

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Григорьева А.И., Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений составного типа с квази-параболическим оператором переменного направления эволюции в старшей части и с разрывными коэффициентами	7
Дюжева А.В. О задаче с нелокальными условиями для уравнения IV порядка	18
Жураев Т.Ф., Жувонов К.Р., Рузиев Ж.Х. Свойства формы вероятностного пространства и его подпространств	24
Жураев Т.Ф., Рахматуллаев А.Х., Турсунова З.О. Свойства подфункторов функтора вероятностных мер в категориях <i>Сотр</i>	28
Шамолин М.В. О движении маятника в многомерном пространстве. Часть 3. Зависимость поля сил от тензора угловой скорости	33

Механика

Косыгина Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент	55
---	----

Математические методы в естественных науках

Мамчуев М.О. Модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда с учетом процесса рекомбинации в слоях с фрактальной структурой	67
<i>Сведения об авторах</i>	72
<i>Требования к оформлению статей</i>	74

CONTENTS

Mathematics

Grigorieva A.I., Kozhanov A.I. Boundary value problems for composite type equations with a quasiparabolic operator in the leading part having the variable direction of evolution and discontinuous coefficients	7
Dyuzheva A.V. On a problem with non-local conditions for the equations of the IV order	18
Zhuraev T.F., Zhuvonov Q.R., Ruziev Zh.Kh. Shape properties of the space of probability measures and its subspaces	24
Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O. Some values subfunctors of functor probabilities measures in the categories <i>Comp</i>	28
Shamolin M.V. On a pendulum motion in multi-dimensional space. Part 3. Dependence of force fields on the tensor of angular velocity	33

Mechanics

Kosygina L.N. Asymptotic representation of the stress field near the crack tip of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches: theoretical study and computational experiment	55
--	----

Mathematical Methods in Natural Sciences

Mamchuev M.O. Model of the drift-diffusion transport of charge carriers considering recombination in layers with fractal structure	67
<i>Information about the authors</i>	72
<i>Requirements to the design of articles</i>	74

А.И. Григорьева, А.И. Кожанов¹

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ В СТАРШЕЙ ЧАСТИ И С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ²

Изучается разрешимость краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений соболевского типа со знакопеременной функцией, которая имеет разрыв первого рода в точке ноль. Также данная функция меняет знак в зависимости от знака переменной x . Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение. Устанавливается наличие необходимых априорных оценок для решений изучаемых задач.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, переменное направление эволюции, краевые задачи, дифференциальный оператор, регулярные решения, существование, единственность, априорные оценки.

Цитирование. Григорьева А.И., Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений составного типа с квазипараболическим оператором переменного направления эволюции в старшей части и с разрывными коэффициентами // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 7–17. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-7-17>.

1. Постановка задач

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач с внутренними условиями сопряжения (склейки) для дифференциальных уравнений соболевского (составного) типа

$$D_t \left((-1)^p D_t^{2p+1} u - Au \right) + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

в которых $x \in (-1, 1)$, $(t \in (0, T))$, $0 < T < +\infty$, p есть целое неотрицательное число, $D_t^{2p+1} u = \frac{\partial^{2p+1}}{\partial t^{2p+1}} u$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, A — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $u(x, t)$ определяется равенством

$$Au = \frac{\partial}{\partial x} (a_0(x)u_x) + a_1(x)u.$$

Особенностями изучаемых уравнений являются, во-первых, то, что функция $a_0(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, во-вторых же — то, что функция $a_0(x)$ имеет разные знаки при $x < 0$ и $x > 0$.

Наличие в уравнении (1) разрывного коэффициента влечет необходимость задания на линии разрыва условий сопряжения (склейки). Краевые задачи с условиями подобного рода достаточно хорошо изучены для классических эллиптических, параболических и гиперболических уравнений второго порядка — см. работы [1–5], из работ последнего времени отметим статьи [6–13]. Отметим также следующее: условия сопряжения (склейки) естественным образом возникают при исследовании разрешимости краевых задач для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, а также для параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции — см. работы [14–24].

¹© Григорьева А.И., Кожанов А.И., 2018

Григорьева Александра Ивановна (shadrina_ai@mail.ru), кафедра высшей математики, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, 677000, Российская Федерация, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.

Кожанов Александр Иванович (kozhanov@math.nsc.ru), Институт математики им. С.Л. Соболева, Сибирское отделение АН, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Академика Коптюга, 4.

²Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-51-41009.

Уравнение (1) при $p = 0$ и в случае знакопостоянной функции $a_0(x)$ представляет собой уравнение соболевского типа называемое также псевдогиперболическим уравнением [25–27]; краевые задачи для таких уравнений достаточно хорошо изучены. Наоборот, если $a_0(x)$ есть разрывная знакопеременная функция, то как в случае $p = 0$, так и в случае $p > 0$ краевые задачи для уравнений (1) в такой ситуации ранее не изучались. Частично восполнить этот пробел и предполагают авторы в настоящей работе.

Уравнение (1) имеет модельный вид. Возможные обобщения представленных ниже результатов на более общие уравнения будут описаны в конце работы.

Пусть Q , Q^+ , Q^- и Q_1 есть множества

$$\begin{aligned} Q &= \{(x, t) : -1 < x < 1, 0 < t < T\}, \\ Q^+ &= \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}, \quad Q^- = \{(x, t) : -1 < x < 0, 0 < t < T\}, \\ Q_1 &= Q^+ \cup Q^-. \end{aligned}$$

Далее, пусть α и β есть заданные действительные числа, $a_0(x)$, $a_1(x)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in [-1, 1]$ и $(x, t) \in \bar{Q}$ соответственно, причем для функции $a_0(x)$ выполняется условие

$$\begin{aligned} a_0(x) &\in C^1([0, 1]), \quad a_0(x) > 0 \text{ при } x \in [0, 1], \quad a_0(x) \in C^1([-1, 0]), \\ a_0(x) &< 0 \text{ при } x \in [-1, 0), \quad a_0(-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} a_0(x) < 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Всюду ниже будем рассматривать случай $p \geq 1$, о случае же $p = 0$ скажем в конце работы.

Через D_t^k будем обозначать производную $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ (k — целое неотрицательное число, $D_t^1 = D_t$).

Краевая задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0, x \in (0, 1)} = 0, \quad k = 0, \dots, p+1, \quad (3)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0, x \in (-1, 0)} = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (4)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T, x \in (0, 1)} = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (5)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T, x \in (-1, 0)} = 0, \quad k = 0, \dots, p+1, \quad (6)$$

а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = \alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \beta u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (7)$$

Краевая задача II: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (3), (5) и (6), условия сопряжения (7), а также условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0, x \in (-1, 0)} = 0, \quad k = p+2, \dots, 2p+1. \quad (8)$$

Краевая задача III: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (3), (4) и (6), условия сопряжения (7), а также условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T, x \in (0, 1)} = 0, \quad k = p+2, \dots, 2p+1. \quad (9)$$

Краевая задача IV: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (3), (6), (8) и (9), а также условия сопряжения (7).

Определим функциональное пространство, в котором будет установлено существование и единственность решений краевых задач I–IV.

Определим вначале пространства $V(Q^+)$ и $V(Q^-)$:

$$\begin{aligned} V(Q^+) &= \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^2(Q^+), \quad D_t v_{xx}(x, t) \in L_2(Q^+), \\ &\quad D_t^{2p+2} v(x, t) \in L_2(Q^+)\}, \\ V(Q^-) &= \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^2(Q^-), \quad D_t v_{xx}(x, t) \in L_2(Q^-), \\ &\quad D_t^{2p+2} v(x, t) \in L_2(Q^-)\}. \end{aligned}$$

Введем в пространствах $V(Q^+)$ и $V(Q^-)$ нормы:

$$\|v\|_{V(Q^+)} = \left(\|v\|_{W_2^2(Q^+)}^2 + \|D_t v_{xx}\|_{L_2(Q^+)}^2 + \|D_t^{2p+2} v\|_{L_2(Q^+)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{V(Q^-)} = \left(\|v\|_{W_2^2(Q^-)}^2 + \|D_t v_{xx}\|_{L_2(Q^-)}^2 + \|D_t^{2p+2} v\|_{L_2(Q^-)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, определим пространство V_0 :

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V(Q^+), v(x, t) \in V(Q^-)\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_0} = \left(\|v\|_{V(Q^+)}^2 + \|v\|_{V(Q^-)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Именно пространство V_0 с этой нормой и будет основным пространством в настоящей работе; очевидно, что данное пространство будет банаховым.

2. Единственность решений краевых задач I–IV

Прежде чем доказывать теорему единственности, заметим, что для функций $v(x, t)$, принадлежащих пространству $V(Q^+)$ и таких, что $v(x, 0) = 0$ при $x \in (0, 1)$, выполняется неравенство

$$\int_{Q^+} v_x^2 dx dt \leq \frac{T^2}{2} \int_{Q^+} v_{xt}^2 dx dt; \quad (10)$$

Аналогично, для функций $v(x, t)$, принадлежащих пространству $V(Q^-)$ и таких, что $v(x, T) = 0$ при $x \in (-1, 0)$, имеет место неравенство

$$\int_{Q^-} v_x^2 dx dt \leq \frac{T^2}{2} \int_{Q^-} v_{xt}^2 dx dt. \quad (11)$$

Определим числа a^+_0 и a^-_0 :

$$a^+_0 = \min_{[0,1]} a_0(x), \quad a^-_0 = \sup_{[-1,0]} a_0(x).$$

Теорема 1. Пусть выполняются условие (A), а также условия

$$\alpha\beta > 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_1(x) \in C([-1, 0]), \quad a_1(x) \geq 0 \text{ при } x \in [-1, 0], \\ a_1(x) \in C([0, 1]), \quad a_1(x) \leq 0 \text{ при } x \in [0, 1]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$c(x, t) = c_1(x, t) + c_2(x, t), \quad c_i(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad i = 1, 2; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} xc_{1t}(x, t) \leq 0 \text{ при } (x, t) \in \bar{Q}, \quad x \neq 0, \quad c_1(x, 0) \geq 0 \text{ при } x \in [-1, 0], \\ c_1(x, T) \geq 0 \text{ при } x \in [0, 1], \quad \sqrt{2}|a^-_0| - T \max_{-1 \leq x \leq 0, 0 \leq t \leq T} |c_2(x, t)| > 0, \\ \sqrt{2}a^+_0 - T \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |c_2(x, t)| > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда каждая из задач I, II, III или IV не может иметь в пространстве V_0 более одного решения.

Доказательство. Положим

$$\gamma = -\frac{\beta a_0(+0)}{\alpha a_0(-0)}.$$

Пусть в уравнении (1) выполняется $f(x, t) \equiv 0$, и пусть $u(x, t)$ есть решение одной из задач I, II, III или IV с такой правой частью. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q^+} \left[D_t \left((-1)^p D_t^{2p+1} u - Au \right) + cu \right] u_t dx dt - \\ - \gamma \int_{Q^-} \left[D_t \left((-1)^p D_t^{2p+1} u - Au \right) + cu \right] u_t dx dt = 0. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям с использованием соответствующих краевых условий одной из задач I, II, III или IV, а также с использованием условий (12) и (13) это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[D_t^{p+1} u(x, T) \right]^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^0 \left[D_t^{p+1} u(x, 0) \right]^2 dx + \int_{Q^+} a_0(x) (D_t u_x)^2 dx dt -$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma \int_{Q^-} a_0(x)(D_t u_x)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{Q^+} c_{1t} u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 c_1(x, T) u^2(x, T) dx + \\
& + \frac{\gamma}{2} \int_{Q^-} c_{1t} u^2 dx dt + \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^0 c_1(x, 0) u^2(x, 0) dx = \\
& = - \int_{Q^+} c_2 u D_t u dx dt + \gamma \int_{Q^-} c_2 u D_t u dx dt. \tag{15}
\end{aligned}$$

Заметим, что вследствие условия (А) и условия (11) число γ будет положительным. Далее, применяя для оценки правой части (15) неравенство Юнга, неравенства (9) и (10) и учитывая условие (14), нетрудно из равенства (15) вывести неравенство

$$\int_{Q^+} (D_t u_x)^2 dx dt + \int_{Q^-} (D_t u_x)^2 dx dt \leq 0.$$

Из этого неравенства и краевых условий задач I, II, III или IV следует $u(x, t) \equiv 0$ в Q_1 . Это тождество и означает, что каждая из задач I, II, III или IV не может иметь в пространстве V_0 более одного решения.

Теорема доказана.

3. Существование решений краевых задач I–IV

Как и единственность, существование решений краевых задач I–IV будет доказано единым образом для всех четырех задач.

Примененный ниже метод доказательства разрешимости краевых задач I–IV можно охарактеризовать как метод, основанный на сведении задачи сопряжения к краевым задачам для "нагруженных" [28, 29] дифференциальных уравнений. Ранее подобный метод успешно применялся в работах [30–32].

Теорема 2. Пусть выполняется условие (А), а также условия (11)–(14). Тогда для любой функции такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_x(x, t) \in L_2(Q^+)$, $f_x(x, t) \in L_2(Q^-)$, $f(-0, t) = \alpha f(+0, t)$ при $t \in (0, T)$, каждая из краевых задач I–IV имеет решение, принадлежащее пространству V_0 .

Доказательство. Для определенности рассмотрим краевую задачу I. Будем обозначать через $f_1(x, t)$ сужение функции $f(x, t)$ на прямоугольник Q^- , через $f_2(x, t)$ — сужение функции $f(x, t)$ на прямоугольник Q^+ . Далее, через $\varphi_1(x)$ обозначим определенную при $x \in [-1, 0]$ функцию $a'_0(x) + a_1(x)(1+x)$, через $\varphi_2(x)$ — определенную при $x \in [0, 1]$ функцию $-a'_0(x) + a_1(x)(1-x)$. Наконец, пусть $w(x, t)$ и $z(x, t)$ есть функции из пространств $V(Q^-)$ и $V(Q^+)$ соответственно, λ есть число из отрезка $[0, 1]$. Положим

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda, w, z)(t) &= z(+0, t) - \lambda \beta w_x(-0, t), \\
\Psi(\lambda, w, z)(t) &= w_x(-0, t) + \lambda \alpha z(+0, t).
\end{aligned}$$

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим семейство краевых задач: найти функции $w(x, t)$ и $z(x, t)$ такие, что при $(x, t) \in Q^-$ выполняется уравнение

$$\begin{aligned}
& (-1)^p D_t^{2p+2}(w + \varepsilon A w) - D_t A w + c w + \frac{(-1)^p \varepsilon \lambda \alpha \varphi_1(x)}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} D_t^{2p+2} \Phi(\lambda, w, z) + \\
& + \frac{(-1)^p \lambda \alpha (1+x)}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} D_t^{2p+2} \Phi(\lambda, w, z) - \frac{\lambda \alpha \varphi_1(x)}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} D_t \Phi(\lambda, w, z) + \\
& + \frac{\lambda \alpha (1+x) c}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} \Phi(\lambda, w, z) = f_1(x, t), \tag{16_{\varepsilon, \lambda}}
\end{aligned}$$

при $(x, t) \in Q^+$ выполняется уравнение

$$\begin{aligned}
& (-1)^p D_t^{2p+2}(z - \varepsilon A z) - D_t A z + c z + \frac{(-1)^p \varepsilon \lambda \beta \varphi_2(x)}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} D_t^{2p+2} \Psi(\lambda, w, z) - \\
& - \frac{(-1)^p \lambda \beta (1-x)}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} D_t^{2p+2} \Psi(\lambda, w, z) + \frac{\lambda \beta \varphi_2(x)}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} D_t \Psi(\lambda, w, z) - \\
& - \frac{\lambda \beta (1-x) c}{1 + \lambda^2 \alpha \beta} \Psi(\lambda, w, z) = f_2(x, t), \tag{17_{\varepsilon, \lambda}}
\end{aligned}$$

и при этом выполняются условия

$$w(-1, t) = w(-0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (18)$$

$$D_t^k w(x, t)|_{t=0, x \in (-1, 0)} = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (19)$$

$$D_t^k w(x, t)|_{t=T, x \in (-1, 0)} = 0, \quad k = 0, \dots, p+1, \quad (20)$$

$$z_x(+0, t) = z(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (21)$$

$$D_t^k z(x, t)|_{t=0, x \in (0, 1)} = 0, \quad k = 0, \dots, p+1, \quad (22)$$

$$D_t^k z(x, t)|_{t=T, x \in (0, 1)} = 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (23)$$

Покажем, что при фиксированных ε и λ , при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ и при выполнении условий теоремы краевая задача (16 $_{\varepsilon, \lambda}$), (17 $_{\varepsilon, \lambda}$), (18)–(23) имеет решение $\{w(x, t), z(x, t)\}$ такое, что $w(x, t) \in V(Q^-)$, $D_t^{2p+2} w_{xx}(x, t) \in L_2(Q^-)$, $z(x, t) \in V(Q^+)$, $D_t^{2p+2} z_{xx}(x, t) \in L_2(Q^+)$.

Прежде всего заметим, что при $\lambda = 0$ существование функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$ из требуемых классов действительно имеет место — это следует из того, что краевая задача (16 $_{\varepsilon, 0}$), (17 $_{\varepsilon, 0}$), (18)–(23) распадается на две независимые задачи в прямоугольниках Q^- и Q^+ (для функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$ соответственно), разрешимость каждой из которых известна — см. [33].

Пусть теперь λ есть произвольное число из отрезка $[0, 1]$, функции $w(x, t)$ и $z(x, t)$ представляют собой произвольное решение задачи (16 $_{\varepsilon, \lambda}$), (17 $_{\varepsilon, \lambda}$), (18)–(23) из требуемого класса. Определим функцию $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \begin{cases} w(x, t) + \frac{\lambda \alpha (1+x)}{1+\lambda^2 \alpha \beta} \Phi(\lambda, w, z) & \text{при } (x, t) \in Q^-, \\ z(x, t) - \frac{\lambda \beta (1-x)}{1+\lambda^2 \alpha \beta} \Psi(\lambda, w, z) & \text{при } (x, t) \in Q^+. \end{cases}$$

Для этой функции выполняются равенства

$$(-1)^p D_t^{2p+2} (u + \varepsilon Au) - D_t Au + cu = f_1(x, t) \quad \text{при } (x, t) \in Q^-, \quad (24)$$

$$(-1)^p D_t^{2p+2} (u - \varepsilon Au) - D_t Au + cu = f_2(x, t) \quad \text{при } (x, t) \in Q^+, \quad (25)$$

$$u(-0, t) = \lambda \alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \lambda \beta u_x(-0, t) \quad \text{при } t \in (0, T), \quad (26_\lambda)$$

и выполняются также условия (19), (20), (22) и (23). Умножим равенство (25) на функцию $D_t u$, равенство (24) — на функцию $-\gamma D_t u$. Интегрируя полученные равенства по прямоугольникам Q^+ и Q^- соответственно, складывая, используя формулу интегрирования по частям, применяя условия теоремы и неравенство Юнга, получим первую априорную оценку для функции $u(x, t)$:

$$\int_{Q^+} (D_t u_x)^2 dx dt + \int_{Q^-} (D_t u_x)^2 dx dt \leq N_1 \int_Q f^2 dx dt, \quad (27)$$

постоянная N_1 в которой определяется лишь функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x, t)$, также числами α , β и T .

Умножим равенство (25) на функцию $(-1)^{p+1} D_t^{2p+2} Au$, равенство (24) — на функцию $(-1)^p \gamma D_t^{2p+2} Au$. Интегрируя полученные равенства по прямоугольникам Q^+ и Q^- соответственно, складывая и используя формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{Q^+} (D_t^{2p+2} Au)^2 dx dt + \gamma \varepsilon \int_{Q^-} (D_t^{2p+2} Au)^2 dx dt + \int_{Q^+} a_0 (D_t^{2p+2} u_x)^2 dx dt - \\ & - \int_{Q^+} a_1 (D_t^{2p+2} u)^2 dx dt - \gamma \int_{Q^-} a_0 (D_t^{2p+2} u_x)^2 dx dt + \gamma \int_{Q^-} a_1 (D_t^{2p+2} u)^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 [D_t^{p+1} Au(x, T)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [D_t^{p+1} Au(x, 0)]^2 dx = \\ & = (-1)^{p+1} \int_{Q^+} f_2 D_t^{2p+2} Au dx dt + (-1)^p \gamma \int_{Q^-} f_1 D_t^{2p+2} Au dx dt - \\ & - (-1)^p \int_{Q^+} a_0 (cu)_x D_t^{2p+2} u_x dx dt - (-1)^{p+1} \gamma \int_{Q^-} a_0 (cu)_x D_t^{2p+2} u_x dx dt - \\ & - (-1)^{p+1} \int_{Q^+} a_1 cu D_t^{2p+2} u dx dt - (-1)^p \int_{Q^-} a_1 cu D_t^{2p+2} u dx dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Условия теоремы, неравенство Юнга и оценка (27) дают следствие из равенства (28) — вторую априорную оценку для решения $u(x, t)$ краевой задачи (16 $_{\varepsilon, \lambda}$), (17 $_{\varepsilon, \lambda}$), (18)–(23)

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{Q^+} \left(D_t^{2p+2} Au \right)^2 dx dt + \varepsilon \int_{Q^-} \left(D_t^{2p+2} Au \right)^2 dx dt + \int_{Q^+} \left(D_t^{2p+2} u_x \right)^2 dx dt + \\ + \int_{Q^-} \left(D_t^{2p+2} u_x \right)^2 dx dt \leq N_2 \int_Q f^2 dx dt, \end{aligned} \quad (29)$$

постоянная N_2 в которой определяется функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x, t)$, а также числами α , β , T и ε .

Из оценок (27) и (29) вытекает очевидная результирующая оценка

$$\varepsilon \int_{Q^+} \left(D_t^{2p+2} u_{xx} \right)^2 dx dt + \varepsilon \int_{Q^-} \left(D_t^{2p+2} u_{xx} \right)^2 dx dt + \|u\|_{V_0}^2 \leq N_3 \int_Q f^2 dx dt \quad (30)$$

с постоянной N_3 , определяющейся функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x, t)$, а также числами α , β , T и ε .

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} w(x, t) &= u(x, t) - \lambda \alpha (1+x) u(+0, t) \quad \text{нпу} \quad (x, t) \in Q^-, \\ z(x, t) &= u(x, t) + \lambda \beta (1-x) u_x(-0, t) \quad \text{нпу} \quad (x, t) \in Q^+. \end{aligned}$$

Из этих равенств и из оценки (30) вытекают оценки для функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$:

$$\varepsilon \int_{Q^+} \left(D_t^{2p+2} z_{xx} \right)^2 dx dt + \|z\|_{V(Q^+)}^2 \leq N_4 \int_Q f^2 dx dt, \quad (31)$$

$$\varepsilon \int_{Q^-} \left(D_t^{2p+2} w_{xx} \right)^2 dx dt + \|w\|_{V(Q^-)}^2 \leq N_4 \int_Q f^2 dx dt \quad (32)$$

постоянная N_4 в которых вновь определяется функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $c(x, t)$, числами α , β , T и ε .

Оценки (31) и (32), разрешимость краевой задачи (16 $_{\varepsilon, 0}$), (17 $_{\varepsilon, 0}$), (18)–(23) и теорема о методе продолжения по параметру [34, гл. III, § 14] дают разрешимость в требуемом классе задачи (16 $_{\varepsilon, \lambda}$), (17 $_{\varepsilon, \lambda}$), (18)–(23) при любом λ из отрезка $[0, 1]$ — в частности, и при $\lambda = 1$. Другими словами, краевые задачи (16 $_{\varepsilon, 1}$), (17 $_{\varepsilon, 1}$), (18)–(23) и (24), (25), (26 $_1$), (19), (20), (22), (23) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ имеют решения $\{w(x, t), z(x, t)\}$ и $u(x, t)$ такие, что $w(x, t) \in V(Q^-)$, $D_t^{2p+2} w_{xx}(x, t) \in L_2(Q^-)$, $z(x, t) \in V(Q^+)$, $D_t^{2p+2} z_{xx}(x, t) \in L_2(Q^+)$ и $u(x, t) \in V_0$, $D_t^{2p+2} u_{xx}(x, t) \in L_2(Q^-)$, $D_t^{2p+2} u_{xx}(x, t) \in L_2(Q^+)$. Покажем, что для этих решений при выполнении дополнительных условий на функцию $f(x, t)$ имеют место оценки, равномерные по ε .

Итак, пусть $u(x, t)$ есть решение краевой задачи (24), (25), (26 $_1$), (19), (20), (22), (23). Рассмотрим для этого решения равенство (28). Интегрируя по частям в интегралах от функций $f_1 \frac{\partial}{\partial x} (a_0 D_t^{2p+2} u_x)$ и $f_2 \frac{\partial}{\partial x} (a_0 D_t^{2p+2} u_x)$ (по областям Q^- и Q^+ соответственно), используя условия на функцию $f(x, t)$, применяя неравенство Юнга и учитывая оценку (29), нетрудно показать, что для функции $u(x, t)$ выполняется априорная оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{Q^+} \left(D_t^{2p+2} Au \right)^2 dx dt + \varepsilon \int_{Q^-} \left(D_t^{2p+2} Au \right)^2 dx dt + \int_{Q^+} \left(D_t^{2p+2} u_x \right)^2 dx dt + \\ + \int_{Q^-} \left(D_t^{2p+2} u_x \right)^2 dx dt \leq N_2' \left(\int_Q f^2 dx dt + \int_{Q^+} f_x^2 dx dt + \int_{Q^-} f_x^2 dx dt \right), \end{aligned} \quad (33)$$

постоянная N_2' в которой определяется функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$, $c(x, t)$, а также числами α , β и T .

Следующая оценка

$$\begin{aligned} \int_{Q^+} (D_t Au)^2 dx dt + \int_{Q^-} (D_t Au)^2 dx dt \leq \\ \leq N_5 \left(\int_Q f^2 dx dt + \int_{Q^+} f_x^2 dx dt + \int_{Q^-} f_x^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (34)$$

с постоянной N_5 , определяющейся функциями $a_0(x)$, $a_1(x)$, $c(x, t)$, числами α , β и T , очевидным образом вытекает из уравнений (24) и (25), оценок (27) и (33).

Оценки (27), (33) и (34), а также свойство рефлексивности гильбертова пространства позволяют стандартным образом (см., например, [37]) выбрать последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел и семейство функций $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$, являющихся решениями краевых задач (24), (25), (26₁), (19), (20), (22), (23) при $\varepsilon = \varepsilon_m$ и таких, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $u_m(x, t) \rightarrow u(x, t)$ слабо в пространстве V_0 , $\varepsilon_m D_t^{2p+2} A u_m \rightarrow 0$ слабо в пространствах $L_2(Q^+)$ и $L_2(Q^-)$. Предельная функция $u(x, t)$ и будет представлять собой искомое решение из пространства V_0 краевой задачи I.

Для краевых задач II, III и IV все рассуждения и тем самым доказательство разрешимости в пространстве V_0 проводятся полностью аналогично вышеприведенным.

Теорема полностью доказана.

4. Дополнение

1. Условие (11) теорем 1 и 2 вполне можно заменить на условие

$$\alpha\beta \geq 0.$$

В случаях $\alpha = 0$, или $\beta = 0$, или $\alpha = \beta = 0$ каждая из задач I–IV распадается на две независимые задачи, разрешимость в пространстве V_0 которых известна [33].

2. Коэффициенты a_0 и a_1 вполне могут зависеть и от переменной t , все условия и выкладки при этом лишь незначительно усложняются. Самосопряженный вид оператора A также не является существенным — оператор A может иметь вид

$$Au = a_0(x, t)u_{xx} + a_1(x, t)u_x + a_2(x, t)u.$$

3. В случае $p = 0$ все задачи I–IV совпадают между собой и представляют собой краевую задачу для псевдогиперболического уравнения с переменным направлением эволюции.

Литература

- [1] Ладъженская О.А. О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96. № 3. С. 433–436.
- [2] Олейник О.А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1961. Т. 25. С. 3–20. URL: <http://www.mathnet.ru/links/dbe9363eab8ae54514782f9e8a566522/im3365.pdf>.
- [3] Ильин В.А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 1. С. 28–30. URL: <http://mi.mathnet.ru/dan24692>.
- [4] Ильин В.А. Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 1. С. 21–24. URL: <http://mi.mathnet.ru/dan25958>.
- [5] Ладъженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [6] Ильин В.А., Луференко П.В. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности, разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 12–15. URL: <http://naukarus.com/smeshannye-zadachi-opisyvayuschie-prodolnye-kolebaniya-sterzhnya-sostoyaschego-iz-dvuh-uchastkov-imeyuschih-raznye-plotno>.
- [7] Ильин В.А., Луференко П.В. Обобщенные решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 3. С. 317–321. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12989568>.
- [8] Андропова О.А. Спектральные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии // Труды ИПММ НАН Украины. 2009. № 19. С. 10–22. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/123893>.
- [9] Никольский Д.Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-однородной пористой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 5. С. 913–919. URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf9340>.
- [10] Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. РАН. 2012. Т. 441. № 4. С. 449–451. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924>.

- [11] Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. РАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 451–454. URL: <http://naukarus.com/smeshannye-zadachi-dlya-uravneniya-prodolnyh-kolebaniy-neodnorodnogo-sterzhnya-so-svobodnym-libo-zakreplennym-pravym-kont>.
- [12] Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 488–491. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924>.
- [13] Смирнов И.Н. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравн. 2013. Т. 49. № 5. С. 643–648. DOI: 10.1134/S0374064113050117.
- [14] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: СССР, 1959.
- [15] Ладъженская О.А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. 1967. № 18. С. 38–46. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01008452040>.
- [16] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
- [17] Ладъженская О.А., Ступялис Л. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 116. № 16. С. 101–136. URL: <http://mi.mathnet.ru/tm3080>.
- [18] Ступялис Л. Краевые задачи для эллипτικο-гиперболических уравнений // Труды МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229. URL: <http://mi.mathnet.ru/tm3136>.
- [19] Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР. Ин-т математики, 1982.
- [20] Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
- [21] Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988.
- [22] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
- [23] Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Самарский государственный экономический университет, 2008.
- [24] Моисеев Е.И., Лихоманенко Т.Н. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 3. С. 256–258. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17928447>.
- [25] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
- [26] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
- [27] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях М.: Либроком, 2010.
- [28] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.
- [29] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012.
- [30] Kozhanov A.I., Sharin E.F. The conjugation problem for some nonclassical high-order differential equations // J. of Mathematical Sciences. 2015. V. 204. № 3. P. 298–314.
- [31] Кожанов А.И., Потапова С.В. Задача сопряжения для дифференциальных уравнений нечетного порядка с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции // Доклады АН. 2017. Т. 474. № 6. С. 661–664. DOI: 10.7868/S0869565217180013.
- [32] Григорьева А.И. Начально-краевая задача с условиями сопряжения для уравнений составного типа с двумя разрывными коэффициентами // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25. № 2. С. 12–26. DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14227.
- [33] Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Математические заметки. 2017. Т. 101. № 3. С. 403–412. DOI: 10.4213/mzm11172.
- [34] Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

References

- [1] Ladyzhenskaya O.A. *O reshenii obshchei zadachi diffratsii* [On the solution of a general problem of diffraction]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 1954, Vol. 96, pp. 433–436 [in Russian].
- [2] Oleinik O.A. *Kraevye zadachi dlia lineinykh uravnenii ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary-value problems for linear equations of the elliptic and parabolic types with discontinuous coefficients]. *Izvestiia AN SSSR. Seriya matematicheskaiia* [Izvestiya: Mathematics], 1961, Vol. 25, pp. 3–20. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/dbe9363eab8ae54514782f9e8a566522/im3365.pdf> [in Russian].

- [3] Il'in V.A. *O razreshimosti zadach Dirikhle i Neimana dlia lineinogo ellipticheskogo operatora s razryvnymi koeffitsientami* [On the solvability of the Dirichlet and Neumann problems for a linear elliptic operator with discontinuous coefficients]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 1961, Vol. 137, no. 1, pp. 28–30. Available at: <http://mi.mathnet.ru/dan24692> [in Russian].
- [4] Il'in V.A. *Metod Fur'e dlia giperbolicheskogo uravneniia s razryvnymi koeffitsientami* [The Fourier method for a hyperbolic equation with discontinuous coefficients]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 1962, Vol. 142, no. 1, pp. 21–24. Available at: <http://mi.mathnet.ru/dan25958> [in Russian].
- [5] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. M.: Nauka, 1967 [in Russian].
- [6] Il'in V.A., Luferenko P.V. *Smeshannye zadachi, opisyvaiushchie prodol'nye kolebaniia sterzhnia, sostoiashchego iz dvukh uchastkov, imeiushchikh raznye plotnosti, raznye uprugosti, no odinakovyie impedansy* [Mixed problems describing longitudinal vibrations of a rod consisting of two sections with different densities and elasticity moduli, but with the same impedance]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 2009, Vol. 428, no. 1, pp. 12–15. Available at: <http://naukarus.com/smehannye-zadachi-opisyvaiushchie-prodolnye-kolebaniya-sterzhnya-sostoyaschego-iz-dvuh-uchastkov-imeyushchih-raznye-plotno> [in Russian].
- [7] Il'in V.A., Luferenko P.V. *Obobshchennye resheniia smeshannykh zadach dlia razryvnogo volnovogo uravneniia pri usloviu ravenstva impedansov* [Generalized solutions of mixed problems for the discontinuous wave equation under the condition of equality of impedances]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Physics], 2009, Vol. 429, no. 3, pp. 317–321. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12989568> [in Russian].
- [8] Andropova O.A. *Spektral'nye zadachi sopriazheniia s poverkhnostnoi dissipatsiei energii* [Spectral problems of conjugation with surface dissipation of the energy]. *Trudy IPMM NAN Ukrainy* [Transactions of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine], 2009, Vol. 19, pp. 10–22. Available at: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/123893> [in Russian].
- [9] Nikolsky D.N. *Trekhmernaiia evoliutsiia granitsy zagriazneniia v ogranichennoi kusochno-odnorodnoi poristoi srede* [Three-dimensional evolution of the pollution boundary in a limited piecewise-homogeneous porous medium]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2011, Vol. 51, no. 5, pp. 913–919. Available at: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf9340> [in Russian].
- [10] Rogozhnikov A.M. *Issledovanie smeshannoi zadachi, opisyvaiushchei protsess kolebanii sterzhnia, sostoiashchego iz neskol'kikh uchastkov, pri usloviu sovpadeniia vremeni prokhozheniia voln po kazhdomu iz etikh uchastkov* [Study of mixed problems describing the process of vibrations of a rod consisting of several sections under the condition of coincidence of times of passage of waves on each of these sections]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012, Vol. 441, no. 4, pp. 449–451. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924> [in Russian].
- [11] Kuleshov A.A. *Smeshannye zadachi dlia uravneniia prodol'nykh kolebanii neodnorodnogo sterzhnia so svobodnym libo zakreplennym pravym kontsom, sostoiashchego iz dvukh uchastkov raznoi plotnosti i uprugosti* [Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of a inhomogeneous rod with free or fixed right end consisting of two sections with different densities and elasticity moduli]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012, Vol. 442, no. 4, pp. 451–454. Available at: <http://naukarus.com/smehannye-zadachi-dlya-uravneniya-prodolnyh-kolebaniy-neodnorodnogo-sterzhnya-so-svobodnym-libo-zakreplennym-pravym-kont> [in Russian].
- [12] Rogozhnikov A.M. *Issledovanie smeshannoi zadachi, opisyvaiushchei protsess kolebanii sterzhnia, sostoiashchego iz neskol'kikh uchastkov s proizvol'nymi dlinami* [Study of a mixed problem describing the process of vibrations of a rod consisting of several sections with arbitrary lengths]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012, Vol. 444, no. 5, pp. 488–491. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17745924> [in Russian].
- [13] Smirnov I.N. *O kolebaniiax, opisyvaemykh telegrafnym uravneniem v sluchae sistemy, sostoiashchei iz neskol'kikh uchastkov raznoi plotnosti i uprugosti* [On vibrations described by the telegraph equation in the case of a system consisting of several sections with different densities and elasticity moduli]. *Differents. Uravn.* [Differential Equations], 2013, Vol. 49, no. 5, pp. 643–648. DOI: 10.1134/S0374064113050117 [in Russian].
- [14] Bitsadze A.V. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Equations of a mixed type]. M.: Iz-vo AN SSSR, 1959 [in Russian].
- [15] Ladyzhenskaya O.A., Stupyalis L. *Ob uravneniiax smeshannogo tipa* [On equations of a mixed type]. *Vestnik LGU* [Vestnik of Pushkin Leningrad State University], no. 18, pp. 38–46. Available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01008452040> [in Russian].
- [16] Smirnov M.M. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Equations of a mixed type]. M.: Nauka, 1970 [in Russian].
- [17] Ladyzhenskaya O.A., Stupyalis L. *Kraevye zadachi dlia uravnenii smeshannogo tipa* [Boundary-value problems for equations of the mixed type]. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1971, Vol. 116, no. 16, pp. 101–136. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tm3080> [in Russian].
- [18] Stupyalis L. *Kraevye zadachi dlia elliptiko-giperbolicheskikh uravnenii* [Boundary-value problems for elliptic-hyperbolic equations]. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1973, Vol. 125, pp. 211–229. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tm3136> [in Russian].

- [19] Tersenov S.A. *Vvedenie v teoriyu uravnenii parabolicheskogo tipa s meniaiushchimsia napravleniem vremeni* [Introduction to the theory of equation of the parabolic type with varying time direction]. Novosibirsk: Sib. otd-nie AN SSSR. In-t matematiki, 1982 [in Russian].
- [20] Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlia uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary-value problems for equations of the mixed and mixed-composite types]. Tashkent: Fan, 1986 [in Russian].
- [21] Moiseev E.I. *Uravneniia smeshannogo tipa so spektral'nyim parametrom* [Equations of the Mixed Type with Spectral Parameter]. M.: MGU, 1988 [in Russian].
- [22] Nakhushiev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with displacement for partial differential equations]. M.: Nauka, 2006 [in Russian].
- [23] Marichev O.I., Kilbas A.A., Repin O.A. *Kraevye zadachi dlia uravnenii s chastnymi proizvodnymi s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary-Value Problems for Equations with Partial Derivatives with Discontinuous Coefficients]. Samara: Samarskii gosudarstvennyi ekonomicheskii universitet, 2008 [in Russian].
- [24] Moiseev E.I., Likhomanenko T.N. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlia uravneniia Lavrent'eva-Bitsadze* [On a nonlocal problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation]. *Dokl. RAN* [Doklady Physics], 2012. Vol. 446, no. 3, pp. 256–258. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17928447> [in Russian].
- [25] Demidenko G.V., Uspensky S.V. *Uravneniia i sistemy, nerazreshennye otnositel'no starshei proizvodnoi* [Equations and systems that are unresolved relative to the highest derivative]. Novosibirsk: Nauchnaia kniga, 1998 [in Russian].
- [26] Gaevsky Kh., Greger K., Zacharias K. *Nelineinye operatornye uravneniia i operatornye differentsial'nye uravneniia* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations]. M.: Mir, 1978 [in Russian].
- [27] Corpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: Librokom, 2010 [in Russian].
- [28] Dzhentaliev M.T. *K teorii lineinykh kraevykh zadach dlia nagruzhenykh differentsial'nykh uravnenii* [On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations]. Almaty: In-t teoreticheskoi i prikladnoi matematiki, 1995 [in Russian].
- [29] Nakhushiev A.M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primeneniia* [Loaded equations and their applications]. M.: Nauka, 2012 [in Russian].
- [30] Kozhanov A.I., Sharin E.F. The conjugation problem for some nonclassical high-order differential equations. *J. of Mathematical Sciences*, 2015, Vol. 204, no. 3, pp. 298–314 [in English].
- [31] Kozhanov A.I., Potapova S.V. *Zadacha sopriazheniia dlia differentsial'nykh uravnenii nechetnogo poriadka s dvumia vremennymi peremennymi i s meniaiushchimsia napravleniem evoliutsii* [Conjugation problem for odd-order differential equations with two time variables and with the changing direction of evolution]. *Doklady AN* [Doklady Physics], 2017, Vol. 474, no. 6, pp. 661–664. DOI: 10.7868/S0869565217180013 [in Russian].
- [32] Grigorieva A.I. *Nachal'no-kraevaia zadacha s usloviiami sopriazheniia dlia uravnenii sostavnogo tipa s dvumia razryvnymi koeffitsientami* [Initial-boundary problem with conjugation conditions for composite-type equations with two breakdown coefficients]. *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical Notes of NEFU], 2018, Vol. 25, no. 2, pp. 12–26. DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14227 [in Russian].
- [33] Kozhanov A.I., Pinigina N.R. *Kraevye zadachi dlia nekotorykh neklassicheskikh differentsial'nykh uravnenii vysokogo poriadka* [Boundary value problems for certain nonclassical differential equations of a high order]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes], 2017, Vol. 101, no. 3, pp. 403–412. DOI: 10.4213/mzm11172 [in Russian].
- [34] Trenogin V.A. *Funktional'nyi analiz* [Functional Analysis]. M.: Nauka, 1980 [in Russian].

A.I. Grigorieva, A.I. Kozhanov³

**BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR COMPOSITE TYPE EQUATIONS
WITH A QUASIPARABOLIC OPERATOR IN THE LEADING PART
HAVING THE VARIABLE DIRECTION OF EVOLUTION
AND DISCONTINUOUS COEFFICIENTS⁴**

The solvability of boundary value problems for non-classical Sobolev type differential equations with an alternating function is studied. This function has a discontinuity of the first kind at the point zero and changes its sign depending on the sign of the variable x . The existence and uniqueness of regular solutions having generalized derivatives are proved. To this end we derived a priori estimates.

Key words: Sobolev-type equation, variable direction of evolution, boundary value problem, differential operator, regular solution, existence, uniqueness, a priori estimate.

Citation. Grigorieva A.I., Kozhanov A.I. *Kraevye zadachi dlia uravnenii sostavnogo tipa s kvazi-parabolicheskim operatorom peremennogo napravleniia evoliutsii v starshei chasti i s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary value problems for composite type equations with a quasiparabolic operator in the leading part having the variable direction of evolution and discontinuous coefficients]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 7–17. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-7-17> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 28/VI/2018.

The article received 28/VI/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

³Grigorieva Aleksandra Ivanovna (shadrina_ai@mail.ru), Department of Higher Mathematics, North-Eastern Federal University in Yakutsk, 48, Kulakovskogo street, Yakutsk, 677000, Russian Federation.

Kozhanov Aleksander Ivanovich (kozhanov@math.nsc.ru), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

⁴The work is carried out with the support from the Russian Fond of Fundamental Researches, project 18–51–41009.

А.В. Дюжева¹

О ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ IV ПОРЯДКА

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка. Присутствующая в уравнении доминирующая смешанная производная позволила интерпретировать поставленную задачу как аналог задачи Гурса. Получены условия на коэффициенты уравнения и входные данные, гарантирующие существование единственного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, нелокальное условие, задача Гурса, принцип сжатых отображений.

Цитирование. Дюжева А.В. О задаче с нелокальными условиями для уравнений IV порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 18–23. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-18-23>.

Введение

К настоящему времени краевые и нелокальные задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка достаточно хорошо изучены, многие постановки задач для них давно стали классическими и вошли в учебники по математической физике. Однако многие процессы современного естествознания при математическом моделировании приводят к уравнениям более высокого порядка. Например, математическая модель стержня Рэлея [16], описывающая продольные колебания толстого короткого стержня с учетом поперечного движения стержня, уравнение Кортевега - де Фриза [13], моделирующее процесс распространения длинных волн на поверхности воды, уравнения, описывающие нестационарные волны в стратифицированных и вращающихся жидкостях [5], уравнение Л. Бианки [1], используемое при описании явлений фильтрации и ионно-звуковых волн в плазме [4]. При этом часто оказывается, что одна и та же задача описывает одновременно несколько разных явлений. Примеры явлений, математические модели которых основаны на уравнениях высокого порядка, приведены также в монографии [10].

Особое место среди уравнений порядка выше второго занимают уравнения соболевского типа. Начало в исследовании таких уравнений положил С.Л. Соболев в своей работе [14]. Интересно отметить, что для некоторых уравнений соболевского типа естественно ставить как начально-краевые задачи [12], так и задачи типа Гурса [8]. Одним из первых, кого заинтересовали задачи типа задачи Гурса для уравнений высокого порядка, был В.И. Жегалов [6]. В дальнейшем исследования продолжили его ученики, отметим работу [7] и список литературы в ней. В этой связи отметим, что в литературе часто такие уравнения называются уравнениями с доминирующей смешанной производной. Так же задачами для таких уравнений активно занимается Замышляева А.А. с соавторами [9] и список литературы там.

В большинстве упомянутых работ рассмотрены задачи типа Гурса, в которых условия заданы на части границы области. В последнее время для уравнений с доминирующей производной стали активно изучаться также и нелокальные задачи. В работе [3] для доказательства разрешимости задачи для уравнения четвертого порядка вводится понятие обобщенного решения и доказываются его существование и единственность в выбранном пространстве.

В предлагаемой работе рассмотрена нелокальная задача с интегральным граничным условием для модифицированного уравнения Буссинеска-Лява, моделирующего продольные колебания упругого стержня с учетом поперечной инерции и при внешнем воздействии. Для такого уравнения можно поставить

¹© Дюжева А.В., 2018

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

как смешанную задачу, так и при условии что $b(x, t) \neq 0$ задачу Гурса, что и было сделано в предлагаемой работе. Заметим, что для уравнения второго порядка задача с нелокальными условиями типа Стеклова [15] была изучена в работе [2].

1. Постановка задачи

В ограниченной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - a(x, t)u_{xx} - b(x, t)u_{xxtt} + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1.1)$$

и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (1.2)$$

и условиям

$$u(0, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$u_x(0, t) = \int_0^l G(x)u(x, t)dx. \quad (1.4)$$

Заметим, что второе из условий (1.4) является нелокальным.

2. Разрешимость задачи

Будем считать, что выполняются следующие условия:

H1. $a(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $b(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $c(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$;

H2. $b(x, t) \neq 0$, $\forall (x, t) \in Q_T$;

H3. $f(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $G(x) \in C([0, l])$.

Из условий H1 и H3 следует, что $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ ограничены в \bar{Q}_T , а $G(x)$ на сегменте $[0, l]$. Условие H2 позволяет записать уравнение (1.1) в виде

$$u_{xxtt} = B(x, t)u_{tt} - A(x, t)u_{xx} + C(x, t)u - F(x, t), \quad (2.1)$$

где $B(x, t) = \frac{1}{b(x, t)}$, $A(x, t) = \frac{a(x, t)}{b(x, t)}$, $C(x, t) = \frac{c(x, t)}{b(x, t)}$, $F(x, t) = \frac{f(x, t)}{b(x, t)}$.

Обозначим $\tilde{C}(Q_T) = \{u : u \in C^2(Q_T), u_{xxtt} \in C(Q_T)\}$.

Лемма. Если выполняются условия

$$\int_0^l G^2(\xi)u(\xi, t)d\xi < \frac{3}{l^3} \quad \text{и} \quad l^3 > 1,$$

задача (1.1)–(1.4) эквивалентна интегральному уравнению

$$u = x \int_0^l G u dx + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^x \int_0^\xi (B u_{tt} - A u_{xx} + C u - F) d\xi' d\xi d\tau' d\tau. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), $u \in \tilde{C}(Q_T)$. Тогда очевидно, $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Действительно, интегрируя равенство (2.1) и учитывая (1.2) и (1.4), получим (2.2).

Пусть теперь $u \in \tilde{C}(Q_T)$ и удовлетворяет (2.2). Дифференцируя дважды по t и дважды по x , получим (2.1).

Покажем, что выполняются условия (1.2)–(1.4).

При $t = 0$ из (2.2) получаем однородное уравнение Фредгольма:

$$u(x, 0) = \int_0^l xG(\xi)u(\xi, 0)d\xi. \quad (2.3)$$

Ядро $K(x, \xi) = xG(\xi)$ уравнения (2.3) вырожденное. Поэтому для отыскания его решения, замечая, что

$$\int_0^l xG(\xi)u(\xi, 0)d\xi = C,$$

приходим к представлению

$$u = Cx.$$

Очевидно, что постоянная C может быть найдена из равенства

$$C \int_0^l G(\xi) \xi d\xi = C,$$

что в силу условий леммы приводит к утверждению $C = 0$, следовательно, $u(x, 0) = 0$.

Продифференцировав (2.2) по t , а затем положив $t = 0$, имеем

$$u_t(x, 0) = \int_0^l xG(\xi)u_t(\xi, 0)d\xi. \quad (2.4)$$

Рассуждая аналогично, получаем, что (2.4) имеет только нулевое решение, откуда следует, что $u_t(x, 0) = 0$.

Покажем, что выполняется граничное условие (1.4). Из (2.2) имеем

$$u_x(x, t) = \int_0^l G u dx + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^x (B u_{tt} - A u_{xx} + C u - F) d\xi d\tau' d\tau,$$

при $x = 0$ получаем соотношение (1.4). Условие (1.3) очевидно.

Таким образом, выполняются начальные и граничные условия поставленной задачи (1.2)–(1.4).

Лемма доказана.

Обозначим

$$M = \max\{\max_{\bar{Q}_T} |A(x, t)|, \max_{\bar{Q}_T} |B(x, t)|, \max_{\bar{Q}_T} |C(x, t)|\},$$

$$\gamma = \max_{[0, l]} |G(x)|, \quad R = \max_{\bar{Q}_T} |F(x, t)|.$$

$C_p^2(Q_T)$ — класс функций $u(x, t)$, таких что $u(x, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка в \bar{Q}_T и

$$\max |u| \leq p, \quad \max |u_{tt}| \leq p, \quad \max |u_{xx}| \leq p.$$

$C_p^{2,4}(Q_T)$ — класс функций из $C_p^2(Q_T)$, имеющих u_{xxtt} непрерывные в Q_T .

Теорема. Если выполняется

$$2l^2 p \gamma + k(T^2 l^2 + l^2 + T^2) < p;$$

$$l^2 \gamma + l^2 M T < \frac{1}{3}; \quad l^2 \gamma + l^2 M < \frac{1}{3}; \quad T^2 M < \frac{1}{3}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1.1)–(1.4) в $C_p^2(Q_T)$.

Доказательство. Зададим расстояние в $C^2(Q_T)$ формулой

$$\rho(u, \bar{u}) = \max_{\bar{Q}_T} |u - \bar{u}| + \max_{\bar{Q}_T} |u_{tt} - \bar{u}_{tt}| + \max_{\bar{Q}_T} |u_{xx} - \bar{u}_{xx}|.$$

Введем оператор

$$U(u) = x \int_0^l G u dx + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^x \int_0^\xi (B u_{tt} - A u_{xx} + C u - F) d\xi' d\xi d\tau' d\tau. \quad (2.5)$$

Обозначим для удобства $v(x, y) = U(u)$.

Пусть $\max_{\bar{Q}_T} |u| \leq p$, $\max_{\bar{Q}_T} |u_{xx}| \leq p$, $\max_{\bar{Q}_T} |u_{tt}| \leq p$.

Из (2.2) легко следует, что

$$|v| \leq l^2 \gamma p + T^2 l^2 k, \quad (2.6)$$

где $k = pM + R$.

Замечая, что

$$v_{tt} = x \int_0^l G u_{tt} dx + \int_0^x \int_0^\xi (B u_{tt} - A u_{xx} + C u - F) d\xi' d\xi,$$

$$v_{xx} = \int_0^t \int_0^\tau (B u_{tt} - A u_{xx} + C u - F) d\tau' d\tau,$$

получим

$$|v_{tt}| \leq l^2 \gamma p + l^2 k, \quad (2.7)$$

$$|v_{xx}| \leq T^2 k. \quad (2.8)$$

Из условий теоремы следует, что оператор U переводит замкнутый шар $\bar{S}(0, p)$ в себя.

Рассмотрим теперь

$$\max_{\bar{Q}_T} |v - \bar{v}| = \max_{\bar{Q}_T} |x \int_0^l G(u - \bar{u}) dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^x \int_0^\xi [B(u_{tt} - \bar{u}_{tt}) - A(u_{xx} - \bar{u}_{xx}) + C(u - \bar{u})] d\xi' d\tau' d\tau \leq \\
 & \leq l^2 \gamma \max_{\bar{Q}_T} |u - \bar{u}| + MT^2 l^2 [\max_{\bar{Q}_T} |u_{tt} - \bar{u}_{tt}| + \\
 & + \max_{\bar{Q}_T} |u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + \max_{\bar{Q}_T} |u - \bar{u}|] \leq L_1 \rho(u, \bar{u}),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $L_1 = l^2 \gamma + MT^2 l^2$. Аналогично оценим следующую разность

$$\begin{aligned}
 \max_{\bar{Q}_T} |v_{tt} - \bar{v}_{tt}| & \leq l^2 \gamma \max_{\bar{Q}_T} |u_{tt} - \bar{u}_{tt}| + Ml^2 [\max_{\bar{Q}_T} |u_{tt} - \bar{u}_{tt}| + \\
 & + \max_{\bar{Q}_T} |u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + \max_{\bar{Q}_T} |u - \bar{u}|] \leq L_2 \rho(u, \bar{u}),
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $L_2 = l^2(\gamma + M)$. Таким же образом оценим следующую разность

$$\begin{aligned}
 \max_{\bar{Q}_T} |v_{xx} - \bar{v}_{xx}| & \leq MT^2 [\max_{\bar{Q}_T} |u_{tt} - \bar{u}_{tt}| + \\
 & + \max_{\bar{Q}_T} |u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + \max_{\bar{Q}_T} |u - \bar{u}|] \leq L_3 \rho(u, \bar{u}),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $L_3 = T^2 M$.

Тогда получим

$$\rho(u, \bar{u}) \leq q \max_{\bar{Q}_T} |u - \bar{u}| + \max_{\bar{Q}_T} |u_{tt} - \bar{u}_{tt}| + \max_{\bar{Q}_T} |u_{xx} - \bar{u}_{xx}|,$$

где $q = \max\{l^2(\gamma + MT^2), l^2(\gamma + M), T^2 M\}$. Из условий теоремы следует, что $q < 1$. Это означает, что оператор U сжимающий. Таким образом, выполнены условия принципа сжимающего отображения [11, с. 44], из чего следует, что существует единственное решение интегрального уравнения (2.2). Как было доказано в лемме, задача (1.1)–(1.4) эквивалентна интегральному уравнению (2.2). Из чего следует, что существует единственное решение и задачи (1.1)–(1.4).

Литература

- [1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur. 1895. V. 4. P. 89–99, 133–142.
- [2] Byszewski L. Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1990. V. 3. № 3. P. 163–168. URL: https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/HOA/JAMSA/Volume3_3/168.pdf. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/S1048953390000156>.
- [3] Бейлин А.Б. Пулькина Л.С. Задачи о колебаниях стержня с нелинейным затуханием второго порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2015. № 3(125). С. 9–20. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=462&option_lang=rus.
- [4] Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: ФИЗМАТЛИТ. 1998. С. 448.
- [5] Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука. 1990. С. 344.
- [6] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. о-во, 2001. С. 226.
- [7] Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 385.
- [8] Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 1. С. 93–97. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=10533&option_lang=rus.
- [9] Замышляева А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска — Лява // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. Челябинск. 2011. № 37(254). Вып. 10. С. 22–29. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vyuru&paperid=182&option_lang=rus.
- [10] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010. С. 237.
- [11] Люстерник Л.А., Соболев С.Л. Элементы функционального анализа. М.: ФизМатЛит, 1965. С. 44.
- [12] Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31. № 4. С. 592–604. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=zvmmf&option_lang=rus&paperid=2790&wshow=paper.

- [13] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 313.
- [14] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Сер.: Математика. 1954. № 18(86). С. 3–50. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=3488&option_lang=rus.
- [15] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
- [16] Стрэтт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука // М.: ГИТТЛ. 1955. Т. 1. С. 273–274.

References

- [1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore. *Rend Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur.*, 1895, Vol. 4, p. 89–99, 133–142 [in Italian].
- [2] Byszewski L. Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 1990, Volume 3, Number 3, pp. 163–168. Available at: https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/HOA/JAMSA/Volume3_3/168.pdf. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/S1048953390000156> [in English].
- [3] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadachi o kolebaniakh sterzhnia s nelineinym zatukhaniem vtorogo poriadka* [Problem on vibration of a bar with nonlinear second-order boundary damping]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2015, no. 3(125), pp. 9–20. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=462&option_lang=rus [in Russian].
- [4] Gabov S.A. (Novye zadachi matematicheskoi teorii voln) [New problems in the mathematical theory of waves]. M.: FizMatLit, 1998, pp. 448 [in Russian].
- [5] Gabov S.A., Sveshnikov A.G. Lineinye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennykh voln [Linear problems in the theory of nonstationary internal waves]. M.: Nauka, 1990, p. 344.
- [6] Zhegalov V.I., Mironov A.N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives]. Kazan: Kazanskoe matem. o-vo, 2001, p. 226 [in Russian].
- [7] Zhegalov V.I., Mironov A.N., Utkina E.A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with Dominant Partial Derivative]. Kazan: izd-vo Kazan. un-ta, 2014, p. 385 [in Russian].
- [8] Zhegalov V.I., Utkina E.A. *Ob odnom uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poriadka s tremia nezavisimymi peremennymi* [On a Fourth-Order Partial Differential Equation with Three Independent Variables]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2002, Vol. 38, no. 1, pp. 93–97. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=10533&option_lang=rusmbox [in Russian].
- [9] Zamyshlyayeva A.A. *Nachal'no-konechnaia zadacha dlia neodnorodnogo uravneniia Bussineska — Liava* [The initial-finish value problem for nonhomogenous Boussinesque—Love equation]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie*, 2011, Vol. 37 (254), Issue 10, pp. 22–29. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vyuru&paperid=182&option_lang=rus [in Russian].
- [10] Korpusov P.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010, p. 237 [in Russian].
- [11] Lyusternik L.A., Sobolev S.L. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. M.: FizMatLit, 1965, p. 44 [in Russian].
- [12] Pletner U.D. *Fundamental'nye resheniia operatorov tipa Soboleva i nekotorye nachal'no-kraevye zadachi* [Fundamental solutions of operators of Sobolev type and some initial-boundary value problems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1991, Vol. 31, no. 4, pp. 592–604. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=zvmmf&option_lang=rus&paperid=2790&wshow=paper [in Russian].
- [13] Sveshnikov A.G., Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. *Lektsii po matematicheskoi fizike: ucheb. posobie* [Lectures on mathematical physics:textbook]. M.: Izd-vo MGU, 1993, p. 313 [in Russian].
- [14] Sobolev S.L. *Ob odnoi novoi zadache matematicheskoi fiziki* [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiia AN SSSR. Ser.: Matematika* [Izvestiya: Mathematics], 1954, no. 18(86), pp. 3–50. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=3488&option_lang=rus [in Russian].
- [15] Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Basic problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1983 [in Russian].
- [16] Rayleigh J.W.S. *Teoriia zvuka* [Theory of sound]. M.: GITTL, 1955, Vol. 1, pp. 273–274 [in Russian].

A.V. Dyuzheva²

ON A PROBLEM WITH NON-LOCAL CONDITIONS FOR THE EQUATIONS OF THE IV ORDER

The article deals with a non-local problem with an integral condition for pseudohyperbolic fourth order equation. The dominant mixed derivative which is presented in the equation allows to interpret the problem as an analogue of the Goursat problem. The conditions for the coefficients of the equation and the input data are obtained to ensure the existence of a single task's decision.

Key words: non-local problem, Sobolev type equation, Goursat problem, equation with dominant mixed derivative, integral conditions, Boussinesq-Love equations.

Citation. Dyuzheva A.V. *O zadache s nelokal'nymi usloviiami dlia uravnenii IV poriadka* [On a problem with non-local conditions for the equations of the IV order]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 18–23. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-18-23> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 4/VI/2018.
The article received 4/VI/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Dyuzheva Alexandra Vladimirovna (aduzheva@rambler.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

T.F. Zhuraev, Q.R. Zhuvonov, Zh.Kh. Ruziev¹

SHAPE PROPERTIES OF THE SPACE OF PROBABILITY MEASURES AND ITS SUBSPACES

In this article we consider covariant functors acting in the categorie of compacts, preserving the shapes of infinite compacts, *ANR*-systems, moving compacts, shape equivalence, homotopy equivalence and *A(N)SR* properties of compacts. As well as shape properties of a compact space X consisting of connectedness components 0 of this compact X under the action of covariant functors, are considered. And we study the shapes equality $ShX = ShY$ of infinite compacts for the space $P(X)$ of probability measures and its subspaces.

Key words: Covariant functors, *A(N)R*-compacts, *ANR*-systems, probability measures, moving compacts, retracts, measures of finite support, shape equivalence, homotopy equivalence.

Citation. Zhuraev T.F., Zhuvonov Q.R., Ruziev Zh.Kh. Shape properties of the space of probability measures and its subspaces. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 24–27. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-24-27> [in Russian].

MSC: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54D30.

For a compact X by $P(X)$ denote the space of probability measures. It is known that for an infinite compact X , this space $P(X)$ is homeomorphic to the Hilbert cube Q . For a natural number $n \in \mathbb{N}$ by $P_n(X)$ denote the set of all probability measures with no more than n support, i.e. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\text{supp}\mu| \leq n\}$. The compact $P_n(X)$ is a convex linear combination of Dirac measures in the form

$$\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_n\delta_{x_n}, \sum_{i=1}^n m_i = 1, m_i \geq 0, x_i \in X,$$

δ_{x_i} - the Dirac measure at a point x_i . By $\delta(X)$ denote the set of all Dirac measures. Recall that the space $P_f(X) \subset P(X)$ consists of all probability measures in the form $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_k\delta_{x_k}$ of finite support, for each of which $m_i \geq \frac{k}{k+1}$ for some i . For a positive integer n put $P_{f,n} \equiv P_f \cap P_n$. For a compact X we have $P_{f,n}(X) = \{\mu \in P_f(X) : |\text{supp}\mu| \leq n\}$; $P_f^C \equiv P_f \cap P^C$, $P_{f,n}^C \equiv P_f \cap P_n \cap P^C$, $P_n^C \equiv P^C \cap P_n$. For the compact X by $P^C(X)$ denote the set of all measures $\mu \in P(X)$ the support of each of which lies in one of the components of the compact X [12].

1. Introduction

For a space X by $\square X$ denote the expansion (partition) of the space X consisting of all the connected components. If $f : X \rightarrow Y$ is a continuous mapping, then the continuous mapping $\square f : \square X \rightarrow \square Y$ is uniquely determined by condition $\pi_Y \circ \square f = \square f \cdot \pi_X$, where $\pi_Y : Y \rightarrow \square Y$ and $\pi_X : X \rightarrow \square X$, i.e. we have the following diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ \square X & \xrightarrow{\square f} & \square Y \end{array} \quad (1.1)$$

Lemma 1. If X is a compact *ANR*-space, then the map $P^C(\pi_X)$ is homotopy equivalence.

¹© Zhuraev T.F., Zhuvonov Q.R., Ruziev Zh.Kh., 2018

Zhuraev Tursunboy Faizievich (tursunzhuraev@mail.ru), Department of General Mathematics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, 27, Bunyodkor Street, Tashkent, 100070, Republik of Uzbekistan.

Zhuvonov Qamariddin Rizokulovich (qamariddin.j@mail.ru), Department of Higher Mathematics, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, 39, Kari Niyazov Street, Tashkent, 100000, Republic of Uzbekistan.

Ruziev Zhamshid Khudaikulovich (jruziev@mail.ru), Department of General Mathematics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, 27, Bunyodkor Street, Tashkent, 100070, Republik of Uzbekistan.

Proof. Let be an *ANR*-compact, then the space $P^C(X)$ is a finite set or is a finite union of Hilbert cubes and points. The space $P^C(\square X)$ consists of finitely many points, because the space X is an *ANR*-compact. For any $\mu \in P^C(\square X)$ the transformation $(P^C(f))^{-1}(\mu)$ is the Hilbert cube, or one point, i.e. $Sh((P^C(f))^{-1}(\mu))$ is trivial, then by Theorem 7 [5] the map $P^C(f)$ is a shape equivalence, and thus, is a homotopy equivalence. The proof is complete.

Theorem 1. Let X be a compact and let $\pi_X : X \rightarrow \square X$ be a quotient map. Then the mapping $P^C(\pi_X)$ induces a shape equivalence, i.e. $Sh(P^C(X)) = Sh(\square X)$.

Proof. Suppose X is compact, $\square X$ is also compact, then by V.I.Ponamareva theorem [6] $\dim \square X = 0$. Hence, $\dim P^C(X) = 0$ and $P^C(\square X) = 0$. By Theorem 2 [5] the mapping $P^C(\pi_X)$ is a shape equivalence. This means that $Sh(P^C(X)) = ShP^C(\square X)$ and $|\square P^C(\square X)| = |\square X|$. This proves the theorem.

Definition [10]. A normal subfunctor F of the functor P_n is called locally convex if the set $F(\tilde{n})$ is locally convex.

We say that a functor F_1 is a subfunctor (respectively nadfunktorom?) of a functor F_2 if there exists a natural transformation $h : F_1 \rightarrow F_2$ that the map $h(X) : F_1(X) \rightarrow F_2(X)$ is a monomorphism (epimorphism) for each object X . By \exp denote the hyperspace functor of closed subsets. For example, the identity functor Id is a subfunctor of \exp_n , where $\exp_n X = \{F \in \exp X : |F| \leq n\}$, and the n th degree functor n is a nadfunktorom of functors \exp_n and SP_n^G . A normal subfunctor F of the functor P_n is uniquely determined by its value $F(n)$ at an n -point space. Note that $P_n(n)$ is the $(n-1)$ -dimensional simplex. Any subset of the $(n-1)$ -dimensional simplex σ^{n-1} defines a normal subfunctor of the functor P_n if it is invariant under simplicial mappings.

An example of not normal subfunctor of the functor P_n is the functor of probability measures P_n^C whose supports lie in one of components. One of the examples of locally convex subfunctors of P_n , is a functor $SP^n \equiv SP_{S_n}^n$.

Corollary 1. If for compacts X and Y the equality $|\square X| = |\square Y| = \aleph_0$ holds, then $Sh(P^C(X)) = Sh(P^C(Y))$ and $ShP(X) = ShP(Y)$, where $|Z|$ is the cardinality of a set Z .

Proof. Suppose the sets $|\square X|$ and $|\square Y|$ are countable. In this case, by Arkhangel'skii's result [8], the spaces $|\square X|$ and $|\square Y|$ are compact and metrizable. Note that $|\square X|$ and $|\square Y|$ have a dense set of isolated points. Then the compacts $P(X)$ and $P(Y)$ are homeomorphic to the Hilbert cube Q . On the other hand, $P^C[X] = \square X$ and $P^C[\square Y] = \square Y$. Consequently, $Sh(P^C(\square X)) = Sh(P^C(\square Y))$. The corollary is proved.

By M_\square we denote the class of all compacts X such that $\square X$ is metrizable. From corollary it follows that if $X, Y \in M_\square$, then $\square X$ and $\square Y$ have a countable dense set of isolated points [9].

Corollary 2. If $X, Y \in M_\square$, then either $Sh(P^C(X)) \geq Sh(P^C(Y))$ or $Sh(P^C(X)) \leq Sh(P^C(Y))$. Therefore, if $\square X$ and $\square Y$ are infinite, then $Sh(P^C(X)) = Sh(P^C(Y))$, i.e. $Sh(P^C(X)) \geq Sh(P^C(Y))$ and $Sh(P^C(X)) \leq Sh(P^C(Y))$.

Proof. Suppose that X and Y are elements of the family M_\square . Then $\square X$ and $\square Y$ are the zero-dimensional compacta. In particular, if $\square X$ and $\square Y$ are finite sets, then by Theorem 1 we obtain the desired.

If $|\square X| \geq \aleph_0$, then $\square X$ contains Cantor's discontinuum. In this case, $\square Y$ can be embedded into $\square X$, then the compact $\square Y$ is a retract for $\square X$ [10]. $Sh(\square X) \geq Sh(\square Y)$ and $Sh(P^C(\square X)) \geq Sh(P^C(\square Y))$.

Consequently, by Theorem 1 we have $ShP^C[\square X] \geq ShP^C[\square Y]$. If $|\square X| \leq \aleph_0$ and $|\square Y| \leq \aleph_0$, then compacts $\square X$ and $\square Y$ are homeomorphic to Mazurkiewicz-Sierpinski ordinal compact [11]. Last, suppose $\square X$ and $\square Y$ are infinite sets, then $Sh(\square X) \geq Sh(\square Y)$ if and only if $\square X$ and $\square Y$ are homeomorphic [3]. If $|\square X| > |\square Y|$ or $|\square X| < |\square Y|$, then either $\square Y$ or $\square X$ is retract for $\square X$ or $\square Y$, respectively. By Theorem 1 we have $Sh(P^C(X)) \geq Sh(P^C(Y))$. Corollary 2 is proved.

Remark. In [11] it is shown that the Borsuk's definition of shapes of compacts is equivalent to the shapes of *ANR*-systems.

Lemma 2. For any compact X we have $|\square P_f(X)| = |\square X|$.

Proof. Let X be an arbitrary compact, $\square X$ its set of connected components, i.e. $\square X = \{x'_i \in X : \pi_X^{-1}(x'_i) - \text{is connected component of the point } x'_i\}$. It is obvious that $\square X$ is compact and $\square X \subset X$. Hence, $Sh(\square X) \leq ShX$. On the other hand, the commutativity of the diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi_X : X & \rightarrow & \square X \\ & \uparrow & \uparrow \\ P_f(\pi_X) : P_f(X) & \rightarrow & \delta(\square X) \end{array} \quad (1.2)$$

implies $|\square ShP_f(X)| = |\square X|$. From (1.2) we get $|\square P_f(X)| = |\square X|$. Lemma 2 is proved.

Let us note that for all $x \in X$ and $y \in X$ between sets $(r_f^{-1})(x)$ and $(r_f^{-1})(y)$ there is a one-one correspondence, i.e. to an arbitrary point $\mu_x \in (P_f^{-1})(X)$ we assign $\mu_y \in (P_f^x)^{-1}$, where

$$\mu_x = m_0\delta_{x_0} + m_1\delta_{x_1} + \dots + m_k\delta_{x_k}, \mu_y = m_0\delta_{y_0} + \dots + m_k\delta_{x_k}.$$

In the case of the infinite compacts X and Y the spaces $P(X)$ and $P(Y)$ are homeomorphic to the Hilbert cube Q . If A and B are Z -sets lying in the compacts $P(X)$ and $P(Y)$, then by Chapman's theorem [2], $ShA = ShB$ if and only if $P(X) \setminus A$ is homeomorphic to $P(Y) \setminus B$. In [10,12] it is shown that the subspaces $F(X)$ and $F(Y)$ are Z -sets in the compacts $P(X)$ and $P(Y)$, where $F = P_f(X), P_{f,n}(X), P_{f,n}^C(X), P_f^C(X)$. Moreover, it was noted that this space X is a strong deformation retract for $F(X)$. So the following is valid.

Theorem 2. For infinite compacts X and Y the following conditions are equivalent:

1. $ShX = ShY$;
2. $P(X) \setminus P_f(X) \simeq P(Y) \setminus P_f(Y)$;
3. $P(X) \setminus \delta(X) \simeq P(Y) \setminus \delta(Y)$;
4. $P(X) \setminus F(X) \simeq P(Y) \setminus F(Y)$, where $F = P_{f,n}^C, P_f^C$.

Theorem 3. Suppose that X and Y are elements of M_\square , $X \in M_\square$ and $Y \in M_\square$. Then the following conditions are equivalent:

1. $Sh(\square X) = Sh(\square Y)$;
2. $P(X) \setminus P^C(X) \simeq P(Y) \setminus P^C(Y)$.

Theorem 4. Suppose that X and Y are elements of M_\square . Then $Sh(\square X) = Sh(\square Y)$ if and only if $ShX = Sh(\square X)$.

It is known that from the inequality $ShX \leq ShY$ it follows $Sh(\square X) \leq Sh(\square Y)$. In particular, the equality $ShX = ShY$ implies $Sh(\square X) = Sh(\square Y)$.

Now let $Sh(\square X) = Sh(\square Y)$. From the fact that the compacts $\square X$ and $\square Y$ are zero-dimensional and metrizable, and by Mardeschicha Segal theorem [3], $\square X$ and $\square Y$ are homeomorphic. If for any $y \in \square X$ the set $\pi_y^{-1}(y)$ has the trivial shape, then by Theorem 7 [5] we have $ShY = Sh(\square X)$; By virtue of the zero-dimensionality and equality $ShY = Sh(\square X)$ it follows $Y \simeq \square X \simeq \square Y$.

Note that in this case $ShX = ShY$ and $X \simeq Y$, i.e. $ShX = Sh(\square X)$ is equivalent to $ShX = ShY$.

Corollary 3. a) The space $P^C(X)$ is an *ASR* if and only if X is connected; b) $P^C(X)$ is an *ANSR* if and only if X has finitely many connected components.

Theorem 5. For any infinite zero-dimensional compacts X and Y the followings are true:

- a) If $ShX = ShY$, then $P_n(X) \simeq P_n(Y)$;
- b) if $ShX = ShY$, then $P(X) \setminus P_n(X) \simeq P(Y) \setminus P_n(Y)$;
- c) $ShP_n(X) = ShP_n(Y)$ if and only if $P(X) \setminus P_n(X) \simeq P(Y) \setminus P_n(Y)$;
- d) $ShF(X) = ShF(Y)$ if and only if $P(X) \setminus F(X) \simeq P(Y) \setminus F(Y)$, where F are locally convex subfunctors of the functor P_n ;
- e) $ShX = ShY$ if and only if $P(X) \setminus \delta(X) \simeq P(Y) \setminus \delta(Y)$.

Theorem 6. For any infinite zero-dimensional compacts X and Y the following conditions are equivalent:

1. $ShX = ShY$;
2. $ShF(X) = ShF(Y)$, where $F = P_{f,n}, P_{f,n}^C, P_f, P_f^C$;
3. $X \simeq Y$;
4. $P(X) \setminus F(X) \simeq P(Y) \setminus F(Y)$;

Theorem 7. For any infinite compacts X and Y we have: a) if $ShX = ShY$, then $P(X) \setminus P_n(X) \simeq P(Y) \setminus P_n(Y)$ for any $n \in N$;

b) if $ShX = ShY$, then $P(X) \setminus F(X) \simeq P(Y) \setminus F(Y)$, where F are locally convex subfunctors of the functors P_n .

Theorem 8. For any infinite compacts $X \in M_\square$ and $Y \in M_\square$ we have:

- a) $ShX = ShY$ if and only if $P(X) \setminus P_n(X) \simeq P(Y) \setminus P_n(Y)$;
- b) $ShX = ShY$ if and only if $P(X) \setminus F(X) \simeq P(Y) \setminus F(Y)$.

References

- [1] Oledski J. On summetric products. *Fund. Math.*, 131, 1988, pp 185–190 [in English].
- [2] Borsuk K. Shape theory. *Mir*, 1976, p. 187.
- [3] Mardesic S., Segal J. Shapes of compacta and ANR-systems. *Fund. Math.*, LXXII, 1971, pp. 41–59 [in English].
- [4] Basmanov V.N. Covariant functors, retracts and dimension. *DAN USSR*, 1983, Vol. 271, no. 5, pp. 1033–1036 [in Russian].
- [5] Kodama Y., Spiez S., Watanabe T. On shapes of hyperspaces. *Fund. Math.*, 1978, Vol. 11, pp. 59–67 [in English].
- [6] Ponomarev V.I. On continuous decompositions of bicomplexa. *Uspekhi Mat. Nauk*, 12, 1957, pp. 335–340 [in English].
- [7] Shepin E.V. Functors and uncountable powers of compacta. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1981, Vol. 36, no. 3, pp. 3–62 [in English].
- [8] Arhangelski A.V. On addition theorem for weight of sets lying in bicomplexa. *DAN SSSR*, 126, 1959, pp. 239–241 [in Russian].
- [9] Pelczynski A. A remark on spaces for zerodimensional X . *Bull. Acad. Polon. Scr. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 19, 1965, pp 85–89 [in English].
- [10] Fedorchuk V.V. Probability measures in topology. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1991, Vol. 46, no. 1, pp. 41–80 [in English].
- [11] Mardesic S., Segal J. Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes. *Fund. Math.*, LXXII, 1971, pp. 61–66 [in English].
- [12] Zhuraev T.F. Some geometric properties of the function of probability measures P and its subfunctors. M.: MGU, 1989, 90 p. [in Russian].
- [13] Zhuraev T.F. On projectively quotient functors. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 2001, Vol. 42, no. 3 [in Russian].

*Т.Ф. Жураев, К.Р. Жувонов, Ж.Х. Рузиев*²

СВОЙСТВА ФОРМЫ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА И ЕГО ПОДПРОСТРАНСТВ

В этой заметке мы рассмотрим ковариантные функторы, действующие в категории компактов, сохраняющие формы бесконечных компактов, ANR -систем, движущиеся компакты, эквивалентность формы, гомотопическую эквивалентность и $A(N)SR$ свойства компактов. Рассмотрены свойства формы компактного пространства X , состоящего из компонент связности 0 этого компактного X под действием ковариантных функторов. И мы изучаем равенство форм $ShX = ShY$ бесконечных компактов для пространства вероятностных мер $P(X)$ и его подпространств.

Ключевые слова: Ковариантный функтор, шейп компакта, компонента, связности и гомотопическая эквивалентность.

Цитирование. Zhuraev T.F., Zhuvonov Q.R., Ruziev Zh.Kh. Shape properties of the space of probability measures and its subspaces // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 24–27. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-24-27>.

MSC: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54D30.

Статья поступила в редакцию 23/V/2018.

The article received 23/V/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

² Жураев Турсунбой Файзиевич (tursunzhuraev@mail.ru), кафедра общей математики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 100070, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Бунедкор, 27.

Жувонов Камариддин Ризокулович (qamariddin.j@mail.ru), кафедра высшей математики, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, 100000, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязи, 39.

Рузиев Жамшид Худайкулович (jruziev@mail.ru), кафедра общей математики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 100070, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Бунедкор, 27.

T.F. Zhuraev, A.Kh. Rakhmatullaev, Z.O. Tursunova¹

SOME VALUES SUBFUNCTIONS OF FUNCTOR PROBABILITIES MEASURES IN THE CATEGORIES *COMP*

This article is dedicated to the preservation by subfunctors of the functor P of spaces of probability measures countable dimension and extensor properties of spaces of probability measures subspaces.

Key words: probability measures, dimension, the Z -set, homotopy dense, strong discrete approximation properties.

Citation. Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O. Some values subfunctors of functor probabilities measures in the categories *Comp*. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 28–32. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-28-32> [in Russian].

MSC: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54D30.

1. Introduction

Let X be a topological space. By $C(X)$ is denoted the ring of all continuous real valued functions on the space X with the compact-open topology. The diagonal product of all mappings at $C(X)$ is defined by the embedding of X into $R^{C(X)}$.

If X is compact, then closed span of its images is a convex compact space which is denoted by $P(X)$ [6]. On the other hand the probability measure functor P is covariant functor acting in the category of compact spaces and their continuous maps. $P(X)$ is a convex subspace of a linear space $M(X)$ conjugate to the space $C(X)$ of continuous functions on X with the weak topology, consisting of all non-negative functional μ (*i.e.* $\mu(\varphi) \geq 0$) for every non-negative $\varphi \in C(X)$ with unit norm [2,7]. For a continuous map $f : X \rightarrow Y$ the mapping

$$P(f) : P(X) \rightarrow P(Y)$$

is defined as follows $(P(f)(\mu))\varphi = \mu(\varphi \circ f)$.

The space $P(X)$ is naturally embedded in $R^{C(X)}$. The base of neighborhoods of a measure $\mu \in P(X)$ consists of all sets of the form $O(\mu_1, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\mu' \in P(X) : |\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)| \leq \varepsilon, i = \overline{1, k}, \}$ where $\varepsilon > 0$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in C(X)$ are arbitrary functions.

2. About a topology on a subspace of the space of probability measures

Let F be a subfunctor of P with a finite support. Then the base of neighborhoods of a measure $\mu_0 = m_1^0 \cdot \delta(x_1) + \dots + m_s^0 \cdot \delta(x_s) \in \overline{f(X)}$ consists of sets of the form $O < \mu_0, U_1, \dots, U_S > = \{\mu \in F(X) : \mu = \sum_{i=1}^{s+1} \mu_i\}$, where $\mu_i \in M^+(X)$ is the set of all non-negative functional and $\|\mu_{i+1}\| < \varepsilon$, $\text{supp} \mu_i \subset U_i, \|\mu\| - m_i^0 < \varepsilon$ for $i = 1, \dots, S$, where U_1, \dots, U_S – are neighborhoods of points x_1, \dots, x_S with disjoint closures.

¹© Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O., 2018

Zhuraev Tursunboy Faizievich (tursunzhuraev@mail.ru), Department of General Mathematics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, 27, Bunyodkor Street, Tashkent, 100070, Republik of Uzbekistan.

Rakhmatullaev Alimby Khasanovich (olimboy56@gmail.com), Department of Higher Mathematics, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, 39, Kari Niyazov Street, Tashkent, 100000, Republic of Uzbekistan.

Tursunova Zulayho Omonullaevna (zulayhotursunova@mail.ru), Department of General Mathematics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, 27, Bunyodkor Street, Tashkent, 100070, Republik of Uzbekistan.

In fact, first we show that the set $0 < \mu_0, U_1, \dots, U_S, \varepsilon >$ contains a neighborhood of the measures μ_0 in the weak topology. For each $i = 1, \dots, S$ we take the function $\varphi_i : X \rightarrow I$, satisfying the conditions: $\varphi_i([U_i]) = 1, \varphi_i(\bigcup_{j \neq i} [U_j]) = 0$. Furthermore, we take the function $\varphi_{s+1} : X \rightarrow I$ so that $\varphi_{s+1}(X \setminus U_1 \cup \dots \cup U_S) = 1$, and $\varphi_{s+1}(\{x_1, \dots, x_s\}) = 0$. Now let us check the inclusion

$$O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_s, \varphi_{s+1}, \varepsilon/2) \subset O < (\mu_0, U_1, \dots, U_S, \varepsilon) . \quad (2.1)$$

We present a measure $\mu \in O(\mu_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s, \varphi_{s+1}, \varepsilon/2)$ in the form $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_s + \mu_{s+1}$, where $\text{supp} \mu_i \subset U_i$ for $i = 1, \dots, S, \text{supp} \mu_i \subset X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_S)$. Then $\frac{\varepsilon}{2} > |\mu(\varphi_{s+1}) - \mu_0(\varphi_{s+1})| = |\mu(\varphi_{s+1})|$. But $\mu_{s+1} \leq \mu$, so $\mu_{s+1}(\varphi_{s+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ at the same time, by definition of the function φ_{s+1} we have $\mu_{s+1}(\varphi_{s+1}) = \mu_{s+1}(1_x) = \|\mu_{s+1}\|$. So, $\|\mu_{s+1}\| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. To prove the inclusion (1) it remains to show that $|\|\mu\| - m_i^0| < \varepsilon$. We have $\frac{\varepsilon}{2} > |\mu_0(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| \geq |\mu_0(\varphi_i)| - |\mu(\varphi_i)| = m_i^0 - |(\mu_1 + \dots + \mu_s + \mu_{s+1})(\varphi_i)| = \varphi_i /$ by definition of the function $/ = m_i^0 - (\mu_1 + \dots + \mu_s + \mu_{s+1})(\varphi_i) = m_i^0 - \mu_i(\varphi) - \mu_{s+1}(\varphi_i) = m_i^0 - \|\mu_i\| - \mu_{s+1}(\varphi_i)$. Consequently, $m_i^0 - \|\mu_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \mu_{s+1}(\varphi_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu_{s+1}(1_x) = \frac{\varepsilon}{2} + \|\mu_{s+1}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On the other hand, $\frac{\varepsilon}{2} > \mu_i(\varphi_i) + \mu_{s+1}(\varphi_i) - m_i^0 = \|\mu_i\| - m_i^0 + \mu_{s+1}(\varphi_i)$ thus $\|\mu\| - m_i^0 < \frac{\varepsilon}{2}$. The Inequality $|\|\mu\| - m_i^0| < \varepsilon$ and the inclusion (1) are proved.

We now show that in every neighborhood of the base $O(\mu_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$ there is a neighborhood of the form $O < \mu_0, U_1, \dots, U_S, \delta >$. It is enough to consider the neighborhood of the form $O(\mu_0, \varphi, \varepsilon)$, since the family of neighborhoods of the measure μ_0 in the form $O < \mu_0, U_1, \dots, U_S, \delta >$ is directed down by inclusion / intersection of a finite number of neighborhoods of this type contains a neighborhood of the same form /. This follows from the validity of the inclusion

$$O < \mu_0, U_1^1 \cap U_1^2 \cap \dots \cap U_s^1 \cap U_s^2, \frac{1}{2} \min \{\delta_1, \delta_2\} > \subset O < U_0, U_1^1, \dots, U_s^1, \delta_1 > \cap O < \mu_0, U_1^2, \dots, U_s^2, \delta_2 > \quad (2.2)$$

The main part of checking is the following:

$$\begin{aligned} \mu(U_i^j) &= \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \mu(U_i^j \setminus U_i^1 \cap U_i^2) \leq \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \mu(X \setminus \bigcup_{e=1}^s (U_e^1 \cap U_e^2)) < \\ &< \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \frac{1}{2} \min \{\delta_1, \delta_2\} \leq \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \frac{1}{2} \delta_j. \end{aligned}$$

Therefore, for the measure μ from the left side of proved inclusion (3.1) we have

$$\mu_0(U_i^j) - \mu(U_i^j) \leq \mu_0(U_i^j) - \mu(U_i^1 \cap U_i^2) = m_i^0 - \mu(U_i^1 \cap U_i^2) \leq \frac{1}{2} \min \{\delta_1, \delta_2\} < \delta_j$$

on the other hand

$$\mu(U_i^j) - \mu_0(U_i^j) < \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \frac{1}{2} \delta_j - m_i^0 < \frac{1}{2} \min \{\delta_1, \delta_2\} + \frac{1}{2} \delta_j \leq \delta_j.$$

It remains to find a neighborhood of the form $O < \mu_0, U_1, \dots, U_S, \delta >$ in the neighborhood $O(\mu_0, \varphi, \varepsilon)$. Since $O(\mu_0, \lambda\varphi, \lambda\varepsilon) = O(\mu_0, \varphi, \varepsilon)$, for $\lambda > 0$, we can assume that $\|\varphi\| \leq 1$. Moreover, one can also assume that $\varphi \geq 0$. For $\delta > 0$ we take disjoint neighborhoods U_i of the points x_i so that oscillations of the function φ on U_i was less than δ .

Then $|\mu_0(\varphi) - \mu(\varphi)| \leq |m_1^0\varphi(x_1) - \int_{u_1} \varphi d\mu| + \dots + |m_s^0\varphi(x_s) - \int_{u_s} \varphi d\mu| + |\int_{X \setminus U_1 \cup \dots \cup U_s} \varphi d\mu|$. Further $|m_i^0\varphi(x_i) - \int_{u_i} \varphi d\mu| = |m_i^0\varphi(x_i) - \int_{u_i} \varphi(x_i) d\mu + \int_{u_i} \varphi(x_i) d\mu - \int_{u_i} \varphi d\mu| \leq m_i^0\varphi(x_i) - \int_{u_i} \varphi(x_i) d\mu + |\int_{u_i} [\varphi(x_i) - \varphi] d\mu| \leq \varphi(x_i) |m_i^0 - \|\mu_i\|| + \int_{u_i} |\varphi(x_i) - \varphi| d\mu \leq \varphi(x_i) \delta + \delta \|\mu_i\| \leq 2\delta$. Therefore, for $\delta < \frac{\varepsilon}{(2S+1)}$ the inclusion $O < \mu_0, U_1, \dots, U_S, \delta > \subset O(\mu_0, \varphi, \varepsilon)$ holds.

3. Basic notions and conventions

It is known that for an infinite compact space X , the space $P(X)$ is homeomorphic to the Hilbert cube Q [5], where $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]$, $[-1, 1]$ is the segment in the real line R . For a natural number $n \in N$ by $P_n(X)$ we denote the set of all probability measures with support consisting of at most n points, i.e. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\text{supp} \mu| \leq n\}$. The compact $P_n(X)$ is convex combinations of

Dirac measures of the form: $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_n\delta_{x_n}$, $\sum_{i=1}^n m_i = 1, m_i \geq 0, x_i \in X, \delta_{x_i}$ - is the Dirac

measure at the point x_i . By $\delta(X)$ we denote the set of all Dirac measures and $P_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$. Recall that the space $P_f(X) \subset P(X)$ consists of all probability measures in the form $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_k\delta_{x_k}$ of finite supports, for each of which $m_i \geq \frac{k}{k+1}$ for some i [2,7]. For a natural n put $P_{f,n} \equiv P_f \cap P_n$ for the compact X . For compact X $P_{f,n}(X) = \{\mu \rightarrow P_f(X) : |\text{supp} \mu| \leq n\}$ and hold. For the compact X by $P^c(X)$ we denote the set of all measures $\mu \in P(X)$, support of each of which is contained to one of the components of the compact X [7].

We say that a functor F_1 is a subfunctor (respectively ontofunctor) of a functor F_2 , if there is a natural transformation $h : F_1 \rightarrow F_2$ such that for every object X the mapping $h(X) : F_1(X) \rightarrow F_2(X)$ is a monomorphism (epimorphism). By \exp we denote the well known hyperspace functor of closed subsets. For example, the identity functor Id is a subfunctor of the functor \exp_n , where $\exp_n X = \{F \in \exp X : |F| \leq n\}$ and $n-$ of n -degree is a ontofunctor of \exp_n and SP_G^n . A normal subfunctor F of the functor P_n is uniquely determined by its value $F(\tilde{n})$ on \tilde{n} where $\{\tilde{n}\}$ denotes n -point set $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Note that $P_n(n)$ is the $(n-1)$ -dimensional simplex σ^{n-1} . Any subset of $(n-1)$ -dimensional simplex σ^{n-1} defines a normal subfunctor of the functor P_n , if it is invariant with respect to simplicial mappings to itself.

Definition [7]. A normal subfunctor F of the functor P_n is locally convex if the set $F(\tilde{n})$ is locally convex.

An example which is not a normal subfunctor of the functor P_n is the functor P_n^c of probability measures, whose supports contains in one of components of a space. One of the examples of locally convex subfunctors of the functor P_n is a functor $SP^n \equiv SP_{S_n}^n$, where S_n is a group of homeomorphisms (permutation group) of n -point set.

Definition [1,8]. We say that a space X is countable dimension (shortly $X \in c \cdot d$), if $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, where $\dim X_n < \infty$ for each n . In particular, X is a countable union of zero-dimensional spaces, i.e. $\dim X_i = 0$ for every X_i .

Theorem 1. If $X \in c \cdot d$, then $P_{f,n}(X) \in c \cdot d$ for each $n \in N$.

Proof. Let $X \in c \cdot d$. Then X is a countable union of finite-dimensional spaces $\dim X_i < \infty$ in the sense of dim. In this case, $P_{f,n}(X)$ is a countable union of $P_{f,n}(X_i)$, i.e. $P_{f,n}(X) = P_{f,n}(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{f,n}(X_i)$. By [9] for each $i \in N$ the compact $P_{f,n}(X_i)$ is finite-dimensional in the sense of dim, i.e. $\dim P_{f,n}(X_i) < \infty$, more accurately, $\dim P_{f,n}(X_i) \leq n \dim X_i + \dim P_{f,n}(\tilde{n}) = n \dim X_i + n - 1$. In this case $\dim P_{f,n}(\tilde{n}) = n - 1$, since $P_{f,n}(\tilde{n})$ is a part of the $(n-1)$ -dimensional simplex δ^{n-1} spanned by the points $\{1, 2, \dots, n-1\}$, i.e. for each $i \in N$ the space $P_{f,n}(X_i)$ is finite-dimensional. Hence, $P_{f,n}(X)$ is a countable union of finite-dimensional spaces. So $P_{f,n}(X) \in c \cdot d$. If X is a countable union of zero-dimensional spaces $\dim X_i = 0$, then $\dim P_{f,n}(X_i) = n - 1$ for each $i \in N$. In this case, $P_{f,n}(X)$ is also a countable union of finite-dimensional spaces, i.e. $P_{f,n}(X) \in c \cdot d$. Theorem is proved.

From the equation $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$, in the particular case we have.

Corollary 1. If the compact X is a $c \cdot d$ space, then $P_f(X) \in c \cdot d$.

Let X be a finite-dimensional compact. Then the space $P_{f,n}(X)$ is also finite-dimensional. More accurately, $\dim P_{f,n}(X) \leq n \dim X + n - 1 = n(\dim X + 1) - 1$. On the other hand, there is an open and closed mapping decreasing dimension of spaces. Fibers of the mappings $r_{f,n}^X$ are similar cell, i.e. fibers are contractible to a point.

Theorem 2. Suppose $\varphi : X \rightarrow Y$ is a continuous surjective open mapping between the infinite compacts X and Y . Then the mapping $P_{f,n}(\varphi) : P_{f,n}(X) \rightarrow P_{f,n}(Y)$ is also open.

Proof. Let X and Y be infinite compacts and let the mapping $\varphi : X \rightarrow Y$ be surjective and open. Then by the normality of the functor $P_{f,n}(\varphi)$ the mapping $P_{f,n}(\varphi)$ is surjective. In this case, we have the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} P_{f,n}(X) & \xrightarrow{P_{f,n}(\varphi)} & P_{f,n}(Y) \\ \downarrow r_{f,n}^X & & \downarrow r_{f,n}^Y \\ \delta(X) & \longrightarrow & [\delta(\varphi)] \delta(Y) \end{array} \quad (3.1)$$

where $\delta(X)$ and $\delta(Y)$ are Dirac measures on compacts X and Y . Let $\mu(x) = m_1 \delta_{x_1^0} + m_2 \delta_{x_2} + \dots + m_k \delta_{x_k}$, $r_{f,n}^x(\mu_0(X)) = \delta_{x_1^0}$, $P_{f,n}(\varphi)(\mu_0(x)) = m_1 \delta_{y_1^0} + m_2 \delta_{y_2} + \dots + m_k \delta_{y_k}$.

From the fact that the mapping $r_{f,n}^x$, $\delta(\varphi)$ is open and the diagram (3) is commutative, it follows that the mapping $P_{f,n}(\varphi)$ is open. Commutativity of diagram (3) follows from Lemma 2 of Uspensky's work [3]. Theorem 2 is proved.

Similarly as theorem 2, one can proof the following.

Theorem 3. For infinite compacts X and Y a surjective map is open if and only if the map $P_f(\varphi) : P_f(X) \rightarrow P_f(Y)$ is open.

Corollary 2. If $X \in c \cdot d$, then $P_n(X) \in c \cdot d$, $P_\omega(X) \in c \cdot d$ and $P_\omega(X) \in A(N)R$.

Let X be a topological space and let $A \subset X$. A set \mathcal{A} is called homotopy dense in X , if there is a homotopy $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ such that $h(x, 0) = id_x$ and $h : (X \times (0, 1]) \subset A$. A set \mathcal{A} is called homotopy void if complement of \mathcal{A} is homotopy dense in X . The set $A \subset X$ is called the Z -set in X [4], if A is closed and for each cover $U \in cov(X)$ there is a map $f : X \rightarrow X$ such that $(f, id_x) \prec U$ and $f(X) \cap A = \emptyset$.

Theorem 4. For any infinite compact X and for each $n \in N$ the compact $P_n(X)$ is the Z -set in $P_\omega(X)$.

Proof. By infinity of metric compact X the space $P_\omega(X)$ is convex and a locally convex metric space. So, $P_\omega(X) \in A(N)R$. On the other hand, the space is compact. It is obvious that $P_n(X)$ is a subspace

of $P_\omega(X)$, since the compact $P_{f,n}(X)$ is a subset of the compact $P_n(X)$. We fix a measure $\mu_0 = \frac{1}{k}\delta_{x_1} + \frac{1}{k}\delta_{x_2} + \dots + \frac{1}{k}\delta_{x_k}$.

Let $[0,1]$ is the unit interval. We construct a homotopy $h(\mu, t) : P_\omega(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\omega(X)$ getting $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t\mu_0$.

Obviously, $h(\mu, 0) = \mu$ i.e. $h(\mu, 0) = id_{P_\omega(X)}$ and $h(P_\omega(X) \times (0, 1]) \subset P_\omega(X) \setminus P_n(X)$. This means that $n \in N$ for any subspace $P_\omega(X) \setminus P_n(X)$ homotopically dense in $P_\omega(X)$. Then the set $P_n(X)$ is homotopically small in $P_\omega(X)$. Hence, by one of the results in [4], the subspace $P_\omega(X) \setminus P_n(X) \in ANR$ and $P_\omega(X) \setminus P_n(X)$ are ANR -spaces. In this case, from theorem 1.4.4. [4] it follows that $P_\omega(X)$ is the Z -set in $P_\omega(X)$. Theorem 4 is proved.

Lemma 1. For any infinite compact X each compact subset A of $P_\omega(X)$ is a Z -set, i.e. $P_\omega(X)$ has the compact Z -property.

Proof. Let X be an infinite compact, A is compact subset, i.e. $A \subset P_\omega(X)$. Consider the set $A \cap P_n(X) = A_n$. It's obvious that $P_1(X) \subset P_2(X) \subset \dots \subset P_n(X) \subset \dots$. By theorem 4, the set is a Z -set in $P_\omega(X)$ for each $n \in N$. Then $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ is σ - Z -set and is closed in $P_\omega(X)$. Then by one of the results in [4] A is a Z -set in $P_\omega(X)$. Lemma 1 is proved.

From Theorem 4 and Lemma 1, in particular, the cases arise.

Corollary 2. For any infinite compact X the followings hold:

- The compact $P_{f,n}(X)$ is a Z -set in $P_\omega(X)$ for all $n \in N$.
- The compact $P_f(X)$ is also Z -set in $P_\omega(X)$.

Corollary 3. For an arbitrary infinite compact X we have:

- For each $n \in N$ the subspace $P_\omega(X) \setminus P_{f,n}(X)$ is an ANR space μ homotopically dense in $P_\omega(X)$.
- The subspace $P_\omega(X) \setminus P_{f,n}(X)$ is ANR and homotopically dense in $P_\omega(X)$.

We say that X has strongly discrete approximation property (shortly, SDAP) if for every map $f : Q \times N \rightarrow X$ and for every cover $U \in cov(X)$ there exists a mapping $\bar{f} : Q \times N \rightarrow X$ such that $(\bar{f}, f) \prec U$ and the family $\{\bar{f}(Q \times \{n\})\}$ is discrete in X .

Let $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ be an $(n+1)$ -point subset of the compact X . Fix the measure $\mu_0 = \frac{1}{n+1}\delta_{x_1} + \frac{1}{n+1}\delta_{x_2} + \dots + \frac{1}{n+1}\delta_{x_{n+1}}$. It is clear that $\mu_0 \in P_n(X)$ and $\mu_0 \in P_\omega(X)$. We construct a homotopy $h(\mu, t) : P_\omega(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\omega(X)$ getting $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t\mu_0$. It is known that $h(\mu, 0) = id_{P_\omega(X)}$ and $h(\mu, (0, 1]) \cap P_n(X) = \emptyset$. By the structure of the space $P_\omega(X)$ and by the definition of the homotopy this satisfies the condition of problem 10.1.4 of work [4], i.e. the set $P_n(X)$ is a strongly Z -set in.

Therefore, $P_\omega(X)$ is a strongly set and $P_\omega(X) \in ANR$, i.e. the following is true.

Theorem 5. For any infinite compact X the space $P_\omega(X)$ has strongly discrete approximation property, i.e. $P_\omega(X) \in SDAP$.

References

- Addis D.F., Gresham I.H. A class of infinite - dimensional spaces: Part I: Dimension theory and Alexandroff's problem. *Fund. Math.*, 101 (1978), no. 3, pp.195-205. DOI: 10.4064/fm-101-3-195-205 [in English].
- Zhuraev T.F. Some geometrical properties of the functor P of probability measures: Candidate's thesis. M.: MGU, 1989, 90 p. [in Russian].
- Uspensky V.V. Topological groups and Dugundji's compacts. *Mat. sb.*, 1989, Volume 180, Number 8, pp. 1092-1118. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM1990v067n02ABEH002098> [in English].
- Banakh T, Radul T., Zarichnyi M. Absorbing sets in infinite - dimensional manifolds. Lviv: VNTL Publishers, 1996. URL: https://books.google.ru/books/about/Absorbing_sets_in_infinite_dimensional_m.html?id=NkrvAAAAMAAJ&redir_esc=y [in English].
- Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology. Basic constructions. Moscow: Moscow University Press, 1988, p. 252 [in Russian].
- Schepin E.V. Functors and uncountable powers of compacta. *Russian Math. Surveys*, 36:3 (1981), 3-62. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247> [in English].
- Fedorchuk V.V. Probability measures in topology. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1991, Volume 46, Issue 1(277), Pages 41-80. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1991v046n01ABEH002722> [in English].
- Borst P. Some remarks concerning C -spaces. *Topology and its Applications*, 2007, 154, pp. 665-674 [in English].
- Basmanov V.N. Covariant functors, retracts, and the dimension. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, 271, pp. 1033-1036 [in English].

Т.Ф. Жураев, А.Х. Рахматуллаев, З.О. Турсунова²

СВОЙСТВА ПОДФУНКТОРОВ ФУНКТОРА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В КАТЕГОРИЯХ *COMP*

Данная заметка посвящена сохранению подфункторами функтора P вероятностных мер пространств счетной размерности и экстензорным свойствам подпространств пространства вероятностных мер.

Ключевые слова: вероятностные меры, размерность, Z -множество, гомотопически плотно, сильное дискретное аппроксимационное свойство.

Цитирование. Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O. Some values subfunctors of functor probabilities measures in the categories Comp // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 28–32. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-28-32>.

MSC: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54D30.

Статья поступила в редакцию 23/V/2018.

The article received 23/V/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

² Жураев Турсунбой Файзиевич (tursunzhuraev@mail.ru), кафедра общей математики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 100070, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Бунедкор, 27.

Рахматуллаев Алимбай Хасанович (olimboy56@gmail.com), кафедра высшей математики, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, 100000, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязи, 39.

Турсунова Зулайхо Омонуллаевна (zulayhotursunova@mail.ru), кафедра общей математики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 100070, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Бунедкор, 27.

М.В. Шамолин¹

О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 3. ЗАВИСИМОСТЬ ПОЛЯ СИЛ ОТ ТЕНЗОРА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

В предлагаемом цикле работ исследуются уравнения движения динамически симметричного закрепленного n -мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n -мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В данной работе рассматривается тот случай, когда силовое поле зависит линейным образом от тензора угловой скорости.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

Цитирование. Шамолин М.В. О движении маятника в многомерном пространстве. Часть 3. Зависимость поля сил от тензора угловой скорости // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 33–54. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-33-54>.

1. Введение зависимости от угловой скорости

Данная глава посвящена динамике многомерного твердого тела в пространстве \mathbf{E}^n . Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$ -мерный диск \mathcal{D}^{n-1} , $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций (x_{1N}, \dots, x_{nN}) от тензора угловой скорости Ω лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [1–3].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (1.1)$$

где $R = (R_1, \dots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости Ω . При этом зависимость функции R от тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D} \Omega \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Здесь (h_1, \dots, h_n) — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{r_{n-1}}}{v_D}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_{r_{n-2}}}{v_D}, \quad \dots, \quad x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1} h_1 \frac{\omega_{r_1}}{v}. \quad (1.3)$$

¹© Шамолин М.В., 2018

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imes.msu.ru), Институт механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

Таким образом, функция \mathbf{r}_N выбирается в следующем виде (диск \mathcal{D}^{n-1} задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D}\Omega h, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \dots, \beta_{n-2} \right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad \Omega \in \text{so}(n). \quad (1.5)$$

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \dots \\ \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} \cos \beta_{n-2} \\ \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Таким образом, выполнены равенства

$$\begin{aligned} x_{2N} &= R(\alpha) \cos \beta_1 - h_1 \frac{\omega_{r_{n-1}}}{v_D}, \quad x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h_1 \frac{\omega_{r_{n-2}}}{v_D}, \quad \dots, \\ x_{n-1,N} &= R(\alpha) \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} \cos \beta_{n-2} + (-1)^n h_1 \frac{\omega_{r_2}}{v}, \\ x_{nN} &= R(\alpha) \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} + (-1)^{n+1} h_1 \frac{\omega_{r_1}}{v}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от тензора угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [4, 5], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (1.8)$$

2. Приведенные системы

Для случая n -мерного твердого тела нас будет прежде всего интересовать случай $(1-(n-1))$, т. е. когда в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1 \dots x_n$ оператор инерции имеет вид

$$\text{diag}\{I_1, \underbrace{I_2, \dots, I_2}_{n-1}\}, \quad (2.1)$$

а именно, в гиперплоскости $Dx_2 \dots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

В нашем случае закрепленного маятника действительно реализуется случай (2.1). Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\text{so}(n)$:

$$\begin{aligned}
 & (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_1 = 0, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1-1} = 0, \\
 & (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} + (-1)^{n+1}(I_1 - I_2)W_{n-1}(\Omega) = \\
 & = (-1)^n x_{nN}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}) s(\alpha)v^2, \\
 & (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1+1} = 0, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2-1} = 0, \\
 & (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} + (-1)^n(I_1 - I_2)W_{n-2}(\Omega) = \\
 & = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}) s(\alpha)v^2, \\
 & (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2+1} = 0, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_{n-2}-1} = 0, \\
 & (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} + (I_1 - I_2)W_2(\Omega) = -x_{3N}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}) s(\alpha)v^2, \\
 & (n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} + (I_2 - I_1)W_1(\Omega) = x_{2N}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}) s(\alpha)v^2,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

при этом $r_{n-2} + 1 = r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t = 1, \dots, n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1, \dots, \omega_f$, $f = n(n-1)/2$, тензора Ω , причем

$$\begin{aligned}
 W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1}=\dots=\omega_{k_s}=0} &= 0, \quad s = (n-1)(n-2)/2, \quad k_j \neq r_i, \\
 j &= 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, первая группа кинематических уравнений в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \\
 v_D \sin \alpha \cos \beta_1 &= l\omega_{r_{n-1}} + v_\infty \sin \xi \cos \eta_1, \\
 v_D \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 &= -l\omega_{r_{n-2}} + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1 \cos \eta_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 v_D \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} \cos \beta_{n-2} &= \\
 = (-1)^{n+1} l\omega_{r_2} + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1 \dots \sin \eta_{n-3} \cos \eta_{n-2}, \\
 v_D \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} &= (-1)^n l\omega_{r_1} + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1 \dots \sin \eta_{n-2}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

И далее, образуется вторая группа кинематических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \dots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \dots \circ \\
 & \circ T_{n-3,n-2}(\eta_2) T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} (-1)^n \dot{\eta}_{n-2} \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1 \dots \sin \eta_{n-3} \\ (-1)^{n+1} \dot{\eta}_{n-3} \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1 \dots \sin \eta_{n-4} \\ \dots\dots\dots \\ \dot{\eta}_2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1 \\ -\dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Сразу же заметим, что система (2.2), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \dots = I_n, \tag{2.6}$$

обладает $s = (n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \text{const}, \quad \dots, \quad \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \text{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{2.7}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \dots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{2.8}$$

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является $(n-1)$ -мерная сфера

$$\mathbf{S}^{n-1} \{(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : 0 \leq \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-3} \leq \pi, \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}, \tag{2.9}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos \eta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin \eta.$$

После же перехода от переменных z к промежуточным безразмерным переменным

$$\begin{aligned} z_k &= n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_k, \quad k = 1, \dots, n-2, \\ z_{n-1} &= n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-1} - n_0 v_\infty b_* \sin \xi, \end{aligned} \quad (2.16)$$

система (2.12) будет эквивалентна системе

$$\xi' = (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-1} - b_* \sin \xi, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-1} &= -\sin \xi \cos \xi + \\ &+ (1 + b_* H_{1*}) (Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} Z_{n-1} \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-2} &= -(1 + b_* H_{1*}) Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi} - \\ &- (1 + b_* H_{1*}) (Z_1^2 + \dots + Z_{n-3}^2) \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} + H_{1*} Z_{n-2} \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-3} &= -(1 + b_* H_{1*}) Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} + \\ &+ (1 + b_* H_{1*}) (Z_1^2 + \dots + Z_{n-4}^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} \frac{1}{\sin \eta_1} \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} + H_{1*} Z_{n-3} \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Z'_1 &= -(1 + b_* H_{1*}) Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos \eta_{s-1}}{\sin \eta_1 \dots \sin \eta_{s-1}} \right\} + \\ &+ H_{1*} Z_1 \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\eta'_1 = -(1 + b_* H_{1*}) Z_{n-2} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (2.22)$$

$$\eta'_2 = (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-3} \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (2.23)$$

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1} (1 + b_* H_{1*}) Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1 \dots \sin \eta_{n-4}}, \quad (2.24)$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^n (1 + b_* H_{1*}) Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1 \dots \sin \eta_{n-3}}, \quad (2.25)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^{n-1} \{ (Z_{n-1}, \dots, Z_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \quad (2.26)$$

$$0 \leq \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-3} \leq \pi, \quad \eta_{n-2} \bmod 2\pi \}$$

$(n-1)$ -мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1} \{ (\xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : 0 \leq \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-3} \leq \pi, \eta_{n-2} \bmod 2\pi \}$.

Видно, что в системе (2.17)–(2.25) порядка $2(n-1)$ по причине цикличности переменной η_{n-2} выделяется независимая подсистема (2.17)–(2.24) порядка $2(n-1) - 1$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $(2n-3)$ -мерном многообразии.

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\xi' = (1 + b_* H_{1*}) Z_4 - b_* \sin \xi, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} Z'_4 &= -\sin \xi \cos \xi + \\ &+ (1 + b_* H_{1*}) (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} Z_4 \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} Z'_3 &= -(1 + b_* H_{1*}) Z_3 Z_4 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} - \\ &- (1 + b_* H_{1*}) (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} + H_{1*} Z_3 \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$Z'_2 = -(1 + b_* H_{1*}) Z_2 Z_4 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + (1 + b_* H_{1*}) Z_2 Z_3 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} +$$

$$+ (1 + b_* H_{1*}) Z_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} \frac{1}{\sin \eta_1} \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} + H_{1*} Z_2 \cos \xi, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= -(1 + b_* H_{1*}) Z_1 Z_4 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + (1 + b_* H_{1*}) Z_1 Z_3 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} - \\ &- (1 + b_* H_{1*}) Z_1 Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} \frac{1}{\sin \eta_1} \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} + H_{1*} Z_1 \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\eta_1' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (2.32)$$

$$\eta_2' = (1 + b_* H_{1*}) Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (2.33)$$

$$\eta_3' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1 \sin \eta_2}, \quad (2.34)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^4 \{ (Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbf{R}^8 : 0 \leq \xi, \eta_1, \eta_2 \leq \pi, \eta_3 \bmod 2\pi \} \quad (2.35)$$

четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4 \{ (\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbf{R}^4 : 0 \leq \xi, \eta_1, \eta_2 \leq \pi, \eta_3 \bmod 2\pi \}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (2.27)–(2.34) по причине цикличности переменной η_3 выделяется независимая подсистема седьмого порядка (2.27)–(2.33), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем семимерном многообразии.

3. Полный список первых интегралов при любом конечном n

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (2.17)–(2.25) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (2.17)–(2.25) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \dots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \dots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \\ w_{n-1} &= -Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \\ w_{n-4} &= -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \quad \dots, \quad w_2 = -\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = -\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n-3}^2}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

система (2.17)–(2.25) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_* H_{1*}) w_{n-1} - b_* \sin \xi, \\ w_{n-1}' &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_* H_{1*}) w_{n-2}^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} w_{n-1} \cos \xi, \\ w_{n-2}' &= (1 + b_* H_{1*}) w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} w_{n-2} \cos \xi, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} w_s' &= d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \frac{1+w_s^2 \cos \eta_s}{w_s \sin \eta_s}, \\ \eta_s' &= d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}), \quad s = 1, \dots, n-3, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) &= \\ &= -(1 + b_* H_{1*}) Z_{n-2}(w_{n-1}, \dots, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ d_2(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) &= \\ &= (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-3}(w_{n-1}, \dots, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) &= \\ &= (-1)^n (1 + b_* H_{1*}) Z_1(w_{n-1}, \dots, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1 \dots \sin \eta_{n-3}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, n-2, \quad (3.6)$$

— функции в силу замены (3.1).

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_* H_{1*})w_4 - b_* \sin \xi, \\ w_4' &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_* H_{1*})w_3^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*}w_4 \cos \xi, \\ w_3' &= (1 + b_* H_{1*})w_3w_4 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*}w_3 \cos \xi, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \frac{1+w_2^2}{w_2} \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2}, \\ \eta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \frac{1+w_1^2}{w_1} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) &= -Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} = \\ &= \mp \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) &= Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1} = \\ &= \pm \frac{w_2 w_3}{\sqrt{1+w_1^2} \sqrt{1+w_2^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) &= -Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1 \sin \eta_2} = \\ &= \mp \frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2} \sqrt{1+w_2^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1 \sin \eta_2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.12)$$

— функции в силу замены (3.1).

Система (3.2)–(3.4) рассматривается на касательном расслоении

$$\begin{aligned} T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1}, \dots, w_1; \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \\ 0 \leq \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-3} \leq \pi, \eta_{n-2} \bmod 2\pi\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$(n-1)$ -мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : 0 \leq \xi, \eta_1, \dots, \eta_{n-3} \leq \pi, \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

В частности, система (3.7)–(3.10) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbf{R}^8 : 0 \leq \xi, \eta_1, \eta_2 \leq \pi, \eta_3 \bmod 2\pi\} \quad (3.14)$$

четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbf{R}^4 : 0 \leq \xi, \eta_1, \eta_2 \leq \pi, \eta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (3.2)–(3.4) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (3.2), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (3.3) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (3.4) на η_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (3.7)–(3.10) выделяется независимая подсистема третьего порядка (3.7), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (3.8), (3.9) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (3.10) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (3.2)–(3.4) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.2), по одному — для систем (3.3) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, ”привязывающий” уравнение (3.4) (*т. е. всего n*).

В частности, для полной интегрируемости системы (3.7)–(3.10) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.7), по одному — для систем (3.8), (3.9) и дополнительный первый интеграл, ”привязывающий” уравнение (3.10) (*т. е. всего пять*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (3.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_{n-1}}{d\xi} &= \frac{\sin \xi \cos \xi - (1+b_* H_{1*})w_{n-2}^2 \cos \xi / \sin \xi + H_{1*}w_{n-1} \cos \xi}{-(1+b_* H_{1*})w_{n-1} - b_* \sin \xi}, \\ \frac{dw_{n-2}}{d\xi} &= \frac{(1+b_* H_{1*})w_{n-2}w_{n-1} \cos \xi / \sin \xi + H_{1*}w_{n-2} \cos \xi}{-(1+b_* H_{1*})w_{n-1} - b_* \sin \xi}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (3.15) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_{n-1}}{d\tau} &= \frac{\tau - (1+b_* H_{1*})w_{n-2}^2 / \tau + H_{1*}w_{n-1}}{-(1+b_* H_{1*})w_{n-1} - b_* \tau}, \\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau} &= \frac{(1+b_* H_{1*})w_{n-2}w_{n-1} / \tau + H_{1*}w_{n-2}}{-(1+b_* H_{1*})w_{n-1} - b_* \tau}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1} = u_2 \tau, \quad w_{n-2} = u_1 \tau, \quad (3.17)$$

приводим систему (3.16) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1 + b_* H_{1*})u_1^2 + H_{1*}u_2}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1 + b_* H_{1*})u_1 u_2 + H_{1*}u_1}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*},\end{aligned}\quad (3.18)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 - u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + b_* H_{1*})u_1 u_2 + (b_* + H_{1*})u_1}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Сопоставим системе второго порядка (3.19) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + b_* H_{1*})(u_1^2 - u_2^2) + (b_* + H_{1*})u_2}{2(1 + b_* H_{1*})u_1 u_2 + (b_* + H_{1*})u_1},\quad (3.20)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1} \right) = 0.\quad (3.21)$$

Итак, уравнение (3.20) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const},\quad (3.22)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{aligned}\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) &= \\ &= \frac{(1 + b_* H_{1*})(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) + (b_* + H_{1*})w_{n-1} \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_{n-2} \sin \xi} = C_1 = \text{const}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Замечание 3.1. Рассмотрим систему (3.2) с переменной диссипацией с нулевым средним [6, 7, 8], становящейся консервативной при $b_* = H_{1*}$:

$$\begin{aligned}\xi' &= -(1 + b_*^2)w_{n-1} - b_* \sin \xi, \\ w'_{n-1} &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_*^2)w_{n-2} \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + b_* w_{n-1} \cos \xi, \\ w'_{n-2} &= (1 + b_*^2)w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + b_* w_{n-2} \cos \xi.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b_*^2)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) + 2b_* w_{n-1} \sin \xi + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const},\quad (3.25)$$

$$w_{n-2} \sin \xi = C_2^* = \text{const}.\quad (3.26)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.25), (3.26) также является первым интегралом системы (3.24). Но при $b_* \neq H_{1*}$ каждая из функций

$$(1 + b_* H_{1*})(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) + (b_* + H_{1*})w_{n-1} \sin \xi + \sin^2 \xi\quad (3.27)$$

и (3.26) по отдельности не является первым интегралом системы (3.2). Однако отношение функций (3.27), (3.26) является первым интегралом системы (3.2) при любых b_*, H_{1*} .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.2). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.22) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})} \right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + b_* H_{1*})} \right)^2 = \frac{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + b_* H_{1*})^2}.\quad (3.28)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4 \geq 0,\quad (3.29)$$

и фазовое пространство системы (3.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.28).

Таким образом, в силу соотношения (3.22) первое уравнение системы (3.19) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_* H_{1*})u_2^2 + 2(b_* + H_{1*})u_2 + 2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-b_* - (1 + b_* H_{1*})u_2},\quad (3.30)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1 + b_* H_{1*})} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\},\quad (3.31)$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_* H_{1*})u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.29).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.2) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - (1 + b_* H_{1*})u_2)du_2}{A}, \quad (3.32)$$

$$A = 2(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_* H_{1*})u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}/(2(1 + b_* H_{1*})).$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \xi|. \quad (3.33)$$

Если

$$u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})} = r_1, \quad b_1^2 = (b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4, \quad (3.34)$$

то правая часть равенства (3.32) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}} + \\ & + (b_* - H_{1*})(1 + b_* H_{1*}) \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{-b_* + H_{1*}}{2} I_1, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}. \quad (3.36)$$

При вычислении интеграла (3.36) возможны три случая.

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (3.37)$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.38)$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.39)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\sin \xi} + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})}, \quad (3.40)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \pm 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \mp 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (3.41)$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 + b_1^2}}{b_1 (\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 \pm C_1})} + \text{const.} \quad (3.42)$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + b_* H_{1*}) r_1}{C_1 (\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 \pm C_1})} + \text{const.} \quad (3.43)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.2) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.22).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G \left(\sin \xi, \frac{w_{n-1}}{\sin \xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (3.44)$$

Итак, найдены два первых интеграла (3.23), (3.44) независимой системы третьего порядка (3.2). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (3.3) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (3.4).

Действительно, искомые первые интегралы имеют вид

$$\Theta''_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \eta_s} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & \Theta''_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) = \\ & = \eta_{n-2} \pm \arctg \frac{C_{n-1} \cos \eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2 \eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

при этом в левую часть равенства (3.46) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (3.45) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 3.1. Система (3.2)–(3.4) порядка $2(n-1)$ обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов (3.23), (3.44), (3.45), (3.46).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.2)–(3.4) имеет n первых интегралов, выражающихся соотношениями (3.23), (3.44), (3.45), (3.46) (при этом используются выражения (3.32)–(3.43)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 3.2. Три группы соотношений (2.2), (2.4), (2.5) при условиях (2.6)–(2.8), (1.4), (1.8) обладают n первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.

4. Топологические аналогии

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи

$$v \equiv \text{const.} \quad (4.1)$$

В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_{n-1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{z}_{n-1} &= \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) - (z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^s z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \right\}, \\ \dot{z}_{n-2} &= z_{n-2} z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ z_{n-1} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{s=2}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \Big\} - \\
 & \quad - \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \\
 \dot{z}_{n-3} = & z_{n-3} z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_{n-3} z_{n-2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (z_1^2 + \dots + z_{n-4}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\
 & + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \left[-z_{n-1} + z_{n-2} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right] + \right. \\
 & + \sum_{s=3}^{n-2} (-1)^s z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \Big\} + \\
 & \quad + \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 \dot{z}_1 = & \dot{\beta}_{n-2} (-\omega_{r_1} \sin \beta_{n-2} + \omega_{r_2} \cos \beta_{n-2}) + \\
 & + (-1)^n \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = \\
 & = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} + \\
 & + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \times \\
 & \quad \times \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} + \\
 & \quad + (-1)^n \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \\
 \dot{\beta}_1 = & z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \\
 \dot{\beta}_2 = & -z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 \dot{\beta}_{n-2} = & (-1)^{n+1} z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}} + \\
 & + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2}} \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right),
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \dots, \beta_{n-2} \right)), \\
 \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3, \dots, \beta_{n-2} \right)), \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 \Delta_{v,n-3} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-3} + \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2} \right)), \\
 \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2} + \frac{\pi}{2} \right)),
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}
 \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})) = \\
 &= 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^n x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \dots, n$, ($i_{1N}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \equiv 0$) — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \dots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$ -мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$ -мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (4.1)).

При выполнении условий (1.4), (1.8) система (4.2) примет вид

$$\alpha' = -(1 + bH_1) Z_{n-1} + b \sin \alpha, \quad (4.5)$$

$$Z'_{n-1} = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) (Z_1^2 + \dots + Z_{n-2}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 Z_{n-1} \cos \alpha, \quad (4.6)$$

$$Z'_{n-2} = (1 + bH_1) Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1) (Z_1^2 + \dots + Z_{n-3}^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 Z_{n-2} \cos \alpha, \quad (4.7)$$

$$Z'_{n-3} = (1 + bH_1) Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (1 + bH_1) (Z_1^2 + \dots + Z_{n-4}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - H_1 Z_{n-3} \cos \alpha, \quad (4.8)$$

$$\dots \dots \dots Z'_1 = (1 + bH_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} - H_1 Z_1 \cos \alpha, \quad (4.9)$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1) Z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.10)$$

$$\beta'_2 = -(1 + bH_1) Z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.11)$$

$$\dots \dots \dots \beta'_{n-3} = (-1)^n (1 + bH_1) Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-4}}, \quad (4.12)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} (1 + bH_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}. \quad (4.13)$$

если ввести безразмерные параметры, переменные и дифференцирование по аналогии с (2.11):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad H_1 = \frac{h_1 B}{(n-2)I_2 n_0}, \quad z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (4.14)$$

$$\langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle.$$

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -(1 + bH_1) Z_4 + b \sin \alpha, \quad (4.15)$$

$$Z'_4 = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 Z_4 \cos \alpha, \quad (4.16)$$

$$Z'_3 = (1 + bH_1) Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1) (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 Z_3 \cos \alpha, \quad (4.17)$$

$$Z'_2 = (1 + bH_1) Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (1 + bH_1) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - H_1 Z_2 \cos \alpha, \quad (4.18)$$

$$Z'_1 = (1 + bH_1) Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + (1 + bH_1) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - H_1 Z_1 \cos \alpha, \quad (4.19)$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1) Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.20)$$

$$\beta'_2 = -(1 + bH_1) Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.21)$$

$$\beta'_3 = (1 + bH_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (4.22)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.35)$$

— функции в силу замены (4.24).

Система (4.25)–(4.27) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \\ 0 \leq \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3} \leq \pi, \beta_{n-2} \bmod 2\pi\} \quad (4.36)$$

$(n-1)$ -мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : 0 \leq \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3} \leq \pi, \beta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

В частности, система (4.30)–(4.33) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^8 : 0 \leq \alpha, \beta_1, \beta_2 \leq \pi, \beta_3 \bmod 2\pi\} \quad (4.37)$$

четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^4 : 0 \leq \alpha, \beta_1, \beta_2 \leq \pi, \beta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (4.25)–(4.27) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.25), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (4.26) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (4.27) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (4.30)–(4.33) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.30), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (4.31), (4.32) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (4.33) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.25)–(4.27) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.25), по одному — для систем (4.26) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.27) (*т. е. всего n*).

В частности, для полной интегрируемости системы (4.30)–(4.33) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.30), по одному — для систем (4.31), (4.32) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.33) (*т. е. всего пять*).

Следствие 4.1.

1. Угол атаки α и углы $\beta_1, \dots, \beta_{n-2}$ для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и $\eta_1, \dots, \eta_{n-2}$ закрепленного маятника.
2. Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.
3. Первые интегралы системы (4.25)–(4.27) могут быть автоматически получены через равенства (3.23), (3.44), (3.45), (3.46) после подстановок (4.23) (см. также [9]):

$$\Theta'_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \\ = \frac{(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1} \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_{n-2} \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (4.38)$$

$$\Theta'_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin \alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin \alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin \alpha}\right) = C_2 = \text{const.} \quad (4.39)$$

$$\Theta''_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \beta_s} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \quad (4.40)$$

$$\Theta''_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \\ = \beta_{n-2} \pm \arctg \frac{C_{n-1} \cos \beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2 \beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}, \quad (4.41)$$

при этом в левую часть равенства (4.41) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (4.40) при $s = n-4, n-3$.

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т. е. когда выполнено свойство

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const} \quad (4.42)$$

(\mathbf{V}_C — скорость центра масс), поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (4.43)$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad (4.52)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z) = & -\sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha + \\ & + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) + \\ & + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Тогда, в силу условий (4.42), (1.4), (1.8), (4.14) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.45)–(4.52)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b H_1 Z_{n-1} \cos^2 \alpha, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-1} = & \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b H_1) \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ & + b Z_{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - b Z_{n-1} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + b H_1 Z_{n-1}^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_{n-1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-2} = & (1 + b H_1) Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + b H_1) \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ & + b Z_{n-2} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - b Z_{n-2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + b H_1 Z_{n-2} Z_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_{n-2} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-3} = & (1 + b H_1) Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + b H_1) Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ & - (1 + b H_1) \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ & + b Z_{n-3} \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - b Z_{n-3} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + b H_1 Z_{n-3} Z_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_{n-3} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} Z'_1 = & (1 + b H_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} + \\ & + b Z_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos \alpha - b Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + b H_1 Z_1 Z_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\beta'_1 = (1 + b H_1) Z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.59)$$

$$\beta'_2 = -(1 + b H_1) Z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.60)$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n (1 + b H_1) Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-4}}, \quad (4.61)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} (1 + b H_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}, \quad (4.62)$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (4.63)$$

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_4 \cos^2 \alpha, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} Z_4' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_4^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_4 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= (1 + bH_1)Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_3 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= (1 + bH_1)Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ &- (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_2 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= (1 + bH_1)Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_1 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.69)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.70)$$

$$\beta_3' = (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (4.71)$$

Для полного интегрирования системы (4.54)–(4.62) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (4.24) система (4.54)–(4.62) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - \\ &- bH_1 w_{n-1} \cos^2 \alpha, \\ w_{n-1}' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_{n-2}^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \cos \alpha - bw_{n-1} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 w_{n-1}^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_{n-1} \cos \alpha, \\ w_{n-2}' &= (1 + bH_1)w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \cos \alpha - bw_{n-2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 w_{n-2} w_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_{n-2} \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

$$\left. \begin{aligned} w_s' &= d_1(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \frac{1+w_s}{w_s} \frac{\cos \beta_s}{\sin \beta_s}, \\ \beta_s' &= d_1(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \dots, n-3, \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

$$\beta_{n-2}' = d_2(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_2), \quad (4.74)$$

где выполнены условия (4.28).

В частности, при $n = 5$ система (4.64)–(4.71) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - \\ &- bH_1 w_4 \cos^2 \alpha, \\ w_4' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_3^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_4(w_3^2 + w_4^2) \cos \alpha - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 w_4^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_4 \cos \alpha, \\ w_3' &= (1 + bH_1)w_3 w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_3(w_3^2 + w_4^2) \cos \alpha - bw_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 w_3 w_{n-1} \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_3 \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1+w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1+w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (4.78)$$

где выполнены условия (4.34).

Система (4.72)–(4.74) рассматривается на касательном расслоении (4.36) $(n-1)$ -мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : 0 \leq \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2} \leq \pi, \beta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

В частности, система (4.75)–(4.78) рассматривается на касательном расслоении (4.37) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^4 : 0 \leq \alpha, \beta_1, \beta_2 \leq \pi, \beta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (4.72)–(4.74) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.72), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (4.73) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (4.74) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (4.75)–(4.78) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.75), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (4.76), (4.77) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (4.78) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.72)–(4.74) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.72), по одному — для систем (4.73) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.74) (*т. е. всего n*).

В частности, для полной интегрируемости системы (4.75)–(4.78) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.75), по одному — для систем (4.76), (4.77) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.78) (*т. е. всего пять*).

Если вопрос о первых интегралах системы (4.5)–(4.13) (или (4.25)–(4.27)) решается с помощью следствия 4.1, то аналогичный вопрос для системы (4.54)–(4.62) (или (4.72)–(4.74)) решает следующая теорема 4.2.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (4.72) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Theta_1''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) &= \\ &= \frac{(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1} \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_{n-2} \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.72), используя при этом первый интеграл (4.79). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_{n-1} = u_2 \tau, \quad w_{n-2} = u_1 \tau, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (4.80)$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1 u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad (4.81)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0. \quad (4.82)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (4.81) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (4.81), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ \times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \text{const.} \quad (4.83)$$

Тогда искомым дополнительным первым интегралом имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin \alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (4.84)$$

используя при этом обозначения и замены (4.80).

Итак, найдены два первых интеграла (4.79), (4.84) независимой системы третьего порядка (4.72). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (4.73) (всего $n - 3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.74).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (4.40), (4.41), а именно:

$$\Theta'_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \beta_s} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n - 3, \quad (4.85)$$

$$\Theta'_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \\ = \beta_{n-2} \pm \arctg \frac{C_{n-1} \cos \beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2 \beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}, \quad (4.86)$$

при этом в левую часть равенства (4.86) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (4.85) при $s = n - 4, n - 3$.

Теорема 4.2. n первых интегралов (4.79), (4.84), (4.85), (4.86) системы (4.72)–(4.74) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 4.3. n первых интегралов (4.79), (4.84), (4.85), (4.86) системы (4.72)–(4.74) эквивалентны n первым интегралам (4.38), (4.39), (4.40), (4.41) системы (4.25)–(4.27).

Действительно, пары первых интегралов (4.79), (4.38), (4.85), (4.40) и (4.86), (4.41) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k , $k = 1, \dots, n - 1$, для системы (4.72)–(4.74) с фазовыми переменными w_k , $k = 1, \dots, n - 1$, для системы (4.25)–(4.27). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (4.84), (4.39), не приводим ввиду громоздкости изложения (см. также [10, 11, 12]).

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).

2) Движение многомерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).

3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [13; 14].

Литература

- [1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jmid=vsgu&option_lang=rus&paperid=486&wshow=paper.
- [2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.
- [3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. Динамические системы. 2013. С. 5–254.

- [4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41. URL: <http://docme.ru/doc/1679357/nekotorye-usloviya-integriruемости-dinamicheskikh-sistem-v-t...>
- [5] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172. URL: <http://shamolin2.imec.msu.ru/art-233-2.pdf>. DOI: 10.7868/S0869565217320081.
- [6] Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2015. Т. 461. № 5. С. 533–536. DOI: 10.1134/S1028335815040060.
- [7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
- [8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
- [9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrmid=fpm&paperid=1332&option_lang=rus.
- [10] Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле // Доклады РАН. 2015. Т. 460. № 2. С. 165–169. DOI: 10.7868/S0869565215020127.
- [11] Шамолин М.В. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49. DOI: 10.7868/S0869565213230126.
- [12] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551. DOI: 10.7868/S0869565216350115.
- [13] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181. URL: <http://www.mathnet.ru/links/571bc112f52d6d616bb2966029543696/into208.pdf>.
- [14] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523. DOI: 10.7868/S0869565217230098.

References

- [1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruемости, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrmid=vsgu&option_lang=rus&paperid=486&wshow=paper [in Russian].
- [2] Shamolin M.V. *Sluchai integriruемости, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika v trekhmernom prostranstve* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrmid=vsgu&paperid=512&option_lang=rus [in Russian].
- [3] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruемости v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovremennaiia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory* [Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.]. Vol. 125. Dynamical Systems, 2013, pp. 5–254. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrmid=into&paperid=147&option_lang=rus [in Russian].
- [4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruемости dinamicheskikh sistem v transsendentnykh funktsiakh* [Certain conditions of integrability of dynamical systems in transcendental functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2012, no. 9/1(110), pp. 35–41. Available at: <http://docme.ru/doc/1679357/nekotorye-usloviya-integriruемости-dinamicheskikh-sistem-v-t...> [in Russian].
- [5] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii trekhmernogo mnogoobraziiia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Three-Dimensional Manifold] *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2017, Vol. 477, no. 2, pp. 168–172. Available at: <http://shamolin2.imec.msu.ru/art-233-2.pdf>. DOI: 10.7868/S0869565217320081 [in Russian].

- [6] Shamolin M.V. *Polnyi spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravnenii dvizheniia mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Complete List of First Integrals of Dynamic Equations for a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2015, Vol. 461, no. 5, pp. 533–536. DOI: 10.1134/S1028335815040060 [in Russian].
- [7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspect in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].
- [8] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetric spaces automorphysm groups]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].
- [9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil’tonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2010, Vol. 16, issue 4, pp. 3–229. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=fpm&paperid=1332&option_lang=rus [in Russian].
- [10] Shamolin M.V. *Mnogomernyi maiatnik v nekonservativnom silovom pole* [A Multidimensional Pendulum in a Nonconservative Force Field]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2015, Vol. 460, no. 2, pp. 165–169. DOI: 10.7868/S0869565215020127 [in Russian].
- [11] Shamolin M.V. *Novyi sluchai integriruемости v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2013, Vol. 453, no. 1, pp. 46–49. DOI: 10.7868/S0869565213230126 [in Russian].
- [12] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruемости sistem s dissipatsiei na kasatel’nykh rassloeniiakh k dvumernoi i trekhmernoi sferam* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Two- and Three-Dimensional Spheres]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2016, Vol. 471, no. 5, pp. 547–551. DOI: 10.7868/S0869565216350115 [in Russian].
- [13] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel’nom rassloenii k mnogomernoi sfere* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2017, Vol. 474, no. 2, pp. 177–181. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/571bc112f52d6d616bb2966029543696/into208.pdf> [in Russian].
- [14] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel’nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Two-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Doklady Physics], 2017, Vol. 475, no. 5, pp. 519–523. DOI: 10.7868/S0869565217230098 [in Russian].

M. V. Shamolin²

ON A PENDULUM MOTION IN MULTI-DIMENSIONAL SPACE. PART 3. DEPENDENCE OF FORCE FIELDS ON THE TENSOR OF ANGULAR VELOCITY

In the proposed cycle of work, we study the equations of motion of dynamically symmetric fixed n -dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of motion of a free n -dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. In this work, we study that case when the force fields linearly depend on the tensor of angular velocity.

Key words: multi-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Citation. Shamolin M.V. *O dvizhenii maiatnika v mnogomernom prostranstve. Chast' 3. Zavisimost' polia sil ot tenzora uglovoi skorosti* [On a pendulum motion in multi-dimensional space. Part 3. Dependence of force fields on the tensor of angular velocity]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 33–54. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-33-54> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 27/V/2018.
The article received 27/V/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²*Shamolin Maxim Vladimirovich* (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.

МЕХАНИКА

УДК 539.42

DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66

Л.Н. Косыгина¹

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С БОКОВЫМИ НАДРЕЗАМИ: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе проведено теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) бесконечной пластины с двумя полубесконечными симметричными краевыми разрезами. Аналитическое решение получено с помощью разложения в ряд М. Уильямса и последующего подсчета амплитудных коэффициентов разложения с использованием комплексного представления напряжений. Проведен анализ многопараметрического разложения поля напряжений и вычислительный эксперимент с удержанием различного количества слагаемых. Сравнение комплексного представления поля напряжений с полученным асимптотическим разложением в ряд М. Уильямса показало необходимость аккуратной оценки количества удерживаемых слагаемых в зависимости от расстояния от вершины трещины.

Ключевые слова: разложение М. Уильямса, напряженно-деформированное состояние пластины с полубесконечными разрезами, вычисление высших приближений асимптотического ряда М. Уильямса.

Цитирование. Косыгина Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 55–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66>.

Введение

Предложенное М. Уильямсом описание поля напряжений в окрестности вершины трещины посредством асимптотического разложения является одним из широко используемых методов решения задач механики разрушения [1–11]. М. Уильямс использовал функцию напряжений [12–16], представленную в виде разложения в ряд по собственным функциям $\chi(r, \theta) = \sum_i f_i(\theta)r^{\lambda_i}$, где $f_i(\theta)$ и λ_i — собственные функции и собственные значения соответственно, а r, θ — полярные координаты. В этом случае компоненты напряжений имеют следующий вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(m)} f_{k,ij}^{(m)}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1}, \quad (1)$$

где индекс m в круглых скобках здесь и далее по тексту отвечает типу нагружения функции ($m = 1$ соответствует нормальному отрыву, $m = 2$ поперечному сдвигу), $f_{k,ij}^{(m)}(\theta)$ являются универсальными угловыми функциями и определяются соотношениями

$$\begin{aligned} f_{k,11}^{(1)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left[2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{k,22}^{(1)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left[2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right\}, \\ f_{k,12}^{(1)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta - \left[\frac{k}{2} + (-1)^k\right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

¹© Косыгина Л.Н., 2018

Косыгина Лилия Николаевна (fleur.lilia@gmail.com), кафедра математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

$$\begin{aligned}
 f_{k,11}^{(2)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left\{ \left[2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right] \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right\}, \\
 f_{k,22}^{(2)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left\{ \left[2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right] \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right\}, \\
 f_{k,12}^{(2)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left\{ \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta - \left[\frac{k}{2} - (-1)^k \right] \cos \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta \right\},
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

а амплитудные коэффициенты $a_k^{(m)}$ учитывают множество краевых задач механики разрушения (геометрию образца и систему нагрузок).

Первые два слагаемых для ряда Уильямса (1) достаточно просто определяются и существует большое количество аналитических решений [7–9], полученных посредством разложения Уильямса для различных образцов с трещинами. Однако в ряде экспериментальных и теоретических работ [1–6; 10; 11], опубликованных в последнее время, показана необходимость учета большего числа слагаемых, что в действительности является трудной задачей. Масштабные множители $a_k^{(m)}$ могут быть определены разными способами: 1) экспериментально; 2) теоретически; 3) численно с помощью метода конечного элемента. Фотоупругость, с одной стороны, является эффективным способом нахождения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса, поскольку экспериментально можно определить разность главных напряжений и найти амплитудные коэффициенты с помощью оптико-механического закона. С другой стороны, использование метода фотоупругости приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой в случае большого количества удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении М. Уильямса наталкивается на существенные математические трудности. В силу указанных причин представляется важным и актуальным рассмотреть конфигурации образцов с трещинами, для которых имеется аналитическое решение, раскладывая которое в ряд в окрестности трещины можно получить высшие приближения и оценить их вклад в общее поле напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины. В настоящей работе приводится комплексное представление поля напряжений в образце с двумя симметричными надрезами, находящимся под действием сородоточенных сил (рис. 1), и разложение функции Вестергаарда в ряд с целью определения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений в этом образце.

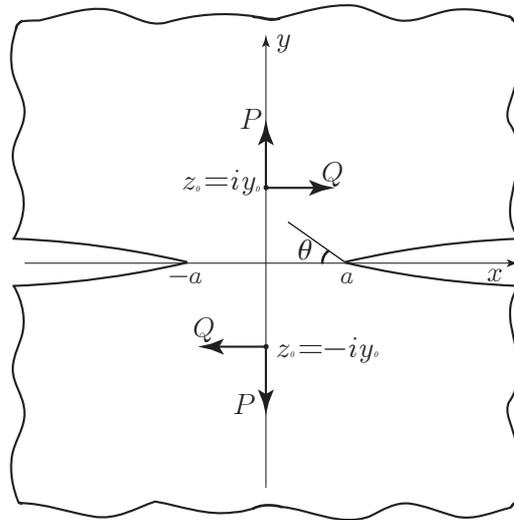


Рис. 1. Пластина с двумя полубесконечными краевыми надрезами

1. Комплексное представление решения. Функция Вестергаарда

При решении плоских задач теории упругости часто используется функция напряжений. Для расчета напряжений у трещины удобно ее выбрать в виде комплексной функции двух переменных, что значительно упрощает математические выкладки. В общем виде любую функцию напряжений можно представить следующим образом [17]

$$\Phi(z) = \operatorname{Re} [(x_1 - ix_2)\phi(z) x_1 + \chi(z)],$$

здесь $\operatorname{Re} []$ — действительная часть функции комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, а $\phi(z)$, $\chi(z)$ — аналитические функции, выбранные соответствующим образом.

Вестергаард, решая задачу распределения напряжений около острой трещины, проанализировал свойства комплексных функций определенного типа и подобрал граничные условия, соответствующие этим

свойствам [18]. Им было предложено при решении задачи о растяжении пластины (случай трещины первого типа — нормальный отрыв) использовать комплексную функцию следующего вида

$$\Phi_1(z) = \operatorname{Re} [\Phi_1^{**}(z)] + x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1^*(z)], \quad (4)$$

здесь $\operatorname{Im} []$ — мнимая части функции комплексного переменного z , а $\Phi_1^*(z)$ и $\Phi_1^{**}(z)$ первый и второй интегралы функции $\Phi(z)$

$$\Phi_1(z) = \frac{d\Phi_1^*(z)}{dz}, \quad \Phi_1^*(z) = \frac{d\Phi_1^{**}(z)}{dz}.$$

Для трещины первого типа комплексное представление напряжений определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \operatorname{Re} [\Phi_1(z)] - x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1'(z)], \\ \sigma_{22}^{(1)} &= \operatorname{Re} [\Phi_1(z)] + x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1'(z)], \\ \sigma_{12}^{(1)} &= -x_2 \operatorname{Im} [\Phi_1'(z)]. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае трещины второго типа (поперечный сдвиг) в качестве функции напряжений рассматривается функция

$$\Phi_2(z) = -x_2 \operatorname{Re} [\Phi_2^*(z)],$$

где $\Phi_2^*(z)$ — функция комплексного переменного, выбранная с учетом граничных условий.

Тогда для трещины второго типа комплексное представление напряжений определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} &= 2 \operatorname{Im} [\Phi_2(z)] + x_2 \operatorname{Re} [\Phi_2'(z)], \\ \sigma_{22}^{(2)} &= -x_2 \operatorname{Re} [\Phi_2'(z)], \\ \sigma_{12}^{(2)} &= \operatorname{Re} [\Phi_2(z)] - x_2 \operatorname{Im} [\Phi_2'(z)]. \end{aligned} \quad (6)$$

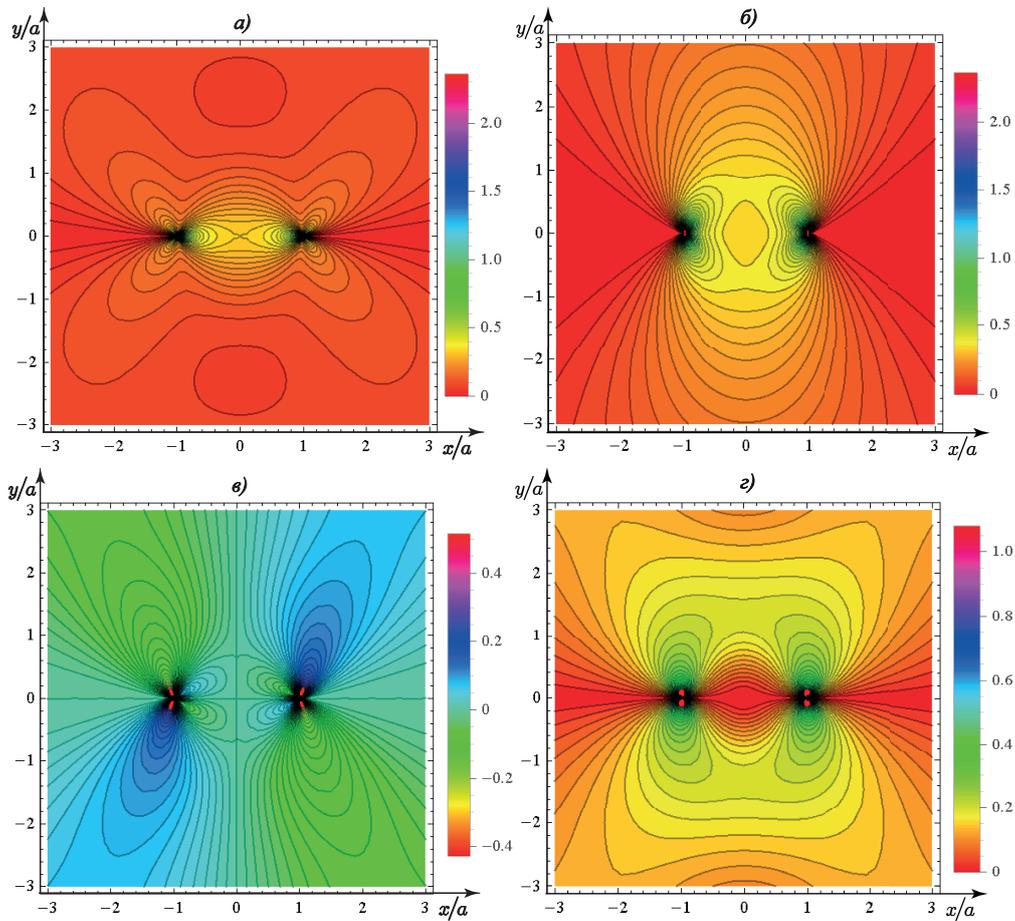


Рис. 2. Контурные линии компонент тензора напряжений в случае нормального отрыва. а) линии равных значений компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}^{(1)}$; б) линии равных значений компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}^{(1)}$; в) линии равных значений компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}^{(1)}$; г) линии интенсивности напряжений $\sigma_e^{(1)}$

Поскольку рассматриваемая среда является линейно-упругой и изотропной, то справедлив принцип суперпозиции. Тогда для смешанного нагружения поле напряжений определяется соотношениями

$$\sigma_{ij}^e = M^e \sigma_{ij}^{(1)} + (1 - M^e) \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (7)$$

здесь $M^e = 2/\pi \operatorname{arctg}(P/Q)$, $0 \leq M^e \leq 1$ — параметр смешанности, его варьирование позволяет получить весь диапазон смешанных форм деформирования: от нормального отрыва при $M^e = 1$ до поперечного сдвига при $M^e = 0$.

2. Растяжение пластины с двумя боковыми надрезами. Комплексное представление решения

Как упоминалось выше, для получения высших приближений ряда Уильямса и оценки их вклада в общее поле напряжений необходимо рассматривать конфигурации образцов с трещинами, для которых имеется аналитическое решение. Одним из таких образцов является пластина с двумя полубесконечными боковыми разрезами (рис. 1). Итак, рассмотрим бесконечную пластину с двумя полубесконечными боковыми разрезами симметричными относительно мнимой оси (вершины разрезов располагаются на расстоянии a от мнимой оси).

Функции Вестергарда для трещин первого и второго типа в рассматриваемом случае имеют соответственно вид [19]

$$\Phi_1(z) = \frac{P}{\pi} \left(f - \alpha y_0 \frac{\partial f}{\partial y_0} \right), \quad \Phi_2(z) = \frac{Q}{\pi} \left(f + \alpha y_0 \frac{\partial f}{\partial y_0} \right), \quad (8)$$

здесь

$$f = \frac{y_0}{y_0^2 + z^2} \sqrt{\frac{a^2 + y_0^2}{a^2 - z^2}}.$$

После применения оператора дифференцирования и ряда преобразований комплексные потенциалы (8) удается представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_i(z) &= \frac{c_4^{(i)}(z^2 + c_5^{(i)})}{\sqrt{a^2 - z^2} (z^2 + y_0^2)^2}, \quad (9) \\ c_4^{(i)} &= c_1^{(i)} c_3^{(i)}, \quad c_5^{(i)} = c_2^{(i)} / c_1^{(i)}, \\ c_1^{(1)} &= a^2 + y_0^2 - \alpha(a^2 + 2y_0^2), \quad c_1^{(2)} = a^2 + y_0^2 + \alpha(a^2 + 2y_0^2), \\ c_2^{(1)} &= y_0^2 [y_0^2 + a^2(1 + \alpha)], \quad c_2^{(2)} = y_0^2 [y_0^2 + a^2(1 - \alpha)], \\ c_3^{(1)} &= \frac{P y_0}{\pi \sqrt{a^2 + y_0^2}}, \quad c_3^{(2)} = \frac{Q y_0}{\pi \sqrt{a^2 + y_0^2}}. \end{aligned}$$

Для получения поля напряжений требуется выделить действительные и мнимые части функций, входящих в комплексные потенциалы (9)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[(z^2 + y_0^2)^2 \right] &= A_1 = (x^2 - x_2^2 + y_0^2)^2 - 4x_1^2 x_2^2, \\ \operatorname{Im} \left[(z^2 + y_0^2)^2 \right] &= A_2 = 4x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2 + y_0^2), \\ \operatorname{Re} \left[\sqrt{a^2 - z^2} \right] &= Y_1 = \sqrt{(X_1 + \sqrt{X_1^2 + X_2^2})} / 2, \\ \operatorname{Im} \left[\sqrt{a^2 - z^2} \right] &= Y_2 = X_2 / (2Y_1), \quad X_1 = a^2 - x_1^2 + x_2^2, \quad X_2 = -2x_1 x_2, \\ \operatorname{Re} \left[z^2 + c_5^{(i)} \right] &= D_1^{(i)} = x_1^2 - x_2^2 + c_5^{(i)}, \quad \operatorname{Im} \left[z^2 + c_5^{(i)} \right] = D_2 = 2x_1 x_2. \end{aligned}$$

Приведенные выше соотношения позволяют представить мнимую и действительную части комплексных потенциалов в виде

$$\operatorname{Re} [\Phi_i(z)] = f_1^{(i)} (D_1^{(i)} B_1 - D_2 B_2), \quad \operatorname{Im} [\Phi_i(z)] = f_1^{(i)} (D_1^{(i)} B_2 + D_2 B_1),$$

$$B_1 = A_1 Y_1 - A_2 Y_2, \quad B_2 = A_1 Y_2 + A_2 Y_1, \quad f_1^{(i)} = c_4^{(i)} / [(A_1^2 + A_2^2) (Y_1^2 + Y_2^2)].$$

Аналогичным образом выделяются действительные и мнимые части функций, входящих в выражение производных комплексных потенциалов

$$\Phi_i'(z) = \frac{3c_4^{(i)} z (z^4 + a_1 z^2 + a_2)}{(a^2 - z^2)^{3/2} (z^2 + y_0^2)^2}, \quad (10)$$

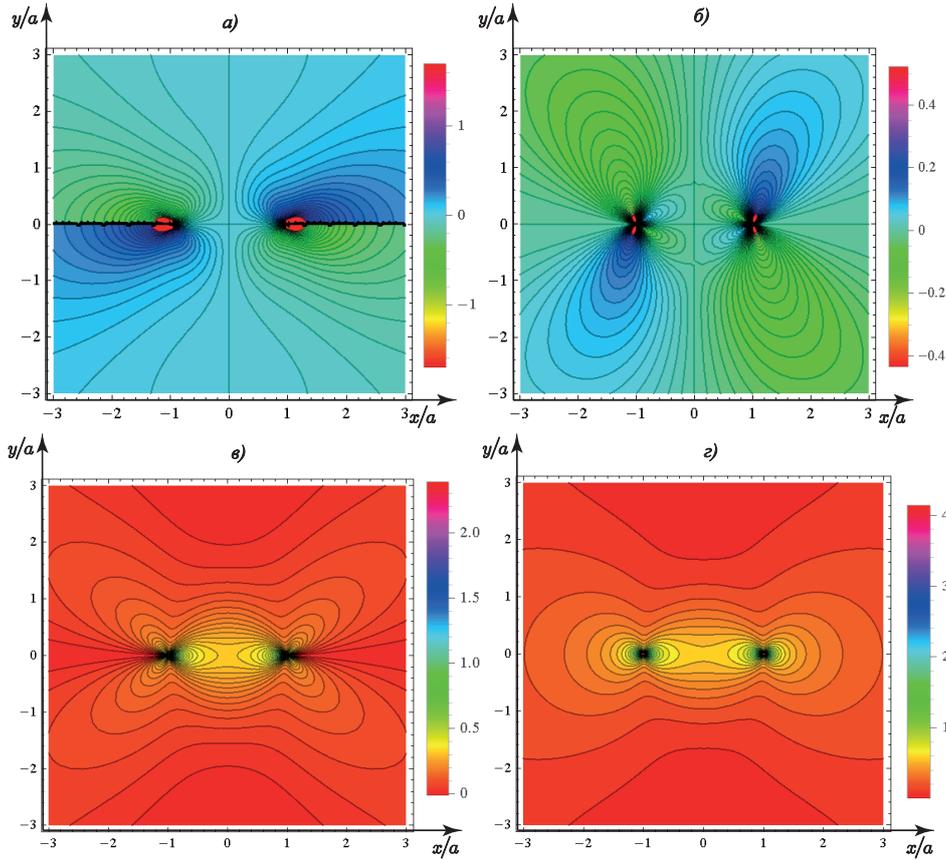


Рис. 3. Контурные линии компоненты тензора напряжений в случае поперечного сдвига. а) линии равных значений компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}^{(2)}$; б) линии равных значений компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}^{(2)}$; в) линии равных значений компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}^{(2)}$; г) линии интенсивности напряжений $\sigma_e^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} [(z^2 + y_0^2)] &= A_{11} = x_1^2 + y_0^2 - x_2^2, & \operatorname{Im} [(z^2 + y_0^2)] &= A_{22} = 2x_1x_2, \\
 \operatorname{Re} [(z^2 + y_0^2)^3] &= p_1 = A_{11}^3 - 3A_{11}A_{22}^2, & \operatorname{Im} [(z^2 + y_0^2)^3] &= p_2 = 3A_{11}^2A_{22} - A_{22}^3, \\
 \operatorname{Re} [(a^2 - z^2)^{3/2}] &= q_1 = Y_1^3 - 3Y_1Y_2^2, & \operatorname{Im} [(a^2 - z^2)^{3/2}] &= q_2 = 3Y_1^2Y_2 - Y_2^3, \\
 \operatorname{Re} [z^4 + a_1z^2 + a_2] &= r_1 = a_1(x_1^2 - x_2^2) + a_2 - 4x_1^2x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2, \\
 \operatorname{Im} [z^4 + a_1z^2 + a_2] &= r_2 = 2x_1x_2[2(x_1^2 - x_2^2) + a_1].
 \end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют представить мнимую и действительную части производных комплексных потенциалов (10) в виде

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} [\Phi_i'(z)] &= f_2^{(i)} R_1, & \operatorname{Im} [\Phi_i'(z)] &= f_2^{(i)} R_2, \\
 f_2^{(i)} &= 3c_4^{(i)} / [(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)], \\
 R_1 &= (p_1q_2 + p_2q_1)(r_1x_2 + r_2x_1) + (p_1q_1 - p_2q_2)(r_1x_1 - r_2x_2), \\
 R_2 &= (p_1q_1 - p_2q_2)(r_1x_2 + r_2x_1) - (p_1q_2 + p_2q_1)(r_1x_1 - r_2x_2).
 \end{aligned}$$

Тогда поля напряжений, полученные после подстановки ранее приведенных выражений в представление (5), будут иметь вид

а) трещина первого типа (нормальный отрыв)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(1)} &= f_1^{(1)}(B_1D_1^{(1)} - B_2D_2) - f_2^{(1)}R_2x_2, \\
 \sigma_{22}^{(1)} &= f_1^{(1)}(B_1D_1^{(1)} - B_2D_2) + f_2^{(1)}R_2x_2, \\
 \sigma_{12}^{(1)} &= -f_2^{(1)}R_1x_2,
 \end{aligned} \tag{11}$$

б) трещина второго типа (поперечный сдвиг)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(2)} &= 2(B_2D_1^{(2)} + B_1D_2)f_1^{(2)} + f_2^{(2)}R_1x_2, \\
 \sigma_{22}^{(2)} &= -f_2^{(2)}R_1x_2, \\
 \sigma_{12}^{(2)} &= (B_1D_1^{(2)} - B_2D_2) - f_2^{(2)}R_2x_2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

в) соотношения для поля напряжений в случае смешанного нагружения легко получить из выражения (7) с помощью (11) и (12).

На графиках приведены контурные линии компонент тензора напряжений для нормального отрыва (рис. 2), поперечного сдвига (рис. 3) и смешанного нагружения (рис. 4).

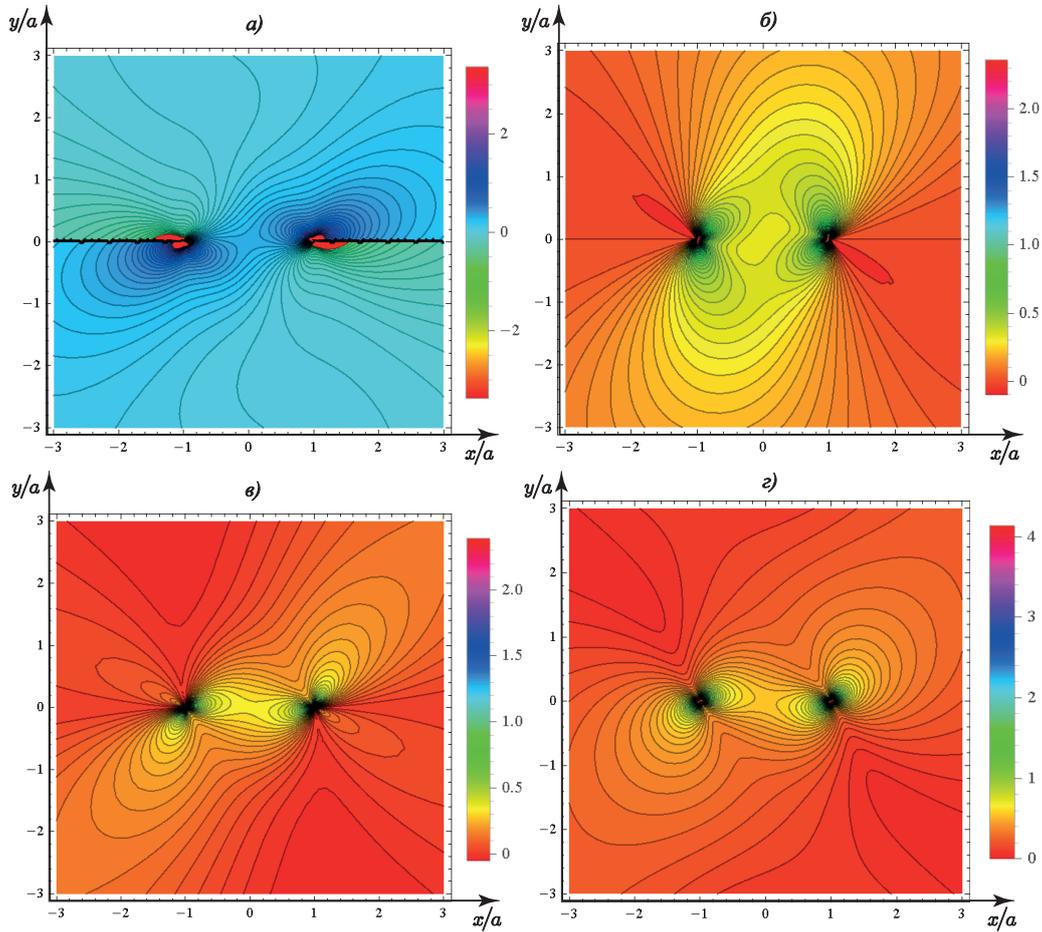


Рис. 4. Контурные линии компонент тензора напряжений в случае смешанного нагружения для параметра смешанности $M^e = 0.5$. а) линии равных значений компоненты тензора напряжений σ_{11} ; б) линии равных значений компоненты тензора напряжений σ_{22} ; в) линии равных значений компоненты тензора напряжений σ_{12} ; г) линии интенсивности напряжений σ_e

3. Растяжение пластины с двумя боковыми надрезами. Асимптотическое представление решения

3.1. Нормальный отрыв

Разложение в ряд Тейлора функций, входящих в комплексный потенциал (9), в окрестности вершины трещины $z = -a$ имеет вид

$$\begin{aligned} z^2 + c_5^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(1)} (z+a)^k, & (a-z)^{-1/2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(1)} (z+a)^m, \\ (z+iy_0)^{-2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^{(1)} (z+a)^p, & (z-iy_0)^{-2} &= \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^{(1)} (z+a)^j, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(1)} &= a^2 + c_5^{(1)}, & \alpha_1^{(1)} &= -2a, & \alpha_2^{(1)} &= 1, & \alpha_k^{(1)} &= 0, k > 2, \\ \beta_m^{(1)} &= \frac{|2m-1|!!}{2^{2m+1/2} a^{m+1/2} m!}, & \delta_p^{(1)} &= \frac{p+1}{(a+iy_0)^{p+2}}, & \eta_j^{(1)} &= \frac{j+1}{(a-iy_0)^{j+2}}. \end{aligned}$$

Подстановка соотношений (13) в (9) дает асимптотическое разложение комплексного потенциала в окрестности вершины трещины $z = -a + re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(1)} (z+a)^{n-1/2}, \\ \zeta_n^{(1)} &= \sum_{l=0}^n \xi_l^{(1)} \gamma_{n-l}^{(1)}, \quad \xi_l^{(1)} = \sum_{j=0}^l \alpha_j^{(1)} \beta_{j-l}^{(1)}, \quad \gamma_l^{(1)} = \sum_{j=0}^l \delta_j^{(1)} \eta_{j-l}^{(1)}.\end{aligned}$$

Тогда в окрестности вершины трещины $z = -a + re^{i\theta}$ комплексный потенциал и его производная имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(1)} r^{n-1/2} \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + i \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta \right], \\ \Phi_1'(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \zeta_n^{(1)} r^{n-3/2} \left[\cos\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta + i \sin\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Подстановка полученных соотношений (14) в (5) приводит к выражениям

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(1)} r^{n-1/2} g_{n,ij}^{(1)}(\theta), \\ g_{n,11}^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left[\left(n + \frac{3}{2}\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta - \left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(n - \frac{5}{2}\right)\theta \right], \\ g_{n,22}^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(n - \frac{5}{2}\right)\theta - \left(n - \frac{5}{2}\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta \right], \\ g_{n,12}^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[\sin\left(n - \frac{5}{2}\right)\theta - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta \right].\end{aligned}\quad (15)$$

Разложение Уильямса для трещины первого типа представляется соотношением

$$\sigma_{ij}^{(1)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} f_{k,ij}^{(1)}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1}.\quad (16)$$

Следует отметить, что в результате сравнения выражения (15) и представления (16), все амплитудные множители с четными номерами равны нулю и также справедливы соотношения

$$f_{2n+1,ij}^{(1)}(\theta) = (2n+1) g_{n,ij}^{(1)}(\theta).$$

Тогда амплитудные коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса равны

$$a_{2n+1}^{(1)} = \frac{c_4^{(1)} \zeta_n^{(1)}}{2n+1}, \quad a_{2n}^{(1)} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

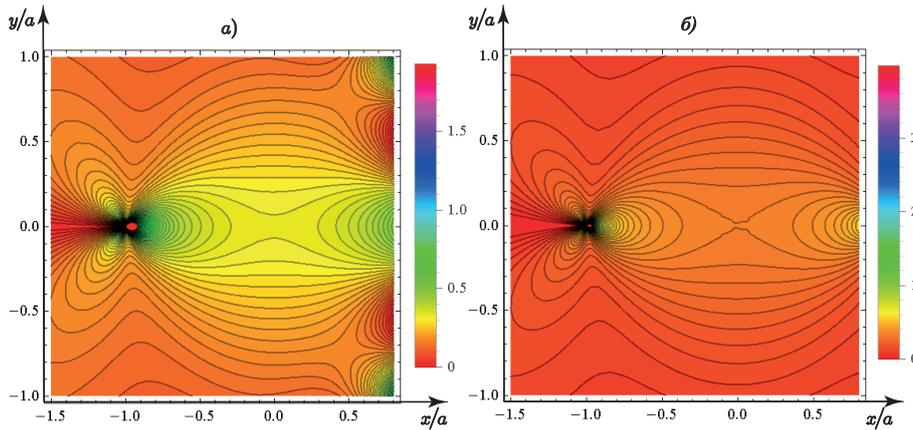


Рис. 5. Линии уровня напряжений σ_{11} в окрестности вершины трещины $z = -a$ а) асимптотическое представление напряжений ($n = 31$), б) комплексное представление напряжений

Поскольку разложение в ряд Тейлора справедливо в круге $|z+a| < 2a$ (рис. 5), то в окрестности вершины второй трещины необходимо также получить асимптотическое представление.

Разложение в ряд Тейлора функций, входящих в комплексный потенциал (9), в окрестности вершины трещины $z = a$ имеет вид

$$\begin{aligned}z^2 + c_5^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^{(1)} (z-a)^k, \quad (a-z)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\beta}_m^{(1)} (z-a)^m, \\ (z+iy_0)^{-2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\delta}_p^{(1)} (z-a)^p, \quad (z-iy_0)^{-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\eta}_j^{(1)} (z-a)^j,\end{aligned}\quad (17)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0^{(1)} &= a^2 + c_5^{(1)}, & \tilde{\alpha}_1^{(1)} &= 2a, & \tilde{\alpha}_2^{(1)} &= 1, & \tilde{\alpha}_k^{(1)} &= 0, k > 2, \\ \tilde{\beta}_m^{(1)} &= \frac{(-1)^m |2m-1|!!}{2^{2m+1/2} a^{m+1/2} m!}, & \tilde{\delta}_p^{(1)} &= \frac{(-1)^p (p+1)}{(a+iy_0)^{p+2}}, & \tilde{\eta}_j^{(1)} &= \frac{(-1)^j (j+1)}{(a-iy_0)^{j+2}}. \end{aligned}$$

Подстановка соотношений (17) в (9) дает асимптотическое разложение комплексного потенциала $\Phi_1(z)$ в окрестности вершины трещины $z = a$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_n^{(1)} (z-a)^{n-1/2}, \\ \tilde{\zeta}_n^{(1)} &= \sum_{l=0}^n \tilde{\xi}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_{n-l}^{(1)}, & \tilde{\xi}_l^{(1)} &= \sum_{j=0}^l \tilde{\alpha}_j^{(1)} \tilde{\beta}_{j-l}^{(1)}, & \tilde{\gamma}_l^{(1)} &= \sum_{j=0}^l \tilde{\delta}_j^{(1)} \tilde{\eta}_{j-l}^{(1)}. \end{aligned}$$

Поскольку в окрестности вершины трещины $z = a + re^{-i(\pi+\theta)}$, то комплексный потенциал и его производная имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{\zeta}_n^{(1)} r^{n-1/2} \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta + i \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \right], \\ \Phi_1'(z) &= c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(n - \frac{1}{2}\right) \tilde{\zeta}_n^{(1)} r^{n-3/2} \left[\cos\left(n - \frac{3}{2}\right) \theta + i \sin\left(n - \frac{3}{2}\right) \theta \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановка полученных соотношений (18) в (5) приводит к выражениям

$$\sigma_{ij} = c_4^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_n^{(1)} r^{n-1/2} g_{n,ij}^{(1)}(\theta). \quad (19)$$

Проведение сравнительного анализа (19) и (16) приводит к следующим выражениям для амплитудных множителей

$$\tilde{a}_{2n+1}^{(1)} = \frac{(-1)^n c_4^{(1)} \tilde{\zeta}_n^{(1)}}{2n+1}, \quad \tilde{a}_{2n}^{(1)} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

3.2. Поперечный сдвиг

Поскольку комплексные потенциалы для трещин первого и второго типа имеют общий вид (9) с точностью до индекса, то для случая поперечного сдвига в дальнейшем используются асимптотические разложения, полученные в предыдущем разделе с соответствующей заменой индекса в круглых скобках с "1" на "2". Тогда подстановка соотношений (14) в (6) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= c_4^{(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n^{(2)} r^{n-1/2} g_{n,ij}^{(2)}(\theta), \\ g_{n,11}^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left[\left(n + \frac{7}{2}\right) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta - \left(n - \frac{1}{2}\right) \sin\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta \right], \\ g_{n,22}^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[\sin\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta \right], \\ g_{n,12}^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left[\left(n + \frac{3}{2}\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta - \left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(n - \frac{5}{2}\right) \theta \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Разложение М. Уильямса поля напряжений для трещины второго типа представляется соотношением

$$\sigma_{ij}^{(2)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} f_{k,ij}^{(2)}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1}. \quad (21)$$

Следует отметить, что в результате сравнения выражения (20) и представления (21), как и в случае нормального отрыва, все амплитудные множители с четными номерами равны нулю и справедливы соотношения

$$f_{2n+1,ij}^{(2)}(\theta) = -(2n+1)g_{n,ij}^{(2)}(\theta).$$

Тогда амплитудные коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса равны

$$a_{2n+1}^{(2)} = -\frac{c_4^{(2)} \zeta_n^{(2)}}{2n+1}, \quad a_{2n}^{(2)} = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

Аналогичным образом легко получить разложения в окрестности вершины второй трещины $z = a$, что приводит к следующим соотношениям для амплитудных коэффициентов ряда М. Уильямса

$$\tilde{a}_{2n+1}^{(2)} = \frac{(-1)^{n+1} c_4^{(2)} \tilde{\zeta}_n^{(2)}}{2n+1}, \quad \tilde{a}_{2n}^{(2)} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

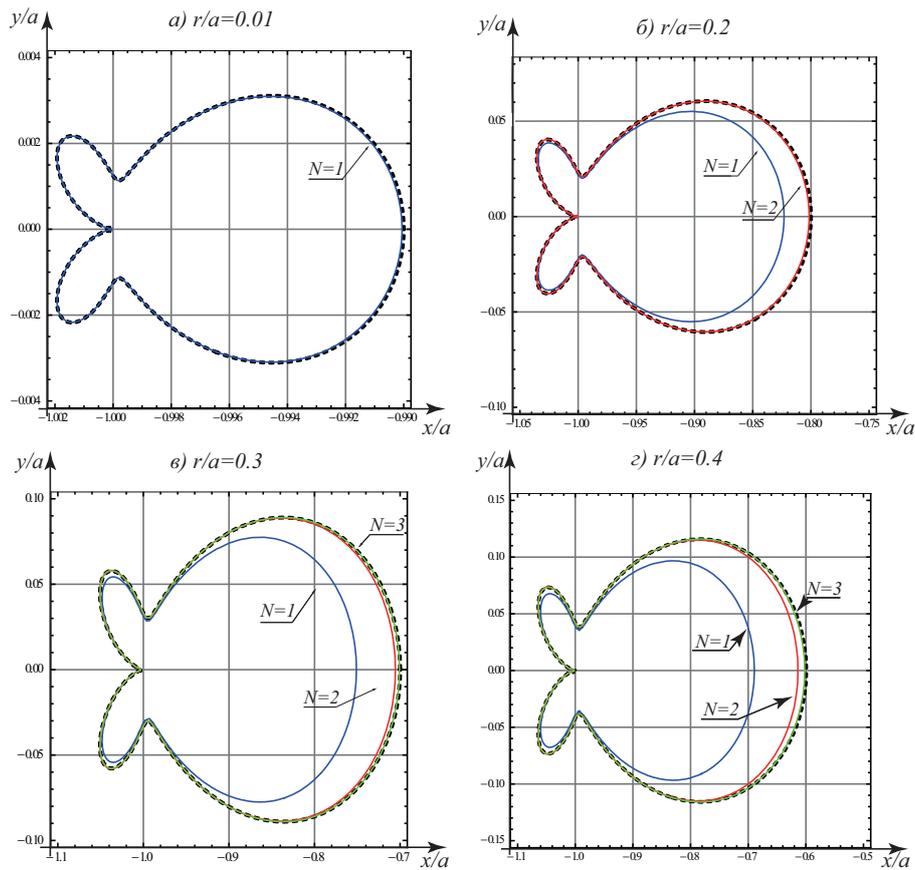


Рис. 6. Линии уровня компоненты напряжений σ_{11} в окрестности вершины трещины $z = -a$ а) линии уровня компоненты напряжений σ_{11} на расстоянии от вершины трещины $r/a = 0.01$ б) линии уровня компоненты напряжений σ_{11} на расстоянии от вершины трещины $r/a = 0.2$; в) линии уровня компоненты напряжений σ_{11} на расстоянии от вершины трещины $r/a = 0.3$ г) линии уровня компоненты напряжений σ_{11} на расстоянии от вершины трещины $r/a = 0.4$

3.3. Смешанное нагружение

Для нахождения асимптотического представления в случае смешанного нагружения необходимо подставить полученные разложения (16) и (21) соотношения (7) и, выбрав значение для параметра смешанности M^e , получить соответствующие формы смешанного нагружения.

4. Анализ количества удерживаемых слагаемых

Для оценки количества удерживаемых слагаемых в полученном разложении поля напряжений в ряд М. Уильямса в системе компьютерной алгебры Mathematica была разработана программа, которая позволяет вычислить любое наперед заданное количество коэффициентов асимптотического разложения. Что, в свою очередь, дает возможность оценить вклад высших приближений и ответить на вопрос: нужно ли учитывать высшие приближения и, если да, то сколько слагаемых в разложении следует учитывать.

На рис. 6 приведены распределения нормального напряжения σ_{11} на разных расстояниях от кончика трещины $z = -a$ в случае нормального отрыва, поперечного сдвига и смешанного нагружения. Сплошные разноцветные линии соответствуют асимптотическому разложению с различным количеством удерживаемых слагаемых, разрывная линия — комплексному представлению поля напряжений. Анализируя полученные представления, можно сделать вывод, что при удалении от вершины трещины действительно необходимо увеличивать количество учитываемых слагаемых в разложении М. Уильямса. Например, для достижения точности 10^{-6} на расстояниях от кончика трещины, равных $0.4a$, требуется учитывать девятнадцать слагаемых, при расстояниях, эквивалентных $0.1a$, требуется учитывать девять слагаемых, а при $0.01a$ требуемая точность достигается уже учетом трех слагаемых.

Выводы

В работе получено многопараметрическое разложение поля напряжений на примере задачи о растяжении бесконечной пластины с двумя полубесконечными боковыми разрезами, а также проведен вычислительный эксперимент с удержанием различного количества слагаемых в полученном асимптотическом разложении М. Уильямса. Сравнение полученных асимптотического и комплексного представлений показало необходимость учета высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений. Чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых следует удерживать в разложении.

Таким образом, при построении асимптотических решений задач, для которых отсутствуют точные аналитические решения, следует прибегать к построению многопараметрических асимптотических разложений. Проведенный анализ в дальнейшем может быть использован при обработке экспериментальных данных (например, в рамках метода цифровой фотоупругости). Разложение поля напряжений в ряд М. Уильямса может быть использовано при решении задач для любых конфигураций образцов с трещинами, а все математические трудности возникают при нахождении амплитудных коэффициентов $a_k^{(m)}$, для определения которых можно использовать экспериментальные картины, полученные с помощью метода цифровой фотоупругости.

Автор выражает благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, доценту, профессору кафедры математического моделирования в механике Самарского национального университета имени академика С.П. Королева Степановой Ларисе Валентиновне за советы и ценные замечания при работе над данной статьей.

Литература

- [1] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. V. 100–101. P. 11–28.
- [2] Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // *Вестник Пермского национального технического университета. Механика*. 2015. № 4. С. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12.
- [3] Степанова Л.В., Аддылина Е.М. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения // *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. Т. 55. № 5. С. 181–194. URL: <http://www.sibran.ru/upload/iblock/959/95931c7940886f46456f33261f8e806c.pdf>.
- [4] Игонин С.А., Степанова Л.В. Асимптотика полей напряжений и сплошности у вершины усталостной трещины в поврежденной среде в условиях плоского напряденного состояния // *Вестник Самарского государственного университета*. 2013. № 9-2. С. 97–108. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrmid=vsgu&paperid=305&option_lang=rus.
- [5] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane // *Solid State Phenomena*. 2017. V. 258. P. 209–212. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.225.
- [6] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Lomakov P.N. A Photoelastic Study for Multiparametric Analysis of the Near Crack Tip Stress Field Under Mixed Mode Loading // *Procedia Structural Integrity*. 2016. V. 2. P. 1797–1804. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.226.
- [7] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. V. 134. P. 218–241. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>.
- [8] Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field // *International Journal of Fracture*. 2010. V. 161. P. 221–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9443-3>.
- [9] Malikova L., Vesely V. Significance of Higher-order Terms of the Williams Expansion for Plastic Zone Extent Estimation Demonstrated on a Mixed-mode Geometry // *Procedia Materials Science*. 2014. V. 3. P. 1383–1388. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.223.
- [10] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structure*. 2012. V. 49. P. 556–566. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [11] Hello G., Tahar M.B. On the exactness of truncated crack-tip stress expansions // *Procedia Materials Science*. 2014. V. 3. P. 750–755. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.123.
- [12] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension // *Journal of Applied Mechanics*. 1952. V. 19. P. 109–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.037>.

- [13] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1957. V. 24. P. 109–114. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf>.
- [14] Williams M.L. The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media // Bulletin of the Seismological Society of America. 1959. V. 49. No 2. P. 199–204. URL: https://www.researchgate.net/publication/248023746_The_Stresses_Around_a_Fault_or_a_Crack_in_Dissimilar_Media.
- [15] Zak A.R., Williams M.L. Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface // Journal of Applied Mechanics. 1963. V. 30. P. 142–143. URL: <http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140407-142817986>.
- [16] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 336 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15213973>.
- [17] Нотт Д.Ф. Основы механики разрушения. М.: Металлургия, 1978. 256 с.
- [18] Броек Д. Основы механики разрушения. М.: Высш. школа, 1980. 368 с.
- [19] Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. NY: ASME Press, 2000. 678 p. URL: <http://bookfi.net/book/1398445>.

References

- [1] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures, 2016, Vol. 100–101, pp. 11–28. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032 [in English].
- [2] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. *Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie M. Uil'iamsa u verшин dvukh kollinearnykh treshchin konechnoi dliny v beskonechnoi plastine* [Complete asymptotic expansion of M. Williams at the tips of two collinear cracks of finite length in an infinite plate]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2015, no. 4, pp. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12 [in Russian].
- [3] Stepanova L.V., Adylina E.M. *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie v okrestnosti verшины treshchiny v usloviakh smeshannogo nagruzheniia* [Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed mode loading]. *Prikladnaia matematika i tekhnicheskaiia fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2014, Vol. 55, no. 5, pp. 885–895 [in Russian].
- [4] Igonin S.A., Stepanova L.V. *Asimptotika polei napriazhenii i sploshnosti u verшины ustalostnoi treshchiny v povrezhdennoi srede v usloviakh ploskogo napriadenogo sostoianiia* [Asymptotics of stress and continuity fields at the tip of a fatigue crack in a damaged medium in conditions of plane stress state]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2013, no. 9-2, pp. 97–108. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgu&paperid=305&option_lang=rus [in Russian].
- [5] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane. *Solid State Phenomena*, 2017, Vol. 258, pp. 209–212. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.225 [in English].
- [6] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Lomakov P.N. A Photoelastic Study for Multiparametric Analysis of the Near Crack Tip Stress Field Under Mixed Mode Loading. *Procedia Structural Integrity*, 2016, Vol. 2, pp. 1797–1804. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.226 [in English].
- [7] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, Vol. 134, pp. 218–241. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013> [in English].
- [8] Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field. *International Journal of Fracture*, 2010, Vol. 161, pp. 221–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9443-3> [in English].
- [9] Malikova L., Vesely V. Significance of Higher-order Terms of the Williams Expansion for Plastic Zone Extent Estimation Demonstrated on a Mixed-mode Geometry. *Procedia Materials Science*, 2014, Vol. 3, pp. 1383–1388. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.223.
- [10] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structure*, 2012, Vol. 49, pp. 556–566. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024> [in English].
- [11] Hello G., Tahar M.B. On the exactness of truncated crack-tip stress expansions. *Procedia Materials Science*, 2014, Vol. 3, pp. 750–755. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.123 [in English].
- [12] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension. *Journal of Applied Mechanics*, 1952, Vol. 19, pp. 109–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.037> [in English].

- [13] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, pp. 109–114. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/bf85/be73df7eb5449a8c856c5ec2fcc2487b04dd.pdf> [in English].
- [14] Williams M.L. The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1959, Vol. 49, no 2, pp. 199–204. Available at: https://www.researchgate.net/publication/248023746_The_Stresses_Around_a_Fault_or_a_Crack_in_Dissimilar_Media [in English].
- [15] Zak A.R., Williams M.L. Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface. *Journal of Applied Mechanics*, 1963, Vol. 30, pp. 142–143. Available at: <http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140407-142817986> [in English].
- [16] Stepanova L.V. *Matematicheskie metody mekhaniki razrusheniia* [Mathematical methods of fracture mechanics]. M.: Fizmatlit, 2009, 336 p. [in Russian]. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15213973> [in Russian].
- [17] Knott J.F. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Basis of fracture mechanics]. M.: Metallurgiya, 1978, 256 p. [in Russian].
- [18] Broek B. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Basis of fracture mechanics]. M.: Vyssh. shkola, 1980, 368 p. [in Russian].
- [19] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. NY: ASME Press, 2000, 678 p. Available at: <http://bookfi.net/book/1398445> [in English].

L.N. Kosygina²

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF THE STRESS FIELD NEAR THE CRACK TIP OF AN INFINITE PLATE WITH TWO SEMI-INFINITE SYMMETRICAL EDGE NOTCHES: THEORETICAL STUDY AND COMPUTATIONAL EXPERIMENT

This article is aimed at theoretical study of the stress-strain state of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches. The analytical solution is obtained by means of decomposition in the M. Williams series expansion and subsequent calculation of the amplitude coefficients of the expansion using the complex representation of stresses. An analysis of the multiparametric expansion of the stress field and a computational experiment with different number of terms are carried out. A comparison of the complex representation of the stress field with the asymptotic series of M. Williams obtained shows the need for an accurate estimate of the number of terms keeping in the expansion series depending on the distance from the crack tip.

Key words: decomposition of M. Williams, stress-strain state of a plate with semi-infinite cuts, calculation of higher ordered terms of the asymptotic series of M. Williams.

Citation. Kosygina L.N. *Asimptoticheskoe predstavlenie polia napriazhenii u vershiny treshchiny dlia plastiny s bokovymi nadrezami: teoreticheskoe issledovanie i vychislitel'nyi eksperiment* [Asymptotic representation of the stress field near the crack tip of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches: theoretical study and computational experiment]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 55–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 21/VI/2018.

The article received 21/VI/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

²Kosygina Liliya Nikolaevna (fleur.lilia@gmail.com), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

М.О. Мамчур¹**МОДЕЛЬ ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВОГО ТРАНСПОРТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА РЕКОМБИНАЦИИ В СЛОЯХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ**

Исследуется теоретическая (полуфеноменологическая) модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой, учитывающая процесс рекомбинации носителей заряда (НЗ) основанная на дифференциальном уравнении в частных производных дробного порядка по временной переменной. В аналитическом виде найдены решения уравнений модели.

Ключевые слова: объемная плотность заряда, рекомбинация носителей заряда, диффузионно-дрейфовый транспорт носителей заряда, дробная производная Римана — Лиувилля, дробная производная Капуто, фрактальная структура.

Цитирование. Мамчур М.О. Модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда с учетом процесса рекомбинации в слоях с фрактальной структурой // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 2. С. 67–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-67-71>.

Введение

Для описания различных процессов переноса в средах с фрактальной структурой в настоящее время широко применяется математический аппарат дробного интегродифференцирования [1, 2]. Уравнения с дробной производной по времени описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за время эволюции. В работах [3–5] с помощью таких уравнений описаны процессы диффузии на фрактальных структурах, моделирующих пористые и неупорядоченные структуры, обсуждается их применимость для описания процессов переноса и релаксации.

В работах [8] разработаны модели дисперсионного транспорта НЗ в неупорядоченных средах.

При описании модели неравновесного транспорта НЗ в неупорядоченных полупроводниках [8, 9] было получено уравнение диффузии-дрейфа с зависящими от времени подвижностью и коэффициентом диффузии. Главная особенность этого уравнения – наличие частной производной по времени дробного порядка, совпадающего с дисперсионным параметром $\alpha < 1$.

В работе [9] предложена теоретическая (полуфеноменологическая) модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой, основанная на дифференциальном уравнении в частных производных дробного порядка по временной переменной

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

В аналитическом виде найдено решение этого уравнения и проведен анализ выражения для плотности тока носителей заряда. С помощью численных расчетов показано, что уменьшение порядка дробной производной при наличии внешнего электрического поля приводит к уширению и асимметрии пространственных распределений носителей заряда, что с физической точки зрения соответствует усилению процессов рассеяния.

В работе [10] показано, что для $\rho(x, t)$ выполняется следующий закон сохранения заряда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) dx.$$

¹© Мамчур М.О., 2018

Мамчур Мухтар Османович (mamchuevmo@yandex.ru), отдел теоретической и математической физики, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Это свойство является необходимым для применения уравнения (1) при моделировании переноса заряда в фрактальных полупроводниковых структурах.

Уравнение (1) описывает диффузионно-дрейфовый транспорт НЗ без учета процессов генерации и рекомбинации.

В данной работе исследуется модель диффузионно-дрейфового транспорта НЗ с учетом процессов генерации и рекомбинации.

1. Диффузионно-дрейфовое приближение

В данном приближении плотность тока НЗ линейно зависит от градиентов потенциала электрического поля и концентрации заряда. Коэффициент пропорциональности является множителем подвижности НЗ, параметром определяющим объемные свойства полупроводника. В диффузионно-дрейфовом приближении концентрация НЗ мала, рассматривается случай невырожденного полупроводника. Электрическое поле также слабое, т.е. не вносит заметного вклада в равновесное распределение скоростей НЗ. В невырожденном полупроводнике НЗ дрейфуют в слабом электрическом поле и диффундируют независимо от остальных НЗ. Представление плотности тока в виде дрейфовой и диффузионной составляющих справедливо при $L \geq \sqrt{D\tau}$.

Из условия слабости полей следует, что в процессе движения носители заряда не должны разогреваться, т.е. набирать за время между неупругими столкновениями энергию, которая превышала бы их среднюю тепловую энергию.

2. Аналитические решения уравнений модели

Будем использовать оператор дробного интегро-дифференцирования Римана — Лиувилля [1]:

$$D_{st}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1+\alpha}} dt', & \alpha < 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \\ \text{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n} f(t), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а также регуляризованную дробную производную (производную Капуто)

$$\partial_{st}^{\alpha} f(t) = \text{sign}^n(t-s) D_{st}^{\alpha-n} \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, α — порядок операторов.

Уравнение диффузионно-дрейфового транспорта НЗ с учетом процессов генерации и рекомбинации имеет вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho = 0, \quad (2)$$

где $\rho(x, t)$ — плотность заряда, $a = \mu E \sqrt{\frac{\tau}{D}} = \text{const}$, где E — напряженность внешнего электрического поля, μ и D — подвижность и коэффициент диффузии НЗ, τ — это время жизни НЗ. Пространственная переменная x является безразмерной и отнесена к диффузионной длине $\sqrt{D\tau}$.

Уравнение (2) применимо лишь для случая, когда фрактальный слой можно считать макроскопически сплошной средой — данный слой всегда занимает определенный объем и ограничивается некоторой гладкой поверхностью в евклидовом пространстве при произвольном значении метрической фрактальной размерности (т.н. массовый фрактал). При этом свойство фрактальности учитывается через феноменологический параметр α . Такой подход, по существу, подразумевает эргодичность системы, когда пространственная фрактальность учитывается через динамику НЗ по временной переменной. Если имеется фрактальная среда, то процесс переноса в ней НЗ должен происходить медленнее, чем в аналогичной сплошной среде; в предлагаемой модели этому соответствует условие $\alpha < 1$. Кроме того, система предполагается «адиабатической», т.е. имеет место условие $\alpha = \text{const}$.

Генерация и рекомбинация подвижных носителей (основных и неосновных) происходит в полупроводнике непрерывно, поэтому скорость изменения их концентрации определяется разностью скоростей этих процессов. Изменение концентрации неосновных носителей при внешнем воздействии (при облучении светом или воздействии лазерного излучения) запишем следующим классическим уравнением:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\tau} \quad (3)$$

Если в начальный момент времени плотность заряда равна $\rho_0(x)$, то функция $\rho(x, t)$ определяется как решение задачи Коши с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (4)$$

Решение задачи (1), (4) имеет вид [11]

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{a(x-\xi)}{2}} D_{0t}^{\alpha-1}(x-\xi, t) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) K(x-\xi, t) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{|x|}^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) h_0(x, \tau) d\tau, \\ K(x, t) &= \frac{e^{-\frac{a}{2}x}}{2} \int_{|x|}^{\infty} t^{-\alpha} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) h_0(x, \tau) d\tau, \\ h_0(x, \tau) &= \begin{cases} J_0(\sqrt{c}\sqrt{\tau^2-x^2}), & c > 0, \\ I_0(\sqrt{|c|}\sqrt{\tau^2-x^2}), & c < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$\phi(\alpha, \beta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)}$, функция Райта, $J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$, $I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ – функции Бесселя.

При $c > 0$ решение уравнения (2) имеет вид

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{a(x-\xi)}{2}} \int_{|x|}^{\infty} t^{-\alpha} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) J_0(\sqrt{c}\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau.$$

Неравновесные НЗ возникают в результате облучения поверхности полупроводника лазерным излучением. Если в полупроводнике нет электрического тока и объемных зарядов, вследствие процессов генерации и рекомбинации НЗ придут в равновесное состояние. Тогда изменение во времени неравновесных концентрации электронов (дырок) в зонах может определяться уравнением

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho = -\frac{\rho}{\tau}. \quad (5)$$

Пусть

$$\rho(0) = \rho_0 \quad (6)$$

– начальная плотность заряда, тогда распределение плотности заряда, может быть найдено как решение задачи Коши (5), (6) [1], и определяется формулой

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot E_{1/\alpha}\left(-\frac{t^{\alpha}}{\tau}; 1\right),$$

где $E_{1/\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\alpha k + \mu)}$ – функция Миттаг-Леффлера.

При $\alpha = 1$, обобщенное уравнение (5) переходит в классическое уравнение (3) описывающее процессы генерации и рекомбинации НЗ.

В работе [3] уравнение вида (5) исследуется посредством ренорм-групповых преобразований, выводится уравнение с дробной производной по времени описывающее релаксацию заряда на фракталах. Получена функция Грина, показано, что релаксация заряда на фракталах на больших временах носит степенной характер.

При отсутствии электрического поля ($a = 0$) процесс диффузионно-дрейфового транспорта НЗ примет вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\rho. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) с начальным условием (4) имеет вид [11]:

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) \int_{|x|}^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{t^{\alpha/2}}\right) I_0(\sqrt{c}\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau.$$

Как показывают расчеты, проведенные в работе [9], заметное влияние параметра α на пространственное распределение НЗ, имеет место при увеличении численного значения параметра a .

Фрактальная структура образца параметра a должны оказывать влияние на кинетику НЗ, влияние этих параметров необходимо выявить в ходе численных экспериментов.

Полученные результаты могут быть применены для построения математических моделей описывающие нелинейные и нелокальные процессы переноса носителей заряда в полупроводниковых фрактальных структурах в рамках диффузио-дрейфового приближения.

Литература

- [1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [2] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
- [3] Архинчев В.Е. О релаксаций заряда фрактальных структурах // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. Вып. 7. С. 1007–1009. URL: http://www.jetpletters.ac.ru/ps/267/article_4379.pdf.
- [4] Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90. №2. С. 354–367. URL: <http://mi.mathnet.ru/tmf5547>.
- [5] Чукбар К.В. Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. Вып. 5(11). С. 1875–1884.
- [6] Архинчев В.Е. О дрейфе при случайном блуждании по самоподобным кластерам // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 3. С. 1016–1023. URL: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1016.pdf.
- [7] Архинчев В.Е. Случайное блуждание по иерархическим гребешковым структурам // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 4. С. 1285–1296. URL: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1285.pdf.
- [8] Сибатов Р.Т., Учайкин В.В. Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках // УФН. 2009. Т. 179. № 10. С. 1079–1104. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0179.200910c.1079>.
- [9] Рехвиашвили С.Ш., Мамчурев Мурат О., Мамчурев Мухтар О. Модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой // ФТТ. 2016. Т. 58. № 4. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/42870>.
- [10] Мамчурев Мухтар О. К вопросу о применении дробного интегродифференцирования в моделировании диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 4(72). С. 20–27. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26602895>.
- [11] Мамчурев Мурат О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.

References

- [1] Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. M.: Fizmatlit, 2003, 272 p. [in Russian].
- [2] Uchaikin V.V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk: Artishok, 2008, 512 p. [in Russian].
- [3] Arkhincheev V.E. *O relaksatsii zariada fraktal'nykh strukturakh* [On the charge relaxation of fractal structures]. *Pis'ma v ZhETF* [JETP Letters], 1990, Vol. 52, Issue 7, pp. 1007–1009. Available at: http://www.jetpletters.ac.ru/ps/267/article_4379.pdf [in Russian].
- [4] Nigmatullin R.R. *Drobnii integral i ego fizicheskaiya interpretatsiya* [Fractional integral and its physical interpretation]. *TMF* [Theoretical and Mathematical Physics], 1992, Vol. 90, no. 2, pp. 354–367. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tmf5547> [in Russian].
- [5] Chukbar K.V. *Stokhasticheskii perenos i drobnye proizvodnye* [Stochastic Transport and Fractional Derivatives]. *ZhETF* [JETP], 1995, Vol. 108, no. 5 (11), pp. 1875–1884 [in Russian].
- [6] Archincheev V.E. *O dreife pri sluchainom bluzhdanii po samopodobnym klasteram* [On the drift in a random walk along self-similar clusters]. *ZhETF* [JETP], 1999, Vol. 115, no. 3, pp. 1016–1023. Available at: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1016.pdf [in Russian].
- [7] Archincheev V.E. *Sluchainoe bluzhdanie po ierarkhicheskim grebeshkovym strukturam* [Random walk along hierarchical comb-like structures]. *ZhETF* [JETP], 1999, Vol. 115, no. 4, pp. 1285–1296. Available at: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/r_115_1285.pdf [in Russian].
- [8] Sibatov R.T., Uchaikin V.V. *Drobnno-differentsial'nyi podkhod k opisaniyu dispersionnogo perenosa v poluprovodnikakh* [Fractional-differential approach to the description of dispersion transport in semiconductors]. *UFN* [Physics-Uspekhi], 2009, Vol. 179, no. 10, pp. 1079–1104. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0179.200910c.1079> [in Russian].
- [9] Rekhviashvili S.Sh., Mamchuev Murat O., Mamchuev Mukhtar O. *Model' diffuzionno-dreifovogo transporta nositelei zariada v sloiakh s fraktal'noi strukturoi* [Model of the diffusion-drift transport of charge carriers in layers with a fractal structure]. *FTT* [Physics of the Solid State], 2016, Vol. 58, no. 4. Available at: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/42870> [in Russian].
- [10] Mamchuev Mukhtar O. *K voprosu o primeneni i drobnogo integrodifferentsirovaniya v modelirovani i diffuzionno-dreifovogo transporta nositelei zariada v sloiakh s fraktal'noi strukturoi* [On the application of fractional integro-differentiation in the modeling of diffusion-drift transport of charge carriers in layers with a fractal structure]. *Izvestiya KBNTs RAN* [News of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2016, no. 4 (72), pp. 20–27. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26602895> [in Russian].

- [11] Mamchuev Murat O. *Kraevye zadachi dlia uravnenii i sistem uravnenii s chastnymi proizvodnymi drobnogo poriadka* [Boundary value problems for equations and systems of partial differential equations of fractional order]. Nalchik: Izd-vo KBNTs RAN, 2013, 200 p. [in Russian].

*M.O. Mamchuev*²

MODEL OF THE DRIFT-DIFFUSION TRANSPORT OF CHARGE CARRIERS CONSIDERING RECOMBINATION IN LAYERS WITH FRACTAL STRUCTURE

In this article, we study a model of the drift-diffusion transport of charge carries in the layers of certain fractal structure. We take into account the process of recombination of charge carries. Solutions of model equations are found in the closed form.

Key words: volume charge density, charge carrier recombination, drift-diffusion transport of charge carriers, Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, fractal structure.

Citation. Mamchuev M.O. *Model' diffuzionno-dreifovogo transporta nositelei zariada s uchetom protsessa rekombinatsii v sloiakh s fraktal'noi strukturoi* [Model of the drift-diffusion transport of charge carriers considering recombination in layers with fractal structure]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2018, no. 24, no. 2, pp. 67–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-67-71> [in Russian].

Статья поступила в редакцию 28/VI/2018.
The article received 28/VI/2018.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

² Mamchuev Mukhtar Osmanovich (mamchuevmo@yandex.ru), Department of Theoretical and Mathematical Physics, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Григорьева Александра Ивановна, старший преподаватель кафедры Высшая математика СВФУ им М.К. Аммосова, в 2008 г. окончила Якутский государственный по специальности математика.

Область научных интересов: неклассические дифференциальные уравнения составного типа.

Кожанов Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения АН РФ, г. Новосибирск.

Область научных интересов: неклассические дифференциальные уравнения составного типа.

Дюжева Александра Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета. Тема канд. дис.: "Нелокальные задачи со смещением и интегральными условиями первого рода для гиперболических уравнений" (защ. в 2012 г.). Автор и соавтор 29 научных работ.

Область научных интересов: нелокальные задачи, динамические условия, интегральные условия, гиперболические уравнения.

Жураев Турсунбой Файзиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей математики Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами. Тема канд. дис.: "Некоторые геометрические свойства функтора Р вероятностных мер и его подфункторов" (защ. в 1989 г.).

Область научных интересов: общая математика, функтор, подфункторы.

Жувонов Камариддин Ризокулович, ассистент кафедры высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства.

Область научных интересов: высшая математика, функтор, подфункторы.

Рузиев Жамшид Худайкулович, ассистент кафедры общей математики Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами.

Область научных интересов: общая математика, функтор, подфункторы.

Рахматуллаев Алимбай Хасанович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства. Тема канд. дис.: "Обобщенные аналитический функции и квазианалитический функции на плоскости" (защ. в 1990 г.).

Область научных интересов: высшая математика, функтор, подфункторы, аналитическая функция, квазианалитическая функция.

Турсунова Зулайхо Омонуллаевна, ассистент кафедры общей математики Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами.

Область научных интересов: общая математика, функтор, подфункторы.

Шамолин Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, академик РАН. Тема докт. дис.: "Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой" (защ. в 2004 г.). Имеет более 450 печатных работ, в т. ч. 10 монографий.

Область научных интересов: прикладная математика, методы математического моделирования; классическая механика, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой; качественная теория динамических систем, типичность, абсолютная и относительная грубость; динамика многомерного твердого тела в неконсервативных силовых полях; дифференциальная и топологическая диагностика, задачи дифференциальной диагностики в диагностических пространствах; теория фракталов; дискретная математика, математическая логика и информатика.

Косыгина Лилия Николаевна, магистрант кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, в 2003 г. окончила Самарский государственный университет по специальности "Прикладная математика".

Область научных интересов: математическое моделирование в механике, теория упругости, механика разрушения.

Мамчуев Мухтар Османович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела Теоретической и математической физики ФГБНУ ИПМА КБНЦ РАН (Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук). Тема канд. дис.: "Фазовый переход "диэлектрик-металл" в щелочно-галлоидных кристаллах в условиях высоких давлений" (защ. в 2011 г.). Автор и соавтор 42 научных работ.

Область научных интересов: уравнение состояния вещества, фазовые переходы, фазовые диаграммы.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Grigorieva Aleksandra Ivanovna, senior lecturer of the Department of Higher Mathematics, North-Eastern Federal University in Yakutsk, in 2008 graduated from Yakutsk State University with a degree in Mathematics.

Research interests: nonclassical differential equations of composite type

Kozhanov Aleksander Ivanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, chief research officer of the Sobolev Institute of Mathematics, Siberian branch of the Russian Academy of Sciences, city of Novosibirsk.

Research interests: nonclassical differential equations of composite type

Dyuzheva Alexandra Vladimirovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Nonlocal problems with displacement and integral conditions of the first kind for hyperbolic equations" (2012). Author and coauthor of 29 scientific works.

Research interests: non-local problem, Sobolev type equation, Goursat problem, equation with dominant mixed derivative, integral conditions, Boussinesq-Love equations.

Zhuraev Tursunboy Faizievich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of "General Mathematics", Tashkent State Pedagogical University named after Nizami. Subject of Candidate's thesis: "Some geometric properties of the functor P of probability measures and its subfunctors" (1989).

Research interests: general mathematics, functor, subfunctors.

Zhuvonov Qamariddin Rizokulovich, assistant lecturer of the Department of "Higher Mathematics", Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers.

Research interests: higher mathematics, functor, subfunctors.

Ruziev Zhamshid Khudaikulovich, assistant lecturer of the Department of "General Mathematics", Tashkent State Pedagogical University named after Nizami.

Research interests: general mathematics, functor, subfunctors.

Rakhmatullaev Alimby Khasanovich, associate professor of the Department of "Higher Mathematics", Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers. Subject of

Candidate's thesis: "Generalized analytic functions and quasi-analytic functions on the plane" (1990).

Research interests: higher mathematics, functor, subfunctors, analytic function, quasi-analytic function.

Tursunova Zulayho Omonullaevna, assistant lecturer of the Department of "General Mathematics", Tashkent State Pedagogical University named after Nizami.

Research interests: general mathematics, functor, subfunctors.

Shamolin Maxim Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, full professor, leading researcher of the Institute of Mechanics at Lomonosov Moscow State University. Academician of the Russian Academy of Natural History. Subject of Doctoral thesis: "Methods of analysis of certain classes of nonconservative systems in dynamics of a rigid body interacting with a medium" (2004). Author of more than 450 publications (including 10 monographs).

Research interests: applied mathematics, methods of mathematical modeling, classical mechanics, dynamics of a rigid body interacting with a medium, qualitative theory of dynamic systems, tipicity, absolute and relative roughness, dynamics of multi-dimensional rigid body in nonconservative fields of forces, differential and topological diagnostics, problems of differential diagnostics in diagnostical spaces, fractal theory, discrete mathematics, mathematical logic, and informatics.

Kosygina Liliya Nikolaevna, Master's Degree student of Samara National Research University, Department of Mathematical Modelling in Mechanics, in 2003 graduated from Samara State University with a degree in "Applied Mathematics "

Research interests: mathematical modelling in mechanics, elasticity theory, fracture mechanics.

Mamchuev Mukhtar Osmanovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, researcher at the Department of Theoretical and Mathematical Physics FGBNU IPMA KBNTS RAS (Federal State Institution of Science Research Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria, Russian Academy of Sciences Research Center). Subject of Candidate's thesis: "Phase transition "insulator-metal" in alkali halide crystals under high pressure" (2011). Author and coauthor of 42 scientific works.

Research interests: equation of state of matter, phase transitions, phase diagrams.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>.

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: psvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы \LaTeX_ϵ с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского университета (адрес указан выше). Использование других реализаций \TeX 'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами \LaTeX 'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("."), двойной дефис ("—")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

**Уважаемые авторы, просим предоставить сведения
для размещения в журнале
на странице "Сведения об авторах"**

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры, в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности ".....".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of, in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in ".....".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.