_{0t}^\alpha g\|_{2, Q_t}^2 + 2\nu_1 \|D_{0t}^\alpha g_x\|_{2, Q_t}^2 \leq \|F\|_{2, Q_t}^2 + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + A_1 \|\nu(x)\|_0^2,$$

где $\nu = \frac{1}{2} - c_\varepsilon > 0$, $\nu_1 = A - \varepsilon > 0$, $\|D_{0t}^\alpha g\|_{2, \Omega_t}^2 = \int_0^t \|D_{0\tau}^\alpha g(x, t)\|_0^2 d\tau$. Откуда следует оценка

$$\|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_{2, Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha g_x\|_{2, Q_t}^2 \leq M(t) \left(\|F\|_{2, Q_t}^2 + \|\nu(x)\|_0^2 + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau \right)$$

или, возвращаясь к $u(x, t)$, получим (3).

Теорема доказана.

Замечание. Из (3) следует единственность решения задачи (1), (1), (2).

Действительно, пусть u – решение однородной задачи, т. е. $f = \tau = \nu = 0$. Тогда из (3) имеем:

$$\|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2, Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_{2, Q_t}^2 = 0.$$

Применяя обобщенную формулу Ньютона – Лейбница [17, с. 15]:

$$D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^\alpha u(x, t) = u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t),$$

в частности, получим:

$$u(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) = 0 \text{ в } Q_T.$$

Учитывая произвольность T , получаем, что $u(x, t) = 0$ во всех точках $(x, t) \in Q$.

Литература

- [1] Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 25. Вып. 5. С. 852–864.
- [2] Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.
- [3] Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.
- [4] Ting T., Cooling A. Process according to two temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl. 1974. Vol. 45. № 9. P. 23. DOI: [http://doi.org/10.1016/0022-247X\(74\)90116-4](http://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90116-4).
- [5] Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. № 9.
- [6] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
- [7] Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 358 с.

- [8] Нахушева Ф.М., Водахова В.А., Кудяева Ф.Х., Абаева З.В. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. С. 763. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24123596>.
- [9] Нахушева Ф.М., Кудяева Ф.Х., Кайгермазов А.А., Кармоков М.М. Разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. С. 839. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24921705>.
- [10] Шхануков-Лафишев М.Х., Лафишева М.М., Нахушева Ф.М., Мамбетова А.Б. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью // Владикавказский матем. журн. 2013. Т. 15. № 4. С. 58–64. DOI: <http://doi.org/10.23671/VNC.2013.4.7345>.
- [11] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.
- [12] Кулик В.Я. Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований // Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух. Л.: Наука. 1972.
- [13] Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с нелокальным условием // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19. Вып. 1. С. 50–58. DOI: <http://doi.org/10.23671/VNC.2017.1.5821>.
- [14] Геккиева С. Х. Первая краевая задач для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с дробной по времени производной // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели». Нальчик. 2017. С. 99–102.
- [15] Архестова С.М., Шхануков-Лафишев М.Х., Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с нелокальным условием // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2012. № 3(47). С. 7–16.
- [16] Геккиева С.Х., Керефов М.А. Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. № 1(21). С. 21–32. DOI: <http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31>.
- [17] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
- [18] Ладъженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.

References

- [1] Barenblat G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. *Ob osnovnykh predstavleniakh teorii fil'tratsii odnorodnykh zhidkosti v treshchinovatykh porodakh* [About the main submissions of the theory of filtration of uniform liquids in jointed breeds]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1960, Vol. 25, Issue 5, pp. 852–864 [in Russian].
- [2] Dzekhtser E.S. *Uravneniia dvizheniia podzemnykh vod so svobodnoi poverkhnost'iu v mnogosloinykh sredakh* [Equations of the movement of underground waters with a free surface in multilayered environments]. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Earth Sciences], 1975, Vol. 220, no 3, pp. 540–543 [in Russian].
- [3] Rubinshtein L.I. *K voprosu o protsesse rasprostraneniia tepla v geterogennykh sredakh* [To the question of the process of distribution of heat in heterogeneous environments]. *Izv. AN SSSR. Ser. geogr.* [Izvestiya RAN (Akad. Nauk SSSR). Seriya Geograficheskaya], 1948, Vol. 12, no 1, pp. 27–45 [in Russian].
- [4] Ting T., Cooling A. Process according to two temperature theory of heat conduction. *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, Vol. 45, no 9, p. 23. DOI: [http://doi.org/10.1016/0022-247X\(74\)90116-4](http://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90116-4) [in English].
- [5] Hallaire M. L'eau et la production vegetable. *Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, no 9 [in French].
- [6] Chudnovsky A.F. *Teplofizika pochv* [Thermophysics of soils]. М.: Nauka, 1976, 352 p. [in Russian].
- [7] Nerpin S.V., Chudnovsky A.F. *Energo- i massoobmen v sisteme rastenie-pochva-vozdukh* [Power- and a mass exchange in system plant-soil-air]. L.: Gidrometeoizdat, 1975, 358 p. [in Russian].
- [8] Nakhusheva F.M., Vodakhova V.A., Kudaeva F.Kh., Aباева Z.V. *Lokal'no-odnomernaia skhema dlia uravneniia diffuzii drobnogo poriadka s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Locally one-dimensional difference schemes for the fractional order diffusion equation with a concentrated heat capacity]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia* [Modern problems of science and education], 2015, no 2, p. 763. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24123596> [in Russian].
- [9] Nakhusheva F.M., Kudaeva F.Kh., Kaygermazov A.A., Karmokov M.M. *Raznostnaia skhema dlia uravneniia diffuzii drobnogo poriadka s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Difference schemes for the fractional order diffusion equation with a concentrated heat capacity]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia* [Modern problems of science and education], 2015, no 2, p. 839. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24921705> [in Russian].

- [10] Shkhanukov-Lafishev M.Kh., Lafisheva M.M., Nakhusheva F.M., Mambetova A.B. *Lokal'no-odnomernaiia skhema dlia uravneniia teploprovodnosti s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Local and one-dimensional scheme for the heat conductivity equation with the concentrated thermal capacity]. *Vladikavkazskii matem. zhurn.* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2013, Vol. 15, Issue 4, pp. 58–64. DOI: <http://doi.org/10.23671/VNC.2013.4.7345> [in Russian].
- [11] Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculation and its application]. M.: Fizmatlit, 2003, 272 p. [in Russian].
- [12] Kulik V.Ya. *Issledovanie dvizheniia pochvennoi vlagi s točki zreniia invariantnosti otnositel'no nepreryvnykh grupp preobrazovaniï* [Research of the movement of soil moisture from the point of view of invariancy of rather continuous groups of transformations]. In: *Sb. "Issledovanie protsessov obmena energii i veshchestvom v sisteme pochva-rasteniie-vozdukh"* [Collection "Research of the Processes of Exchange of Energy and Substance in the System Soil-Plant-Air"]. L.: Nauka, 1972 [in Russian].
- [13] Lafisheva M.M., Kerefov M.A., Dyshekova R.V. *Raznostnye skhemy dlia uravneniia vlagoperenosa Allera – Lykova s nelokal'nym usloviem* [Differential schemes for the equation of moisture transfer of Aller – Lykov with not local condition]. *Vladikavkazskii matem. zhurn.* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2017. Vol. 19, Issue 1, pp. 50–58. DOI: <http://doi.org/10.23671/VNC.2017.1.5821> [in Russian].
- [14] Gekkieva S.Kh. *Pervaia kraevaia zadach dlia uravneniia vlagoperenosa Allera – Lykova s drobnoi po vremeni proizvodnoi* [First boundary-value problem for Aller – Lykov moisture transfer equation with time fractional derivative]. *Materialy Vserossiiskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem "Ustoichivoe razvitie: problemy, kontseptsii, modeli"* [Materials of the All-Russian conference with the international participation "Sustainable development: problems, concepts, models"]. Nalchik, 2017, pp. 99–102 [in Russian].
- [15] Arkhestova S.M., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. *Raznostnye skhemy dlia uravneniia vlagoperenosa Allera – Lykova s nelokal'nym usloviem* [Differential schemes for the equation of moisture transfer of Aller – Lykov with not local condition]. *Izvestiia Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of Kabardino-Balkarian scientific center of the Russian Academy of Sciences], 2012, no 3 (47), pp. 7–16 [in Russian].
- [16] Gekkieva S.Kh., Kerefov M.A. *Kraevye zadachi dlia obobshchennogo uravneniia vlagoperenosa* [The boundary value problem for the generalized moisture transfer equation]. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin KRASEC. Physical & Mathematical Sciences], 2018, no 1 (21), pp. 21–32. DOI: <http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31> [in Russian].
- [17] Pskhu A.V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Equations in private derivatives of a fractional order]. M.: Nauka, 2005, 199 p. [in Russian].
- [18] Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

M.A. Kerefov, F.M. Nakhusheva, S.Kh. Gekkieva²

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE ALLER — LYKOV MOISTURE TRANSPORT GENERALIZED EQUATION WITH CONCENTRATED HEAT CAPACITY

The article considers the Aller — Lykov equation with a Riemann — Liouville fractional time derivative, boundary conditions of the third kind and with the concentrated specific heat capacity on the boundary of the domain. Similar conditions arise in the case with a material of a higher thermal conductivity when solving a temperature problem for restricted environment with a heater as a concentrated heat capacity. Analogous conditions also arise in practices for regulating the water-salt regime of soils, when desalination of the upper layer is achieved by draining of a surface of the flooded for a while area. Using energy inequality methods, we obtained an a priori estimate in terms of the Riemann — Liouville fractional derivative, which revealed the uniqueness of the solution to the problem under consideration.

Key words: Aller's — Lykov equation, fractional derivative, nonlocal problem, moisture transfer generalized equation, concentrated heat capacity, inequalities method, a priori estimate, boundary value problem.

Citation. Kerefov M.A., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh. *Kraevaya zadacha dlia obobshchennogo uravneniia vlagoperenosa Allera — Lykova s sosredotochennoi teploemkost'iu* [Boundary value problem for the Aller — Lykov moisture transport generalized equation with concentrated heat capacity] [Boundary value problem for the Aller — Lykov moisture transport generalized equation with concentrated heat capacity]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 3, pp. 23–29. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-23-29> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 5/IX/2018.

The article received 5/IX/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Kerefov Marat Aslanbievich (kerefov@mail.ru), Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevsky Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

Nakhusheva Fatima Mukhamedovna (fatima_nakhusheva@mail.ru), Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevsky Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

Gekkieva Sakinat Khasanovna (gekkieva_s@mail.ru), Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2, Balkarova Street, Dolinsk, Nalchik, 360002, Russian Federation.

Ю.О. Яковлева¹

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В статье рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения третьего порядка в частных производных, не содержащего производные порядка ниже третьего, с некрратными характеристиками в плоскости двух независимых переменных. Дифференциальное уравнение имеет три некрратные характеристики и является строго гиперболическим. Регулярное решение задачи Коши для дифференциального уравнения третьего порядка с некрратными характеристиками найдено в явном виде. Полученное решение задачи Коши позволяет описать процесс распространения начального отклонения, начальной скорости и начального ускорения некоторой колебательной системы.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение третьего порядка, гиперболическое уравнение, некрратные характеристики, метод общих решений, задача Коши, регулярное решение, начальное отклонение, начальная скорость.

Цитирование. Яковлева Ю.О. Задача Коши для гиперболического уравнения третьего порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 30–34. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-30-34>.

1. Предварительные сведения

Известно, что в теории гиперболических уравнений основополагающую роль играет понятие характеристики. Краевые задачи для гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений третьего и более высокого порядка с некрратными характеристиками в некоторых случаях удается решить без вспомогательных функций. В статье излагается метод построения общего решения и решения задачи Коши для строго гиперболического уравнения третьего порядка в плоскости двух независимых переменных с заданием начальных условий на нехарактеристической прямой. Регулярное решение задачи Коши получено в явном виде.

2. Основные результаты

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка в частных производных, не содержащее производные порядка ниже третьего,

$$a_0 u_{xxx} + a_1 u_{xxy} + a_2 u_{xyy} + a_3 u_{yyy} = 0, \quad (2.1)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 — некоторые ненулевые действительные постоянные.

Пусть характеристическое уравнение

$$-a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 - a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad \left(\lambda = \frac{dy}{dx} \right)$$

имеет три различных отличных от нуля корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Тогда $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{a_1}{a_0}$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{a_3}{a_0}$. Согласно [1] семейства линий

$$y - \lambda_1 x = C_1, y - \lambda_2 x = C_2, y - \lambda_3 x = C_3$$

являются характеристиками уравнения (2.1), а уравнение (2.1) является строго гиперболическим по Петровскому [2].

¹© Яковлева Ю.О., 2018

Яковлева Юлия Олеговна (julia.yakovleva@mail.ru), кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Как известно [1], общее решение уравнение (2.1) из класса $C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ представляется в виде суммы

$$u(x, y) = f_1(y - \lambda_1 x + C_1) + f_2(y - \lambda_2 x + C_2) + f_3(y - \lambda_3 x + C_3).$$

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(x, y) = f_1(y - \lambda_1 x) + f_2(y - \lambda_2 x) + f_3(y - \lambda_3 x). \quad (2.2)$$

Рассмотрим **задачу Коши**. Найти регулярное решение $u(x, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ уравнения (2.1) в плоскости независимых переменных (x, y) , удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $y = 0$:

$$u(x, y)|_{y=0} = \alpha(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{y=0} = \beta(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{y=0} = \gamma(x), \quad (2.3)$$

где $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C^3(L)$, $L = [0, l]$, $\vec{n} = (0, 1)$ — нормаль к нехарактеристической линии.

Регулярным решением [3; 4] задачи Коши (2.3) в плоскости независимых переменных (x, y) будем называть решение, удовлетворяющее уравнению (2.1) и условиям задачи Коши (2.3) в обычном смысле.

Определим функции f_1, f_2, f_3 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (2.3):

$$\begin{aligned} f_1(-\lambda_1 x) + f_2(-\lambda_2 x) + f_3(-\lambda_3 x) &= \alpha(x), \\ f_1'(-\lambda_1 x) + f_2'(-\lambda_2 x) + f_3'(-\lambda_3 x) &= \beta(x), \\ f_1''(-\lambda_1 x) + f_2''(-\lambda_2 x) + f_3''(-\lambda_3 x) &= \gamma(x). \end{aligned}$$

Найдем функции

$$\begin{aligned} f_1(y - \lambda_1 x) &= f_1(0) - \lambda_1 f_1'(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_1} y \right) + \\ &+ \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \left(\alpha \left(x - \frac{1}{\lambda_1} y \right) - \alpha(0) - \alpha'(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_1} y \right) \right) + \\ &+ \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \left((\lambda_2 + \lambda_3) \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_1} y} \beta(t) dt - (\lambda_2 + \lambda_3) \beta(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_1} y \right) \right) + \\ &+ \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \lambda_2 \lambda_3 \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_1} y} \gamma(t) \left(x - \frac{1}{\lambda_1} y - t \right) dt, \\ f_2(y - \lambda_2 x) &= f_2(0) - \lambda_2 f_2'(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_2} y \right) - \\ &- \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left(\alpha \left(x - \frac{1}{\lambda_2} y \right) - \alpha(0) - \alpha'(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_2} y \right) \right) - \\ &- \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left((\lambda_1 + \lambda_3) \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_2} y} \beta(t) dt - (\lambda_1 + \lambda_3) \beta(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_2} y \right) \right) - \\ &- \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \lambda_1 \lambda_3 \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_2} y} \gamma(t) \left(x - \frac{1}{\lambda_2} y - t \right) dt, \\ f_3(y - \lambda_3 x) &= f_3(0) - \lambda_3 f_3'(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_3} y \right) - \\ &- \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left(\alpha(0) + \alpha'(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_3} y \right) - \alpha \left(x - \frac{1}{\lambda_3} y \right) \right) + \\ &+ \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left((\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_3} y} \beta(t) dt - (\lambda_1 + \lambda_2) \beta(0) \left(x - \frac{1}{\lambda_3} y \right) \right) + \\ &+ \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_3} y} \gamma(t) \left(x - \frac{1}{\lambda_3} y - t \right) dt. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований подставим функции f_1, f_2, f_3 в (2.2).

Учитывая условия согласования, решением задачи Коши (2.3) является функция

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^{k+1} \lambda_k^2}{\prod_{m=1, m \neq k}^3 (\lambda_k - \lambda_m)} F(x, y, \lambda_k), \quad (2.4)$$

где

$$F(x, y, \lambda_k) = \alpha \left(x - \frac{1}{\lambda_k} y \right) + \frac{a_1 - \lambda_k a_0}{a_0} \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_k} y} \beta(t) dt + \frac{a_3}{a_0 \lambda_k} \int_0^{x - \frac{1}{\lambda_k} y} \gamma(t) \left(x - \frac{1}{\lambda_k} y - t \right) dt.$$

Функция (2.4) представима в виде:

$$u(x, y) = \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} F(x, y, \lambda_1) - \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} F(x, y, \lambda_2) + \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} F(x, y, \lambda_3).$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что формула (2.4) удовлетворяет уравнению (2.1) и начально-краевым условиям (2.3).

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Проведем характеристики через точки $(0, 0)$, $(l, 0)$ плоскости $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ [5].

На рисунке 1 приведены: P_{123} — область определения задачи Коши (2.1), (2.3) при $x \in [0, l]$, P_0 — области покоя, а также области "слабого" и "сильного" влияния $P_i, P_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ соответственно.

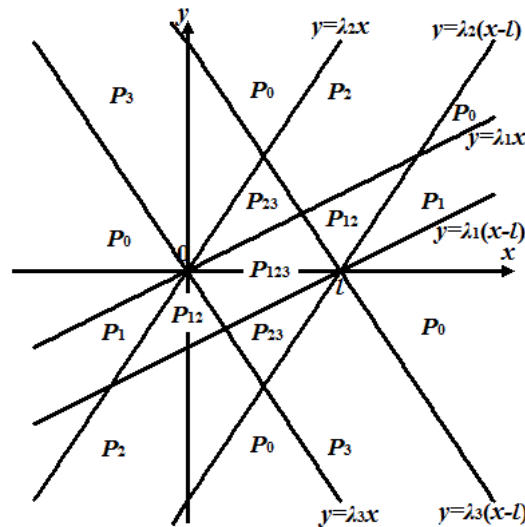


Рис. 1.

Если в условии (2.3) начальные функции задаются на конечном отрезке $x \in [0, l]$, то конечность области зависимости решений от начальных данных P_{123} легко описывается в терминах характеристик уравнения [6].

Литература

- [1] Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ле Тхи Тху Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // Тр. Ин-та матем. 2010. № 2(18). С. 36–54. URL: <http://mi.mathnet.ru/timb16>.
- [2] Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. 500 с.
- [3] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Задача Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка общего вида с некротными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. 2014. № 4(37). С. 7–15. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1349>.

- [4] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некрatными характеристиками // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия физ.-мат. науки. 2017 № 4(21). С. 752–759. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1577>.
- [5] Яковлева Ю.О. Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некрatными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. 2012. № 1(26). С. 247–250. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1028>.
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Наука, 1972. 736 с.

References

- [1] Korzyuk V.I., Cheb E.S., Le Thi Thu. *Reshenie smeshannoi zadachi dlia bivolvovogo uravneniia metodom kharakteristik* [Solution of the mixed problem for the biwave equation by the method of characteristics]. *Tr. Inta matem.* [Trudy Instituta Matematiki], 2010, no. 2(18), pp. 36–54. Available at: <http://mi.mathnet.ru/timb16> [in Russian].
- [2] Petrovskiy I.G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaia geometriia* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. М.: Nauka, 1986, 500 p. [in Russian].
- [3] Andreev A.A., Yakovleva Ju.O. *Zadacha Koshi dlia sistemy uravnenii giperbolicheskogo tipa chetvertogo poriadka obshchego vida s nekratnymi kharakteristikami* [Cauchy Problem For the System of General Hyperbolic Differential Equations of the Forth Order with Nonmultiple Characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Serii fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2014, Vol. 37, no. 4, pp. 7–15. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1349> [in Russian].
- [4] Andreev A.A., Yakovleva Ju.O. *Zadacha Koshi dlia sistemy differentsial'nykh uravnenii giperbolicheskogo tipa poriadka n s nekratnymi kharakteristikami* [The Cauchy problem for a general hyperbolic differential equation of the n -th order with the nonmultiple characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Serii fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2017, Vol. 21, no. 4, pp. 752–759. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1577> [in Russian].
- [5] Yakovleva Ju.O. [The analogue of D'Alembert formula for hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Serii fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2012, Vol. 26, no. 1, pp. 247–250. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1028> [in Russian].
- [6] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. М.: Изд-во Наука, 1972, 735 p. [in Russian].

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER

In the article the Cauchy problem for the third order hyperbolic differential equation with nonmultiple characteristics is considered on the plane of two independent variables. The differential equation has three nonmultiple characteristics and this equation is strongly hyperbolic equation. The regular solution of the Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the third order with the nonmultiple characteristics is constructed in an explicit form, the solution is obtained by the method of general solutions. The solution of the Cauchy problem enables describing the propagation of initial displacement, initial velocity and initial acceleration.

Key words: differential equation of the third order, hyperbolic equation of the third order, nonmultiple characteristics, method of common solutions, Cauchy problem, regular solution, initial displacement, initial velocity.

Citation. Yakovleva Ju.O. *Zadacha Koshi dlia giperbolicheskogo uravneniia tret'ego poriadka* [The Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the third order]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 30–34. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-30-34> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 22/VIII/2018.

The article received 22/VIII/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Yakovleva Julia Olegovna (julia.yakovleva@mail.ru), Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Ф.М. Лосанова¹

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

В данной работе строится решение внутреннекраевой задачи с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии в прямоугольной области.

Ключевые слова: внутреннекраевая задача, нелокальное смещение, функция типа Райта.

Цитирование. Лосанова Ф.М. Задача с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 35–40. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-35-40>.

Введение

В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, t) - D_{0t}^{\alpha} u(x, \eta) = f(x, t), \quad (1)$$

где D_{0t}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α , определяемый следующим образом [1, с. 28]

$$D_{0t}^{\alpha} u(x, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \eta)}{(t-\eta)^{\alpha+1}} d\eta, & \alpha < 0, \\ u(x, t), & \alpha = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p D_{0t}^{\alpha-p} u(x, \eta), & p-1 < \alpha \leq p, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha \leq 1$.

Дифференциальные уравнения дробного порядка представляют большой интерес для многих авторов, так как математический аппарат интегродифференцирования дробного порядка позволяет описывать процессы в системах, для которых существенен учет нелокальных свойств по времени и пространству. Широкое применение в естествознании получили производные дробного порядка в связи с тем, что их интерпретируют как способ учета эффектов памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность по координатам). С помощью уравнений в дробных производных можно описать эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции [2]. В частности уравнение (1) возникает при математическом моделировании динамики численности популяции с учетом различных миграционных процессов [3].

Сделаем небольшой обзор работ, посвященных уравнению (1).

В работе [4] исследовались диффузионные и диффузионно-волновые уравнения, представленные в форме, получаемой после интегрирования порядка α уравнения (1), построены фундаментальные решения, изучены некоторые их свойства.

В работе [5] исследовалась задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка ($0 < \alpha < 1$) с регуляризованной дробной производной (производной Капуто) и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. В терминах H -функции построено фундаментальное решение, найдено решение задачи Коши и показана его единственность.

¹© Лосанова Ф.М., 2018

Лосанова Фатима Мухамедовна (losanovaf@gmail.com), лаборатория синергетических проблем, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Наальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Преобразование Лапласа и преобразование Фурье были использованы в работе [6] для построения фундаментальных решений диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка с производными Капуто и Римана–Лиувилля.

Диффузионно-волновое уравнение методами группового анализа исследовалось в работе [7]. Методом разделения переменных диффузионно-волновое уравнение исследовалось в работе [8].

В работах [9], [10] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка решена задача Коши и первая краевая задача для дробного уравнения диффузии вида (1). Затем методом функции Грина построены решения основных краевых задач в прямоугольной области и с помощью фундаментального решения решена задача Коши для диффузионно-волнового уравнения.

Более полную библиографию можно найти например в [11] и [12].

В данной работе исследуется внутреннекраевая задача со смещением с интегральным условием. На важность исследования краевых задач с нелокальным условием, содержащим интеграл от искомой функции по пространственным переменным, впервые обратил внимание А.А. Самарский [13]. В дальнейшем подобные задачи для уравнений различных типов исследовались во многих работах, например [14] и [15].

Отметим монографию [16], в которой проведен анализ наиболее типичных краевых и внутреннекраевых задач со смещением для уравнений в частных производных различных типов, сделан аналитический обзор задач, которые можно отнести к классу нелокальных, получены энергетические оценки и необходимые краевые и внутреннекраевые условия со смещением для широких классов уравнений в частных производных основных и смешанных типов в двумерных и многомерных областях (см. библ. сп.).

1. Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x, \eta) \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}(x, t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x, \eta) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in \Omega$.

Ставится следующая

Задача. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x, t) = \tau(x), \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u(0, t) + \int_0^l M(x, t)u(x, t)dx = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(l, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

где $\tau(x)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $M(x, t)$ — заданные непрерывные функции.

2. Редукция к интегральному уравнению

Далее обозначим через $u(0, t) = \rho(t)$.

Для нахождения решения задачи (1), (2)–(4) воспользуемся представлением решения первой краевой задачи для уравнения (1), которое выписывается в виде [12, стр. 99]

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \rho(\eta)G_{\xi}(x, t, 0, \eta)d\eta - \int_0^t \varphi(\eta)G_{\xi}(x, t, l, \eta)d\eta + \\ & + \int_0^l \tau(\eta)G(x, t, \xi, 0)d\xi - \int_0^t \int_0^l f(\xi, \eta)G(x, t, \xi, \eta)d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, t, \xi, \eta) = & \frac{(t - \eta)^{\beta-1}}{2} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1, \beta}^{1, \beta} \left(-\frac{|x - \xi + 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) - e_{1, \beta}^{1, \beta} \left(-\frac{|x + \xi + 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) \right] \end{aligned}$$

— функция Грина первой краевой задачи, $\beta = \alpha/2$,

$$e_{1,\beta}^{1,0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\rho n + \mu)}$$

— функция Райта [12, стр. 23].

Удовлетворив функцию (5) условию (3), после несложных преобразований получим

$$\rho(t) + \int_0^t \rho(\eta) K(t, \eta) d\eta = F(t), \quad (6)$$

где

$$K(t, \eta) = \int_0^l M(x, t) G_{\xi}(x, t, 0, \eta) dx, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G_{\xi}(x, t, 0, \eta) &= (t - \eta)^{-1} \left[e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{x}{(t - \eta)^{\beta}} \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{|x - 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{(x + 2nl)}{(t - \eta)^{\beta}} \right) \right], \\ F(t) &= \psi(t) + \int_0^l M(x, t) \int_0^t \varphi(\eta) G_{\xi}(x, t, l, \eta) d\eta dx - \\ &\quad - \int_0^l M(x, t) \int_0^l \tau(\xi) G(x, t, \xi, 0) d\xi dx + \\ &\quad + \int_0^l M(x, t) \int_0^t \int_0^l f(\xi, \eta) G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta dx. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Исследование ядра

Исследуем далее функцию (7)

$$\begin{aligned} K(t, \eta) &= \int_0^l M(x, t) (t - \eta)^{-1} \times \\ &\times \left[e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{x}{(t - \eta)^{\beta}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{|x - 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{|x + 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Будем считать, что функция $M(x, t)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$. Пусть $\bar{M}(t) = \sup_{x \in [0, l]} |M(x, t)|$. Используя оценку для функции Райта [12, стр. 27] оценим $K(t, \eta)$.

Учитывая, что $e_{1,\beta}^{1,0}$ — положительная функция,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\bar{M}(t)}{t - \eta} \int_0^l \left[e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{x}{(t - \eta)^{\beta}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{|x - 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{|x + 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) \right] dx \right| \leq \bar{M}(t) C \left| \frac{(t - \eta)^{\beta(1+\theta)-1}}{l^{\theta}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(t - \eta)^{\beta(1+\theta)-1}}{l^{\theta}(2n + 1)^{\theta}} - \frac{(t - \eta)^{\beta(1+\theta)-1}}{l^{\theta}(2n - 1)^{\theta}} \right) \right| \end{aligned}$$

или

$$\frac{\bar{M}(t)}{(t - \eta)^{1-\beta}} \left[e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{l}{(t - \eta)^{\beta}} \right) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|l+2nl|}{(t-\eta)^\beta} \right) - e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|l-2nl|}{(t-\eta)^\beta} \right) \Big] \leq C(t-\eta)^{\beta(1+\theta)-1}, \quad (9)$$

где C — константа, не зависящая от x , $\theta \in (1, 2]$.

4. Формулировка результата

Если $t^{1-\alpha}\psi(t) \in C[0, T]$, то из (8) следует, что также $t^{1-\alpha}F(t) \in C[0, T]$. Поэтому из оценки (9) следует, что ядро $K(t, \eta)$ имеет степенную и интегрируемую особенность и, следовательно, резольвента

$$R(t, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k K_{k+1}(t, \eta)$$

тоже имеет такую особенность, где

$$K_1(t, \eta) = K(t, \eta), \quad K_n(t, \eta) = \int_{\eta}^t K(t, s) K_{n-1}(s, \eta) ds.$$

Таким образом уравнение (6) является интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода, решение которого можно выписать в виде [см. 17]

$$\rho(t) = F(t) - \int_0^t F(\eta) R(t, \eta) d\eta, \quad (10)$$

где $R(t, \eta)$ — резольвента ядра $K(t, \eta)$.

Теперь, пользуясь представлением (5), решение задачи (1), (2)–(4) может быть выписано в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \left[F(t) - \int_0^t F(\eta) R(t, \eta) d\eta \right] G_\xi(x, t, 0, \eta) d\eta - \\ & - \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(x, t, l, \eta) d\eta + \\ & + \int_0^l \tau(\eta) G(x, t, \xi, 0) d\xi - \int_0^t \int_0^l f(\xi, \eta) G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Сформулируем теорему о разрешимости задачи (1), (2)–(4).

Теорема. Пусть $M(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, $t^{1-\alpha}\rho(t)$, $t^{1-\alpha}\psi(t)$, $t^{1-\alpha}\varphi(t) \in C[0, T]$, $\tau(x) \in C[0, l]$, $t^{1-\alpha}f(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x . Тогда решение задачи (2)–(4) для уравнения (1) существует, единственно и представимо в виде (11).

Доказательство.

Заметим, что единственность решения задачи (1), (2)–(4) следует из единственности решения интегрального уравнения (9) и представления (11). Учитывая условия, наложенные на $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\rho(t)$ доказательство того, что функция (11) является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2)–(4) проводится также как и в работе [10].

Литература

- [1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
- [2] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
- [3] Лосанова Ф.М. Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе // Вестник КРАУНЦ, физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 17–21. DOI: <https://doi.org/10.18454/2079-6641-2015-11-2-17-21>.
- [4] Wyss W. The fractional diffusion equation // J. Math. Phys. 1986. 27:11. P. 2782–2785.
- [5] Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Докл. РАН. 2004. 394:2. P. 159–161.

- [6] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // *Chaos Solitons Fractals*. 1996. 7:9. P. 1461–1477. DOI: [http://doi.org/10.1016/0960-0779\(95\)00125-5](http://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00125-5).
- [7] Luchko Yu., Gorenflo R. Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 1998. 1:1. P. 63–78.
- [8] Андреев А.А., Еремин А.С. Краевая задача для уравнения диффузии с дробной производной по времени // Математическое моделирование и краевые задачи, Тр. двенадцатой межвуз. конф. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 3. С. 3–9.
- [9] Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // *Дифференциальные уравнения*. 2003. Т. 39. № 10. С. 1430–1433. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000017925.68789.e9>.
- [10] Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // *Дифференциальные уравнения*. 2003. Т. 39. № 9. С. 1286–1289. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000012703.45373.aa>.
- [11] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [12] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М: Наука, 2005. 199 с.
- [13] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения*. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
- [14] Ионкин Н.И. Решение одной задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Дифференциальные уравнения*. 1979. Т. 15. № 7. С. 1280–1283. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16>.
- [15] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Дифференциальные уравнения*. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.
- [16] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М: Наука, 2006. 287 с.
- [17] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М: Наука, 1975. 304 с.

References

- [1] Nakhushiev A.M. *Upravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. М.: Vyssh. shk., 1995, 301 p. [in Russian].
- [2] Uchaikin V.V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk: Artishok, 2008, 512 p. [in Russian].
- [3] Losanova F.M. *Zadacha s usloviem Samarskogo dlia upravneniia drobnnoi diffuzii v polupolose* [Problem with conditions Samara for fractional diffusion equation in the half]. *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences], 2015, 11:2, pp. 15–18. DOI: <https://doi.org/10.18454/2079-6641-2015-11-2-17-21> [in Russian].
- [4] Wyss W. The fractional diffusion equation. *J. Math. Phys.*, 27:11 (1986), pp. 2782–2785 [in English].
- [5] Kochubei A.N., Eidelman S.D. *Zadacha Koshi dlia evoliutsionnykh uravnenii drobnogo poriadka* [The Cauchy problem for evolution equations of fractional order]. *Dokl. RAN*, 2004, 349:2, pp. 159–161 [in Russian].
- [6] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Chaos Solitons Fractals*, 1996, 7:9, pp. 1461–1477. DOI: [http://doi.org/10.1016/0960-0779\(95\)00125-5](http://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00125-5) [in English].
- [7] Luchko Yu., Gorenflo R. Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1998, 1:1, pp. 63–78 [in English].
- [8] Andreev A.A., Eremin A.S. *Kraevaia zadacha dlia upravneniia diffuzii s drobnnoi proizvodnoi po vremeni* [Boundary-value problem for the diffusion equation with a fractional derivative with respect to time]. In: *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi, Tr. dvenadtsatoi mezhvuz. konf.* [Mathematical modelling and boundary-value problems, Proceedings of the 12th interacademic conference]. Samara: SamGTU, 2004, Part 3, pp. 3–9 [in Russian].
- [9] Pskhu A.V. *Reshenie kraevykh zadach dlia upravneniia diffuzii drobnogo poriadka metodom funktsii Grina* [Solution of Boundary Value Problems for the Fractional Diffusion Equation by the Green Function Method]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2003, 39:10, pp. 1509–1513. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000017925.68789.e9>.
- [10] Pskhu A.V. *Reshenie pervoi kraevoi zadachi dlia upravneniia diffuzii drobnogo poriadka* [Solution of the First Boundary Value Problem for a Fractional-Order Diffusion Equation]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2003, 39:9, pp. 1359–1363. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000012703.45373.aa> [in Russian].
- [11] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Минск: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. [in Russian].

- [12] Pskhu A.V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial differential equations of fractional order]. M.: Nauka, 2005, 199 p. [in Russian].
- [13] Samarskii A.A. *O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravnenii* [Some problems of the theory of differential equations]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1980, Vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 [in Russian].
- [14] Ionkin N.I. *Reshenie odnoi zadachi teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem* [The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1977, 13:2, pp. 294–304 [in Russian].
- [15] Pulkina L.S. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia giperbolicheskogo uravneniia* [A Nonlocal Problem with Integral Conditions for a Hyperbolic Equation]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2004, 40:7, pp. 947–953. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16> [in Russian].
- [16] Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shift for Partial Differential Equations]. M.: Nauka, 2006, 287 p. [in Russian].
- [17] Krasnov M.L. *Integral'nye uravneniia* [Integral equations]. M.: Nauka, 1975, 304 p. [in Russian].

F.M. Losanova²

A PROBLEM WITH NONLOCAL DISPLACEMENT FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

In this paper, we construct a solution of the inner-boundary problem with a nonlocal shift for the fractional diffusion equation in a rectangular region.

Key words: internal task, nonlocal offset, Wright type function.

Citation. Losanova F.M. *Zadacha s nelokal'nykh smeshcheniem dlia uravneniia drobnoi diffuzii* [A problem with nonlocal displacement for fractional diffusion equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 3, pp. 35–40. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-35-40> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 4/IX/2018.

The article received 4/IX/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Losanova Fatima Mukhamedovna (losanovaf@gmail.com), Sinergetics Problems laboratory, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Kabardino-Balkar Republic, Russian Federation.

А.А. Черепанов¹

ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЕ PHAPL ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ НА ПЛОСКОСТИ

В статье описывается веб-приложение PhaPl для построения и исследования фазовых портретов автономных систем двух дифференциальных уравнений на плоскости, предназначенное для использования в учебном процессе. Веб-приложение сильно отличается от существующих пакетов программ простотой пользовательского интерфейса и наглядностью, так как при его использовании демонстрируются все шаги решения задачи. Для полного решения задачи достаточно ввести исследуемую систему. Начальные условия для фазовых траекторий выбираются автоматически. Графическое представление фазового портрета является интерактивным. Веб-приложение использует популярное свободное программное обеспечение (SymPy, PyPy.js, MathJax, LZMA-JS). Веб-приложение является переносимым и работает в веб-браузерах с поддержкой JavaScript и элемента canvas стандарта HTML5, что делает его доступным широкому кругу учащихся, включая студентов дистанционной формы обучения. Веб-приложение может быть скачано и потом использовано без подключения к сети Интернет. В статье описываются достоинства, недостатки и особенности веб-приложения. Веб-приложение было внедрено в учебный процесс РЭУ имени Г.В. Плеханова в 2018 году.

Ключевые слова: фазовый портрет, SymPy, свободное программное обеспечение, PyPy.js, MathJax, LaTeX, веб-приложение, обучающее программное обеспечение, линейная система, нелинейная система.

Цитирование. Черепанов А.А. Веб-приложение PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 41–52. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-41-52>.

Введение

PhaPl — это веб-приложение для построения и исследования фазовых портретов автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости. При этом PhaPl можно использовать как онлайн при помощи сайта в сети Интернет[1], так и локально без подключения к сети Интернет, скачав копию. PhaPl включает в себя задачи из учебного пособия[2] и позволяет вводить новые задачи. Также в PhaPl реализован генератор задач. PhaPl ориентирован на учебную деятельность и исследования.

PhaPl автоматически выполняет основные этапы решения задачи построения и исследования фазовых портретов для систем следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

где P и Q — функции, непрерывно дифференцируемые в некоторой области. При этом система может быть линейной или нелинейной, пользователь может выбрать задачу из пособия или ввести новую задачу.

Фазовые портреты используются в современных исследованиях в различных областях науки отечественными и зарубежными авторами, так как позволяют получить представление о качественных свойствах нелинейных систем дифференциальных уравнений, составляющих основу различных математических моделей. Например, см. [3–10].

Построение фазового портрета — совокупности траекторий системы в фазовой плоскости переменных x, y — трудоемкая задача при выполнении вручную. PhaPl позволяет преподавателю легко продемонстрировать правильное решение учащемуся при возникновении сложностей с самостоятельным решением.

¹© Черепанов А.А., 2018

Черепанов Алексей Александрович (aleksey.4erepanov@gmail.com), кафедра высшей математики, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, 117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., 36.

PhaPI прост в использовании, не требует программирования или настройки и дает наглядные результаты для задач из пособия[2]. Помимо использования в учебном процессе PhaPI может быть удобен для некоторых видов исследований.

Предыдущая версия PhaPI была внедрена в учебный процесс Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (МЭСИ), в учебный процесс механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в 2013 году и в учебный процесс Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова в 2016 году. Результаты подробно описаны в [11]. Новая версия PhaPI была внедрена в учебный процесс Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова в 2018 году.

Главным отличием предыдущей версии PhaPI от своих аналогов являлось сочетание высокого уровня автоматизации решения, простоты использования и возможности вводить новые задачи[11]. Сайт “MIT Mathlets”[12] демонстрирует построение фазовых портретов для фиксированных систем. Сайт “Wolfram|Alpha”[13] позволяет строить фазовые портреты для систем, введенных пользователем, однако не может работать без подключения к сети Интернет. В 2017 году И. Савов реализовал изменения, необходимые для работы библиотеки SymPy в веб-браузере посредством PyPy.js, и опубликовал сайт[14] с тестовым приложением — интерактивным интерпретатором Python с доступом к SymPy. Однако данный сайт не позволяет строить фазовые портреты. Для PhaPI были независимо реализованы подобные изменения в SymPy. PhaPI является первым приложением для построения фазовых портретов, которое может работать как сайт, так и локально без подключения к сети Интернет, сохраняя возможность вводить новые задачи и проводить все основные этапы решения.

1. Сравнение с предыдущей версией PhaPI

Главной проблемой предыдущей версии PhaPI являлся большой размер программного обеспечения. Размер новой версии значительно меньше. Все программные компоненты других авторов, используемые в PhaPI, были заменены на аналоги. Средой выполнения для PhaPI теперь является веб-браузер. При этом все ключевые возможности PhaPI были сохранены.

Пользовательский интерфейс был улучшен на основе опыта эксплуатации и отзывов пользователей. Информация об особых точках отображается обычным текстом, а не таблицей. Размер шрифта для всего текста увеличен. Пользователь может дополнительно изменить размер текста встроенными средствами веб-браузера. Для выбора теперь доступно несколько наборов задач, а не один. Однако контекстная справка в новой версии не была реализована.

Аналитические возможности PhaPI были улучшены. Благодаря использованию библиотеки SymPy для символьных вычислений, особые точки находятся лучше. Поэтому в новой версии убрана возможность добавления особых точек вручную. В решении теперь показывается больше информации: для каждой особой точки показывается линейная система после замены координат и собственные векторы, если есть. Для нелинейных систем для каждой особой точки показывается два фазовых портрета. Начальные условия для фазовых траекторий выбираются случайно для более наглядных результатов. Добавлена возможность генерации новых задач.

Переносимость PhaPI была улучшена: поддерживаются все операционные системы, на которых есть графический веб-браузер с поддержкой JavaScript и элемента canvas стандарта HTML5. Также PhaPI может работать в качестве сайта в сети Интернет. Во всех случаях используются одни и те же файлы, так что подготовить и опубликовать обновление стало значительно проще, что способствует более быстрому развитию PhaPI.

2. Используемые технологии

PhaPI является веб-приложением, которое выполняется полностью в веб-браузере. От веб-браузера требуется поддержка языка сценариев JavaScript и элемента canvas стандарта HTML5. PhaPI построен на основе программных компонентов с открытым исходным кодом: SymPy, PyPy.js, MathJax, LZMA-JS.

Аналитическая часть приложения реализована на языке программирования Python с использованием библиотеки SymPy для символьных вычислений. Для каждой задачи аналитическая часть создает фрагмент HTML-страницы с решением и фрагменты кода на JavaScript для построения фазовых траекторий методом ломаных Эйлера.

Пользовательский интерфейс PhaPI описан при помощи языка разметки HTML, а интерактивное поведение реализовано при помощи JavaScript. Чтобы выполнять Python в веб-браузере, используется библиотека PyPy.js. Для графического отображения формул используется библиотека MathJax. Так что

PhaPl не требует выполнения кода на стороне веб-сервера и может работать, как локальная веб-страница.

Чтобы ускорить работу с задачами из пособия, вспомогательная программа для подготовки PhaPl выводит решения в файл, сжимает при помощи алгоритма LZMA и встраивает в HTML-страницы интерфейса PhaPl. Для извлечения заготовленных решений используется библиотека LZMA-JS.

Интерфейс PhaPl доступен на английском и на русском языках. Для каждого языка есть отдельная HTML-страница. Вспомогательная программа создает их из единого шаблона. Все вспомогательные программы опубликованы вместе с исходным кодом PhaPl[15].

Библиотека SymPy для языка Python полностью заменила систему компьютерной алгебры Maxima. SymPy позволяет PhaPl находить особые точки аналитически. Также SymPy предоставляет вспомогательные функции: для преобразования формул в код \LaTeX , чтобы показывать формулы в интерфейсе, и для конвертации формул в код на JavaScript, чтобы получить код для вычисления векторов скоростей для метода Эйлера по формулам правых частей уравнений в системе дифференциальных уравнений.

Библиотека MathJax для языка JavaScript позволяет отображать графически формулы так же красиво, как \LaTeX . MathJax используется несколькими популярными сайтами и некоторыми мобильными приложениями через WebView (например, [16]). MathJax реализует только математический режим \LaTeX , но этого достаточно для PhaPl. HTML-страница содержит описание разметки на языке HTML, включающее текст с формулами, записанными при помощи команд \LaTeX . MathJax сам находит формулы в тексте HTML-страницы и заменяет их на графическое представление. PhaPl сообщает MathJax, когда обновляет часть HTML-страницы с текстом решения. MathJax предоставляет контекстное меню с дополнительными возможностями: например, через меню пользователь может получить текстовое представление формулы в виде команд \LaTeX или описания на языке разметки MathML. MathJax отображает формулы так, что увеличение масштаба страницы в веб-браузере влияет и на формулы, при этом формулы сохраняют высокое качество изображения.

Веб-браузер смог заменить библиотеку Qt4, использовавшуюся для построения графического интерфейса пользователя и для выполнения кода на JavaScript для вычисления векторов скоростей. Элемент canvas стандарта HTML5 используется для отображения фазовых портретов. Во время работы PhaPl создает код на JavaScript для построения фазового портрета, используя формулы правых частей уравнений введенной системы. Формулы правых частей вставляются в шаблон кода функции для построения одной фазовой траектории, идущей из заданной точки в одном направлении. Код функции реализует метод Эйлера и содержит обращения к элементу canvas для отображения ломаных. Функция eval языка JavaScript позволяет выполнить созданный код и определить новую функцию с кодом для конкретной системы. Интерпретаторы JavaScript в современных веб-браузерах используют JIT-компиляцию, что дает высокую производительность. Таким образом веб-браузер вместе с имеющимися библиотеками — подходящая программная среда для PhaPl. Веб-браузер обычно уже есть на компьютере и не поставляется в составе PhaPl.

PhaPl содержит код на Python, который использует SymPy для решения задачи и создает фрагменты HTML-страниц с решениями и фрагменты кода на JavaScript для построения фазовых траекторий. Чтобы код на Python работал в веб-браузере, используется библиотека PyPy.js языка JavaScript. PyPy.js реализует интерпретатор языка программирования Python на языке JavaScript. PyPy.js может работать в режиме JIT-компиляции, переводя Python в JavaScript «на лету», или в режиме обычного интерпретатора. Режим JIT-компиляции требует больше оперативной памяти, поэтому PhaPl использует PyPy.js в режиме обычного интерпретатора.

PyPy.js — не единственный интерпретатор Python, перенесенный на JavaScript, однако только PyPy.js предоставляет простой способ для добавления новых модулей в комплект интерпретатора. При этом есть два варианта: можно добавить файлы в каталог с модулями, чтобы они загружались при необходимости, или можно добавить их в единый файл с базовыми модулями, который загружается целиком при запуске интерпретатора. При онлайн использовании вариант с отдельными файлами показал низкую производительность, так как при загрузке SymPy в PyPy.js веб-браузер вынужден получать несколько сотен файлов последовательными запросами. Вариант с единым файлом, загружаемым сразу, оказался значительно более производительным. Для включения модуля в файл с базовыми модулями PyPy.js предоставляет вспомогательную программу: она анализирует исходный код и включает только те файлы модуля, которые действительно потребуются при загрузке. Так что в файл для начального скачивания включается не весь SymPy, а только основная часть. Остальные файлы могут быть загружены первым способом, если потребуются. Дополнительным плюсом является то, что в случае автоматического сжатия передаваемых файлов веб-сервер может лучше сжать большой файл с базовыми модулями, нежели отдельные файлы модулей.

Аналитическая часть PhaPl подготавливает текст решения и код на JavaScript для построения фазовых портретов. Так что интерпретатор Python не участвует при отображении решения и при построении

фазовых портретов. Это позволяет заготовить решения и код заранее, используя другой интерпретатор Python. При этом в процессе работы заготовленное решение может быть показано без использования PyPy.js. Для этого в PhaPl есть кэш решений — хэш-таблица, в которой для пары строк с правыми частями уравнений системы сохраняются решение и код, получаемые от аналитической части. При старте в кэше хранятся решения только для заготовленных заранее решений. В ходе работы туда добавляются решения новых систем.

Чтобы заполнять кэш при старте PhaPl, на этапе подготовки в код HTML-страницы вставляется сжатая строка со всеми решениями. При старте работы код на JavaScript распаковывает эту строку, извлекает решения и заполняет кэш. PhaPl содержит заготовленные решения для 60 задач, так что текст их решений имеет большой суммарный размер. Для решения этой проблемы используется сжатие данных. В качестве алгоритма сжатия был выбран LZMA, дающий высокую степень сжатия и имеющий хорошую программную поддержку. Для распаковки используется библиотека LZMA-JS для языка JavaScript. Для сжатия на этапе подготовки используется утилита lzma. После сжатия бинарные данные кодируются в Base64, чтобы их можно было легко встроить в HTML-страницу. Текст решений имеет много повторяющегося текста, так что коэффициент сжатия очень высокий: вместо 503 килобайт для решений на русском языке получается 17 килобайт в Base64. Строка для кэша с решениями на английском языке сжимается отдельно и встраивается в другую HTML-страницу: вместо 346 килобайт получается 16 килобайт в Base64. Значительная разница в исходных размерах связана с тем, что используется кодировка UTF-8 с переменным количеством байт: 1 байт для латинских букв, 2 байта для русских букв.

Аналитическая часть PhaPl готовит один текст решения для двух языков. Он включает в себя подписи на двух языках, используя следующий формат разметки для вариантов перевода: `[[текст для русской версии | текст для английской версии]]`, где квадратные скобки и последовательность из пробела, вертикальной черты и пробела являются обязательными, а остальные символы являются частью подписей. В таком виде легко держать варианты подписей согласованными. Для простоты реализации введены дополнительные ограничения: в двойных квадратных скобках могут быть только подписи для перевода, текст подписей внутри скобок не может содержать закрывающую квадратную скобку. Вспомогательная программа превращает каждый файл с такой разметкой в два файла для двух языков. Это используется для файла с заготовленными решениями до сжатия и для HTML-страницы, так что в итоге получаются отдельные HTML-страницы для разных языков. Новые решения обрабатываются кодом на JavaScript, который выбирает нужный язык перед тем, как показать решение в интерфейсе.

Заготовленные решения позволяют работать со всеми задачами из пособия, скачав менее 1 мегабайта данных при онлайн использовании, так как не нужно загружать PyPy.js и SymPy, составляющие значительную часть размера PhaPl. Чтобы сократить общий размер, MathJax, SymPy и модули PyPy.js были почищены от файлов, не требующихся при обычной работе: были удалены скрипты для тестирования корректности и измерения производительности. Были удалены разные варианты шрифтов в MathJax, которые не нужны для работы PhaPl. Это не влияет на онлайн использование, но влияет на размер архива для использования без подключения к сети Интернет: теперь PhaPl требует около 9 мегабайт для скачивания и около 37 мегабайт в распакованном виде. Это не является минимально возможным размером, так как все модули, кроме модуля email, были сохранены для более простого расширения PhaPl другими возможностями в будущем.

Все используемые компоненты являются программным обеспечением с открытым исходным кодом, что позволяет рассчитывать на то, что в будущем они так же будут доступными и качественными [17]. PhaPl тоже является программным обеспечением с открытым исходным кодом, однако авторские права на задачи, включенные в состав PhaPl, ограничивают возможность распространения. На этапе подготовки задачи находятся в отдельных файлах, имеющих простой текстовый формат. Все другие появления задач в PhaPl являются производными и создаются автоматически на этапе подготовки. Это сделано, чтобы упростить создание собственных копий PhaPl с другими наборами задач.

После подготовки все вычисления происходят в веб-браузере пользователя. Это позволяет скачать PhaPl и использовать без подключения к сети Интернет на любой операционной системе при наличии подходящего веб-браузера. Также это упрощает публикацию PhaPl для онлайн использования. Для размещения PhaPl в сети Интернет используется сервис GitHub: бесплатный хостинг репозитория `git` от GitHub используется для публикации исходного кода PhaPl и кода подготовленного сайта, бесплатный хостинг GitHub Pages используется для самого сайта для онлайн использования. Архив для скачивания PhaPl является слепком репозитория `git`, через который происходит обновление сайта, и подготавливается автоматически сервисом GitHub. Отсутствие потребности готовить и загружать несколько архивов для скачивания позволяет публиковать даже маленькие обновления сразу. Чтобы пользователь мог отслеживать обновления, в HTML-страницы при подготовке вставляется дата обновления.

Выбор описанных технологий позволил обеспечить уникальные свойства PhaPI: простоту обновления и публикации, маленький размер, высокую переносимость, возможность использования онлайн и без подключения к сети Интернет, качество решений подобное системам компьютерной алгебры.

3. Графический интерфейс пользователя

PhaPI является веб-приложением и отображается в веб-браузере, как обычная HTML-страница. Содержимое страницы разделено на несколько логических блоков: выбор языка, краткое описание, выбор задачи, ввод задачи и запуск, текст решения. Все блоки, кроме текста решения, видны все время и обведены в тонкую рамку. Решение появляется после ввода задачи и запуска, при выборе задачи запуск происходит автоматически. В конце страницы есть ссылка для возврата к блоку выбора задач, она не обведена в рамку, хотя отображается все время.

Блок выбора языка содержит одну строку, в которой перечислены доступные языки: английский и русский. При этом название текущего языка выделяется жирным шрифтом, а название другого языка является ссылкой на HTML-страницу, предоставляющую интерфейс с этим языком.

Следующий блок содержит краткое описание, ссылку для перехода к блоку выбора задачи, ссылку на архив для скачивания PhaPI для использования без подключения к сети Интернет, дату создания HTML-страницы, пояснения относительно возможных проблем и используемых программных компонентов других авторов.

Блок выбора задачи при старте содержит три кнопки. Надписи на кнопках предлагают показать задачи и содержат заголовок набора задач. Разные кнопки показывают и скрывают информацию независимо, так что можно показать все задачи разом. Пример состояния блока выбора задачи есть на рис. 3.1.

Выбор задачи

▼ Скрыть задачи: Контрольное задание 16 (main.pdf)

Copyright © 2010 Асташова И. В., Никишкин В. А.
 Асташова И. В., Никишкин В. А. Практикум по курсу «Дифф
 94 с., ил. URL: http://new.math.msu.su/diffur/main_du_2010.pdf

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 13x - 3y \end{cases}$	11. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 5x + 9y \end{cases}$	21. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 7x - 9y \end{cases}$	12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$	22. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y \\ \dot{y} = 3x - y \end{cases}$	13. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y \\ \dot{y} = 5x - 4y \end{cases}$	23. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 9y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$	14. $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 3y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$	24. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y \\ \dot{y} = 2x + 5y \end{cases}$	15. $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 5y \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$	25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 2y \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$	26. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 7x - 8y \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 13x - y \end{cases}$	17. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$	27. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{cases}$	18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$	28. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$	19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$	29. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$	20. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y \\ \dot{y} = 4x - 9y \end{cases}$	30. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 4y \end{cases}$

► Показать задачи: Контрольное задание 17 (main.pdf)

▼ Скрыть задачи: Случайная линейная система по типу особой точки

[Неустойчивый узел](#)
[Устойчивый узел](#)
[Седло](#)
[Центр](#)
[Неустойчивый фокус](#)
[Устойчивый фокус](#)
[Неустойчивый вырожденный узел](#)
[Неустойчивый дикритический узел](#)
[Устойчивый вырожденный узел](#)
[Устойчивый дикритический узел](#)

Рис. 3.1. Пример состояния блока выбора задачи

Две кнопки отвечают за заготовленные задачи из пособия: при нажатии на кнопку сразу под ней появляется информация об авторских правах, библиографическая ссылка на пособие и таблица с 30

задачами, в каждой ячейке которой находится порядковый номер и система уравнений. Системы показываются графически при помощи MathJax. Однако они могут выглядеть не так, как в пособии, потому что команды \LaTeX для описания системы получаются при помощи SymPy на этапе подготовки, а SymPy может переставить слагаемые или даже вынести множитель за скобку.

Третья кнопка в блоке выбора задач при нажатии показывает список типов особых точек для создания линейной системы со случайными коэффициентами с заданным типом особой точки. Названия типов оформлены как ссылки.

Блок ввода задачи содержит два поля, в которые можно ввести правые части уравнений системы, и кнопку для начала решения. После решения текст системы остается в полях, так что можно изменить задачу и запустить решение новой задачи.

Чтобы выбрать задачу из пособия, надо нажать на ячейку таблицы в блоке выбора задачи. При этом страница будет прокручена до блока ввода задачи и в поля ввода будет вставлен текст задачи. Ниже блока ввода задачи будет показано решение задачи. Решения для задач из пособия показываются сразу, так как заготовлены заранее. В таблице ячейка выбранной задачи будет подсвечена зеленым цветом, но это будет видно, только если вернуться назад. При изменении текста в полях ввода это выделение сбрасывается.

Чтобы создать случайную задачу, надо нажать на ссылку с названием желаемого типа особой точки. При этом текст задачи будет вставлен в поля ввода после некоторых вычислений и вызвано решение задачи. При первом запуске создания задачи или при первом запуске решения задачи, которая не заготовлена, запускается PyPy.js. Так как в первый раз это может занять несколько секунд, в процессе запуска и решения показываются соответствующие сообщения на месте, где будет решение.

Задачу можно ввести сразу в поля. Для ввода используется синтаксис SymPy. В случае ошибки в синтаксисе или при возникновении проблемы в процессе решения будет показано сообщение об ошибке, включающее все подробности, доступные от SymPy и PyPy.js. В будущем может быть реализована поддержка для анализа неопределенных параметров. Но сейчас неопределенные параметры не поддерживаются и могут вызывать, как сообщение об ошибке, так и показ неправильного решения, не содержащего фазовые портреты. Тем не менее после любой ошибки можно ввести новую систему без перезапуска PhAPL.

Для линейных систем после текста решения показывается ссылка с предложением создать новую задачу с таким же типом особой точки. При нажатии на нее будет создана задача, ее текст вставлен в поля ввода, а вместо решения будет показана система уравнений без решения.

Все формулы в интерфейсе представлены графически при помощи MathJax, поэтому выглядят красиво. Это удобно, потому что и в задачах, и в решениях есть дроби, корни и степени. Только в полях ввода правые части уравнений системы появляются в виде текста. Для всех формул в интерфейсе есть текст, описывающий назначение формулы. Чтобы было легко отличить текст результатов от текста поясняющего решение, в решении названия типов особых точек и их устойчивости выделены жирным шрифтом. Для удобства размеры шрифтов текста и заголовков увеличены до 140% обычных шрифтов. Размеры могут быть изменены пользователем, если веб-браузер позволяет изменять масштаб.

4. Результаты решения задачи

PhAPL предоставляет основные результаты решения задачи построения и исследования фазового портрета автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости. При этом PhAPL почти повторяет этапы решения, выполняемые студентами при решении на бумаге, и показывает некоторые промежуточные шаги. Основные этапы решения подробно описаны, например, в [2, §6.3]. Проверка корректности решения, нахождение предельных циклов и различение центра и фокуса остаются задачами для самостоятельного выполнения пользователем.

Для удобства в начале текста решения показывается исследуемая система. За ней следует система, при помощи которой находятся особые точки. PhAPL показывает количество комплексных решений этой системы, потому что они не участвуют в исследовании и могут вызывать сомнения у студентов. Количество действительных решений — особых точек — показывается вместе со списком координат особых точек. Количество особых точек должно быть конечным, в частности PhAPL не поддерживает периодические решения и заменяет их конечным подмножеством решений. Даже если система имеет конечное количество решений, PhAPL может найти часть решений и не сообщить, что найдены не все решения. Поэтому учащемуся или исследователю надо самому проверять корректность результатов.

Дальше идет подробная информация по каждой особой точке. Для каждой особой точки показываются координаты особой точки, соответствующая линейная система после замены координат, корни характеристического уравнения этой системы, тип особой точки и устойчивость, фазовый портрет об-

ласти вокруг особой точки. В случае задачи с нелинейной системой для точек типа центр явно указывается, что требуются дополнительные исследования для различения центра и фокуса. Для особых точек типа вырожденный узел показывается один собственный вектор. Для особых точек типа седло или узел показывается пара собственных векторов. Если задача содержит линейную систему, то показывается один фазовый портрет для этой системы, несмотря на возможный перенос координат. Для нелинейных систем показывается по два фазовых портрета для каждой точки: для соответствующей линейной системы в точке и для оригинальной системы. При этом построение дополнительной фазовой траектории происходит сразу на двух фазовых портретах, так что можно увидеть разницу между системами наглядно. Пример части результатов решения есть на рис. 4.1.

Исследуемая система

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$$

Особые точки

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

Найдено **1** действительное решение: $(0, 0)$.

Найдено и проигнорировано **0** комплексных решений.

1. Точка $(0, 0)$.

Линейная система после замены координат:

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u + v \\ \dot{v} = 4u - v \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -2,$$

$$\lambda_2 = 3.$$

Тип особой точки: **Седло**.

Устойчивость: **Неустойчиво**.

Пара собственных векторов:

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фазовый портрет в окрестности точки:

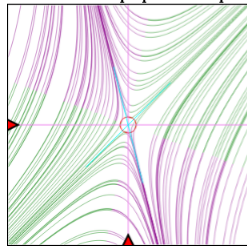


Рис. 4.1. Пример части результатов решения задачи

В конце текста решения приводится общий фазовый портрет, включающий все перечисленные особые точки.

5. Графическое представление фазового портрета

Для построения фазовых траекторий в PhaPl используется метод ломаных Эйлера. Он выбран из-за простоты программной реализации. Также его легко объяснить студентам, если возникает вопрос о том, как работает PhaPl. Хотя метод Эйлера слишком трудоемкий для использования при решении на бумаге.

Тип особой точки и устойчивость не учитываются при построения фазовых траекторий. Используются только координаты особых точек: для каждой особой точки строится фазовый портрет в квадратной области 2 на 2 с центром в особой точке, общий фазовый портрет строится для квадратной области, включающей все особые точки вместе с окрестностью радиуса 1 .

Для отображение фазового портрета используется элемент `canvas` стандарта HTML5. Для общего фазового портрета задан размер 600 пикселей, для остальных фазовых портретов — 300 пикселей. Исходя из этих размеров, выбирается размер касательных векторов для метода Эйлера: вектор должен примерно соответствовать размеру пикселя. При уменьшении размера построение будет медленней. При

увеличении размера могут стать заметными отрезки, из которых составляются траектории. Тем не менее, даже в линейных системах из пособия, такой размер касательных векторов позволяет заметить накопленное отклонение траектории, например, рядом с особой точкой типа центр. В исследовательских задачах искажения могут качественно влиять на интерпретацию смысла фазовой траектории, например, в случае пересечения предельного цикла.

Начальные условия для фазовых траекторий выбираются автоматически. Область, для которой показывается фазовый портрет, разбивается на 100 квадратов и в каждом квадрате случайно выбирается одна точка, через которую проводится фазовая траектория. Дополнительно для каждой особой точки используется четыре точки с отступом 10 пикселей в противоположные стороны по горизонтали или по вертикали. Такой подход дает наглядные результаты для задач из пособия. К недостаткам можно отнести то, что рядом с точками типа центр получается много линий, расположенных плотно, так как одна траектория может сделать несколько оборотов вокруг особой точки.

Помимо обычных фазовых траекторий есть дополнительная фазовая траектория, которая показывается при наведении указателя на фазовый портрет. В качестве начальных условий используется положение указателя, то есть фазовая траектория проходит через точку, где находится указатель. На устройствах без видимого указателя (смартфонах и планшетах) дополнительную траекторию можно получить нажатием на фазовый портрет, тогда она проходит через точку нажатия.

Для особых точек нелинейной системы разом показываются фазовые портреты для оригинальной системы и для соответствующей линейной системы. Для оригинальной системы построение происходит в координатах x, y : по горизонтали — ось OX , по вертикали — ось OY . Для линейной системы построение происходит в координатах u, v . Начальные условия для обычных фазовых траекторий этих фазовых портретов выбираются независимо друг от друга. А вот начальные условия для дополнительной фазовой траектории выбираются согласовано с учетом замены координат в линейной системе. Наведение указателя на один из фазовых портретов вызывает построение дополнительной траектории сразу на двух фазовых портретах.

Все фазовые траектории строятся и для положительного, и для отрицательного направлений течения времени, то есть при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$. При этом для дополнительной фазовой траектории используются разные цвета для разных направлений: красный — для положительного направления течения времени, синий — для отрицательного направления. Цвета выбраны по аналогии с механическими термометрами, у которых положительная часть шкалы окрашена в красный цвет, а отрицательная — в синий. Однако некоторые пользователи сообщали, что им кажется более естественным использование синего цвета для положительного направления течения времени. В будущем могут быть добавлены стрелки, чтобы использование цвета было не единственным визуальным указанием направления фазовой траектории. Для дополнительной фазовой траектории используется линия большей толщины.

Для обычных фазовых траекторий используются другие цвета: на общем фазовом портрете с несколькими особыми точками используется черный цвет, на общем фазовом портрете с одной особой точкой и на фазовых портретах для отдельных точек используются фиолетовый и зеленый цвета. Фиолетовым цветом окрашены точки фазовой траектории, где траектория приближается к заданной особой точке. Зеленым цветом окрашены точки, в которых траектория удаляется или сохраняет расстояние от заданной особой точки.

Помимо траекторий на фазовом портрете есть декоративные элементы. Для осей координат используется фиолетовый цвет. Серый цвет используется для прямых, параллельных осям координат и проходящих через целочисленные точки на осях. Эти прямые показываются, если разница координат краев области для показа меньше 50. При большей разнице координат краев области сетка получалась бы слишком плотной и ухудшала наглядность фазового портрета. Направление осей координат показано небольшими черными треугольниками. Они расположены на левой и нижней сторонах фазового портрета. Там же располагаются красные треугольники, указывающие на особые точки. На фазовых портретах, включающих не все точки, треугольники могут указывать на особые точки, находящиеся за пределами области, показываемой на фазовом портрете. Чтобы выделить местоположение особых точек, вокруг каждой проводится красная окружность радиусом 10 пикселей. Голубым цветом проводятся отрезки для обозначения собственных векторов.

6. Генерация задач

PhaPl предоставляет возможность автоматического создания новых задач по заданному типу особой точки. Система дифференциальных уравнений в созданной задаче является линейной:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot x + b \cdot y, \\ \dot{y} = c \cdot x + d \cdot y, \end{cases} \quad (6.1)$$

где a, b, c, d — целые числа от -5 до 5 включительно, выбранные так, чтобы корни характеристического уравнения являлись целыми комплексными числами и тип особой точки соответствовал заданному. В будущем может быть добавлена возможность создания задач другого вида.

Генерация задачи реализована полным перебором коэффициентов: PhaPl перебирает все возможные наборы коэффициентов в диапазоне от -5 до 5 , для каждого набора проверяет корни характеристического уравнения и, если они являются целыми числами, находит тип особой точки, потом проверяет тип особой точки и, если он совпадает с заданным, запоминает набор, как подходящий; после перебора из множества запомненных наборов случайно выбирается один и подставляется в шаблон задачи.

Главный недостаток перебора — низкая скорость работы. Чтобы перебор не вызывал дискомфорт у пользователя, диапазон возможных значений коэффициентов выбран небольшим (от -5 до 5). Однако заданный диапазон дает много вариантов задачи. Количество задач по типу особой точки для выбранного диапазона приведено в табл. 6.1. Вид I — это задачи, в которых корни характеристического уравнения являются целыми комплексными числами. Вид II — остальные задачи. PhaPl создает задачи вида I.

Таблица 6.1

Количество задач вида (6.1) с целочисленными коэффициентами от -5 до 5 включительно, по типу особой точки.

Тип особой точки	Вид I	Вид II	Всего
Неустойчивый узел	620	540	1160
Устойчивый узел	620	540	1160
Седло	1904	5000	6904
Центр	86	180	266
Неустойчивый фокус	274	1716	1990
Устойчивый фокус	274	1716	1990
Неустойчивый вырожденный узел	164	0	164
Неустойчивый дикритический узел	5	0	5
Устойчивый вырожденный узел	164	0	164
Устойчивый дикритический узел	5	0	5
Всего	4116	9692	13808

Подход с использованием перебора всех значений коэффициентов будет работать медленнее для большего количества коэффициентов, поэтому может быть непригодным для использования в более сложных шаблонах для генерации задач (например, [18]). Однако он позволяет проверить возможность построения задач для всех типов особых точек, что может быть удобно для исследования шаблонов.

В пользовательском интерфейсе есть два места для вызова генерации задач: список типов особых точек для генерации доступен в блоке выбора задачи, также в конце решения может быть ссылка для генерации задачи с таким же типом особой точки. При вызове генерации из блока выбора задачи сразу выполняется решение задачи. При вызове генерации по ссылке после текста решения вместо него показывается формула системы новой задачи, а решение не производится. Условие подставляется в поля ввода, так что пользователь может вызвать решение вручную кнопкой в блоке ввода задачи.

Выводы

Веб-приложение PhaPl обладает рядом уникальных характеристик: оно является свободным программным обеспечением и предоставляет почти полную автоматизацию решения задачи построения и исследования фазового портрета автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости. PhaPl обладает упрощенным графическим интерфейсом пользователя. PhaPl был внедрен в учебный процесс. При использовании преподавателями и студентами PhaPl показал свою пользу. Также в процессе эксплуатации [10] PhaPl показал свои возможности и ограничения для применения в научно-исследовательской деятельности. Были выявлены возможности для улучшения в последующих разработках.

Веб-приложение PhaPl доступно онлайн в виде сайта [1] и может быть скачано для локального использования, не требующего подключения к сети Интернет.

Литература

- [1] Черепанов А.А. PhaPl: Phase Plane Helper [Электронный ресурс] 2018. URL: <https://phapl.github.io/> (дата обращения: 30.05.2018).

- [2] Астахова И.В., Никишкин В.А. Практикум по курсу "Дифференциальные уравнения": учебное пособие. Изд. 3-е, исправ. М.: Изд. центр ЕАОИ, 2010. 94 с., ил. URL: http://new.math.msu.su/diffur/main_du_2010.pdf.
- [3] Лапшин В.П., Туркин И.А. Моделирование динамики формообразующих движений при сверлении глубоких отверстий малого диаметра // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. 4: Естественно-математические и технические науки. 2012. № 4 (110) С. 226–233. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-dinamiki-formoobrazuyuschih-dvizheniy-pri-sverlenii-glubokih-otverstiy-malogo-diametra>.
- [4] Агуреев И.Е., Атлас Е.Е. Использование принципов нелинейной динамики при исследовании диссипативных моделей транспортных процессов в биофизических системах // ВНМТ. 2007. № 1 С. 41–43. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/i-spolzovanie-printsipov-nelineynoy-dinamiki-pri-issledovanii-dissipativnyh-modeley-transportnyh-protseessov-v-biofizicheskikh-sistemah>.
- [5] Баринаева Е.В., Тимбай И.А. Исследование плоского движения относительно центра масс спускаемого аппарата с тригармонической моментной характеристикой при входе в атмосферу // Вестник СГАУ. 2010. № 1. С. 9–19. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-ploskogo-dvizheniya-otnositelno-tsentra-mass-spuskaemogo-apparata-s-trigarmonicheskoy-momentnoy-harakteristikoy-pri>.
- [6] Астахова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И. В. Астаховой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20908128>.
- [7] Астахова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков. Современная математика и ее приложения // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8. С. 3–33. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26344653>.
- [8] Astashova I. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. New York, N.Y., United States, 2016. P. 191–204. DOI: 10.1007/978-3-319-32857-7 .
- [9] Vaidyanathan S. Lotka-Volterra population biology models with negative feedback and their ecological monitoring // Int J PharmTech Res. 2015. Т. 8. № 5. С. 974–981. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/8086/92dd5826922b7be834c05e7a41994bb3e135.pdf>.
- [10] Astashova I., Chebotava V., Cherepanov A. Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application phapl // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. 2018. Vol. 15. no. 12. P. 112–118. ISSN / E-ISSN: 1109-9518 / 2224-2902. URL: <http://www.wseas.org/multimedia/journals/biology/2018/a265908-043.php>.
- [11] Черепанов А.А. Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости // Открытое образование. 2017. № 3. С. 66–72. DOI: <https://doi.org/10.21686/1818-4243-2017-3-66-72>.
- [12] Miller H., Hohn H. MIT Mathlets [Электронный ресурс] 2009. URL: <http://mathlets.org/mathlets/> (дата обращения: 30.05.2018).
- [13] Wolfram|Alpha: Computational Intelligence [Электронный ресурс] 2009. URL: <https://www.wolframalpha.com/> (дата обращения: 30.05.2018).
- [14] Savov I. SymPy in a PyPy.js shell [Электронный ресурс] 2017. URL: https://minireference.com/static/tmp/pypyjs_symru_demo/ (дата обращения: 30.05.2018).
- [15] Черепанов А.А. GitHub - phapl/phapl: smart tool to plot and research phase planes, offline and online [Электронный ресурс] 2018. URL: <https://github.com/phapl/phapl> (дата обращения: 29.07.2018).
- [16] Honda Y. Maxima on Android [Электронный ресурс] 2013. URL: <https://sites.google.com/site/maximaonandroid/> (дата обращения: 30.05.2018).
- [17] Wheeler David A. Why Open Source Software / Free Software (OSS/FS, FOSS, or FLOSS)? Look at the Numbers! [Электронный ресурс] 2014. URL: http://www.dwheeler.com/oss_fs_why.html (дата обращения: 15.10.2014).
- [18] Черепанов А.А. О типах особых точек динамической системы определенного вида // Материалы конференций, проходивших в рамках "Дней студенческой науки МЭСИ. Осень-2014": сборник научных трудов, часть 2 / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. М., 2015. С. 259–265.

References

- [1] Cherepanov A.A. PhaPl: Phase Plane Helper [Electronic resource] 2018. Available at: <https://phapl.github.io/> (accessed 30.05.2018).
- [2] Astashova I.V., Nikishkin V.A. Praktikum po kursu "Differentsial'nye uravneniia". Uchebnoe posobie. Izd. 3-e, ispravlennoe [Practicum on the course "Differential equations". Textbook. 3rd edition, revised]. M.: Izd. tsentr EAOI, 2010, 94 p., illustrated. Available at: http://new.math.msu.su/diffur/main_du_2010.pdf [in Russian].
- [3] Lapshin V. P., Turkin I. A. *Modelirovanie dinamiki formoobrazuyushchikh dvizhenii pri sverlenii glubokikh otverstii malogo diametra* [Modeling the dynamics of formative movements when drilling deep holes of small diameter]. *Vestnik Adygeiskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [The Bulletin of the Adyghe State University. Series "Natural-Mathematical and Technical Sciences"], 2012, no. 4 (110), pp. 226–233. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-dinamiki-formoobrazuyuschih-dvizheniy-pri-sverlenii-glubokih-otverstiy-malogo-diametra> [in Russian].
- [4] Agureev I.E., Atlas E.E. *Ispol'zovanie printsipov nelineinoi dinamiki pri issledovanii dissipativnykh modelei transportnykh protsessov v biofizicheskikh sistemakh* [Using the principles of nonlinear dynamics in the study of dissipative models of transport processes in biophysical systems]. *VNMT* [Journal of New Medical Technologies], 2007, no. 1, pp. 41–43. Available at: <http://cyberleninka.ru/article/n/i-spolzovanie-printsipov-nelineynoy-dinamiki-pri-issledovanii-dissipativnykh-modeley-transportnykh-protsessov-v-biofizicheskikh-sistemah> [in Russian].
- [5] Barinova Ye.V., Timbay I.A. *Issledovanie ploskogo dvizheniia otnositel'no tsentra mass spuskaemogo apparata s trigarmonicheskoi momentnoi kharakteristikoi pri vkhode v atmosferu* [Analysis of plane motion relative to the centre of mass of a descent capsule with the three-harmonic moment characteristics during its reentry]. *Vestnik SGAU* [Vestnik of Samara State Aerospace University], 2010, no. 1, pp. 9–19. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-ploskogo-dvizheniya-otnositelno-tsentra-mass-spuskaemogo-apparata-s-trigarmonicheskoy-momentnoy-harakteristikoy-pri> [in Russian].
- [6] Astashova I. V. *Kachestvennye svoystva reshenii kvazilineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Qualitative properties of solutions of quasilinear ordinary differential equations]. In: *Kachestvennye svoystva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza. Pod red. I.V. Astashovoi* [Qualitative properties of solutions of differential equations and related questions of spectral analysis. I.V. Astashova (Ed.)]. M.: IuNITI-DANA, 2012, pp. 22–288. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20908128> [in Russian].
- [7] Astashova I. V. *Primenenie dinamicheskikh sistem k issledovaniyu asimptoticheskikh svoystv reshenii nelineinykh differentsial'nykh uravnenii vysokikh poriadkov.* [Application of dynamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations]. *Sovremennaiia matematika i ee prilozheniia* [Journal of Mathematical Sciences], 2003, Vol. 8, pp. 3–33. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26344653> [in Russian].
- [8] Astashova I. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity. *Differential and Difference Equations with Applications. — Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. New York, N.Y., United States: New York, N.Y., United States, 2016, pp. 191–204. DOI: 10.1007/978-3-319-32857-7 [in English].
- [9] Vaidyanathan S. Lotka-Volterra population biology models with negative feedback and their ecological monitoring. *Int J PharmTech Res*, 2015, Vol. 8., no. 5., pp. 974–981. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/8086/92dd5826922b7be834c05e7a41994bb3e135.pdf> [in English].
- [10] Astashova I., Chebotaeva V., Cherepanov A. Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application phapl. *WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine*, 2018, Vol. 15, no. 12, pp. 112–118. ISSN / E-ISSN: 1109-9518 / 2224-2902. Available at: <http://www.wseas.org/multimedia/journals/biology/2018/a265908-043.php> [in English].
- [11] Cherepanov A.A. *Programmnyi kompleks PhaPl dlia avtomaticheskogo postroeniia i issledovaniia fazovykh portretov na ploskosti* [PhaPl: software to plot and research phase portraits automatically]. *Otkrytoe obrazovanie* [Open education], 2017, Vol. 21, no. 3, pp. 66–72. DOI: <https://doi.org/10.21686/1818-4243-2017-3-66-72> [in Russian].
- [12] Miller H., Hohn H. MIT Mathlets [Electronic resource] 2009. Available at: <http://mathlets.org/mathlets/> [in English].
- [13] Wolfram|Alpha: Computational Intelligence [Electronic resource] 2009. Available at: <https://www.wolframalpha.com/> [in English].
- [14] Savov I. SymPy in a PyPy.js shell [Electronic resource] 2017. Available at: https://minireference.com/static/tmp/pypyjs_sympy_demo/ [in English].

- [15] Cherepanov A. A. GitHub - phapl/phapl: smart tool to plot and research phase planes, offline and online [Electronic resource] 2018. Available at: <https://github.com/phapl/phapl> [in English].
- [16] Honda Y. Maxima on Android [Electronic resource] 2013. Available at: <https://sites.google.com/site/maximaonandroid/> [in English].
- [17] Wheeler, David A. "Why Open Source Software/Free Software (OSS/FS, FOSS, or FLOSS)? Look at the Numbers!" [Electronic resource] 2014. Available at: http://www.dwheeler.com/oss_fs_why.html [in English].
- [18] Cherepanov A. A. *O tipakh osobykh toчек dinamicheskoi sistemy opredelennogo vida* [About types of equilibrium points of dynamic system of a certain form]. In: *Materialy konferentsii, prokhodivshikh v ramkakh "Dnei studentcheskoi nauki MESI. Osen'-2014" Sbornik nauchnykh trudov, chast' 2 / Moskovskii gosudarstvennyi universitet ekonomiki, statistiki i informatiki* [Materials of the conferences held in the framework of "Days of Student Science of MESI. Autumn-2014" Collection of scientific papers, part 2. Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics]. M., 2015, pp. 259–265 [in Russian].

A.A. Cherepanov²

PHAPL WEB APPLICATION FOR AUTOMATIC BUILDING AND RESEARCH OF PHASE PORTRAITS ON PLANE

The article aims to document PhaPl that's a teaching web application to plot and research phase portraits of autonomous systems of 2 differential equations on a plane. The web application is very different compared with previously known programs: it has very easy graphical user interface and it gives clarity because it demonstrates all steps of solution. To get the full solution, it is enough to just enter a system to research. Initial conditions to plot phase trajectories are chosen automatically. Graphical representation of the phase plane is interactive. The web application is based on popular Free Software (SymPy, PyPy.js, MathJax, LZMA-JS). The web application is portable and works in web browsers that support JavaScript and canvas element of HTML5. The web application can be downloaded and used offline without connection to the Internet. The article describes advantages, disadvantages and peculiar properties of the web application. The software is deployed in Plekhanov Russian University of Economics since 2018.

Key words: phase plane, SymPy, Free Software, PyPy.js, MathJax, LaTeX, web application, educational software, linear system, non-linear system, phase portrait.

Citation. Cherepanov A.A. *Veb-prilozhenie PhaPl dlia avtomaticheskogo postroeniia i issledovaniia fazovykh portretov na ploskosti* [PhaPL web application for automatic building and research of phase portraits on plane]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 3, pp. 41–52. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-41-52> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 20/IX/2018.
The article received 20/IX/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Cherepanov Aleksey Alexandrovich (aleksey.4erepanov@gmail.com), Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics, 36, Stremyanny lane, Moscow, 117997, Russian Federation.

В.В. Зайцев, Э.Ю. Федюнин¹

МОДЕЛЬ АВТОКОЛЕБАНИЙ БЕЗ ГАРМОНИК ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ

Нелинейность автоколебательной системы, ограничивающая амплитуду генерируемого сигнала, является источником высших гармоник основной частоты. Гармоники искажают форму автоколебаний и понижают стабильность их частоты. В работе предложена математическая модель генерации автоколебаний, свободных от высших гармоник — строго монохроматических автоколебаний. Модель основана на популярном в прикладной теории нелинейных колебаний методе эквивалентной (гармонической) линеаризации. Численная реализация модели в дискретном времени позволила сформулировать два алгоритма генерации монохроматических автоколебаний. Один из них включает в себя процедуру численного интегрирования задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Другой — воспроизводит процессы в дискретной динамической системе, спроектированной по аналоговой модели-прототипу. Свойство монохроматичности дискретных автоколебаний подтверждено в рамках численного эксперимента.

Ключевые слова: автоколебательная система, гармоническая линеаризация, дискретное время, разностные уравнения, гармоническая аппроксимация скорости, спектр автоколебаний.

Цитирование. Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю. Модель автоколебаний без гармоник основной частоты // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59>.

Введение

В автогенераторах квазигармонических колебаний (автогенераторах томсоновского типа) функцию ограничения амплитуды автоколебаний выполняет нелинейность [1; 2]. Одновременно с этим она является причиной генерации высших гармоник основной частоты, которые ухудшают динамические характеристики и снижают стабильность частоты автогенераторов. В аналоговой электронике основной способ снижения уровня гармоник автоколебаний — это повышение добротности колебательной системы автогенератора. Но полностью избавиться от гармонических составляющих на практике не удается.

Вместе с тем, в рамках приближенного анализа автоколебательных систем (АКС) асимптотическими методами теории нелинейных колебаний [3] гармоническое приближение получило широкое распространение, особенно в инженерной практике [4]. Представляется, что его можно использовать для разработки численной модели генератора строго монохроматических автоколебаний. При физически обоснованной процедуре дискретизации эта модель дает нам эффективный алгоритм генерации монохроматического сигнала в дискретном времени.

В настоящей статье заявленный подход к моделированию автоколебаний реализован на примере томсоновского генератора с кубической нелинейностью.

1. Гармонический автогенератор в непрерывном времени

В качестве исходной примем модель автогенератора томсоновского типа, определяемую уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = p \frac{\omega_0}{Q} \frac{d}{dt} \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right), \quad (1.1)$$

¹© Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю., 2018

Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@samsu.ru), кафедра радиопизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Федюнин Эдуард Юрьевич (fedyunin_eduard@mail.ru), Акционерное общество "Ракетно-космический центр «Прогресс», 443009, Российская Федерация, г. Самара, ул. Земеца, 18.

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность линейного резонатора, p – параметр превышения порога генерации (порог: $p = 1$). Отметим также, что осцилляции $x(t)$ в уравнении (1.1) нормированы на характерный масштаб нелинейности.

Один из способов реализации гармонического приближения к анализу уравнений вида (1.1) является метод гармонической линеаризации [3]. Он состоит в замене нелинейных слагаемых в уравнении движения системы формально линейными, но зависящими от амплитуды колебаний в предполагаемом решении. По отношению к (1.1) эта процедура выглядит следующим образом.

Для решения

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) = a \cos \psi$$

разложение в ряд Фурье нелинейной функции

$$G(x) = x - \frac{1}{3}x^3$$

в правой части уравнения (1.1) имеет вид

$$G(a \cos \psi) = \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) a \cos \psi - \frac{1}{12}a^3 \cos 3\psi.$$

Это выражение заменяется приближенным

$$G(a \cos \psi) = \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) a \cos \psi = S(a^2)x$$

и используется в (1.1). В результате получается линеаризованное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = p \frac{\omega_0}{Q} S(a^2) \frac{dx}{dt}. \quad (1.2)$$

Заметим также, что помимо обнуления высших гармоник, генерируемых нелинейностью, в рамках метода учитывается медленность амплитуды $a(t)$ (по сравнению с $\cos(\psi(t))$). Поэтому в правой части уравнения (1.2) амплитуда не дифференцируется.

Предполагая далее численное интегрирование задачи Коши для дифференциального уравнения (1.2) и выборку из решения с интервалом Δ , введем в уравнение (1.2) безразмерную временную переменную $\tau = t/\Delta$:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 2\pi\nu p S(a^2) \frac{dx}{d\tau}. \quad (1.3)$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0/\omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты выборки $\omega_d = 2\pi/\Delta$; $\nu = \omega_0/Q$ – полоса резонатора.

Учтем теперь, что для гармонических колебаний с частотой Ω_0 выполняется равенство

$$a^2 = x^2(\tau) + \left(\frac{1}{2\pi\Omega_0} \frac{dx}{d\tau}\right)^2 = x^2(\tau) + y^2(\tau) \quad (1.4)$$

и введем в рассмотрение систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 2\pi\Omega_0 y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -2\pi\Omega_0 x - 2\pi\nu (1 - pS(x^2 + y^2)) y. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В приближении медленно меняющихся амплитуд (ММА) решение системы (1.5), очевидно, соответствует исходному предположению:

$$x(\tau) = a(\tau) \cos(2\pi\Omega_0\tau),$$

и не содержит высших гармоник частоты Ω_0 . При этом зависимость амплитуды установившихся автоколебаний от параметра превышения порога генерации описывается простой формулой:

$$a_{st} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{p}}. \quad (1.6)$$

Обозначив через $\hat{R} \left\{ F(x, y), \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \right\}$ разностный одношаговый оператор интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.5) с вектором правых частей

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 2\pi\Omega_0 y \\ -2\pi\Omega_0 x - 2\pi\nu (1 - pS(x^2 + y^2)) y \end{pmatrix}$$

на шаге $\Delta_\tau = t_k - t_{k-1}$, численную модель АКС представим в виде

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \hat{R} \left\{ F(x, y), \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.7)$$

Приведем ряд результатов моделирования. На рис. 1, *а* показан амплитудный спектр автоколебаний в АКС (1.5) с параметрами $\Omega_0 = 0.22$, $Q = 20$ и $p = 15$. Интегрирование в (1.7) с шагом $\Delta_\tau = 1/M$ при $M = 4$ проведено методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Для сравнения на рис. 1, *б* представлен амплитудный спектр для автогенератора (1.1) с теми же параметрами. Оценки спектров проведены методом дискретного (быстрого) преобразования Фурье по временным рядам $\{x_k; k = 0, K - 1\}$ длины $K = 8192$.

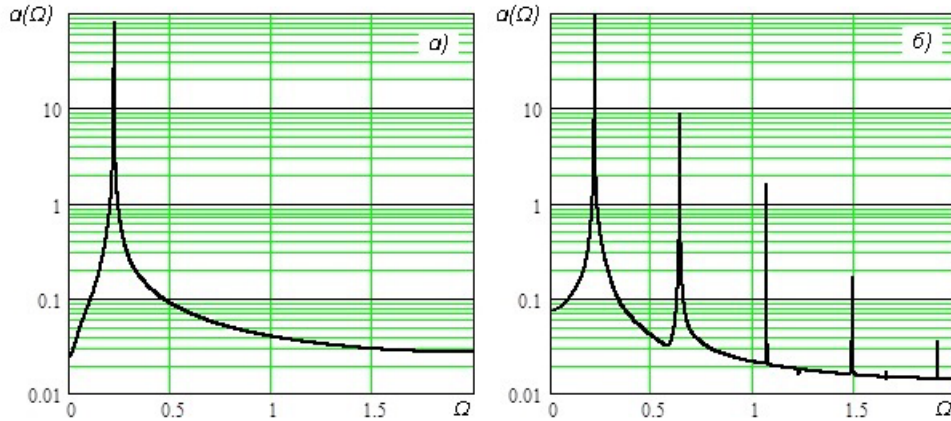


Рис. 1. Амплитудные спектры автоколебаний

Сопоставление спектров на рис. 1 наглядно демонстрирует монохроматичность автоколебаний в АКС (1.5) и обогащение гармониками автоколебаний в АКС (1.1). Качественно это подтверждают фазовые портреты АКС на рис. 2: предельный цикл (1.5) в форме окружности соответствует гармоническим автоколебаниям, а сильно деформированный эллипс (1.1) – негармоническим. Радиус окружности $a_{st} = 1.932$, что совпадает с вычислениями по формуле (1.6).

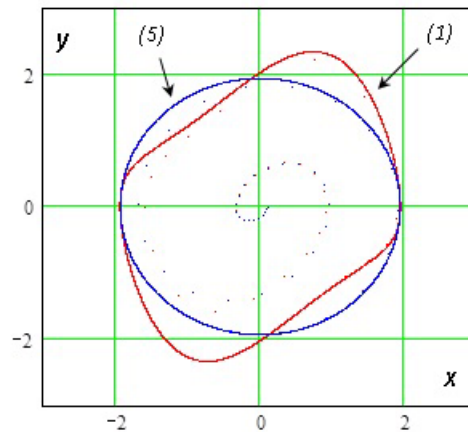
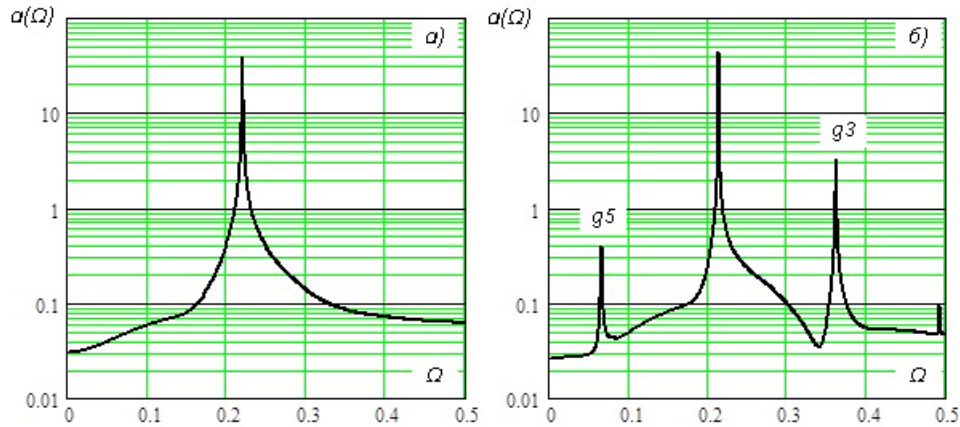


Рис. 2. Фазовые портреты автоколебательных систем

Таким образом, численный эксперимент подтверждает, что, в существенно нелинейном режиме с высоким превышением порога генерации ($p = 15$) автоколебания в системе (1.5) остаются монохроматическими.

Отсутствие гармоник основной частоты в спектре АКС (1.5) позволяет формировать временной ряд дискретных автоколебаний путем выборки $\{x[n] = x_{nM}; n = 0, N - 1\}$ из численного решения $\{x_k\}$. Рис. 3, *а*, на котором приведен амплитудный спектр сигнала $x[n]$, демонстрирует известный факт сохранения спектрального состава дискретного сигнала при выполнении условий теоремы Котельникова. В отличие от этого, показанный на рис. 3, *б*, амплитудный спектр выборки из решения уравнения (1.1), претерпевает существенные изменения по отношению к оригиналу на рис. 3, *а*. Изменения выражаются в эффекте подмены частот третьей ($g3$), пятой ($g5$) и других гармоник.

Рис. 3. Амплитудные спектры выборок $x[n]$

Отметим, что подмена частот гармоник, происходящая в процессе вычислений по алгоритму генерации, существенным образом влияет на генерируемый временной ряд [5].

2. Алгоритм генерации дискретных монохроматических автоколебаний

Алгоритм генерации автоколебаний в дискретном времени (1.7) является следствием формального использования конечно-разностного метода при решении задачи численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.5). Представим теперь "физически обоснованный" подход к разработке алгоритма.

Уравнение (1.3) запишем в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dx}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 4\pi^2\Omega_0^2 \frac{p}{Q} S(a^2)y. \quad (2.1)$$

Будем использовать требование о сохранении импульсного отклика $h(\tau)$ линейного резонатора, описываемого левой частью (2.1), в ходе временной дискретизации. При этом правую часть уравнения (2.1) формально предлагается считать внешним воздействием линейный резонатор. Импульсный отклик (импульсная характеристика) определяется уравнением

$$\frac{d^2h}{d\tau^2} + 2\pi\nu \frac{dh}{d\tau} + 4\pi^2\Omega_0^2 h = 4\pi^2\Omega_0^2 \delta(\tau).$$

Последовательность отсчетов $h[n] = h(\tau_n)$ на временной сетке $\tau_n = n$ формирует импульсную характеристику линеаризованной ДВ-системы с прототипом (2.1):

$$h[n] = 2\pi\Omega_0 \exp(-\pi\nu n) \sin(2\pi\Omega_0 n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Дискретное преобразование Фурье последовательности (2.2) определяет частотную характеристику

$$H(j\Omega) = \frac{2\pi\Omega_0 \alpha \sin(2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega)}{1 - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega) + \alpha^2 \exp(-j4\pi\Omega)}$$

которая, в свою очередь, позволяет представить ДВ-систему в рекурсивной форме

$$\begin{aligned} x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) x[n-1] + \alpha^2 x[n-2] = \\ = 2\pi\alpha\nu p \sin(2\pi\Omega_0) S(a^2[n-1])y[n-1], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\alpha = \exp(-\pi\nu)$ – параметр консервативности.

Разностное уравнение (2.3) содержит производную $y[n] = (dx/d\tau)_{\tau=n}/2\pi\Omega_0$. Для ее определения воспользуемся выражением

$$\sin(2\pi\Omega_0) y[n] = \cos(2\pi\Omega_0) x[n] - x[n-1]. \quad (2.4)$$

Оно является точным для гармонических колебаний с частотой Ω_0 , а для квазигармонических – может рассматриваться как гармоническая аппроксимация скорости. Выражение (2.4) и равенство (1.4)

позволяют вычислять квадрат амплитуды $w[n] = a^2[n]$ по мгновенным значениям осцилляций:

$$w[n] = \frac{1}{\sin^2(2\pi\Omega_0)} (x^2[n] - 2 \cos(2\pi\Omega_0) x[n]x[n-1] + x^2[n-1]). \quad (2.5)$$

Таким образом, с учетом выражений (2.4) и (2.5) уравнение (2.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} x[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) x[n-1] + \alpha^2 x[n-2] = \\ = \gamma S(w[n-1]) (\cos(2\pi\Omega_0) x[n-1] - x[n-2]), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\gamma = 2\pi\alpha\nu\rho$ – параметр глубины обратной связи.

Отметим, что лишь одно из двух выражений (2.5) и (2.6), описывающих генерацию ДВ-автоколебаний, является уравнением динамической системы второго порядка – уравнение (2.6). Второе – уравнение (2.5) описывает безынерционное нелинейное преобразование. Поэтому в целом порядок динамической системы (2.5)–(2.6) равен двум.

Численный эксперимент с автоколебательной системой (2.5)–(2.6) подтверждает монохроматичность генерируемого дискретного сигнала $x[n]$. В частности, характеристики автоколебаний в системе с указанными выше параметрами с графической точностью совпадают с приведенными на рис. 1, а, рис. 2 и рис. 3, а. Вместе с тем, алгоритм генерации (2.5)–(2.6) обладает большей вычислительной эффективностью, чем алгоритм (1.7). В качестве обоснования этого утверждения на рис. 4 приведены графики процессов установления амплитуды автоколебаний в системе с параметрами $\Omega_0 = 0.22$, $Q = 20$ и $p = 5$. На рис. 4, а символом "o" обозначены результаты расчетов по (1.7) при $M = 2$, а символом "□" – расчетов по (2.5)–(2.6). Непрерывной линией показано решение укороченного уравнения

$$\frac{da}{d\tau} = -\pi\nu \left(1 - p \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right) \right) a, \quad (2.7)$$

полученного методом ММА для системы (1.5). Как видно из графиков, результаты моделирования по двум описанным алгоритмам находятся в хорошем количественном соответствии. Кроме того, они, как и ожидалось, соответствуют приближению ММА.

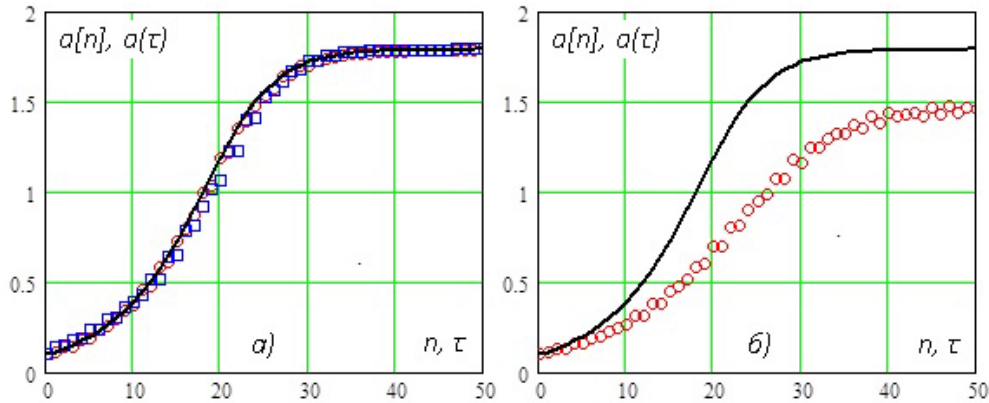


Рис. 4. Процессы установления амплитуд автоколебаний

В то же время, при $M = 1$ расчет по алгоритму (1.7) дает график процесса $a[n]$ (рис. 4, б), существенно отличающийся от приближения ММА и, соответственно, от графика, рассчитанного с помощью алгоритма (2.5)–(2.6). Таким образом, приведенный пример показывает, что в (1.7) следует избегать значений $M = 1$, реализуемых в (2.5)–(2.6). Следовательно, при генерации монохроматических автоколебаний в дискретном времени алгоритм (2.5)–(2.6) имеет большую вычислительную эффективность, чем алгоритм (1.7).

Заключение

Предложенный метод синтеза ДВ-генераторов со строго гармоническими автоколебаниями не связан с моделью кубической нелинейности системы-прототипа. Крутизна $S(a^2)$ в уравнении (1.2) должна лишь допускать наличие стационарного режима автоколебаний. Кроме того, в дискретном времени используется аппроксимация (2.4) скорости осцилляций и основанная на ней оценка (2.5) амплитуды (мгновенной мощности) автоколебаний.

Синтезированные ДВ-генераторы в форме (2.5)–(2.6) можно использовать в качестве нелинейных функциональных узлов в численных моделях сложных радиоэлектронных устройств. Кроме того, они могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов.

Литература

- [1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
- [2] Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952. 272 с.
- [3] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е, испр. и доп. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [4] Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [5] Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23. № 6. С. 40–46. DOI: <http://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-6-40-46>.

References

- [1] Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.E. *Teoriia kolebanii* [Theory of oscillatoins]. M.: Nauka, 1981, 568 p. [in Russian].
- [2] Teodorchik K.F. *Avtokolebatel'nye sistemy* [Self-oscillating systems]. M.: Gostekhizdat, 1952, 272 p. [in Russian].
- [3] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii. Izd. 4-e, ispr. i dop.* [Asymptotical methods in nonlinear oscillations theory. 4th edition, revised and enlarged]. M.: Nauka, 1974, 504 p. [in Russian].
- [4] Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. *Teoriia kolebanii v radiotekhnike* [Theory of oscillations in radio engineering]. M.: Nauka, 1984, 320 p. [in Russian].
- [5] Zaitsev V.V., Stulov I.V. *O vliianii podmenennykh garmonik na dinamiku avtokolebanii v diskretnom vremeni* [About influence of the changed harmonics on dynamics of self-oscillations in discrete time]. *Izvestiia vuzov. Prikladnaia nelineinaia dinamika* [Izvestiya VUZ. Appled nonlinear dynamics], 2015, Vol. 23, no 6, pp. 40–46. DOI: <http://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-6-40-46> [in Russian].

V. V. Zaitsev, E. Yu. Fedyunin²

MODEL OF SELF-OSCILLATIONS WITHOUT HARMONICAS OF THE BASE FREQUENCY

The nonlinearity of self-oscillatory system limiting amplitude of the generated signal is a source of the higher harmonicas of the base frequency. Harmonicas distort a form of self-oscillations and lower stability of their frequency. In the work the mathematical model of generation of self-oscillations, free from the highest harmonicas — strictly monochromatic self-oscillations is offered. The model is based on a method of equivalent (harmonious) linearization, popular in the applied theory of nonlinear oscillations. Numerical realization of the model in discrete time has allowed to formulate two algorithms of generation of monochromatic self-oscillations. One of them includes the procedure of numerical integration of a Cauchy problem for the system of ordinary differential equations. Another — reproduces processes in the discrete dynamic system designed on analog model-prototype. The monochromaticity of discrete self-oscillations is confirmed within the numerical experiment.

Key words: self-oscillatory system, harmonious linearization, discrete time, difference equations, harmonious approximation of speed, spectrum of self-oscillations.

Citation. Zaitsev V.V., Fedyunin E.Yu. *Model' avtokolebanii bez garmonik osnovnoi chastoty* [Model of self-oscillations without harmonicas of the base frequency]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 24/IX/2018.
The article received 24/IX/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Zaitsev Valery Vasilievich (zaitsev@samsu.ru), Department of Radiophysics, Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Fedyunin Eduard Yurievich (fedyunin_eduard@mail.ru), Joint-Stock Company Progress Rocket Space Centre, 18, Zemetsa Street, Samara, 443009, Russian Federation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Гладков Сергей Октябрьнович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладные программные средства и математические методы, Московский Авиационный Институт. Тема канд. дис.: "К теории релаксационных процессов в магнетиках при свхнизких температурах" (защ. в 1981 г.); тема докт. дис.: "Теоретические исследования динамики ядерных спинов и других неравновесных явлений в структурах со сверхтонким взаимодействием" (защ. в 1995 г.). Автор и соавтор 203 научных работ, в т. ч. монографий "Физика пористых структур" (1997 г.), "Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства" (1999 г, 2017 г.), "Dielectric properties of porous media" (2003 г.), "Теоретические свойства физических фракталов и их приложение к практическим задачам" (2017 г.).

Область научных интересов: физика магнитных явлений, теоретическая гидродинамика, физика свойств неоднородных структур, кинетические явления в твердых телах, теория гравитации.

Богданова Софья Борисовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладные программные средства и математические методы, Московский Авиационный Институт. Тема канд. дис.: "Исследование некоторых физических свойств фрактальных структур" (защ. в 2013 г.). Автор и соавтор 23 научных работ, в т. ч. монографии "Теоретические свойства физических фракталов и их приложение к практическим задачам" (2017 г.).

Область научных интересов: теоретическая физика, физика магнитных явлений.

Иванова Ольга Александровна, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и геометрии, Южный федеральный университет. Тема канд. дис.: "Непрерывные линейные обратные к операторам сужения аналитических функций и их производных" (защ. в 2013 г.). Автор и соавтор 20 научных работ.

Область научных интересов: ряды экспонент и квазиполиномов, линейные непрерывные правые и левые обратные, последовательности Айделхайта, операторы свертки, оператор Поммье.

Мелихов Сергей Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики, Южный федеральный университет; ведущий научный сотрудник отдела математического анализа Южного математического института ВЦ РАН. Тема канд. дис.: "Некоторые вопросы теории линейных операторов в пространствах числовых последовательностей" (защ. в 1986 г.); тема докт. дис.: "Правые обратные к операторам представления рядами экспонент и свертки" (защ. в 2003 г.). Автор и соавтор 70 научных работ.

Область научных интересов: ряды экспонент, операторы свертки, линейные непрерывные правые и левые обратные, операторы сдвига, проективные описания.

Керэфов Марат Асланбиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной"

(защ. в 2000 г.). Автор и соавтор около 30 научных работ.

Область научных интересов: дифференциальные уравнения дробного порядка, математическая физика.

Нахушева Фатима Мухамедовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области" (защ. в 1998 г.). Автор и соавтор около 30 научных работ.

Область научных интересов: математическая физика, численные методы решения задач математической физики.

Геккиева Сакинат Хасановна, канд. физ.-мат. наук, зав. отделом математического моделирования геофизических процессов Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени" (защ. в 2003 г.). Автор и соавтор более 40 научных работ.

Область научных интересов: краевые задачи для уравнений параболического и смешанного типов с дробной производной.

Яковлева Юлия Олеговна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, Самарский государственный технический университет, доцент. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка" (защ. в 2013 г.). Автор и соавтор 37 научных работ.

Область научных интересов: дифференциальные уравнения, задача Коши, задача Гурса.

Лосанова Фатима Мухамедовна, научный сотрудник лаборатории Синергетических Института прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук" (сокращенно ИПМА КБНЦ РАН). Автор 33 научных работ.

Область научных интересов: математическое моделирование биологических процессов, уравнения в частных производных дробного порядка.

Черепанов Алексей Александрович, аспирант кафедры РЭУ им. Г. В. Плеханова, в 2012 г. окончил Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ) по специальности математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Область научных интересов: дифференциальные уравнения, свободное программное обеспечение.

Зайцев Валерий Васильевич, канд. физ.-мат. наук, проф. кафедры радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева. Тема канд. дис.: "Флуктуации в автоколебательных системах на лавинно-пролетных и инжекционно-пролетных диодах" (защита в 1980 г.). Автор и соавтор более 200 научных работ.

Область научных интересов: нелинейная динамика, статистическая радиофизика, численное моделирование в радиофизике.

Федюнин Эдуард Юрьевич, инженер акционерного общества "Ракетно-космический центр "Прогресс", в 2017 г. окончил аспирантуру Самарского националь-

ного исследовательского университета имени академика С.П.Королева по специальности "радиофизика".

Область научных интересов: автоколебательные системы, численное моделирование в радиофизике.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Gladkov Sergey Oktyabrinovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute. Subject of Candidate's thesis: "On the theory of relaxation processes in magnetic materials at low temperatures" (1981); subject of Doctoral thesis: "Theoretical studies of the dynamics of nuclear spins and other non-equilibrium phenomena in structures with hyperfine interaction" (1995). Author and coauthor of 203 scientific papers, including monographs "Physics of Porous Structures" (1997), "Physics of Composites: thermodynamic and dissipative properties" (1999, 2017), "Dielectric properties of porous media (2003)", "Theoretical properties of physical fractals and their application to practical problems" (2017).

Research interests: physics of magnetic phenomena, theoretical hydrodynamics, physical nature of heterogeneous patterns, kinetic phenomena in a solid, gravitational theory.

Bogdanova Sofya Borisovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute. Subject of Candidate's thesis: "Study of some physical properties of fractal structures" (2013). Author and coauthor of 23 scientific papers, including monographs "Theoretical properties of physical fractals and their application to practical problems" (2017).

Research interests: theoretical physics, physics of magnetic phenomena.

Ivanova Olga Alexandrovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lectures at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Southern Federal University. Subject of Candidate's thesis: "Continuous linear inverses to restriction operators of analytic functions and their derivatives" (2013). Author and coauthor of 20 scientific works.

Research interests: series of exponentials and quasipolynomials, continuous linear right and left inverses, Eidelheit sequences, convolution operators, Pommiez operator.

Melikhov Sergey Nikolaevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University; leading researcher at the Department of Mathematical Analysis, Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences. Subject of Candidate's thesis: "Some questions of linear operator theory in spaces of number sequences" (1986); subject of Doctoral thesis: "Right inverses to representation operators by exponential series and convolution operators". Author and coauthor of 70 scientific works.

Research interests: exponential series, convolution operators, continuous linear right and left inverses, shift operators, projective descriptions.

Kerefov Marat Aslanbievich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named

after H. M. Berbekov. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for the modified moisture transfer equation with time fractional derivative" (2000). Author and coauthor of 30 scientific works.

Research interests: differential equations of a fractional order, mathematical physics.

Nakhusheva Fatima Mukhamedovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for the equation of diffusion of a fractional order in multidimensional area" (1998). Author and coauthor of 30 scientific works.

Research interests: mathematical physics, numerical methods of solution of problems of mathematical physics.

Gekkieva Sakinat Khasanovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for the loaded parabolic equations with time fractional derivative" (2003). Author and coauthor of more than 40 scientific works.

Research interests: boundary value problems for the equations of parabolic and mixed types from a fractional derivative.

Yakovleva Julia Olegovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for systems of hyperbolic equations of the third and fourth order" (2013). Author and coauthor of 37 scientific papers.

Research interests: differential equations, Cauchy problem, Goursa problem

Cherepanov Aleksey Alexandrovich, postgraduate student of Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics, in 2012 graduated from Moscow State University of Economics, Statistics, and Informatics (MESI) with a degree in Computer Science.

Research interests: differential equations, free software.

Zaitsev Valery Vasilievich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Radiophysics, Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis "Fluctuations in self-oscillatory systems on IMPATT and BARITT diodes" (1980). Author and coauthor of more than 200 scientific works.

Research interests: nonlinear dynamics, statistical radiophysics, numerical modeling in radiophysics.

Fedyunin Eduard Yurievich, engineer of Joint Stock Company Space Rocket Centre Progress, in 2017 has completed postgraduate studies at Samara National Research University.

Research interests: self-oscillatory systems, numerical modeling in radiophysics.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским государственным университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru> <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>.

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: nsvestnik@samsu.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций \TeX а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами \LaTeX а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("--")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подбором шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недоступны.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

**Уважаемые авторы, просим предоставить сведения
для размещения в журнале
на странице "Сведения об авторах"**

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры, в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности ".....".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of, in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in ".....".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.