

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

**(ВЕСТНИК САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА)**

- *Математика*
- *Математическое
моделирование*
- *Математические
методы
в естественных
науках*

ТОМ 24 • № 1 • 2018 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, д-р тех. наук, проф.

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф.

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф.

Ответственный секретарь:

А.В. Дюжеева, канд. физ.-мат. наук, доц.

Редактирование

Л.С. Пулькина

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Оформление выходных данных

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельников

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге
АО Агентство «Роспечать» 80307
ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

Цена свободная

Подписано в печать 23.04.2018 г.

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 7

Тираж 200 экз. (первый завод — 50 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара,

Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Центр периодических изданий Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара,

Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Редакционная коллегия:

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

В.В. Ивазник, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

С.В. Курбатова, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Институт математики им. С.Л. Соболева сибирского отделения РАН, Новосибирск, Российская Федерация)

Л.А. Онучак, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Давиде М. Прозерпио, д-р химии, проф. (Миланский университет, Милан, Италия)

П.П. Пурьгин, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф. (Югорский госуниверситет, Ханты-Мансийск, Новосибирский госуниверситет, Российская Федерация)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

Стасис Руткаускас, д-р физ.-мат. наук, проф. (Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-1

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY**
NATURAL SCIENCE SERIES

**(VESTNIK OF SAMARA
STATE UNIVERSITY)**

- *Mathematics*
- *Mathematical
Modelling*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*

VOL. 24 • № 1 • 2018 ГОД

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E. V. Shakhmatov, Dr. of Engineering, prof.

Deputy chief editors:

A. F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

L. S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

Executive editor:

A. V. Dyuzheva, Cand. of Phys.-Math. Sci., assistant prof.

Editing

L. S. Pulkina

Computer makeup, dummy

M. A. Likhobabenko

Making the output

T. A. Murzinova

Information in English

M. S. Strel'nikov

Address of editorial staff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

E-mail: nsvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС 77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

**Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525**

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

Price free

Passed for printing 23.04.2018.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 7.

Circulation 200 copies (first printing – 50 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Centre of Periodical Publications of Samara University

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,

Samara, 443086, Russian Federation.

Editorial board:

S. V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)

V. V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

S. V. Kurbatova, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. I. Kozhanov, Dr. of Physics and Mathematics, prof. (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation)

L. A. Onuchak, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Universite Paris-Sud 11, Orsy, France)

A. N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. (Milan University, Milan, Italy)

P. P. Purygin, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

S. G. Pyatkov, Dr. of Physics and Mathematics, prof. (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Novosibirsk State University, Russian Federation)

V. V. Revin, Dr. of Biological Sciences, prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)

Stasis Rutkauskas, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Vilnius University, Vilnius, Lithuania)

V. A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

V. A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-1

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Алдашев С.А. Корректность задачи типа Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе	7
Шукюров А.Ш. оглы О базисных свойствах взвешенных экспоненциальных систем с избытком	14
Яковлева Ю.О. Характеристическая задача для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка	20

Математическое моделирование

Нарожнов В.В. Моделирование нелинейного осциллятора с соударениями	25
---	-----------

Математические методы в естественных науках

Гусейнова З.А., Курамагомедов М.К. Особенности изменчивости морфологических признаков <i>Satureja hortensis</i> L. в природных популяциях Дагестана	34
Мамчуев М.О. Уравнения состояния вещества с дробной производной Римана — Лиувилля	42
Сокуров А.А. Влияние размерной зависимости поверхностного натяжения и краевого угла смачивания на величину капиллярного подъема	47
<i>Сведения об авторах</i>	51
<i>Требования к оформлению статей</i>	53

CONTENTS

Mathematics

Aldashev S.A. Correctness of a Dirichlet type problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation	7
Shukurov A.Sh. On basis properties of weighted exponential systems with excess	14
Yakovleva J.O. The characteristic problem for the one system of hyperbolic differential equations of the third order	20

Mathematical Modelling

Narozhnov V.V. Modeling of a nonlinear oscillator with collisions	25
--	-----------

Mathematical Methods in Natural Sciences

Guseynova Z.A., Kuramagomedov M.K. The peculiarities of variability of morphological features of <i>Satureja hortensis</i> L. in natural populations of Daghestan	34
Mamchuev M.O. Equations of state of a solid body with a reduced derivative Riemann — Liouville	42
Sokurov A.A. Capillary rise with size-dependent surface tension and contact angle	47
<i>Information about the authors</i>	51
<i>Requirements to the design of articles</i>	53

С.А. Алдашев¹**КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ**

Многомерные гипербола-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать многомерным волновым уравнением. Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа. Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления исследуемых краевых задач. Автором ранее изучена задача Дирихле для многомерных гипербола-эллиптических уравнений, где показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой всей цилиндрической области. В данной работе исследована задача типа Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе и получен явный вид ее классического решения. При этом однозначная разрешимость зависит только от высоты гиперболической части цилиндрической области, а также приведен критерий единственности решения.

Ключевые слова: корректность, задачи типа Дирихле, цилиндрическая область, многомерное уравнение, критерия.

Гипербола-эллиптические уравнения в частных производных описывают такие процессы как: 1) поведение световых волн с около каустической амплитудой [1; 2]. 2) Создание гидродинамических порогов [3]. Также приложения этих уравнений встречаются в геометрии (напр., гармонические поля в расширенном проективном пространстве [4]) и в астрономии (напр., в моделях ранней Вселенной и космического ускорения [5]).

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному волновому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе [6].

Более полную библиографию по приложениям можно найти в [7].

При изучении этих приложений, возникает необходимость получения явного представления исследуемых краевых задач.

В [8; 9] найдены достаточные условия единственности решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в многомерной цилиндрической области.

Автором в [10; 11] изучена задача Дирихле для многомерных гипербола-эллиптических уравнений, где показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой всей цилиндрической области.

Задачам типа Дирихле для уравнений смешанного типа на плоскости посвящены работы [12; 13].

В данной работе исследована задача типа Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе и получен явный вид ее классического решение. При этом, однозначная разрешимость зависит только от высоты гиперболической части цилиндрической области, а также приведен критерий единственности решения.

¹© Алдашев С.А., 2018

Алдашев Серик Аймурзаевич (aldash51@mail.ru), кафедра математики и математического моделирования, Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина 125.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – части поверхности Γ , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S – общая часть границ областей Ω_α и Ω_β представляющая множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$(sgnt)\Delta_x u - u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Рассмотрим следующую задачу типа Дирихле

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u|_{\sigma_\alpha} &= \varphi(r, \theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \\ u|_{\Gamma_\beta} &= \psi_2(t, \theta), u|_{\sigma_\beta} = \tau(r, \theta), u_t|_{\sigma_\beta} = \nu(r, \theta), \end{aligned} \quad (2)$$

при этом $\varphi(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$, $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$, $\psi_2(\beta, \theta) = \tau(1, \theta)$, $\psi_{2t}(\beta, \theta) = \nu(1, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место [14]

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученного из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\psi_{2n}^k(t)$, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $\psi_2(t, \theta)$, $\tau(r, \theta)$, $\nu(r, \theta)$.

Тогда справедливы следующие теоремы

Теорема 1. Если $\varphi(r, \theta) \in W_2^l(\sigma_\alpha)$, $\psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $l > \frac{3m}{2}$, и

$$\sin \mu_{s,n} \alpha \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

задача 1 однозначна разрешима, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $n = 0, 1, \dots$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Теорема 2. Решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

2. Доказательства теоремы

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид [10; 11]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} = 0, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [14], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [14], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k + \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{u}_{nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

В (7), (8) произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k + \bar{v}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (9)$$

$$\bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{v}_n^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{v}_{nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_{2n}^k(t) - \psi_{2nnt}^k, \quad \bar{\tau}_n^k(r) = \bar{\tau}_n^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta), \quad \bar{\nu}_n^k(r) = \bar{\nu}_n^k(r) - \psi_{2nt}^k(\beta).$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} v_n^k(r, t)$ задачу (9), (10) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k + v_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

$$v_n^k(1, t) = 0, \quad v_n^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad v_{nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad \bar{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \bar{\tau}_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{\nu}_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\nu}_n^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде $v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)$, где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad v_{1n}^k(r, \beta) = v_{1nt}^k(r, \beta) = 0, \quad (13)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad v_{2n}^k(r, \beta) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad v_{2nt}^k(r, \beta) = \bar{\nu}_n^k(r). \quad (14)$$

Решение выше указанных задач рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (15)$$

при этом пусть

$$\bar{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) R_s(r), \quad \bar{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r), \quad \bar{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k R_s(r). \quad (16)$$

Подставляя (15) в (13), с учетом (16), получим

$$R_{srr} + \left(\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} + \mu \right) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (17)$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{s,n}^k(t), \quad \beta < t < 0, \quad T_s(\beta) = 0, \quad T_{st}(\beta) = 0, \quad (18)$$

Ограниченным решением задачи (17) является [15]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (19)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Задача (18) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ [6]

$$T_{s,n}(t) - \mu_{s,n}^2 \int_{\beta}^t (t-\xi) T_{s,n}(\xi) d\xi = \int_{\beta}^t (t-\xi) a_{s,n}(\xi) d\xi, \quad (20)$$

которое имеет, и притом единственное решение.

Подставляя (19) в (16) получим

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_n^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Ряды (21) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [16], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} b_{s,n}^k &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\tau}_n^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \\ e_{s,n}^k &= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\nu}_n^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mu_{s,n}, s = 1, 2, \dots$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (19), (20) получим решение задачи (13) в виде

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (24)$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (22).

Далее подставляя (19) в (14), с учетом (16), будем иметь

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \quad \beta < t < 0, \quad V_s(\beta) = b_{s,n}^k, \quad V_{st}(\beta) = e_{s,n}^k,$$

которой произведя замену

$$G_{s,n}(t) = V_{s,n}(t) - b_{s,n}^k - (t - \beta) b_{s,n}^k, \quad (25)$$

приходим к следующей задаче

$$G_{s,ntt} - \mu_{s,n}^2 G_{s,n} = q_{s,n}^k(t), \quad \beta < t < 0, \quad G_{s,n}(\beta) = 0, \quad G_{s,nt}(\beta) = 0, \quad (26)$$

$$q_{s,n}^k(t) = \mu_{s,n}^2 [b_{s,n}^k + (t - \beta) e_{s,n}^k].$$

Задача (26) сводится также к интегральному уравнению (20), где вместо $a_{s,n}^k(t)$ берется $q_{s,n}^k(t)$.

Из (19), (20), (25) найдем решение задачи (14) в виде

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (27)$$

где $b_{s,n}^k, e_{s,n}^k$ находятся из (23).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (3) в области Ω_{β} является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)]] Y_{n,m}^k(\theta), \quad (28)$$

где $v_{1n}^k(r, t), v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (24) и (27).

Учитывая формулу [16] $2J_{\nu}'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [17; 14]

$$J_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \quad (29)$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad l = 0, 1, \dots$$

также леммы, ограничения на заданные функций $\psi_2(t, \theta), \tau(r, \theta), \nu(r, \theta)$, как в [10; 11] можно доказать, что полученное решение в виде (28) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\beta}) \cap C^2(\Omega_{\beta})$.

Далее, из (24), (27), (28) при $t \rightarrow -0$ имеем

$$u(r, \theta, 0) = \tau_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_{1n}^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_{1n}^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} [T_{s,n}(0) + V_{s,n}(0)] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

Из (21)–(23), (29), а также из леммы вытекает, что $\tau_1(r, \theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, задача 1 приводится в области Ω_α к следующей задаче Дирихле для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0. \quad (30)$$

Задача 2. Найти решение уравнения (30) в области Ω_α из класса $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau_1(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r, \theta).$$

В [18; 19] доказаны теоремы 1 и 2 для задачи 2 при выполнении условия (4). Отсюда следует их справедливость и для задачи 1.

Так как в [18; 19] получен явный вид решения задачи 2, то можно записать явное представление решения и для задачи 1.

Литература

- [1] Ludwig D. Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Communications in Pure and Applied Mathematics*. 1966. Vol. 19. P. 215–250. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160190207>.
- [2] Magnanini R., Talenti G. Approaching a partial differential equation of mixed elliptic-hyperbolic type. In: Anikonov, Y., Bukhageim, A., Kabanikhin, S., Romanov, V. (eds.) *Ill-posed and Inverse Problems*. VSP. Utrecht. Holland. 2002. P. 263–276.
- [3] Stoker J.J. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Wiley-Interscience. New York, 1992. 600 p.
- [4] Otway T.H. Variational equations on mixed Riemannian-Lorentzian metrics // *Journal of Geometric Physics*. 2008. Vol. 58. P. 1043–1061. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.03.003>.
- [5] Hartle J.B., Hawking S.W. Wave function of the universe // *Physical Review D*. 1983. Vol. 28. P. 2960–2975. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2960>.
- [6] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [7] Otway T.H. *Elliptic-Hyperbolic Partial Differential Equations*. Springer: Berlin, 2015. 128 p.
- [8] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
- [9] Нахушев А.М. О задаче Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. Адыг (Черкес) межд. акад. наук. 2006. Т. 8. № 2. С. 32–42.
- [10] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе // *Известия НАН РК. Сер. физико-математическая*. Алматы. 2014. № 3. С. 136–143.
- [11] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гипербола-эллиптических уравнений // *Нелинейные колебания*. Киев. 2013. Т. 16. № 4. С. 435–451.
- [12] Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 696–698. Т. 333. № 1. С. 16–18.
- [13] Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // *Дифференц. уравнения*. 1994. Т. 30. № 11. С. 2001–2009.
- [14] Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
- [15] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1965. 703 с.
- [16] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. М.: Наука. Т. 2. 1974. 295 с.
- [17] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1966. 724 с.
- [18] Aldashev S.A. The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindrical domain for the multidimensional wave equation // *Math. Probl. Eng.* 2010. Vol. 2010. Article ID653215-7p.
- [19] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений волновым оператором // Докл. Адыг (Черкес.) Междунар. акад. наук. 2011. Т. 13. № 1. С. 21–29.

References

- [1] Ludwig D. Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 1966, Vol. 19, pp. 215–250 [in English]. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160190207>.
- [2] Magnanini R., Talenti G. Approaching a partial differential equation of mixed elliptic-hyperbolic type. In: Anikonov Y., Bukhageim A., Kabanikhin S., Romanov V. (Eds.) *Ill-posed and Inverse Problems*, pp. 263–276. VSP, Utrecht, Holland, 2002 [in English].

- [3] Stoker J.J. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Wiley-Interscience, New York, 1992, 600 p. [in English].
- [4] Otway T.H. Variational equations on mixed Riemannian-Lorentzian metrics. *Journal of Geometric Physics*, 2008, Vol. 58, pp. 1043–1061 [in English]. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.03.003>.
- [5] Hartle J.B., Hawking S.W. Wave function of the universe. *Physical Review D*, 1983, Vol. 28, pp. 2960–2975 [in English]. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2960>.
- [6] Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. M.: Nauka, 1981, 448 p. [in Russian].
- [7] Otway T.H. *Elliptic-Hyperbolic Partial Differential Equations*. Berlin: Springer, 2015, 128 p. [in English].
- [8] Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Problems with displacement for a partial differential equation]. M.: Nauka, 2006, 287 p. [in Russian].
- [9] Nakhushev A.M. *O zadache Dirikhle dlia uravneniia smeshannogo tipa* [On the Dirichlet problem for a mixed-type equation]. *Dokl. Adyg (Cherkes) mezhd. akad. nauk* [Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 2006, Vol. 8, no. 2, pp. 32–42 [in Russian].
- [10] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia mnogomernogo uravneniia Lavrent'eva — Bitsadze* [Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation]. *Izvestiia NAN RK. Ser. fiziko-matematicheskaiia* [Izvestiya of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 3, pp. 136–143 [in Russian].
- [11] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia odnogo klassa mnogomernykh giperbollo-ellipticheskikh uravnenii* [Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for one class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations]. *Nelineinye kolebaniia* [Nonlinear oscillations], 2013, Vol. 16, no. 4, p. 435–451 [in Russian].
- [12] Soldatov A.P. *Zadachi tipa Dirikhle dlia uravneniia Lavrent'eva — Bitsadze* [Problems of Dirichlet type for the Lavrentiev-Bitsadze equation]. *Dokl. RAN* [Doklady Mathematics], 1993, Vol. 332, no. 6, pp. 696–699; Vol. 333, no. 1, pp. 16–18 [in Russian].
- [13] Soldatov A.P. *Zadachi tipa Dirikhle dlia uravneniia Lavrent'eva — Bitsadze* [Problems of Dirichlet type for the Lavrentiev-Bitsadze equation]. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 1994, Vol. 30, no. 11, pp. 2001–2009 [in Russian].
- [14] Mikhlin S.G. *Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia* [Multidimensional singular integrals and integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1962, 254 p. [in Russian].
- [15] Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of ordinary differential equations]. M.: Nauka, 1965, 703 p. [in Russian].
- [16] Bateman G., Erdelyi A. *Vyshhie transtsendentnye funktsii* [Higher transcendental functions]. M.: Nauka, Vol. 2, 1974, 295 p. [in Russian].
- [17] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966, 724 p. [in Russian].
- [18] Aldashev S.A. The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindrical domain for the multidimensional wave equation. *Math. Probl. Eng.*, 2010, Vol. 2010, Article ID653215-7 p. [in English].
- [19] Aldashev S.A. [Correctness of the Dirichlet problem in the cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations by the wave operator]. *Dokl. Adyg (Cherkes) mezhd. akad. nauk* [Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 2011, Vol. 13, no. 1, pp. 21–29 [in Russian].

*S.A. Aldashev*²

THE CORRECTNESS OF A DIRICHLET TYPE PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR THE MULTIDIMENSIONAL LAVRENTIEV — BITSADZE EQUATION

Multidimensional hyperbolic-elliptic equations describe important physical, astronomical and geometric processes. It is known that vibrations of elastic membranes in space according to the Hamiltonian principle can be modeled by a multidimensional wave equation. Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, the Hamiltonian principle also yields the multidimensional Laplace equation. Consequently, the vibrations of elastic membranes in space can be modeled as the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation. When studying these applications, it becomes necessary to obtain an explicit representation of the boundary value problems being studied. The author has previously studied the Dirichlet problem for multidimensional hyperbolic-elliptic equations, where a unique solvability of this problem is shown, which essentially depends on the height of the entire cylindrical region under consideration. In this paper we investigate a Dirichlet type problem in the cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation and obtain an explicit form of its classical solution. In this case, the unique solvability depends only on the height of the hyperbolic part of the cylindrical domain, and a criterion for the uniqueness of the solution is given.

Key words: well-posedness, Dirichlet type problem, cylindrical domain, multidimensional equation, criterion.

Статья поступила в редакцию 16/I/2018.
The article received 16/I/2018.

²*Aldashev Serik Aimurzaevich* (aldash51@mail.ru), Department of Mathematics and Mathematical Modeling, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125, Pushkin street, Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan.

A.Sh. Shukurov¹

BASIS OF THE PROPERTIES OF WEIGHTED EXPONENTIAL SYSTEMS WITH EXCESS

The main aim of this paper is the determination of a class of such functions for which a weighted exponential system becomes complete and minimal in appropriate space when exactly one of its terms is eliminated. It is shown that the system, obtained in this way cannot be a Schouder basis in this space. The last fact shows that Muckenhoupt-type criterion for the exponential system to be the Schauder basis in Lebesgue spaces after elimination of an element does not exist. This paper generalizes the results of the paper by E.S. Golubeva.

Key words: system of weighted exponentials, Muckenhoupt condition.

1. Introduction

The basis properties (completeness, minimality and Schauder basicity) of systems of the form $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$, where $\{\varphi_n(t)\}$ is an exponential or trigonometric (cosine or sine) systems have been investigated in several papers (see, for example, [1-16]). To our knowledge, first result in this direction is [1] in which Babenko gave an example $\{|t|^\alpha \cdot e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, where $|\alpha| < \frac{1}{2}$ and $\alpha \neq 0$, answering in the affirmative a question of Bari ([17]) on the existence of normalized basis for $L_2(-\pi, \pi)$ that is not a Riesz basis. The result of Babenko ([1]) was then extended by V.F.Gaposhkin in his famous paper [14], where, in particular, some sufficient condition (on the weight function $\omega(t)$) for the system $\{\omega(t) \cdot e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ to be a basis in $L_2(-\pi, \pi)$ was found. And eventually, necessary and sufficient condition on the weight function $\omega(t)$ which ensures the Schauder basicity of the exponential system $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ in weighted Lebesgue space $L_{p, \omega(\cdot)}(-\pi, \pi)$ has been obtained (see, for example [16]); such a condition is the Muckenaupt condition with respect to the weight function $\omega(t)$:

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \right)^{p-1} < \infty,$$

where sup is taken over all intervals I and $|I|$ is the length of the interval I . Note that study of basicity properties of a system in weighted Lebesgue spaces $L_{p, \omega(\cdot)}$ is equivalent to the study of analogous properties of this system with corresponding degenerate coefficient in the "ordinary" Lebesgue space L_p . Therefore, the mentioned criterion can also be considered as a necessary and sufficient condition for the Schauder basicity in L_p of the exponential system with degenerate coefficients $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

There are concrete examples of weight function $\omega(t)$ for which the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ itself is not complete and minimal but becomes so when some of its terms are eliminated. For example, it is proved in [8] that, a system $\{te^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ is not complete and minimal (and hence Schauder basis) in $L_2(-\pi, \pi)$ but becomes complete and minimal when one of its elements is eliminated from the original system; more precisely, a system $\{te^{int}\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ is complete and minimal system in $L_2(-\pi, \pi)$, but it is not a Schauder basis in it. It is also mentioned in [8] that the indicated statement about the system remains valid when any one of its terms is eliminated.

We generalize the indicated result of the paper [8] to the most general case of the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, where $\omega(t)$ is any function.

The aim of this note is the determination of the class of all functions $\omega(t)$ for which the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ becomes complete and minimal in $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, space when exactly one of its terms is eliminated. It is also shown that the system, obtained from the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ in this way (by elimination of an element) cannot be a Schauder basis in $L_p(-\pi, \pi)$ space.

¹© Shukurov A.Sh., 2018

Shukurov Aydin Shukur (ashshukurov@gmail.com), Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, 9, B. Vahabzade, Baku, Az1141, Azerbaijan.

2. Auxiliary facts

We will use some auxiliary facts which are of some interest in their own too.

Lemma 1. *If the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z/k_0}$ is a minimal system in $L_p(-\pi, \pi)$, then it has a biorthogonal system $\{b_n(t)\}_{Z/k_0}$ which is of the following form:*

$$b_n(t) = \frac{e^{int} + \xi_n e^{ik_0 t}}{\omega(t)}, \quad (1)$$

where ξ_n are some complex numbers.

Proof. The fact that $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z/k_0}$ has a biorthogonal system follows from its minimality. Denote the biorthogonal system by $\{b_n(t)\}_{Z/k_0}$. Take arbitrary natural number $n \neq k_0$. By the definition of the biorthogonal system

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n(t)\omega(t)e^{ikt} dt = 0, \forall k \neq n, k_0 \quad (2)$$

and

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n(t)\omega(t)e^{int} dt = 1. \quad (3)$$

The relations (2), along with the fact that the Fourier coefficients of a summable function with respect to an exponential system is unique, imply that there are some complex numbers α_n and ξ_n such that

$$b_n(t) = \frac{\alpha_n e^{int} + \xi_n e^{ik_0 t}}{\omega(t)}.$$

Substituting it into (3) and taking into account that $\{e^{int}\}$ is an orthonormal system, we find that $\alpha_n = 1$ for all n . This proves the relation (1). The Lemma is proved.

Let $\{\xi_n\}$ be any sequence of numbers and k_0 any integer. For simplicity, we will make use of the following denotation:

$$\Phi_n(t) = e^{int} - \xi_n e^{ik_0 t}.$$

Lemma 2. *A function $\Phi_n(t)$, where $n \neq k_0$, may have only simple zeros.*

Proof. Assume that there is a point t_0 for which

$$\Phi_n(t_0) = 0, \Phi_n'(t_0) = 0.$$

These equalities can be written in the following form:

$$e^{int_0} - \xi_n e^{ik_0 t_0} = 0,$$

and

$$ne^{int_0} - k_0 \xi_n e^{ik_0 t_0} = 0,$$

accordingly. These equalities imply that $n = k_0$ which is impossible by the condition of the lemma.

The lemma is proved.

Lemma 3. *Let $A \subset [-\pi, \pi]$ be such that $\Phi_n(t) = 0$ for all $n \in Z/\{k_0\}$, $t \in A$. Then the set A consists of at most two points and it is two-element set only if $A = \{-\pi, \pi\}$.*

Proof. Let $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]$ be such that

$$e^{int_1} - \xi_n e^{ik_0 t_1} = 0,$$

and

$$e^{int_2} - \xi_n e^{ik_0 t_2} = 0$$

for all $n \neq k_0$. These two relations are possible if and only if

$$\frac{(n - k_0)(t_2 - t_1)}{2\pi} \in Z$$

for all $n \neq k_0$. Taking, in particular, $n = k_0 + 1$, we obtain from the last relation that $t_2 - t_1$ is an integer multiply of 2π . But this is possible if and only if $t_1 = -\pi, t_2 = \pi$ or $t_2 = -\pi, t_1 = \pi$. Thus, the set A may contain at most two points and it contains two elements only if $A = \{-\pi, \pi\}$.

The lemma is proved

Lemma 4. Let ξ be any complex number and n, m any integers such that $n \neq m$. Then the function $e^{int} - \xi \cdot e^{imt}$ may have only finite number of zeroes in the segment $[-\pi, \pi]$.

Proof. Assume the contrary: the function $e^{int} - \xi \cdot e^{imt}$ has an infinite number of zeroes. Let $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [-\pi, \pi]$ be its zeroes. By the Bolzano-Weierstrass theorem, the sequence $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ has a limit point in $[-\pi, \pi]$. Therefore, since the function $e^{inz} - \xi \cdot e^{imz}$ is an entire function on the whole complex plane, the uniqueness theorem for analytic functions implies that $e^{int} - \xi \cdot e^{imt} \equiv 0$ on the segment $[-\pi, \pi]$. This means that the system of functions $\{e^{inz}, e^{imz}\}$ is linearly independent system. Contradiction: since it is orthonormal, it cannot be linearly independent. The Lemma is proved.

3. Main result and its proof

The aim of this paper is to prove the following

Main Theorem. Let k_0 be any integer. The system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$ is complete and minimal in $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, space if and only if $\omega(t) \in L_p(-\pi, \pi)$, $\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi)$ and besides

1) there is a (unique) point $t_0 \in [-\pi, \pi]$ such that $\frac{t-t_0}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$;

or

2) $\frac{(t-\pi)(t+\pi)}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$.

Proof. Necessity. The validity of $\omega(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ is evident.

Let the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$ be complete and minimal in $L_p(-\pi, \pi)$. Then

$$\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi). \quad (4)$$

Assume the contrary:

$$\frac{1}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi).$$

Then $\frac{1}{\omega(t)}e^{ik_0t} \in L_q(-\pi, \pi)$ and besides this, it is evident that the function $\frac{1}{\omega(t)}e^{ik_0t}$ is not trivial (is not equivalent to zero) and

$$\int_{-\pi}^{\pi} \omega(t)e^{int} \frac{1}{\omega(t)}e^{ik_0t} dt = 0$$

for all $n \in Z, n \neq k_0$. These observations show that the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$ is not complete. Thus, our assumption is false - (4) is valid.

Since the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$ is minimal, by Lemma 1 it has a biorthogonal that is of the following form:

$$b_n(t) = \frac{e^{int} - \xi_n e^{ik_0t}}{\omega(t)}, \forall n \neq k_0. \quad (5)$$

If the function $e^{int} - \xi_n e^{ik_0t}$ has no zeros on the segment $[-\pi, \pi]$ for some index n , then the representation (5), the fact that $b_n(t) \in L_q(-\pi, \pi)$ and the continuity of the function $e^{int} - \xi_n e^{ik_0t}$ imply that $\frac{1}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$ which contradicts to (4).

Let n_0 be any natural number satisfying the condition $n_0 \neq k_0$. By Lemma 4, the function $e^{in_0t} - \xi_{n_0} e^{ik_0t}$ has finite number of zeros z_1, \dots, z_m on the segment $[-\pi, \pi]$. With this in mind, using the representation (5) of the biorthogonal system, the fact that $b_n(t) \in L_q(-\pi, \pi)$ for all $n \neq k_0$ and the condition $\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi)$, we obtain that there is a nonempty subset $A \subset [-\pi, \pi]$ (consisting of the points z_1, \dots, z_m) such that

$$e^{int} - \xi_n e^{ik_0t} = 0$$

for all $n \in Z/\{k_0\}$. By Lemma 3, the set A consists of at most two points and it contains two elements only if $A = \{-\pi, \pi\}$.

We treat the single point and two-point cases separately.

First, consider the case $A = \{t_0\}$, where t_0 is some number in $\{z_1, \dots, z_m\}$. Write the function $b_{n_0}(t)$ in the following form

$$b_{n_0}(t) = \frac{t - t_0}{\omega(t)} \cdot \frac{e^{in_0t} - \xi_{n_0} e^{ik_0t}}{t - t_0},$$

and consider an auxiliary function

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{e^{in_0 t} - \xi_{n_0} e^{ik_0 t}}{t - t_0}, & \text{if } t \neq t_0; \\ \Phi'_{n_0}(t_0), & \text{if } t = t_0. \end{cases}$$

Then, using the definition of the set A , taking into account that $b_n(t) \in L_q(-\pi, \pi)$ for all $n \neq k_0$ and using Lemma 2, it can be derived from here that

$$\frac{t - t_0}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi).$$

Now, consider the case $A = \{-\pi, \pi\}$. Write the function $b_{n_0}(t)$ in the following form

$$b_{n_0}(t) = \frac{(t - \pi)(t + \pi)}{\omega(t)} \cdot \frac{e^{in_0 t} - \xi_{n_0} e^{ik_0 t}}{(t - \pi)(t + \pi)}, \forall n \neq k_0.$$

and consider a function

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{e^{in_0 t} - \xi_{n_0} e^{ik_0 t}}{\frac{(t - \pi)(t + \pi)}{\omega(t)}}, & \text{if } t \in (-\pi, \pi); \\ -\frac{\Phi'_{n_0}(\pi)}{2\pi}, & \text{if } t = -\pi; \\ \frac{\Phi'_{n_0}(\pi)}{2\pi}, & \text{if } t = \pi. \end{cases}$$

Then, again, using the definition of the set A , taking into account that $b_n(t) \in L_q(-\pi, \pi)$ for all $n \neq k_0$ and applying Lemma 2, it can be shown that

$$\frac{(t - \pi)(t + \pi)}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi).$$

Sufficiency. First, consider the case 1): there is a unique point $t_0 \in [-\pi, \pi]$ such that $\frac{t - t_0}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$. Let k_0 be any integer. If a function $f(t)$ is orthogonal to the system $\{\omega(t) \cdot e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \omega(t) e^{int} dt = 0, \forall n \neq k_0, \quad (6)$$

then $f(t) = \frac{c \cdot e^{ik_0 t}}{\omega(t)}$ for some constant c (it is a consequence of the fact that Fourier coefficients of a summable function with respect to an exponential system is unique). Since $\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi, \pi)$, $f(t) = \frac{c \cdot e^{ik_0 t}}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$ if and only if $c = 0$, i.e. $f(t) \equiv 0$. Thus, the relations (6) imply $f(t) \equiv 0$. This means that the system $\{\omega(t) e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$ is complete in $L_p(-\pi, \pi)$.

Consider a function $b_n(t)$ defined by (5), where $\xi_n = \frac{e^{int_0}}{e^{ik_0 t_0}}$. Writing the function $b_n(t)$ in the form

$$b_n(t) = \frac{t - t_0}{\omega(t)} \cdot \frac{e^{int} - \xi_n e^{ik_0 t}}{t - t_0},$$

taking into account the relation $\frac{t - t_0}{\omega(t)} \in L_q(-\pi, \pi)$ and the fact that t_0 is a root of the function $e^{int} - \xi_n e^{ik_0 t}$, we obtain that $b_n(t) \in L_q(-\pi, \pi)$ for all $n \in Z, n \neq k_0$; besides it, it is easy to see that

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n(t) \omega(t) e^{imt} dt = \delta_{nm}$$

for all $n, m \neq k_0$, where δ_{nm} is a Kronecker symbol. Therefore, the system $\{b_n(t)\}$ is biorthogonal to $\{\omega(t) e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$ and hence, the system $\{\omega(t) e^{int}\}_{n \in Z/\{k_0\}}$ is minimal in $L_p(-\pi, \pi)$ space.

The case 2) is treated similarly.

The theorem is proved.

This theorem immediately implies the following

Corollary. *If the system $\{\omega(t) e^{int}\}_Z$ becomes complete and minimal in $L_p(-\pi, \pi)$ space when one of its terms is eliminated, then it also becomes complete and minimal in $L_p(-\pi, \pi)$ when any one of its terms is eliminated.*

4. Schauder basicity

The result of the previous section characterizes the class of all functions $\omega(t)$ for which the system $\{\omega(t) e^{int}\}_Z$ becomes complete and minimal in $L_p(-\pi, \pi), 1 < p < \infty$, space when exactly one (actually, by Corollary of the previous section, any one) of its terms is eliminated. Therefore it is natural to ask for

condition on $\omega(t)$ which ensures Schauder basicity in $L_p(-\pi, \pi)$ of the system, obtained from the system $\{\omega(t)e^{int}\}_Z$ by elimination of exactly one of its terms. It turns out that such a condition does not exist:

Theorem. *Let $\omega(t)$ be any function and k_0 be any integer. Then the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{Z/\{k_0\}}$ is not a Schauder basis in $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, space.*

Proof. Assume the contrary: the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{Z/\{k_0\}}$ is a Schauder basis in $L_p(-\pi, \pi)$. Then the function $\omega(t)e^{ik_0t}$ has an expansion (in L_p norm) of the form

$$\omega(t)e^{ik_0t} = \sum_{n \neq k_0}^{\infty} c_n \omega(t)e^{int}. \quad (7)$$

Take arbitrary natural number $n \neq k_0$. Applying the biorthogonal system (5) to both sides of (7), we obtain that

$$c_n = \xi_n, \forall n \neq k_0.$$

Thus, the series

$$\sum_{n \neq k_0}^{\infty} \xi_n \omega(t)e^{int}$$

is convergent. Therefore, by the necessary condition for the convergence of the series, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n \omega(t)e^{int}\|_{L_p} = 0$. This equality and the identity $\|\xi_n \omega(t)e^{int}\|_{L_p} = |\xi_n| \cdot \|\omega(t)\|_{L_p}$ imply that $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$. But, on the other hand, as a consequence of the basicity, the system $\{\omega(t)e^{int}\}_{Z/\{k_0\}}$ is complete and minimal in $L_p(-\pi, \pi)$ and a closer look at the proof of Main Theorem from the previous section shows that the number ξ_n in the definition of the biorthogonal system (5) satisfies the equality $\xi_n = \frac{e^{in t_0}}{e^{ik_0 t_0}}$ for all $n \in Z, n \neq k_0$, for some $t_0 \in [-\pi, \pi]$. This yields a contradiction. The Theorem is proved.

Remark. It should be noted that this fact also follows from the more general result obtained in [18-20].

Note that negative results on Schauder basicity of some systems of a certain form were also studied earlier in papers [21-25].

Acknowledgement. The author is grateful to Professor B.T.Bilalov for encouraging discussion. The author also thanks N.J. Guliyev for his useful assistance.

References

- [1] K.I. Babenko *On conjugate functions*. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 62, (1948), pp. 157–160 [in Russian].
- [2] B.T. Bilalov, S.G. Veliyev *On completeness of exponent system with complex coefficients in weight spaces*. Trans. of NAS of Azer., 2005, Vol. XXV, no. 7, pp. 9-14 [in English].
- [3] B.T. Bilalov, S.G. Veliyev *Bases of eigenfunctions of two discontinuous differential operators*. Diff. Uravn., 2006, Vol. 42, no. 9, pp. 190-192 [in English].
- [4] K.S. Kazaryan, P.I. Lizorkin *Multipliers, bases and unconditional bases of the weighted spaces B and SB*. Trudy Mat. Inst. Steklov, no. 187 (1989), pp. 98–115 [in English].
- [5] S.S. Pukhov, A.M. Sedletskiĭ *Bases of exponentials, sines, and cosines in weighted spaces on a finite interval*. Dokl. Akad. Nauk, 425 (2009), no. 4, pp. 452–455 [in English].
- [6] E.I. Moiseev *On the basis property of sine and cosine systems in a weighted space*. Differ. Uravn., 34 (1998), no. 1, pp. 40–44 [in English].
- [7] E.I. Moiseev *The basis property of a system of eigenfunctions of a differential operator in a weighted space*. Differ. Uravn., 35 (1999), no. 2, pp. 200–205 [in English].
- [8] E.S. Golubeva *The System of Weighted Exponentials with Power Weights*. Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, 2011, no. 2(83), pp. 15-25 [in Russian].
- [9] Z.V. Mamedova *On Basis Properties of Degenerate Exponential System*. Applied Mathematics, 2012, 3, pp. 1963-1966 [in English].
- [10] S.R. Sadigova, Z.V. Mamedova *Frames from Cosines with the Degenerate Coefficients*. American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2013, Vol. 1, no. 3, pp. 36-40 [in English].
- [11] B. Bilalov, F. Guliyeva *On the Frame Properties of Degenerate System of Sines*. Journal of Function Spaces and Applications, 2012, Art. ID 184186, pp. 1-12 [in English].
- [12] B.T. Bilalov, Z.V. Mamedova *On the frame properties of some degenerate trigonometric systems*. Dokl. Nats. Akad. Nauk Azerb., 68 (2012), no. 5, pp. 14-18 [in English].
- [13] B.T. Bilalov, F.A. Gulieva, *A completeness criterion for a double power system with degenerate coefficients*, Sibirsk. Mat. Zh. 54 (2013), no. 3, 536-543.

- [14] V.F. Gaposhkin *A generalization of the theorem of M. Riesz on conjugate functions* *Mat. Sb. N.S.*, 46(88), 1958, pp. 359-372 [in English].
- [15] B.T. Bilalov, S.R. Sadigova *Frame properties of a part of exponential system with degenerate coefficients in Hardy classes* *Georgian Mathematical Journal* (accepted, will be published in Vol.23(2017)) [in English].
- [16] R.A. Hunt, W.S. Young *A weighted norm inequality for Fourier series*. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974), 274, p. 277. [in English].
- [17] N.K. Bari *Biorthogonal systems and bases in Hilbert space*. *Moskov. Gos. Univ. Uchenye Zapiski. Matematika*, 148(4), (1951), 69–107 [in Russian].
- [18] K.S. Kazarian *The multiplicative completion of basic sequences in $L_p, 1 < p < \infty$ to bases in L_p* . *Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR*, Vol. 62, 1976, pp. 203-209 [in English].
- [19] K.S. Kazarian *On the multiplicative completion of some incomplete orthonormal systems to bases in $L_p, 1 < p < \infty$* . *Analysis Math*, 1978, 4, pp. 37-52 [in English].
- [20] K.S. Kazarian *Multiplicative completion of certain systems*. *Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat.*, 1978, 13(4) [in English].
- [21] L.V. Kritskov *On the basis property of the system of functions $\{e^{i\alpha nt} \sin(nt)\}$* . *Dokl. Akad. Nauk*, 346 (1996), no. 3, pp. 297–298 [in Russian].
- [22] A.Sh. Shukurov *Necessary condition for Kostyuchenko type systems to be a basis in Lebesgue spaces*, *Colloq. Math.* 127 (2012), no. 1, 105–109.
- [23] A.Sh. Shukurov *Addendum to "Necessary condition for Kostyuchenko type systems to be a basis in Lebesgue spaces"* [MR2945779]. *Colloq. Math.*, 137 (2014), no. 2, pp. 297–298 [in English].
- [24] A.Sh. Shukurov *The power system is never a basis in the space of continuous functions*. *Amer. Math. Monthly*, 122 (2015), no. 2, p. 137 [in English].
- [25] A.Sh. Shukurov *Impossibility of power series expansion for continuous functions*. *Azerb. J. Math.*, 6 (2016), no. 1, pp. 122–125 [in English].

А.Ш. Шукюров²

О БАЗИСНЫХ СВОЙСТВАХ ВЗВЕШЕННЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИЗБЫТКОМ

Целью настоящей работы является обобщение результатов Э.С. Голубева на основе свойств взвешенных экспоненциальных систем, опубликованных ранее в этом журнале, в наиболее общем случае.

Ключевые слова: система взвешенных экспоненциалов, условие Muckenhoupt.

Статья поступила в редакцию 28/II/2018.

The article received 28/II/2018.

²Шукюров Айдын Шукюр оглы (ashshukurov@gmail.com), Институт Математики и Механики, Национальная Академия Наук Азербайджана, Az1141, Азербайджан, Баку, Б. Вахабзаде, 9.

Ю.О. Яковлева¹

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В статье рассмотрена характеристическая задача для уравнения гиперболического типа третьего порядка с некротными характеристиками, постановка которой является корректной по Адамару. В явном виде приведено регулярное решение поставленной характеристической задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с некротными характеристиками. Для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка исследуется корректность по Адамару постановки характеристической задачи. Получено регулярное решение характеристической задачи для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка. В результате исследований сформулирована теорема о корректности по Адамару постановки характеристической задачи для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение третьего порядка, некротные характеристики, характеристическая задача, система гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка, корректность по Адамару.

Введение

Исследование корректности постановки начально-краевых задач является одной из актуальных проблем в теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Исследованию корректности постановки начально-краевых задач для гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными порядка выше второго посвящены работы многих как отечественных так и зарубежных ученых [1–3].

С точки зрения постановки граничных задач наиболее хорошо изучены дифференциальные уравнения с частными производными классических типов и непосредственные их обобщения.

Известно [1], что классическая задача Гурса для уравнения гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными с граничными условиями на двух характеристиках из различных семейств всегда является корректной по Адамару.

В монографии Бицадзе А.В. [4] приводятся примеры, показывающие, что для системы второго порядка с некротными характеристиками, задача Гурса является некорректной по Адамару [5].

В статье [6] рассмотрен пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса в плоскости независимых переменных x, y для уравнений гиперболического типа третьего порядка.

В работах [6; 7] приведено исследование корректности по Адамару характеристических задач для гиперболического уравнения третьего порядка с некротными характеристиками.

В настоящей работе сформулированы и исследованы характеристические задачи для гиперболического уравнения третьего порядка и системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка в плоскости независимых переменных $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

¹© Яковлева Ю.О., 2018

Яковлева Юлия Олеговна (julia.yakovleva@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Пусть $x \in I_c$, $I_c = [a, b]$, $c = \frac{a+b}{2}$. Отрезок I_c имеет центральную симметрию: $\forall x \in I_c, 2c - x \in I_c$. Для любой функции $f(x)$ справедливо

$$f_{c,od}(x) = \frac{f(x) - f(2c - x)}{2}, f_{c,ev}(x) = \frac{f(x) + f(2c - x)}{2}, f(x) = f_{c,od}(x) + f_{c,ev}(x).$$

При $c = 0$ будем обозначать $f_{od}(x)$, $f_{ev}(x)$ нечетную и четную части функции $f(x)$ соответственно.

В плоскости независимых переменных $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \quad (1.1)$$

Известно [6], что прямые $x = C_1$, $y = C_2$, $x + y = C_3$, $C_i = const$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ являются характеристиками этого уравнения (1.1). Уравнение (1.1) является строго гиперболическим по Петровскому [8].

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$u(x, y) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(x + y).$$

Рассмотрим следующую характеристическую задачу.

Задача G1. Найти регулярное решение $u(x, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ уравнения (1.1) в плоскости D , удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \alpha(x), \\ u(0, y) &= \beta(y), \\ u(x, -x) &= \gamma(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

Регулярным в плоскости D решением [6, 7] задачи G1 (1.2) уравнения (1.1) будем называть функцию $u(x, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, имеющую в плоскости D все непрерывные частные производные, входящие в уравнение (1.1) и удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям задачи G1 (1.2) в обычном смысле.

Теорема 1. Если $\gamma_{od}(x) = \alpha_{od}(x) - \beta_{od}(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, $\alpha_{od}(x)$, $\beta_{od}(x)$, $\gamma_{od}(x)$ — нечетные части функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ соответственно, то задача G1 (1.2) для уравнения (1.1) корректна по Адамару.

Существование корректного по Адамару решения характеристической задачи G1 в плоскости D для уравнения (1.1) докажем конструктивно.

Функции f_1 , f_2 и f_3 такие, что удовлетворяют граничным условиям задачи (1.2). Учитывая при этом условия согласования $f_1(0) + f_2(0) = \alpha(0) - f_3(0)$, получим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \alpha(x) - f_3(x) - f_2(0), \\ f_2(y) &= \beta(y) - f_3(y) - f_1(0), \\ f_3(x) + f_3(-x) &= \alpha(x) + \beta(-x) - \gamma(x) - \alpha(0) + 2f_3(0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда

$$f_3(-x) + f_3(x) = \alpha(-x) + \beta(x) - \gamma(-x) - \alpha(0) + 2f_3(0), x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Из (1.3) и (1.4) получим, что

$$\begin{aligned} \gamma_{od}(x) &= \alpha_{od}(x) - \beta_{od}(x), \\ f_3(x) &= \frac{1}{2} [\alpha_{ev}(x) + \beta_{ev}(x) - \gamma_{ev}(x) - \alpha(0) + 2f_3(0)]. \end{aligned}$$

Тогда функция $u(x, y)$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha(x) + \beta(y) - \frac{1}{2}\alpha(0) + \frac{1}{2} [\alpha_{ev}(x + y) - \alpha_{ev}(x) - \alpha_{ev}(y)] + \\ &+ \frac{1}{2} [\beta_{ev}(x + y) - \beta_{ev}(x) - \beta_{ev}(y)] - \\ &- \frac{1}{2} [\gamma_{ev}(x + y) - \gamma_{ev}(x) - \gamma_{ev}(y)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Формула (1.5) есть искомая функция, записанная в явном виде и являющаяся регулярным решением характеристической задачи G1.

2. Постановка задачи

В плоскости независимых переменных $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим одну систему гиперболических уравнений третьего порядка

$$U_{xxy} - LU_{xyy} = 0, \quad (2.1)$$

где $U(x, y) = (u^1(x, y), u^2(x, y))^T$ — двумерная вектор-функция, L — постоянная матрица второго порядка с различными действительными собственными значениями λ_1, λ_2 .

Существует квадратная матрица второго порядка [9]

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

такая, что $T^{-1}LT = \Lambda_L$, где

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Указанная система (2.1) имеет две кратные $x = 0$, $y = 0$ характеристики и две различные $y + \lambda_1 x = 0$, $y + \lambda_2 x = 0$.

Задача G2. Найти решение $U(x, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ системы уравнений (2.1), удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= T\alpha(x), \quad U(0, y) = T\beta(y), \\ U(x, -\lambda_i x) &= T\gamma(x), \end{aligned}$$

где $\alpha(x) = (\alpha^1(x), \alpha^2(x))^T$, $\beta(y) = (\beta^1(y), \beta^2(y))^T$, $\gamma(x) = (\gamma^1(x), \gamma^2(x))^T$, $\alpha^i(x)$, $\beta^i(y)$, $\gamma^i(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$.

Теорема 1. Если $\gamma_{od}^1(x) = \alpha_{od}^1(x) - \beta_{od}^1(\lambda_1 x)$, $\gamma_{od}^2(x) = \alpha_{od}^2(x) - \beta_{od}^2(\lambda_2 x)$, то задача G2 корректна по Адамару.

Докажем существование корректного по Адамару решения характеристической задачи G2 в плоскости D для системы гиперболических уравнений (2.1) конструктивным путем.

Система (2.1) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} V_{xxy} - \Lambda_L V_{xyy} &= 0; \\ \begin{cases} v_{xxy}^1 - \lambda_1 v_{xyy}^1 = 0, \\ v_{xxx}^2 - \lambda_2 v_{xyy}^2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, исходная матричное уравнение (2.1) эквивалентно системе (2.2) двух дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет некротные характеристики. Применяя приведенные выше исследования, решение характеристической задачи G2 для каждого уравнения системы (2.2) может быть получено в регулярном виде.

Вектор-функция $V(x, y) = (v^1(x, y), v^2(x, y))^T$ есть решение системы (2.2), где

$$\begin{aligned} v^1(x, y) &= \alpha^1(x) + \beta^1(y) - \frac{1}{2}\alpha^1(0) + \frac{1}{2} \left[\alpha_{ev}^1\left(\frac{1}{\lambda_1}y + x\right) - \alpha_{ev}^1\left(\frac{1}{\lambda_1}x\right) - \alpha_{ev}^1\left(\frac{1}{\lambda_1}y\right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\beta_{ev}^1(y + \lambda_1 x) - \beta_{ev}^1(x) - \beta_{ev}^1(y) \right] - \frac{1}{2} \left[\gamma_{ev}^1\left(\frac{1}{\lambda_1}y + x\right) - \gamma_{ev}^1\left(\frac{1}{\lambda_1}x\right) - \gamma_{ev}^1\left(\frac{1}{\lambda_1}y\right) \right], \\ v^2(x, y) &= \alpha^2(x) + \beta^2(y) - \frac{1}{2}\alpha^2(0) + \frac{1}{2} \left[\alpha_{ev}^2\left(\frac{1}{\lambda_2}y + x\right) - \alpha_{ev}^2\left(\frac{1}{\lambda_2}x\right) - \alpha_{ev}^2\left(\frac{1}{\lambda_2}y\right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\beta_{ev}^2(y + \lambda_2 x) - \beta_{ev}^2(x) - \beta_{ev}^2(y) \right] - \frac{1}{2} \left[\gamma_{ev}^2\left(\frac{1}{\lambda_2}y + x\right) - \gamma_{ev}^2\left(\frac{1}{\lambda_2}x\right) - \gamma_{ev}^2\left(\frac{1}{\lambda_2}y\right) \right]. \end{aligned}$$

Решение характеристической задачи G2 для системы (2.2) ищем в виде решения матричного уравнения $U = TV$:

$$\begin{cases} u^1(x, y) = t_{11}v^1 + t_{12}v^2, \\ u^2(x, y) = t_{21}v^1 + t_{22}v^2. \end{cases}$$

Полученная вектор-функция $U(x, y) = (u^1(x, y), u^2(x, y))^T$ является решением характеристической задачи G2.

Литература

- [1] Бицадзе А.В. К вопросу о постановке характеристической задачи для гиперболических систем второго порядка // ДАН СССР. 1973. № 6(223). С. 7–14.
- [2] Джохадзе О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Математические заметки. 2003. № 4(74). С. 517–528. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm282>.
- [3] Харибегашвили С.С. О разрешимости одной характеристической задачи для вырождающихся систем второго порядка // Дифференциальные уравнения и их приложения. 1989. №1(25). С. 154–162.
- [4] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [5] Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New York: Dover Publications, 1923. 338 с.
- [6] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некротными характеристиками // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. № 1(13). С. 3–6.

- [7] Яковлева Ю.О. Одна характеристическая задача для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка общего вида с некрратными характеристиками // Вестник СамГТУ. Серия физ-мат. науки. 2012. № 3. С. 180–183.
- [8] Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. 500 с.
- [9] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с.

References

- [1] Bitsadze A.V. *K voprosu o postanovke kharakteristicheskoi zadachi dlia giperbolicheskikh sistem vtorogo poriadka* [On a question on the formulation of characteristic problem for second-order hyperbolic systems]. *DAN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1973, №6(223), pp. 7-14 [in Russian].
- [2] Dzhokhadze O.M. *Vliianie mladshikh chlenov na korrektnost' postanovki kharakteristicheskikh zadach dlia giperbolicheskikh uravnenii tret'ego poriadka* [Influence of Lower Terms on the Well-Posedness of Characteristics Problems for Third-Order Hyperbolic Equations]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2003, № 4(74), pp. 491–501 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm282>.
- [3] Kharibegashvili S.S. *O razreshimosti odnoi kharakteristicheskoi zadachi dlia vyrozhdaishchikhsia sistem vtorogo poriadka* [On solvability of a characteristic problem for degenerate second-order hyperbolic systems]. *Differentsial'nye uravneniia i ikh prilozheniia* [Differential equations and their applications], 1989, №1(25), pp. 154–162 [in Russian].
- [4] Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. М.: Nauka, 1981, 448 p. [in Russian].
- [5] Hadamard J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. New York: Dover Publications, 1923, 338 p. [in English].
- [6] Andreev A.A., Yakovleva Ju.O. *Kharakteristicheskaia zadacha dlia odnogo giperbolicheskogo differentsial'nogo uravneniia tret'ego poriadka s nekratnymi kharakteristikami* [The Characteristic Problem for one Hyperbolic Differential Equation of the Third Order with Nonmultiple Characteristics]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2013, № 1(13), pp. 3–6 [in Russian].
- [7] Yakovleva Ju.O. *Odna kharakteristicheskaia zadacha dlia giperbolicheskogo differentsial'nogo uravneniia tret'ego poriadka obshchego vida s nekratnymi kharakteristikami* [One characteristic problem for the general hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics]. *Vestnik SamGTU. Serii fiz-mat. nauki* [Vestnik of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2012, № 3(28), pp. 180–183 [in Russian].
- [8] Petrovskiy I.G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaia geometriia* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. М.: Nauka, 1986, 500 p. [in Russian].
- [9] Gantmakher F.R. *Teoriia matrits* [Theory of matrices]. М.: Nauka, 1988, 549 p. [in Russian].

CHARACTERISTIC PROBLEM FOR THE ONE SYSTEM OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

In the paper the well-posed characteristic problem is considered for the hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics. The regular solution of the characteristic problem for the hyperbolic differential equation of the third order with the nonmultiple characteristics is constructed in an explicit form. The well-posed characteristic problem is considered for one system of hyperbolic differential equations of the third order. The regular solution of the characteristic problem for the one system of hyperbolic differential equations of the third order is constructed. The theorem for the Hadamard's well-posedness characteristic problem for the one system of hyperbolic differential equations is considered as the result of the research.

Key words: hyperbolic equation of the third order, nonmultiple characteristics, characteristic problem, system of hyperbolic differential equations of the third order, Hadamard's well-posedness.

Статья поступила в редакцию 18/I/2018.
The article received 18/I/2018.

²*Yakovleva Julia Olegovna* (julia.yakovleva@mail.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

В.В. Нарожнов¹

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С СОУДАРЕНИЯМИ

В работе численно решается уравнение колебаний осциллятора с соударениями, которые описываются в рамках контактной теории Герца. Вычислительный эксперимент показал, что на общие колебания, задаваемые внешней силой, накладываются затухающие колебания с большей частотой, которые соответствуют упругим соударениям осциллятора с поверхностью твердого тела. Проведено вейвлет-преобразование численного решения уравнения колебаний осциллятора с соударениями и натуральных экспериментальных результатов, полученных с помощью измерительного стенда. Вейвлет-анализ сложных акустических сигналов позволяет обнаружить мелкомасштабные особенности, которые важны для интерпретации эксперимента.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейный осциллятор, численное решение дифференциальных уравнений, вейвлет-анализ.

Введение

Нелинейный осциллятор представляет собой формальную математическую модель для изучения реальных колебательных процессов, протекающих в системах различной природы. Так, нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания осцилляторов, возникают в электротехнике при описании автоколебаний в цепях с активными и пассивными элементами; в трибологии при исследовании механизмов трения поверхностей; в микроэлектромеханических системах (МЭМС); в биологических и биохимических системах при изучении кинетики гомогенных процессов и др. [1–4]. Задачи об осцилляторе с соударениями возникают, в частности, при рассмотрении физических процессов в атомно-силовом микроскопе (АСМ), который используется для диагностики поверхностей твердых тел на атомном и наноразмерном уровне разрешения как в воздушной, так и в жидкой среде. Базовая конструкция АСМ содержит микрокантилевер с нано-наконечником, который в процессе колебаний наносит удары по поверхности образца (полуконтактный режим или *tapping mode*).

В настоящей работе проводится моделирование нелинейного осциллятора с соударениями с помощью программ Simulink и Wavelet Toolbox, входящих в состав пакета MATLAB. Результаты моделирования сравниваются с результатами натуральных экспериментов, проведенных на специально разработанном стенде.

1. Применение программы Simulink

Для моделирования физических процессов, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, широко используется программа MATLAB. В состав этой программы входит инструмент визуального и имитационного моделирования Simulink, позволяющий моделировать нелинейные динамические системы, следить за изменением их параметров и модифицировать проект с помощью графических блок-диаграмм [5].

Реализация алгоритма имитационного моделирования динамической системы в Simulink состоит из двух основных этапов. Сначала используя редактор моделей, создается графическая модель системы. Модель отображает зависящие от времени математические связи входов, состояний и выходов системы. Далее, производится численный расчет с целью описания поведения системы на заданном промежутке

¹© Нарожнов В.В., 2018

Нарожнов Виктор Валерьевич (narojnov.victor@gmail.com), лаборатория Автоматизации измерений, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

времени. При выполнении всех расчетов Simulink использует информацию, которая заложена в графической модели [6].

В работах [7; 8] предложена математическая модель нелинейного осциллятора, в которой удар описывается в рамках контактной теории Герца. Рассматривается твердый недеформируемый шар, закрепленный на невесомой пружине, который совершает вынужденные колебания под действием внешней силы. Амплитуда колебаний такова, что в нижней фазе своего движения, шар наносит удары по поверхности твердого тела, что вызывает ее упругую деформацию.

Для моделирования в Simulink рассматриваемую в [7; 8] задачу Коши, удобно представить в следующем виде:

$$u'' = c \cdot \cos(\Omega\xi) - 2a \cdot u' - u - b \cdot \theta(u-1) \cdot (u-1)^{3/2}, \quad (1.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$u = \frac{x}{h}, \quad \xi = \omega_0 t,$$

$$a = \frac{\gamma}{m\omega_0}, \quad b = \frac{4E\sqrt{Rh}}{3(1-\sigma^2)m\omega_0^2}, \quad c = \frac{F_0}{m\omega_0^2 h}, \quad \Omega = \frac{\omega_g}{\omega_0},$$

где a, b, c, Ω – безразмерные коэффициенты. Коэффициент a характеризует затухание колебаний осциллятора; b определяется упругими характеристиками соударяющихся тел; c задает амплитуду приложенной внешней силы; Ω определяет частоту внешнего возбуждения.

Построение графической модели нелинейного осциллятора начинается с сумматора Sum, имеющего четыре входа. Каждый вход сумматора соответствует слагаемому в правой части уравнения (1.1). На выходе сумматора получается значение второй производной по времени. Далее включаются последовательно два блока Integrator (du, u), на выходе которых получается значение первой производной и самой переменной. Устанавливаются связи между входами и выходами соответствующих блоков и применяются дополнительные линейные преобразователи и сумматоры. После установки всех связей определяются необходимые коэффициенты в используемых преобразователях и задаются начальные условия (1.2) для интеграторов. Для наблюдения за процессом колебаний в имитационной модели устанавливается программный блок Scope (осциллограф), который позволяет отображать изменения переменных во времени. Сохранение результатов моделирования производится с помощью блока To Workspace. Схема численного решения задачи (1.1), (1.2) представлена на рис. 1.

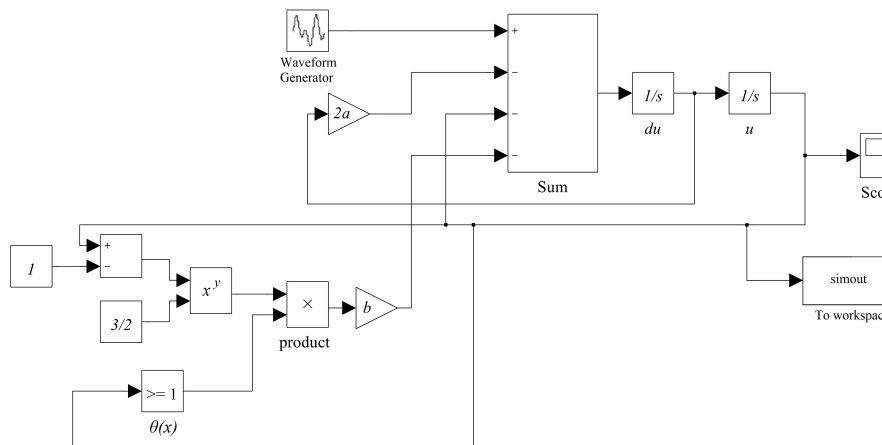


Рис. 1. Блок-схема математической модели нелинейного осциллятора

С помощью разработанной схемы проведен вычислительный эксперимент, результаты которого анализируются в следующем разделе статьи.

2. Применение Wavelet Toolbox

Для более детальной интерпретации результатов математического моделирования применительно к реальным колебательным системам представляет интерес провести спектральный анализ численных решений задачи (1.1), (1.2), которая описывает колебания нелинейного осциллятора с соударениями. Поэтому, в данной работе разработан и реализован алгоритм спектрального анализа, который основывается

на вейвлет-преобразовании и совместном применении программ Simulink и Wavelet Toolbox, входящих в состав пакета MATLAB.

Wavelet Toolbox представляет собой инструмент для непрерывного и дискретного спектрального анализа с использованием вейвлет-преобразований. Вейвлет-преобразование сигнала заключается в разложении его по некоторым базисным функциям — вейвлетам (от англ. "маленькая волна"). Для покрытия всего сигнала вейвлетами используются процедуры сдвига и масштабного преобразования [9–12]. Таким образом, сигнал представляется в виде совокупности параметрических "вейвлетных волн", которые зависят от координаты (сдвига) и частоты (масштаба). Математически это представляется в виде интеграла типа свертки:

$$u(\xi) = \frac{1}{a_0 C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b-b_0}{a_0}\right) \psi\left(\frac{\xi-b}{a}\right) \frac{da}{a^2}, \quad (2.1)$$

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \psi\left(\frac{\xi-b}{a}\right) d\xi, \quad C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|},$$

где $W(a, b)$ — функция, определяющая вейвлет-спектр, переменные a и b задают расширение и сдвиг для покрытия сигнала вейвлетом, a_0 и b_0 — управляющие параметры, позволяющие увеличивать, уменьшать и перемещать сигнал, C_ψ — нормализующий коэффициент, $\hat{\psi}(\omega)$ — Фурье-образ базового вейвлета. При $a_0 = 1$ и $b_0 = 1$ из (3) получается стандартное вейвлет-преобразование [9]. Выбор базового вейвлета обусловлен характером исследуемой функции и информации, которую необходимо извлечь из вейвлет-спектра. Wavelet Toolbox содержит большое количество базовых вейвлетов, отличающихся важными для анализа свойствами: локализация по времени и частоте; симметричность вейвлет-функций; число обращений в ноль моментов; регулярность вейвлета; существование масштабирующей функции.

На начальном этапе моделирования создается графическая (имитационная) модели в приложении Simulink (раздел 2 данной статьи). Далее, в среде этого приложения проводится моделирование процесса колебаний осциллятора с соударениями при выбранных значениях параметров модели. Полученные результаты моделирования сохраняются в рабочее пространство пакета MATLAB. На следующем этапе алгоритма запускается приложение Wavelet Toolbox. Для осуществления дальнейшего моделирования здесь, по существу, имеется две возможности — дискретное и непрерывное вейвлет-преобразования. Выбрав требуемый тип анализа, далее проводится моделирование спектральных свойств решения, полученного в приложении Simulink. Этот анализ предполагает возможность выбора того или иного дискретного или непрерывного базового вейвлета. При необходимости изменения параметров модели осциллятора с соударениями процесс моделирования проводится заново. Тем самым достигаются требуемые характеристики решения всей задачи.

На рис. 2 показаны результаты моделирования решения задачи о колебаниях нелинейного осциллятора с соударениями с применением дискретного вейвлет-преобразования с вейвлетами Добеши 4-го порядка.

Параметры модели (1.1), (1.2) имели следующие значения: $a = 0.2$; $b = 50$; $c = 10$; $\Omega = 0.25$. Исходный сигнал s , полученный с помощью программы Simulink и схемы на рис. 1, представляется в виде суммы двух компонент: аппроксимирующей a_1 и детализирующей d_1 . Таким образом, численный эксперимент здесь показывает, что путем выделения в спектре определенных составляющих сигнала можно получать различные их формы, которые могут регистрироваться на практике, например, с помощью оптических или электрических методов измерения.

Из рис. 2 (графики s и a_1) видно, что на колебания, задаваемые приложенной силой, накладываются затухающие колебания с большей частотой, которые соответствуют упругим соударениям осциллятора о поверхность твердого тела. При увеличении параметра a время затухания этих колебаний резко уменьшается. Это обусловлено увеличением динамического трения. Вычислительный эксперимент позволил установить, что изменение частоты и амплитуды колебаний осциллятора обусловлено изменением коэффициента b . Увеличение этого параметра приводит к увеличению частоты и уменьшению амплитуды колебаний и, соответственно, несет информацию об упругих свойствах образца. Моделирование также показывает, что установившейся динамической картине предшествует начальный участок, на котором происходят квазипериодические колебания осциллятора с большей амплитудой. Характер этого переходного процесса определяется параметрами b и c . При увеличении значений этих параметров переходной процесс постепенно перестает быть заметным. Моделирование показывает, что при увеличении коэффициента c возрастает амплитуда колебаний нелинейного осциллятора. При одинаковых прочих условиях увеличение резонансной частоты свободных колебаний осциллятора приводит к уменьшению всех параметров в уравнении (1.1).

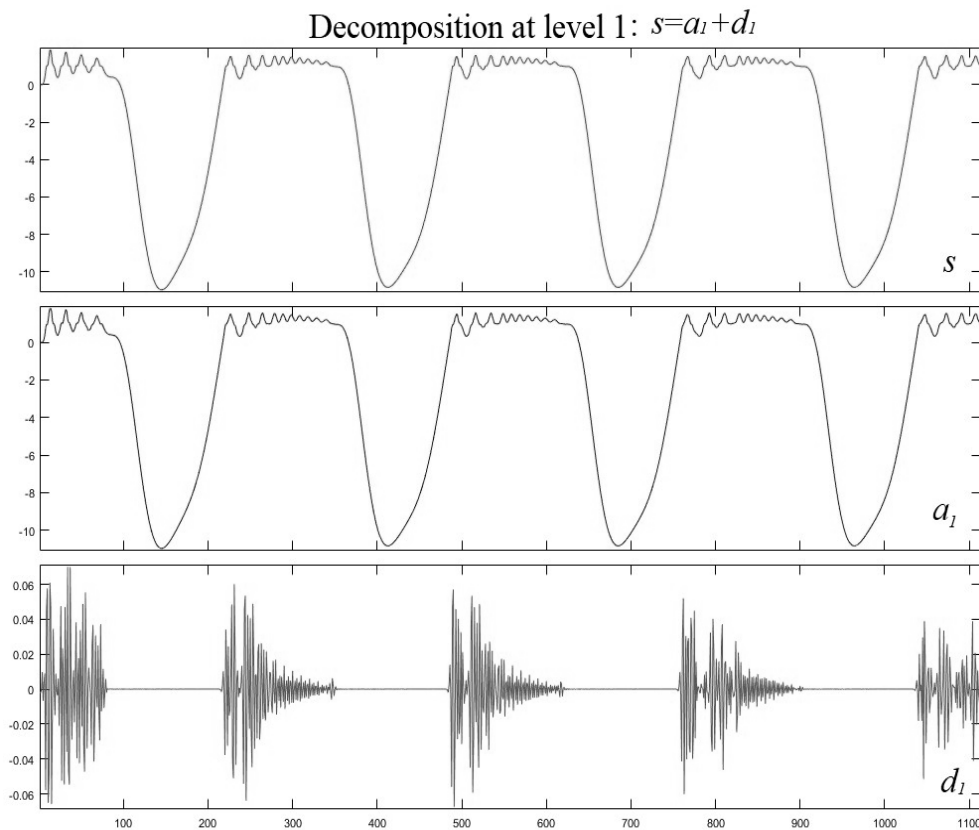


Рис. 2. Результаты моделирования колебаний осциллятора с соударениями с применением дискретного вейвлет-преобразования

На рис. 3 показаны результаты обработки решения задачи о колебаниях нелинейного осциллятора с соударениями с применением непрерывного вейвлет-преобразования с вейвлетом Добеши 4-го порядка. Для построения графиков использовалось выделение информативной части решения, которая соответствует ударам осциллятора. На вейвлет-спектре (рис.3,б) можно видеть светлые области, размер которых уменьшается соответственно уменьшению амплитуды затухающих колебаний моделируемого сигнала. Интенсивность окраски этих областей пропорциональна абсолютной величине коэффициентов $|W(a, b)|$: чем больше это значение в точке (a_0, b_0) , тем лучше вейвлет данного масштаба описывает поведение сигнала в окрестности $b = b_0$. На рис. 3,в изображена линия коэффициентов вейвлет-преобразования для масштаба $a = 11.5$, которая также имеет осциллирующий характер.

На рис. 3, г показана проекция линий локальных максимумов (скелетон [9]) на плоскость (a, b) , соединяющих максимумы коэффициентов вейвлет-преобразования на разных масштабах. Данный метод спектрального анализа называется методом максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования – в англ. терминологии Wavelet Transform Modulus Maxima, WTMM [13–15]. Данный метод позволяет определять фрактальную размерность сложных сигналов. Кроме того, в рамках данного метода имеется возможность разбивать временную область и область масштаба сигнала на необходимые для исследования участки. Поэтому метод иногда называют “математическим микроскопом” из-за его способности проверять многомасштабные размерные характеристики сигнала. В нашем случае функция “математического микроскопа” позволяет наглядно анализировать процесс соударений осциллятора.

3. Результаты экспериментов по исследованию нелинейного осциллятора с соударениями

Для экспериментального исследования особенностей физических процессов, возникающих при соударениях нелинейного осциллятора с плоской поверхностью, был использован измерительный стенд, разработанный в [8; 16]. Принцип его работы заключается в следующем. Переменный сигнал синусоидальной формы с генератора подается на индукционную катушку. Переменное магнитное поле, возникающее в катушке, приводит в колебательное движение упругий элемент (осциллятор), который выполнен в ви-

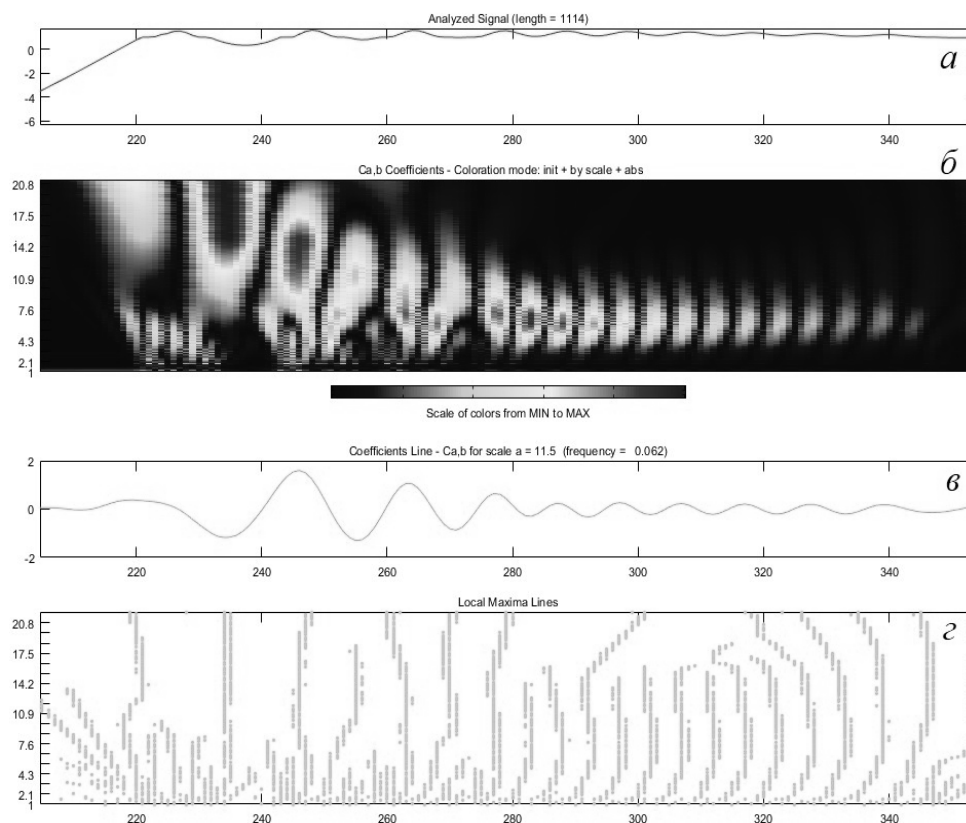


Рис. 3. Результаты моделирования колебаний осциллятора с соударениями с применением непрерывного вейвлет-преобразования

де тонкой металлической балки с закрепленным на конце корундовым зондом. В процессе колебаний зонд совершает удары по поверхности металлического образца. Амплитуда колебаний осциллятора и, соответственно, сила удара зависят от величины переменного напряжения на катушке. Для измерения интенсивности звуковых сигналов, возникающих при ударах зонда о поверхность образца, использовался пьезоэлектрический звукосниматель. Для формирования и измерения сигналов применялся компьютерный генератор-осциллограф PCSGU-250 фирмы Velleman. На рис. 4 показана осциллограмма звукового сигнала.

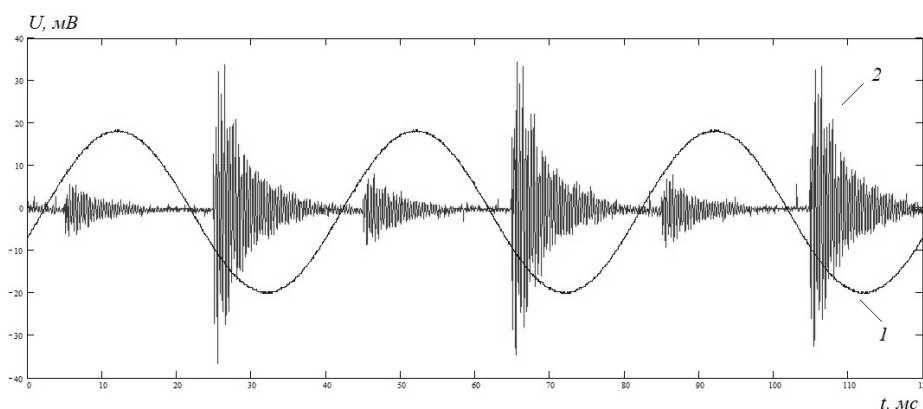


Рис. 4. Осциллограммы сигналов, полученные с помощью измерительного стенда для алюминиевого образца: 1–сигнал возбуждения, 2–звуковой сигнал

На рис. 4 хорошо заметно явление уменьшения амплитуды сигнала на возбуждающей катушке (центральная часть сигнала 2). Данное явление обусловлено тем, что при подаче на катушку переменного тока в нарастающей фазе напряжение возрастает и магнитное поле катушки увеличивается. ЭДС самоиндукции в этот момент препятствует протеканию тока от генератора. За спадающую фазу задающего

сигнала, когда напряжение на катушке уменьшается, магнитное поле создает ЭДС самоиндукции, которое совпадает по фазе с током. Ток самоиндукции в катушке старается теперь "поддержать" уменьшающийся переменный ток и сохранить большую величину магнитного потока.

Форма сигнала 2 хорошо воспроизводится математическим моделированием, проведенным с помощью вейвлет-преобразований (раздел 3, рис. 2). Таким образом приходим к выводу, что разработанный в [8; 16] стенд выделяет высокочастотную составляющую сигнала, которая соответствует ударам осциллятора. Тем самым осциллятор с соударениями функционирует как своеобразный электромеханический множитель частоты. В частности, из нашего эксперимента следует, что для алюминиевого образца при частоте задающего сигнала 25 Гц получается частота соударений осциллятора 2.5 кГц, т. е. происходит умножение частоты в 100 раз. Вычислительный эксперимент, выполненный с применением программы Wavelet Toolbox, показал, что наилучшей разрешающей способностью для анализа исследуемого акустического сигнала обладает вейвлет Мейера с высокой частотно-временной локализацией. Вейвлет Мейера и его фурье-образ имеют вид [17]:

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \widehat{\varphi}(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega - 2\pi) \cos \omega(x + 1/2) d\omega,$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = \begin{cases} e^{i\omega/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ e^{i\omega/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right), & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0, & |\omega| \notin \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right], \end{cases}$$

$$\widehat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-2\pi/3, 2\pi/3], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right), & 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3, \\ 0, & \text{for other } \omega, \end{cases}$$

$$\nu(\omega) = \omega^4(35 - 84\omega + 70\omega^2 - 20\omega^3).$$

С помощью программы Wavelet Toolbox проведен спектральный анализ, основанный на дискретном и непрерывном вейвлет-преобразовании акустических сигналов, возникающих при ударах осциллятора по поверхности твердого тела. Результаты вейвлет-преобразований приведены на рис. 5, 6. На рис. 5 представлены исходный сигнал s и его разложение на составляющие: аппроксимирующую a_3 и детализирующие d_1, d_2, d_3 : Компонента a_3 имеет слабо выраженную синусоидальную форму (как и сигнал 1

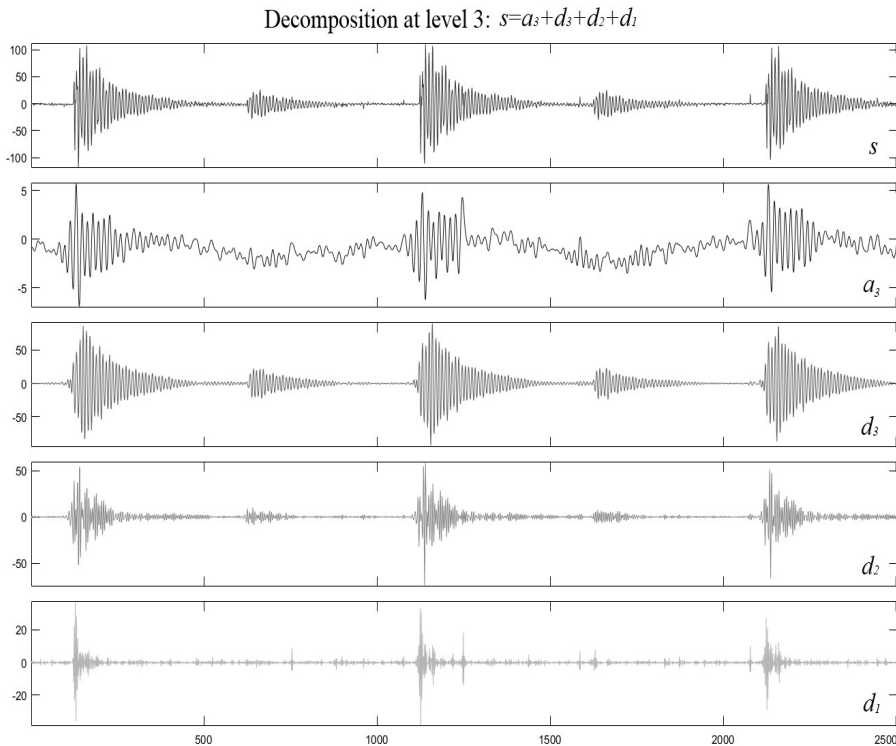


Рис. 5. Разложение акустического сигнала колебаний осциллятора с соударениями при помощи дискретного вейвлет-преобразования

на рис. 4), которая проявляется более отчетливо при увеличении уровня разложения исходного сигнала. График детализирующей компоненты d_3 обладает более правильной формой и позволяет исследовать коэффициент затухания начального сигнала. Если провести обратное вейвлет-преобразование, убрав при этом определенные элементы разложения, то можно получить, в зависимости от требуемых целей, отфильтрованный или сжатый сигнал.

На рис. 6 показаны проекции поверхностей и линии коэффициентов $W(a, b)$ непрерывного вейвлет-преобразования акустического сигнала на плоскость (a, b) , полученные с помощью вейвлета Мейера:

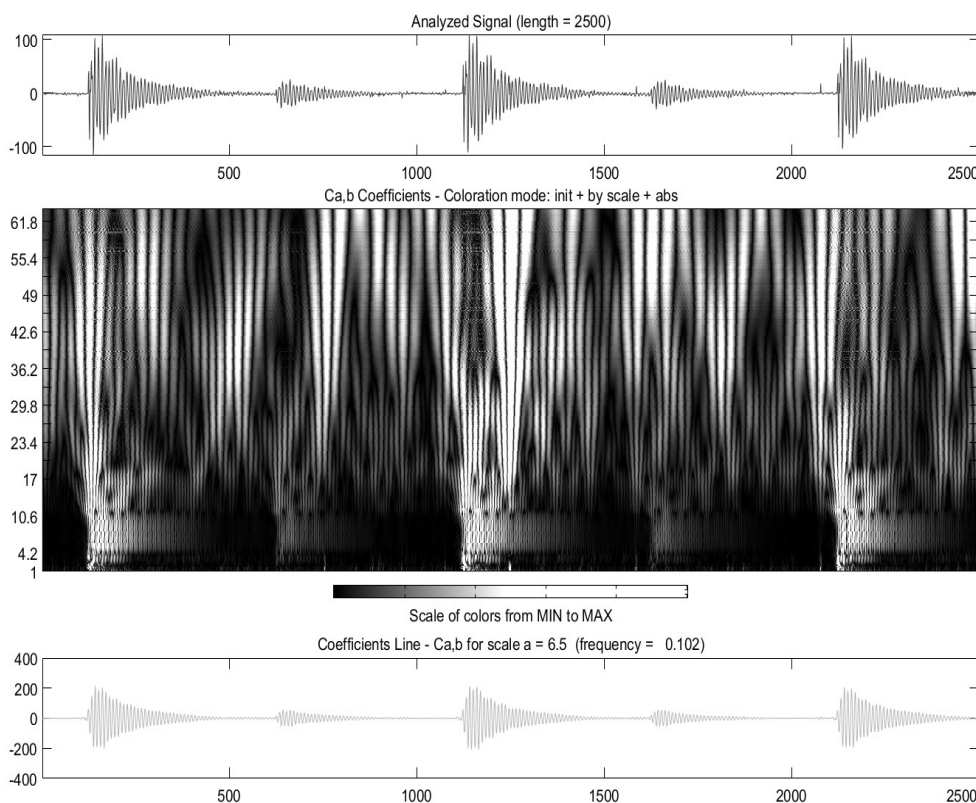


Рис. 6. Непрерывное вейвлет-преобразование акустического сигнала колебаний осциллятора с соударениями

Из рис. 6 видно, что в области малых значений масштабного коэффициента a локализованы составляющие вейвлет-спектра, соответствующие частоте исследуемого сигнала. Эта частота соответствует соударениям осциллятора с поверхностью образца. Светлые участки спектра имеют наибольшие значения коэффициентов $W(a, b)$, поэтому вид данного спектра в выбранном масштабе соответствует структуре исходного сигнала. Линия коэффициентов вейвлет-преобразования для масштаба $a = 6.5$ имеет близкую к исходному сигналу форму. Таким образом, в нашем случае вейвлет-преобразование акустических сигналов, возникающих при соударении зонда с твердой поверхностью, позволяет выявлять в частотной области мелкомасштабные детали, которые важны для интерпретации эксперимента. Если выделить эти детали и осуществить обратное преобразование, то можно получить полезную информацию об исследуемом сигнале.

4. Выводы

В настоящей работе можно сделать следующие выводы:

- 1) программа Simulink позволяет проводить имитационное моделирование осциллятора с соударениями, который описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка;
- 2) моделирование показывает, что на колебания, задаваемые внешней силой, накладываются затухающие колебания с большей частотой, которые соответствуют упругим соударениям осциллятора с поверхностью твердого тела;
- 3) программа Wavelet Toolbox позволяет проводить спектральный анализ численного решения урав-

нения колебаний осциллятора с соударениями и натурных экспериментальных результатов, полученных на измерительном стенде;

4) проведенные исследования показывают, что разработанная теоретическая модель хорошо описывает экспериментальные результаты.

Литература

- [1] Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990. 312 с.
- [2] Сборник трудов Всесоюзного симпозиума "Колебательные процессы в биологических и химических системах" / под ред. Г.М. Франка. М.: Наука, 1967. 439 с.
- [3] Паршаков А.Н. Физика колебаний: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. 302 с.
- [4] Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.
- [5] Bhushan B. Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology. Berlin: Springer, 2010. 956 p.
- [6] Дьяконов В.П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. М.: ДМК-Пресс, 2008. 784 с.
- [7] Нарожнов В.В. Нелинейная динамика и акустические сигналы при упругих соударениях зонда с поверхностью твердого тела // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21. № 6. С. 49–57.
- [8] Нарожнов В.В. Имитационное моделирование нелинейного осциллятора с учетом упругих соударений // Нелинейный мир. 2014. Т.12. № 11. С. 32–36.
- [9] Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т.166. № 11. С. 1145–1170. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199611a.1145>.
- [10] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 464 с.
- [11] Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002. 448 с.
- [12] Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 176 с.
- [13] Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // Physical Review E. 1993. Vol. 47, № 2. P. 875–884. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0068360>.
- [14] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way. MA: Academic Press, 2009. 805 p.
- [15] Ke L., Houjun W. A Novel Wavelet Transform Modulus Maxima Based Method of Measuring Lipschitz Exponent // International Conference on Communications, Circuits and Systems, Kokura. 2007. P. 628–632.
- [16] Стенд для исследования вязкоупругих свойств металлов и сплавов с помощью зондового акустического метода: пат. № 2552600 Рос. Федерация: G01N11/00 / Нарожнов В.В., Рехвиашвили С.Ш.; заявитель и патентообладатель Институт прикладной математики и автоматизации. № 2013124372/28; дата приоритета 27.05.2013; выдан 04.03.2015.
- [17] Лебедева Е.А., Постников Е.Б. Вейвлет Мейера улучшенной локализации // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 122–124.

References

- [1] Moon F. *Khaoticheskie kolebaniia: Vvodnyi kurs dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Chaotic oscillations: An introductory course for scientists and engineers]. M.: Mir, 1990, 312 p. [in Russian].
- [2] *Sbornik trudov Vsesoiuznogo simpoziuma "Kolebatel'nye protsessy v biologicheskikh i khimicheskikh sistemakh"* Pod red. G.M. Franka [Proceedings of the All-Union Symposium "Oscillatory processes in biological and chemical systems" / G.M. Frank (Ed.)]. M.: Nauka, 1967, 439 p. [in Russian].
- [3] Parshakov A.N. *Fizika kolebaniï: ucheb. posobie* [Physics of oscillations: study guide]. Perm: Izd-vo Perm. gos. tekhn. un-ta, 2010, 302 p. [in Russian].
- [4] Popov V.L. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeistviia i fizika treniia. Ot nanotribologii do dinamiki zemletriaseniï* [Mechanics of contact interaction and physics of friction. From nanotribology to the dynamics of earthquakes]. M.: FIZMATLIT, 2013, 352 p. [in Russian].
- [5] Bhushan B. Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology. Berlin: Springer, 2010, 956 p. [in English].
- [6] Dyakonov V.P. *Simulink 5/6/7: Samouchitel'* [Simulink 5/6/7: self-teaching guide]. M.: DМК-Press, 2008, 784 p. [in Russian].

- [7] Narozhnov V.V. *Nelineinaia dinamika i akusticheskie signaly pri uprugikh soudareniiakh zonda s poverkhnost'iu tverdogo tela* [Nonlinear dynamics and acoustic signals in elastic collisions of a probe with a solid surface]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaia nelineinaia dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2013, Vol. 21, no 6, pp. 49–57 [in Russian].
- [8] Narozhnov V.V. *Imitatsionnoe modelirovanie nelineinogo ostsiillatora s uchetom uprugikh soudarenii* [Simulation modeling of a nonlinear oscillator considering elastic collisions]. *Nelineinyi mir* [Nonlinear World], 2014, Vol. 12, no. 11, pp. 32–36 [in Russian].
- [9] Astafieva N.M. *Veivlet-analiz: osnovy teorii i primery primeneniia* [Wavelet analysis: the foundations of the theory and examples of applications]. *UFN* [Uspekhi Fizicheskikh Nauk (Advances in Physical Sciences)], 1996, Vol. 166, no. 11, pp. 1145–1170 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199611a.1145>.
- [10] Dobesi I. *Desiat' lektsii po veivletam* [Ten lectures on wavelets]. Izhevsk: NITs "Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika", 2001, 464 p. [in Russian].
- [11] Dyakonov V.P. *Veivlety. Ot teorii k praktike* [Wavelets. From theory to practice]. M.: SOLON-R, 2002, 448 p. [in Russian].
- [12] Koronovsky A.A., Hramov A.E. *Nepreryvnyi veivletnyi analiz i ego prilozheniia* [Continuous wavelet analysis and its applications]. M.: FIZMATLIT, 2003, 176 p. [in Russian].
- [13] Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Physical Review E.*, 1993, Vol. 47, no. 2, pp. 875–884 [in English]. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0068360>.
- [14] Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way*. MA: Academic Press, 2009, 805 p. [in English].
- [15] Ke L., Houjun W. A Novel Wavelet Transform Modulus Maxima Based Method of Measuring Lipschitz Exponent. *International Conference on Communications, Circuits and Systems, Kokura*, 2007, pp. 628–632 [in English].
- [16] Narozhnov V.V., Rekhviashvili S.Sh. Stand for the study of viscoelastic properties of metals and alloys using the probe acoustic method: patent 2552600 Russian Federation: G01N11/00. ; Applicant and patent owner Institute of Applied Mathematics and Automation. №2013124372/28; Priority date: May 27, 2013; issued on 03/04/2015 [in Russian].
- [17] Lebedeva E.A., Postnikov E.B. *Veivlet Meiera uluchshennoi lokalizatsii* [Meyer's wavelet of improved localization]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniie* [Numerical Methods and Programming], 2006, Vol. 7, pp. 122–124 [in Russian].

V. V. Narozhnov²

MODELING OF A NONLINEAR OSCILLATOR WITH COLLISIONS

In present work the equation of the oscillator with collisions, which is described under the Hertz contact theory is solved numerically. The computational experiment showed that on the overall oscillations, excited by an external force, are imposed the damped oscillations at a higher frequency, which correspond to elastic collisions of the oscillator. Wavelet transform of the numerical solution of oscillator equation and the experimental results obtained with the measuring stand was performed. Wavelet analysis of complex acoustic signals allows to detect small-scale features that are important for the interpretation of the experiment.

Key words: mathematical modeling, nonlinear oscillator, numerical solution of differential equations, wavelet analysis.

Статья поступила в редакцию 21/II/2018.

The article received 21/II/2018.

²Narozhnov Viktor Valerievich (narozhnov.victor@gmail.com), Laboratory of the Automation of Measurements, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

З.А. Гусейнова, М.К. Курамагомедов¹**ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕНЧИВОСТИ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ *Satureja hortensis* L. В ПРИРОДНЫХ ПОПУЛЯЦИЯХ ДАГЕСТАНА**

Изучены структура изменчивости и внутривидовая дифференциация *Satureja hortensis* L. (*Lamiaceae*) на основе комплекса морфологических признаков вдоль высотного градиента. Биоморфологические особенности изучались в четырех географически отдаленных пунктах. Объем каждой выборки — 30 растений. Учтены размерные и количественные признаки. Определены сухая масса растений, облиственность и репродуктивное усилие. Отмечено уменьшение размерных и количественных признаков *Satureja hortensis* с набором высоты над уровнем моря. В исследованных популяциях наблюдается высокая изменчивость числа боковых ветвей на растение ($CV=21,6-26,0\%$). С набором высоты увеличивается процент облиственности (28,5–35,2 %) и репродуктивное усилие (6,6–11,0 %). В результате проведенных исследований выявлено, что существенный вклад в изменчивость признаков *Satureja hortensis* вносит комплекс абиотических и биотических факторов, обусловленных высотным градиентом. Коэффициент корреляции отображает отрицательную связь всех учтенных признаков с высотным градиентом, за исключением массы соцветий. В изученных популяциях наблюдается высокая степень изменчивости по весовым признакам отдельных фракций и побега в целом.

Ключевые слова: *Satureja hortensis*, популяции, морфологические признаки, изменчивость, высотный градиент, Дагестан.

Введение

По данным *The Plant List* [1] род чабер (*Satureja* L.) семейства *Lamiaceae* насчитывает 60 видов. Это в основном однолетники, кустарники или полукустарнички. Во Флоре СССР [2] в обработке А.Г. Борисовой для рода чабер упоминается 30 видов. Для Кавказа 9 видов приводят и Борисова А.Г. и Гроссгейм А.А. [3]. В Дагестане по данным разных авторов встречается от 2 до 4 видов *Satureja* [2–5].

Satureja hortensis L. (чабер садовый) — однолетнее эфиромасличное растение. Произрастает в Южной и Юго-Восточной (Крым) Европе, Юго-Западной и Средней Азии. Чабер садовый повсеместно встречается на Кавказе, в том числе и в Дагестане, в среднем горном поясе. Культивируется во многих странах в качестве пряной приправы, а также как профилактическое средство применяется при различных заболеваниях [6–8].

Чабер садовый представляет несомненный интерес как пряно-ароматическое растение. Он характеризуется не только высоким содержанием эфирного масла, но и наличием таких ценных компонентов, как розмариновая кислота и флавоноиды [9–11].

Многочисленные исследования, как зарубежных, так и отечественных ученых посвящены изучению количественного и качественного состава эфирного масла ч. садового в культуре [12–16]. И лишь немногими авторами рассматриваются с этой точки зрения природные популяции ч. садового [17–18].

Выход эфирного масла из надземной части ч. садового по литературным данным составляет до 3,2 % [19–20]. Содержание эфирного масла в сырье зависит от многих факторов: вида, местопрорастания, фазы развития растений, в которой оно было собрано, соотношения листовой и стеблевой массы растения. С увеличением массы листьев и цветков в образцах увеличивается, как правило, выход эфирного масла, что обусловлено малым количеством эфиромасличных железок на стеблях [21–22].

¹© Гусейнова З.А., Курамагомедов М.К., 2018

Гусейнова Зиярат Агамировна (guseinovaz@mail.ru), Курамагомедов Магомед Курамагомедович (gorbotsad@mail.ru), Горный ботанический сад, Дагестанский научный центр РАН, 367001, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45.

В этом отношении актуально изучение морфологических признаков, что возможно позволит прогнозировать выход эфирного масла.

Нами изучена структура изменчивости и внутривидовой дифференциации *S. hortensis* на основе комплекса морфологических признаков растения вдоль высотного градиента, для оценки возможности интродукции и разработки рекомендаций по его культивированию в Дагестане в качестве перспективного эфиромасличного растения.

Материал и методика

Чабер садовый — растение, ветвистое от основания, высотой 15–30 (45) см. Стебли прижато волосистые. Корень тонкий, прямой, 10–15 см длины. Листочки линейные, острые 1,5–2,5 см длины. Цветки по 3–5 в пазушных ложных мутовках, верхние сидячие, нижние на коротких цветоножках. Цветоносы 0,3–0,6 мм длиной. Чашечка около 4 мм длиной с линейными зубцами, почти правильная, с прямой и ровной трубкой. Венчик около 6 мм длиной, снаружи коротко волосистый, светло-лиловый или розоватый; тычинки обычно короче верхней губы. Орешки яйцевидно-трехгранные, почти голые. Цветет и плодоносит с июля по октябрь [2]. В Дагестане произрастает на сухих щебнистых и каменистых склонах, по усохшим руслам рек, у дорог и в садах [5].

Материал для исследований был собран в августе 2016 года в четырех географически изолированных пунктах на разных высотных уровнях:

1. Унцукульский р-он, окр. с. Ирганай (620 м.).
2. Ботлихский р-он, долина р. Андийское Койсу (830 м.).
3. Гунибский р-он, окр. с. Кегер (985 м.).
4. Рутульский р-он, окр. с. Хиях (1800 м.).

Местообитания *S. hortensis* в этих пунктах представляли собой осыпные склоны и обочины дорог с разреженной, или почти отсутствующей растительностью.

В каждой популяции на фазе цветения было взято по 30 растений. После учета некоторых размерных и количественных признаков (длина побега и толщину его в нижней части, количество междоузлий и боковых ветвей) растения фракционировались на структурные части: стебель, листья, соцветия и просушивались до воздушно-сухой массы. Определяли массу растения по фракциям, облиственность — доля листовой массы от общей [23] и репродуктивное усилие (Re — доля массы соцветий от общей массы) [24].

Статистическая обработка полученных данных проводилась с использованием программы Statistica 5.5. Уровни варьирования приняты по Зайцеву [25]: $CV < 10\%$ — низкий, $CV = 10–20\%$ — средний, $CV > 20\%$ — высокий. Сила корреляции оценена в величинах: 0,7 (сильная), 0,3–0,7 (средняя), меньше 0,3 (слабая) [26].

Результаты и их обсуждение

Как видно по данным таблицы 1 средние значения размерных и количественных признаков у ч. садового уменьшаются с набором высоты над уровнем моря. Длина побега в объединенной выборке варьирует в пределах 10,7–50,0 см, изменчивость этого признака в трех популяциях находится на среднем уровне ($CV = 13,8–17,1\%$), в одной (Хияхской) высокая (23,8%). Толщина стебля варьирует в пределах 1,1–3,6 мм, в трех популяциях степень изменчивости признака высокая (21,0–30,5%), в одной (Ботлихской) средняя (18,4%). Размах же варьирования размерных признаков *S. hortensis* по популяциям увеличивается с набором высоты над уровнем моря (длины побега с 1,8 до 3,1 раза, толщины стебля — с 1,9 до 2,5 раза). С набором высоты уменьшается число междоузлий на растение (от $16,5 \pm 0,37$ до $9,5 \pm 0,21$), соответственно, уменьшается число боковых ветвей (от $15,0 \pm 0,62$ до $8,4 \pm 0,40$), в том числе и генеративных (от $12,7 \pm 0,65$ до $7,4 \pm 0,39$). Число вегетативных боковых ветвей не только уменьшается, в двух высокопроизрастающих популяциях вегетативные боковые ветви встречаются только у 60% растений из выборки, изменчивость по этому признаку очень высокая. В Хияхской популяции (1800 м) среднее число междоузлий самое низкое — $9,5 \pm 0,21$ ($CV = 12,3\%$), что связано, по всей видимости, с низкорослостью растений на этой высоте. В этой популяции размах варьирования признака 9–13, но 83,3% выборки имеют 9–10 междоузлий. В трех других популяциях размах варьирования больше (число встречаемости распределено по 8–9 классам). Коэффициент вариации признака во всех исследованных популяциях находится на среднем уровне изменчивости ($CV = 12,2–18,3\%$).

В исследованных популяциях достаточно высокая степень изменчивости установлена и для весовых признаков, как по фракциям, так и по побегу в целом. Если рассматривать фракции относительно друг друга в каждой популяции, вырисовывается такая последовательность: степень изменчивости листовой массы выше стеблевой, массы соцветий выше листовой, во всех исследованных популяциях. С набором высоты над уровнем моря изменчивость возрастает и по фракциям и по побегу в целом.

Средние данные массы листьев по популяциям колеблются в пределах 251,3–604,2 мг, соцветий — 73,7–88,4 мг, стеблей — 384,2–1461,4 мг и побега в целом — 713,5–2024,9 мг. Масса одного растения, по нашим данным, доходит в единичных случаях до 4,2 г. А в культуре сырьевая продуктивность ч. садового намного выше. По данным исследований в Ленинградской области сухая масса одного растения сорта "Бриз" составляла 8,0–8,5 г [7].

Выявленные закономерности изменчивости морфологических признаков ч. садового, в целом, подтверждают тенденцию уменьшения роста растений с набором высоты над уровнем моря, что связано с более суровыми условиями местообитаний (понижение температуры, сильные ветры, значительно укороченный вегетационный сезон и др.). Наблюдаемые небольшие отклонения по степени изменчивости признаков в популяциях от общей закономерности, по всей видимости, обусловлены различиями климатических условий (посезонное количество осадков, суммарные температуры и др.) по пунктам сбора материала.

С набором высоты увеличиваются, как процент облиственности (28,5–35,2 %), так и репродуктивное усилие (6,6–11,0 %) за счет значительного уменьшения стеблевой массы (почти в 4 раза) (табл. 2).

Таблица 2

Облиственность и репродуктивное усилие побегов *Satureja hortensis*

Географический пункт, высота над ур. моря	Облиственность, %	Репродуктивное усилие, %
Унцукульский, 620 м	28,5	6,6
Ботлихский, 830 м	32,5	4,9
Гунибский, 985 м	24,0	3,6
Рутульский, 1800 м	35,2	11,0

Корреляционный анализ, проведенный по морфологическим признакам *S. hortensis*, показал наличие, значимой на уровне $P \leq 0,05$, положительной корреляционной связи по большинству пар учтенных признаков (табл. 3). Число боковых вегетативных ветвей находится в слабой корреляционной связи со всеми весовыми признаками, а с массой соцветий — в слабой отрицательной.

Таблица 3

Корреляционные связи между признаками *Satureja hortensis* в объединенной выборке

Признаки	Длина побега	Толщ. стебл.	Число бок. ветветв	Число бок. генветв	Число бок. ветв.	Число междуузлий	Масса листьев	Масса соцветий	Масса стеблей
Толщина стебля	0,58*								
Число бок. ветветв	0,28*	-0,01							
Число бок. генветв	0,42*	0,55*	-0,08						
Число бок. ветвей	0,51*	0,52*	0,33*	0,91*					
Число междуузлий	0,78*	0,42*	0,27*	0,59*	0,66*				
Масса листьев	0,50*	0,76*	0,07	0,55*	0,55*	0,39*			
Масса соцветий	0,31*	0,55*	-0,10	0,38*	0,32*	0,26*	0,35*		
Масса стеблей	0,74*	0,84*	0,09	0,58*	0,59*	0,58*	0,76*	0,49*	
Масса побега	0,71*	0,87*	0,08	0,60*	0,60*	0,56*	0,85*	0,53*	0,99*

Однофакторный дисперсионный анализ выявил степень влияния высотного уровня на изменчивость морфологических признаков (табл. 4). Результаты свидетельствуют о вкладе межгрупповых компонент дисперсии в общую вариабельность признаков: h^2 — для однофакторной модели и r^2 — для модели с учетом линейной регрессии [27].

Вклад высотного градиента в изменчивость признаков *S. hortensis* неоднозначен. Незначительная разница между h^2 и r^2 отмечена только по числу междоузлий и числу боковых ветвей (общему и генеративных). Но эта разница невысока по большинству изученных признаков, что подтверждает влияние комплекса абиотических и биотических факторов, обусловленных высотным градиентом на их изменчивость.

Коэффициент корреляции r_{xy} в целом, отображает значимую на уровне $P \leq 0,001$ отрицательную корреляционную связь всех учтенных признаков с высотным градиентом, за исключением массы соцветий.

Таблица 4

Итоговые результаты дисперсионного и регрессионного анализов признаков *Satureja hortensis*

Признаки	h^2	r^2	r_{xy}
Длина побега, см	64,14***	28,0***	-0,53***
Толщина стебля, мм	24,44***	7,5**	-0,27**
Число боковых вегет. ветвей, шт.	21,59***	8,3**	-0,29**
Число боковых генер. ветвей, шт.	36,21***	32,7***	-0,57***
Число боковых ветвей, шт.	43,60***	43,4***	-0,66***
Число междоузлий на побег, шт.	64,50***	54,8***	-0,74***
Масса листьев, мг	34,74***	15,5***	-0,39***
Масса соцветий, мг	1,49	0,5	-0,07
Масса стеблей, мг	32,19***	14,5***	-0,38***
Масса побега, мг	31,64***	15,3***	-0,39***

Примечание: h^2 — сила влияния фактора, r^2 — коэффициент детерминации, r_{xy} — коэффициент корреляции между высотным уровнем и изучаемым признаком;

* — достоверность на уровне $P \leq 0,05$; ** — на уровне $P \leq 0,01$; *** — на уровне $P \leq 0,001$.

Таким образом, изменчивость признаков *Satureja hortensis*, выявленная в результате проведенных исследований, отражает адаптивные возможности вида в меняющихся условиях. С набором высоты над уровнем моря уменьшаются размерные признаки, соответственно, и масса растений *S. hortensis*. Максимальная сырьевая продуктивность отмечена в Кегерской популяции (что связано, как было выше сказано, с климатическими условиями местности). В Хияхской популяции она почти в 3 раза меньше. При этом процент облиственности и репродуктивное усилие с набором высоты увеличиваются, вероятно, за счет значительного уменьшения стеблевой массы.

Выводы

Существенный вклад в изменчивость признаков вносит комплекс абиотических и биотических факторов, обусловленных высотным градиентом. Коэффициент корреляции в целом отображает отрицательную связь всех учтенных признаков с высотным градиентом, за исключением массы соцветий. Большая часть учтенных признаков находится в положительной корреляционной связи между собой. Высокая степень изменчивости у изученных популяций наблюдается по весовым признакам, как фракций, так и побега в целом.

Литература

- [1] The Plant List. Version 1.1. 2013. <http://www.theplantlist.org>.
- [2] Флора СССР. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 21. 704 с.
- [3] Гроссгейм А.А. Флора Кавказа. Л.: Наука, 1967. Т. VII. 894 с.
- [4] Галушко А.И. Флора Северного Кавказа. Определитель. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1980. Т. 3. 328 с.
- [5] Муртазалиев Р.А. Конспект флоры Дагестана. Махачкала: Изд. дом "Эпоха", 2009. Т. 3. 304 с.
- [6] Растительные ресурсы СССР. Цветковые растения, их химический состав, использование. Сем. *Hippuridaceae* — *Lobeliaceae*. Санкт-Петербург: Наука, 1991. 198 с.

- [7] Полная энциклопедия лекарственных растений. Санкт-Петербург: Издат. дом "Нева", М.: Олма-Пресс, 1999. Т. 2. 815 с.
- [8] Танская Ю.В. Фармакогностическое изучение чабера садового (*Satureja hortensis* L.), интродуцированного в ставропольском крае. автореф. дис. ... канд. фарм. наук. Пятигорск, 2009. 22 с.
- [9] Ghannadi A. Composition of the essential oil of *Satureja hortensis* L. seeds from Iran // Journal of Essential Oil Research. 2002. 14. P. 35–36.
- [10] Antimicrobial activity of some *Satureja* essential oils / D. Azaz [et al.] // Zeitschrift für Naturforschung. Section C — Biosciences. 2002. 57. P. 817–821.
- [11] Evaluation of antimicrobial activities of *Satureja hortensis* L. / F. Sahin [et al.] // Journal of Ethnopharmacology. 2003. 87. P. 61–65. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-8741\(03\)00110-7](https://doi.org/10.1016/S0378-8741(03)00110-7).
- [12] Танская Ю.В., Попова О.И. Определение эфирного масла в образцах чабера садового (*Satureja hortensis* L., сем. *Lamiaceae*) // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Серия: Химия. Биология. Фармация. 2006. № 2. С. 371–372.
- [13] Танская Ю.В., Попова О.И., Куянцева А.М. Исследование элементного состава травы чабера садового // Фармация и общественное здоровье: материалы конф. Екатеринбург, 2008. С. 299–300.
- [14] Chemical composition and antimicrobial activity of *Satureja hortensis* L. essential oil / T. Mihajilov-Krstev [et al.] // Cent. Eur. J. Biol. 2009. No 4. P. 411–416. DOI: <https://doi.org/10.2478/s11535-009-0027-z>.
- [15] Найда Н.М. Изучение чабера садового (*Satureja hortensis* L.) в Ленинградской области // Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета. 2016. № 42. С. 11–15.
- [16] Солопов С.Г., Сундуков А.Н., Маланкина Е.Л. Особенности накопления эфирного масла в надземной части чабера садового (*Satureja hortensis* L.) // Молодые ученые и фармация XXI века: сборник науч. тр. IV науч.-практ. конф. Москва, 2016. С. 126–127.
- [17] Химический состав и фармакологическая активность листьев чабера садового (*Satureja hortensis* L.), произрастающего в Грузии / Э.П. Кемертелидзе [и др.] // Химико-фармацевтический журнал. 2004. Т. 38. № 6. С. 33–35. DOI: <https://doi.org/10.30906/0023-1134-2004-38-6-33-35>.
- [18] A comparative study of the essential oils of wild and cultivated *Satureja hortensis* L. / K.H.C. Başer [et al.] // J. Essent. Oil Res. Sep. 2004. No 16. P. 422–424.
- [19] Горяев М.И. Эфирные масла флоры СССР. Алма-Ата: Изд-во АН КазССР, 1952. 380 с.
- [20] Дикорастущие полезные растения. Санкт-Петербург: Изд-во СПХФА, 2001. 663 с.
- [21] Попов А.И., Дементьев Ю.Н., Попков Е.А. Эфирное масло чабера садового (*Satureja hortensis* L.), выращенного в условиях Кузбасса // Тенденция сельскохозяйственного производства в современной России: материалы XII Междунар науч.-практ. конф. Кемерово, 2013. Электронный ресурс.
- [22] Стоянова А., Георгиева А., Георгиев Е. Содержание эфирного масла в сырье чабера горного и тимьяна ползучего // Известия ВУЗов. Пищевая технология. 2000. № 5–6. С. 15–16.
- [23] Методические указания по изучению коллекций многолетних кормовых трав. Л.: ВИР, 1975. 19 с.
- [24] Злобин Ю.А. Анализ роста растений. Агрономический аспект // Ж. с/х биология. 1982. № 3. С. 36–41.
- [25] Зайцев Г.М. Математическая статистика в экспериментальной ботанике. М.: Наука, 1984. 424 с.
- [26] Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. М.: Колос, 1973. 336 с.
- [27] Аффифи А., Эйзен С. Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. М.: Мир, 1982. 488 с.

References

- [1] The Plant List (2013) Version 1.1. Available at: <http://www.theplantlist.org> [in English]
- [2] *Flora SSSR* [Flora of the USSR]. М.-Л.: Изд-во АН СSSR, 1954, Vol. 21, 704 p. [in Russian].
- [3] Grossgeym A.A. *Flora Kavkaza* [Flora of the Caucasus]. Л.: Наука, 1967, Vol. VII, 894 p. [in Russian].
- [4] Galushko A.I. *Flora Severnogo Kavkaza. Opredelitel'* [Flora of the North Caucasus. Determinant]. Rostov-na-Donu: Izd. RGU, 1980, Vol. 3, 328 p. [in Russian].
- [5] Murtazaliev R.A. *Konspekt flory Dagestana* [Abstract of the flora of Dagestan]. Makhachkala: Izd. dom "Epokha", 2009, Vol. 3, 304 p. [in Russian].
- [6] *Rastitel'nye resursy SSSR. Tsvetkovye rasteniia, ikh khimicheskii sostav, ispol'zovanie. Sem. Hippuridaceae — Lobeliaceae* [Plant resources of the USSR. Flowering plants, their chemical composition, use. Fam. Hippuridaceae — Lobeliaceae]. Saint-Petersburg: Nauka, 1991, 198 p. [in Russian].
- [7] *Polnaia entsiklopediia lekarstvennykh rastenii* [Complete encyclopedia of medicinal plants]. Saint-Petersburg: Izdat. dom "Neva"; М.: Олма-Пресс, 1999, Vol. 2, 815 p. [in Russian].

- [8] Tanskaya Yu.V. *Farmakognosticheskoe izuchenie chabera sadovogo (Satureja hortensis L.), introdutsirovannogo v stavropol'skom krae. avtoref. dis. ... kand. farm. nauk* [Pharmacognostic study of the *Satureja hortensis* L., introduced in the Stavropol Region. Author's abstract of Candidate's of Pharmaceutical Sciences thesis]. Pyatigorsk, 2009, 22 p. [in Russian].
- [9] Ghannadi A. Composition of the essential oil of *Satureja hortensis* L. seeds from Iran. *Journal of Essential Oil Research*, 2002, 14, pp. 35–36 [in English].
- [10] D. Azaz [et al.] Antimicrobial activity of some *Satureja* essential oils. *Zeitschrift für Naturforschung. Section C – Biosciences*, 2002, 57, pp. 817–821 [in English].
- [11] F. Sahin [et al.] Evaluation of antimicrobial activities of *Satureja hortensis* L. *Journal of Ethnopharmacology*, 2003, 87, pp. 61–65 [in English]. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-8741\(03\)00110-7](https://doi.org/10.1016/S0378-8741(03)00110-7).
- [12] Tanskaya Yu.V., Popova O.I. *Opreделение эфирного масла в образцах chabera sadovogo (Satureja hortensis L., sem. Lamiaceae)* [Determination of essential oil in the samples of the *Satureja hortensis* L. (*Lamiaceae*)]. *Vestnik Voronezh. gos. un-ta. Seriya: Khimiia. Biologiia. Farmatsiia* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Chemistry. Biology. Pharmacy], 2006, no. 2, pp. 371–372 [in Russian].
- [13] Tanskaya Yu.V., Popova O.I., Kuyantseva A.M. *Issledovanie elementnogo sostava travy chabera sadovogo* [Investigation of the elemental composition of the grass *Satureja hortensis* L.]. In: *Farmatsiia i obshchestvennoe zdorov'e: materialy konf.* [Pharmacia and public health: materials of conference]. Ekaterinburg, 2008, pp. 299–300 [in Russian].
- [14] T. Mihajilov-Krstev [et al.] Chemical composition and antimicrobial activity of *Satureja hortensis* L. essential oil. *Cent. Eur. J. Biol.*, 2009, no. 4, pp. 411–416 [in English]. DOI: <https://doi.org/10.2478/s11535-009-0027-z>.
- [15] Naida N.M. *Izuchenie chabera sadovogo (Satureja hortensis L.) v Leningradskoi oblasti* [The study of *Satureja hortensis* L. in the Leningrad Region]. *Izvestiia Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta* [Izvestiya of Saint Petersburg State Agrarian University], 2016, no. 42, pp. 11–15 [in Russian].
- [16] Solopov S.G., Sundukov A.N., Malankina E.L. *Osobennosti nakopleniia efirnogo masla v nadzemnoi chasti chabera sadovogo (Satureja hortensis L.)* [Features of the accumulation of essential oil in the aerial part of the *Satureja hortensis* L.]. In: *Molodye uchenye i farmatsiia XXI veka: sbornik nauch. tr. IV nauch.-prakt. konf.* [Young scientists and pharmacy of the XXI century: collection of research works of IV scientific-practical conference]. M., 2016, pp. 126–127 [in Russian].
- [17] Kemertelidze E.P., Sagareishvili T.G., Syrov V.N., Khushbaktova Z.A. *Khimicheskii sostav i farmakologicheskaiia aktivnost' list'ev chabera sadovogo (Satureja hortensis L.), proizrastaiushchego v Gruzii* [Chemical composition and pharmacological activity of the leaves of the *Satureja hortensis* L., which grows in Georgia]. *Khimiko-farmatsevticheskii zhurnal* [Pharmaceutical Chemistry Journal], 2004, Vol. 38, no. 6, pp. 33–35 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.30906/0023-1134-2004-38-6-33-35>.
- [18] K.H.C. Başer [et al.] A comparative study of the essential oils of wild and cultivated *Satureja hortensis* L. *J. Essent. Oil Res.*, Sep. 2004, no 16, pp. 422–424 [in English].
- [19] Gorjaev M.I. *Efirnye masla flory SSSR* [Essential oils of the flora of the USSR]. Alma-Ata: Izd-vo AN KazSSR, 1952, 380 p. [in Russian].
- [20] *Dikorastushchie poleznye rasteniia* [Wild useful plants]. Saint-Petersburg: Izd-vo SPKhFA, 2001, 663 p. [in Russian].
- [21] Popov A.I., Dementiev Yu.N., Popkov E.A. *Efirnoe maslo chabera sadovogo (Satureja hortensis L.), vyrashchennogo v usloviakh Kuzbassa* [Essential oil of the *Satureja hortensis* L., grown under the conditions of Kuzbass]. In: *Tendentsiia sel'skokhoziaistvennogo proizvodstva v sovremennoi Rossii: materialy XII Mezhdunar nauch.-prakt. konf.* [The trend of agricultural production in modern Russia: materials of the XII International research and practical conference]. Kemerovo, 2013. Electronic resource. [in Russian].
- [22] Stoyanova A., Georgieva A., Georgiev E. *Soderzhanie efirnogo masla v syr'e chabera gornogo i tim'iana polzuchego* [Contents of essential oil in the raw material of the *Satureja montana* L. and *Thymus serpyllum* L.]. *Izvestiia VUZov. Pishchevaia tekhnologiia* [News of Institutes of Higher Education. Food technology], 2000, no. 5–6, pp. 15–16 [in Russian].
- [23] *Metodicheskie ukazaniia po izucheniiu kollektssii mnogoletnikh kormovykh trav* [Methodical instructions for studying collections of perennial forage grasses]. L.: VIR, 1975, 19 p. [in Russian].
- [24] Zlobin Yu.A. *Analiz rosta rastenii. Agronomicheskii aspekt* [Analysis of plant growth. Agronomical aspect]. *Zh. s/kh biologiia* [Agricultural biology], 1982, no. 3, pp. 36–41 [in Russian].
- [25] Zaitsev G.M. *Matematicheskaiia statistika v eksperimental'noi botanike* [Mathematical statistics in experimental botany]. M.: Nauka, 1984, 424 p. [in Russian].
- [25] Dospekhov B.A. *Metodika polevogo opyta* [Methodology of field experience]. M.: Kolos, 1973, 336 p. [in Russian].
- [27] Afifi A., Eisen S. *Statisticheskii analiz. Podkhod s ispol'zovaniem EVM* [Statistical analysis. Approach using a computer]. M.: Mir, 1982, 488 p. [in Russian].

Z.A. Guseynova, M.K. Kuramagomedov²

PECULIARITIES OF VARIABILITY OF MORPHOLOGICAL FEATURES OF SATUREJA HORTENSIS L. IN NATURAL POPULATIONS OF DAGHESTAN

The structure of variability and intraspecific differentiation of *Satureja hortensis* L. (*Lamiaceae*) are studied on the basis of a complex of morphological features along a high-altitude gradient. Biomorphological peculiarities in four geographically remote locations are studied. The volume of each sample is 30 plants. The dimensional and quantitative features are taken into account. The dry mass of plants, foliage and reproductive effort are determined. A decrease in the dimensional and quantitative features of *Satureja hortensis* with a set of altitudes above sea level is noted. In the studied populations a high variability of the number of lateral branches per plant (CV = 21,6–26,0 %) is observed. With a set of heights, the percentage of foliage (28,5–35,2 %) and reproductive effort (6,6–11,0 %) is increase. As a result of the conducted studies, it was revealed that a significant contribution to variability of the *Satureja hortensis* features is made by a complex of abiotic and biotic factors caused by a high-altitude gradient. The correlation coefficient reflects the negative relationship of all the counted features with a high-altitude gradient, except on of the inflorescences mass. In the studied populations a high degree of variability on the weight characteristics of separate fractions and shoot as a whole is observed.

Key words: *Satureja hortensis*, populations, morphological features, variability, altitude gradient, Dagestan.

Статья поступила в редакцию 22/II/2018.
The article received 22/II/2018.

²Guseynova Ziyarat Agamirzoyevna (guseinovaz@mail.ru), Kuramagomedov Mahomed Kuramagomedovich (gorbotsad@mail.ru), Mountain Botanical Garden, Dagestan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 45, M. Gadzhieva Street, Makhachkala, 367001, Russian Federation.

М.О. Мамчурев¹

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

В работе получено два уравнения состояния вещества с использованием дробной производной Римана — Лиувилля. Оба уравнения являются малопараметрическими (без привлечения большого количества подгоночных параметров). В предложенном подходе основной задачей является определение параметров уравнения из экспериментальных данных фазовых диаграмм исследуемых веществ.

Ключевые слова: уравнения состояния вещества, дробная производная Римана — Лиувилля, фрактальная структура вещества.

Фрактальной структурой обладают многие твердые материалы. К ним относятся: полимеры, углеродные наноматериалы и наноккомпозиты, пористые вещества (кремний, металлы, горные породы и др). В настоящее время предложено значительное число классических и кванто-механических способов получения уравнений состояния сплошных сред (см. работы [1–4] и ссылки в них). Но для вывода уравнений состояния веществ, интерпретируемых как системы с фрактальной геометрией, требуется привлечение, наряду с методами статистической физики, новых математических методов и, в первую очередь, аппарата дробного исчисления [5–9]. Следует отметить, что для твердых тел с фрактальной структурой попытки установить уравнение состояния весьма немногочисленны [4–9]. Современные широкодиапазонные уравнения состояния могут содержать десятки свободных параметров и экспериментально найденных констант. В связи с этим, актуальной остается задача получения уравнения состояния вещества с малым числом параметров.

В работе [6, с. 229] с использованием дробного интегрирования получено уравнение состояния хладагента R134, содержащее всего лишь четыре параметра. В работе [7] предложен принципиально новый класс уравнений состояния вещества для тел, интерпретируемых как физические системы с фрактальной структурой (на примере хладагента R134). В работе [8] математический аппарат дробного интегрирования применен в термодинамике для расчета поверхностной энергии и адсорбции Гиббса. Уравнение состояния твердых тел, содержащее в явном виде фрактальную размерность, получено в работе [8] с применением теории Дебая. В работе [9] исследовано уравнение состояния для систем, обладающих дробно-степенным спектром. Получено соотношение между энергией, давлением и объемом для систем, обладающих дробно-степенным спектром. Рассмотрена дробно-дифференциальная модель электрон-фононного взаимодействия. В настоящей работе оператор дробного интегрирования в смысле Римана — Лиувилля применяется для построения уравнения состояния твердого тела с фрактальной структурой (массовый фрактал).

Согласно определению, давление через свободную энергию можно выразить следующей формулой

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_T, \quad (1)$$

где F — свободная энергия, V_0 — объем, занимаемый одной частицей, $x = V/V_0$ безразмерный объем. В работе [8] было предложено использовать закон композиции дробных производных [4] для введения термодинамической функции — поверхностной энергии. Используя аналогичный прием, для свободной энергии запишем F

$$\frac{dF(x)}{dx} = D_{1x}^\alpha D_{1x}^{1-\alpha} F(x), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

Здесь D_{1x}^α — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля порядка α [5, с. 28]. В работе [8] аналогичный прием применяется для удельной поверхностной энергии. Из (1) и (2) получим

¹© Мамчурев М.О., 2018

Мамчурев Мухтар Османович (mamchuevmo@yandex.ru), отдел теоретической и математической физики, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

$$p = \frac{1}{V_0} D_{1x}^\alpha f(x), f(x) = D_{1x}^{1-\alpha} F(x). \quad (3)$$

Далее предположим, что функция $f(x)$, имеет следующий вид:

$$f(x) = c \frac{(1-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} F(\alpha, 1, \alpha+1, 1-x), \quad (4)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция Гауса [5, с. 26], c — отличный от нуля параметр. Учитывая, что $f(1) = 0$, в силу равенств

$$D_{1x}^\alpha f(x) = \partial_{1x}^\alpha f(x) + \frac{f(1)}{\Gamma(1-\alpha)} (1-x)^{-\alpha},$$

$$D_{1x}^\alpha f(x) = \partial_{1x}^\alpha f(x) = D_{1x}^{\alpha-1} f'(x),$$

где ∂_{1x}^α — производная Капуто [5, с. 11], получим

$$p = -\frac{1}{V_0} D_{1x}^{\alpha-1} f'(x). \quad (5)$$

В силу равенства [5, с. 17]

$$\frac{d}{dz} [z^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, z)] = (\gamma-1) z^{\gamma-2} F(\alpha, \beta, \gamma-1, z), \quad (6)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\beta} \quad (7)$$

получим

$$f'(x) = -\frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} \alpha (1-x)^{\alpha-1} F(\alpha, 1, \alpha, 1-x) = -\frac{c}{\Gamma(\alpha)} (1-x)^{\alpha-1} x^{-1}.$$

Из (6) и (8) имеем

$$p = \frac{1}{V_0} \frac{c}{\Gamma(\alpha)} D_{1x}^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} x^{-1}. \quad (8)$$

Используя замену $t = 1 - (1-x)\xi$ вычислим интеграл

$$\begin{aligned} D_{1x}^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} x^{-1} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^1 (1-t)^{\alpha-1} (t-x)^{-\alpha} t^{-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \xi^{\alpha-1} (1-\xi)^{-\alpha} (1-(1-x)\xi)^{-1} d\xi = \\ &= \frac{B(\alpha, 1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} F(1, \alpha, 1, 1-x) = \Gamma(\alpha) x^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) получим уравнение

$$p = \frac{c}{V_0} x^{-\alpha}. \quad (10)$$

При $\alpha = 1$ дробная производная переходит в обычную производную первого порядка, а уравнение состояния (9) переходит в уравнение состояния идеального газа $pV = c$, где $c = RT$ — константа, которая характеризует тепловую энергию частиц. Таким образом, в настоящей работе получено уравнение состояния вещества с использованием дробной производной Римана — Лиувилля. Уравнение состояния является малопараметрическим, в него входит два параметра α и c , которые характеризуют соответственно фрактальную размерность объекта и тепловую энергию частиц (без привлечения большого количества подгоночных параметров). Уравнение предполагается использовать для прогнозирования термодинамических свойств веществ с фрактальной структурой.

Применяя подход описанный выше формулы (1)-(4) предположим, что функция $f(x)$ представима в виде ряда (разложение типа вириального):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (11)$$

где a_n — коэффициенты, значения которых получаются при обработке экспериментальных значений фазовых диаграмм методом наименьших квадратов.

Описание ударноволнового эксперимента и получение уравнения состояния вещества заключаются в задании "холодной кривой" аналитически с несколькими подгоночными параметрами. Для нахождения

соответствующих коэффициентов привлекаются экспериментальные данные сжимаемости и ряд других подгоночных параметров. В интерполяционных уравнениях состояния вещества верхний предел суммирования ∞ заменяется на натуральное число N (в работе [3, с. 40] $N = 7$). Поступая аналогично, и подставляя $f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ в (3), получаем уравнение состояния вещества

$$p = \frac{1}{V_0} \sum_{n=0}^N a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha} \quad (12)$$

и выражение для свободной энергии

$$F = \sum_{n=0}^N a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+2)} x^{n-\alpha+1}. \quad (13)$$

При $N = 1$ функция $f(x)$ линейно зависит от x , и формулы (12) и (13) примут следующий вид:

$$p = \frac{1}{V_0} \left[\frac{a_0}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} + \frac{a_1}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} \right], \quad (14)$$

$$F = \frac{a_0}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} + \frac{a_1}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha}.$$

При $\alpha = 1$ дробная производная переходит в обычную производную первого порядка, а уравнение состояния (12) переходит в уравнение состояния идеального газа $p = \frac{1}{V_0} a_1$.

Если под x понимать безразмерную плотность, т.е. $x = \frac{\rho}{\rho_0}$, то уравнение (12) запишется в следующем виде:

$$p = \frac{x^2 \rho_0}{M_A} \left[\frac{a_0}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} + \frac{a_1}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} \right], \quad (15)$$

где M_A – объем одного моля вещества, ρ_0 – начальная плотность.

Аналогичным способом можно получить формулу для изотермического модуля объемного сжатия:

$$K = \frac{x}{V_0} \sum_{n=0}^N a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

При $N = 1$ получим

$$K = \frac{x}{V_0} \left[\frac{a_0}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} + \frac{a_1}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} \right]. \quad (16)$$

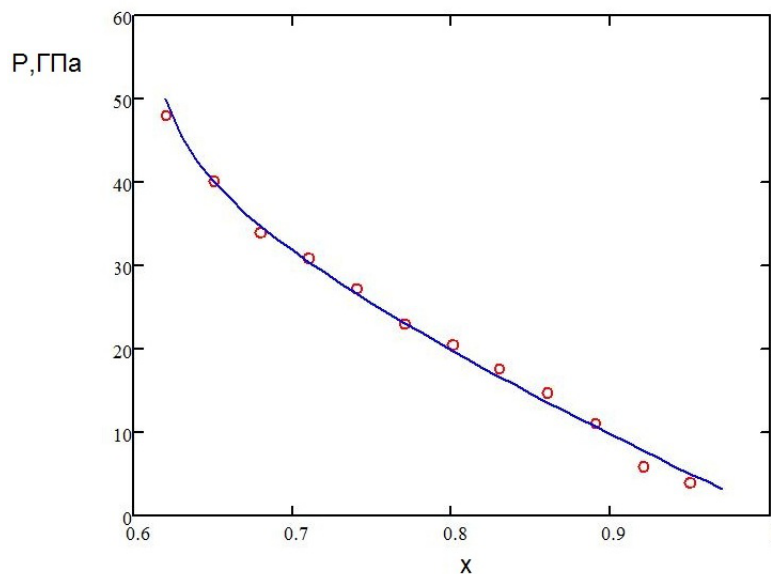


Рис. 1. Результаты расчета фазовой диаграммы железа (экспериментальные данные [2]). Кривая рассчитана по формуле (8), где x – безразмерный объем вещества

Таким образом, в настоящей работе получено два уравнения состояния вещества с использованием дробной производной Римана — Лиувилля. Оба уравнения являются малопараметрическими (без привлечения большого количества подгоночных параметров). В предложенном подходе основной задачей является определение параметров уравнения из экспериментальных данных фазовых диаграмм исследуемых веществ. Первое уравнение зависит от двух параметров α и c , которые характеризуют соответственно фрактальную размерность объекта и тепловую энергию частиц. Во второе уравнение состояния входят три параметра: α , a_0 , и a_1 . Для второго уравнения получено также выражение для свободной энергии и модуля всестороннего сжатия. Уравнение предполагается использовать для прогнозирования термодинамических свойств веществ с фрактальной структурой.

Литература

- [1] Фортов В.Е. Уравнения состояния вещества от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит, 2013. 493 с.
- [2] Жарков В.Н., Калинин В.А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. М.: Наука, 1968. 311 с.
- [3] Бушман А.В., Фортов В.Е. Модели уравнения состояния вещества // УФН. 1983. Т.140. № 2 С. 177–232. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0140.198306a.0177>.
- [4] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.
- [5] Нахушева В.А. Об одном классе уравнений состояния вещества // Докл. АМАН. 2005. Т. 7. № 2. С. 101–107.
- [6] Нахушев А.М. Об уравнениях состояниях непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик: Логос, 1995. 50 с.
- [7] Рехвиашвили С.Ш. Применение дробного интегродифференцирования для расчета термодинамических свойств поверхностей // ФТТ. 2007. № 4. С. 756–759.
- [8] Рехвиашвили С.Ш. Уравнения состояния твердого тела с фрактальной структурой // Письма в ЖТФ. 2010. № 17. С 42–47.
- [9] Алисултанов З.З., Мейланов Р.П. Теплофизические свойства квантово-статистических систем с дробно-степенным спектром // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2012, Т. 5. № 3(3), С 349–358.

References

- [1] Fortov V.E. *Uravneniia sostoianniia veshchestva ot ideal'nogo gaza do kvark-gliuonnoi plazmy* [Equations of state of matter from an ideal gas to a quark-gluon plasma]. M.: Fizmatlit, 2013, 493 p. [in Russian].
- [2] Zharkov V.N., Kalinin V.A. *Uravneniia sostoianniia tverdykh tel pri vysokikh davleniiakh i temperaturakh* [Equations of state of solids at high pressures and temperatures]. M.: Nauka, 1968, 311 p. [in Russian].
- [3] Bushman A.V., Fortov V.E. *Modeli uravneniia sostoianniia veshchestva* [Models of the equation of state of matter]. *UFN* [Uspekhi Fizicheskikh Nauk (Advances in Physical Sciences)], 1983, Vol.140, no. 2, pp. 177–232 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0140.198306a.0177>.
- [4] Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Application]. M.: Fizmatlit, 2003, 272 p. [in Russian].
- [5] Nakhusheva V.A. *Ob odnom klasse uravnenii sostoianniia veshchestva* [On a class of equations of state of matter]. *Dokl. AMAN* [Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 2005, Vol. 7, no. 2, pp. 101–107 [in Russian].
- [6] Nakhushev A.M. *Ob uravneniiakh sostoianniikh nepreryvnykh odnomernykh sistem i ikh prilozheniiakh* [On equations of states of continuous one-dimensional systems and their applications]. Nalchik: Logos, 1995, 50 p. [in Russian].
- [7] Rekhviashvili S.Sh. *Primenenie drobnogo integrodifferentsirovaniia dlia rascheta termodinamicheskikh svoistv poverkhnostei* [Application of fractional integro-differentiation for calculation of thermodynamic properties of surfaces]. *FTT* [Solid-State Physics], 2007, no. 4, pp. 756–759 [in Russian].
- [8] Rekhviashvili S.Sh. *Uravneniia sostoianniia tverdogo tela s fraktal'noi strukturoi* [Equations of state of a solid with a fractal structure]. *Pis'ma v ZhTF* [Technical Physical Letters], 2010, no. 17, pp. 42–47 [in Russian].
- [9] Alisultanov Z.Z., Meilanov R.P. *Teplofizicheskie svoistva kvantovo-statisticheskikh sistem s drobno-stepennym spektrom* [Thermophysical properties of quantum-statistical systems with fractional-power spectrum]. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2012, Vol. 5, no. 3, pp. 349–358 [in Russian].

EQUATIONS OF STATE OF A SOLID BODY WITH A REDUCED DERIVATIVE RIEMANN — LIOUVILLE

Two equations of state of a solid with the use of the fractional Riemann — Liouville derivative are obtained. Both equations are low-parametric (without involving a large number of adjustable parameters). In the proposed approach, the main task is to determine the parameters of the equation from the experimental data of the phase diagrams of the investigated substances.

Key words: equation of state of matter, fractional derivative of Riemann — Liouville, fractal structure of matter.

Статья поступила в редакцию 18/II/2018.
The article received 18/II/2018.

²*Mamchuev Mukhtar Osmanovich* (mamchuevmo@yadex.ru), Department of Theoretical and Mathematical Physics, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

А.А. Сокуров¹

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ И КРАЕВОГО УГЛА СМАЧИВАНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ КАПИЛЛЯРНОГО ПОДЪЕМА

В работе исследуется размерная зависимость поверхностного натяжения мениска жидкости в нанокапилляре. На основе аналога дифференциального уравнения Гиббса-Толмена-Кенига-Баффа показано, что при достаточно малых значениях радиуса капилляра для поверхностного натяжения имеет место асимптотическая формула Толмена. С учетом размерной зависимости поверхностного натяжения и контактного угла смачивания рассмотрен вопрос о капиллярном подъеме.

Ключевые слова: капилляр, капиллярный подъем, формула Жюрена, поверхностное натяжение, контактный угол смачивания, размерная зависимость, радиус кривизны, формула Лапласа.

Равновесные состояния очень малых объемов жидкости характеризуются зависимостью поверхностного натяжения от кривизны границы раздела фаз. В термодинамике для сферической капли эта зависимость находится из дифференциального уравнения Гиббса-Толмена-Кенига-Баффа [1]. Из решения этого уравнения, в частности, следует, что для поверхности сферической капли оно будет меньше, а для сферического пузырька – больше, по сравнению со случаем плоской поверхности. Физически это связано с тем, что энергия связи поверхностного атома на выпуклой поверхности однокомпонентной жидкости существенно меньше, чем на вогнутой поверхности. От геометрии поверхности раздела фаз зависит и контактный угол смачивания. Все сказанное будет справедливо также и для мениска жидкости в нанокапилляре. В связи с этим, представляет интерес исследование влияния размерной зависимости поверхностного натяжения и контактного угла смачивания на величину капиллярного подъема. Решению данной задачи посвящена настоящая статья.

Рассмотрим жидкость в узком капилляре (см. рис. 1), находящуюся в состоянии термодинамического равновесия. Будем предполагать, что мениск представляет собой сегмент сферы, площадь поверхности

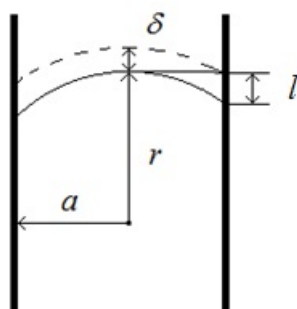


Рис. 1. Капилляр с жидкостью

и объем которого равны

$$S = 2\pi r l, \quad V = \frac{\pi l}{3} (a^2 + r l), \quad (1)$$

$$h = r - \sqrt{r^2 - a^2},$$

где a – радиус капилляра, r – радиус кривизны мениска, l – высота сегмента. Избыточное давление определяется из условия механического равновесия

$$\Delta P = \sigma f(r), \quad (2)$$

¹© Сокуров А.А., 2018

Сокуров Аслан Артурович (asokuroff@gmail.com), отдел теоретической и математической физики, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

где σ – поверхностное натяжение, $f(r) = S'(r)/V'(r)$ – функция, зависящая от геометрии разделяющей поверхности. Используя (1), можно показать, что в нашем случае для избыточного давления имеет место формула Лапласа

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r}. \quad (3)$$

В работе [2] был получен аналог дифференциального уравнения Гиббса-Толмена-Кенига-Баффа, выражающий размерную зависимость поверхностного натяжения для случая произвольных поверхностей. С учетом (1) и (3) данное уравнение принимает вид

$$\frac{d \ln \sigma}{d \ln r} = \frac{2g(r)}{r + 2g(r)}, \quad (4)$$

где функция $g(r)$ определяет гиббсовскую адсорбцию (см. [1]). Чтобы проинтегрировать уравнение (4), необходимо задать функцию $g(r)$. По определению имеем

$$g(r) = \frac{\Delta V(r)}{S(r)},$$

где $S(r)$ – площадь поверхности натяжения, $\Delta V(r)$ – объем межфазного слоя толщиной δ (длина Толмена). Исходя из геометрии, для функции $g(r)$ находим

$$g(r) = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}} \left[\delta \left(1 + \frac{\delta}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \right) + \frac{a^2 - (r + \delta)^2}{3r} \sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} - \frac{a^2 - r^2}{3r} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right]. \quad (5)$$

Уравнение (4) с учетом (5) не может быть проинтегрировано в квадратурах. В связи с этим, необходимо использовать вычислительные методы. При этом интегрирование удобно проводить по безразмерной переменной r/δ . В нашей модели выполняется условие $r \geq a$, поэтому интегрирование должно проводиться от a/δ до $+\infty$, что соответствует плоской поверхности.

На рис. 2 показан график размерной зависимости поверхностного натяжения, полученный путем численного интегрирования (4), (5). Из рисунка видно, что характер размерной зависимости поверхностного

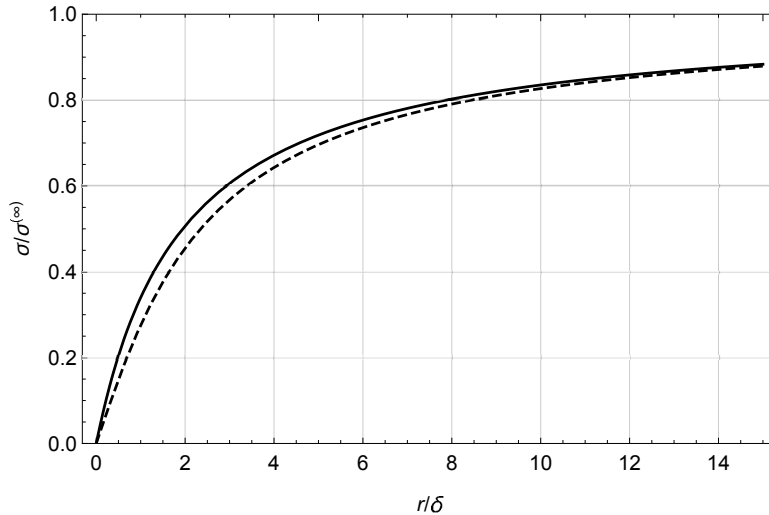


Рис. 2. Размерная зависимость поверхностного натяжения для мениска в капилляре и сферической капли: сплошная кривая – мениск в капилляре; пунктирная кривая – сферическая капля (точное решение уравнения Гиббса-Толмена-Кенига-Баффа [2])

натяжения мениска в капилляре в целом соответствует аналогичной зависимости для сферической капли. Численные расчеты показывают, что при $r/\delta > 10$ эти зависимости практически совпадают. Разлагая функцию $g(r)$ в ряд по степеням переменной $1/r$ с точностью до двух членов, получим

$$g(r) = \delta + O(1/r^3). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) и выполняя интегрирование, получаем известную формулу Толмена

$$\sigma(r) = \frac{\sigma^{(\infty)}}{1 + \frac{2\delta}{r}}, \quad (7)$$

где $\sigma^{(\infty)}$ – поверхностное натяжение плоской поверхности. Таким образом приходим к важному выводу, что формула Толмена, выведенная изначально для сферической капли [3], справедлива также и для мениска в узком капилляре. Примечательно также следующее. Детальные численные расчеты показывают, что формула (7) заметно точнее аппроксимирует размерную зависимость поверхностного натяжения для мениска в капилляре, чем соответствующую зависимость для малой капли.

Полученный результат будет справедлив и для случая вогнутой поверхности. Для вогнутого мениска радиус кривизны отрицательный и выражение (7) принимает следующий вид

$$\sigma(r) = \frac{\sigma^{(\infty)}}{1 - \frac{2\delta}{r}}. \quad (8)$$

Асимптотическая формула (8) справедлива, если выполняется условие $r > 2\delta$. Здесь необходимо заметить, что для парового пузырька в размерной зависимости поверхностного натяжения имеется сингулярность уже при $r \approx 0.588\delta$, которая следует из точного решения уравнения Гиббса-Толмена-Кенига-Баффа [4]. Эта сингулярность обусловлена наличием переходного межфазного слоя толщиной δ .

Рассмотрим теперь явление поднятия жидкости в цилиндрическом нанокapилляре, изготовленном из однородного материала. Капиллярное поднятие проявляется в случае смачивания жидкостью стенок капилляра. Вследствие смачивания в капилляре образуется вогнутый мениск, давление под которым будет меньше чем давление под остальной частью плоской поверхности. По причине образовавшегося перепада ΔP давлений жидкость и поднимается вверх по капилляру. Согласно законам гидростатики, жидкость будет подниматься вверх до тех пор, пока гидростатическое давление капиллярного столбика не уравновесит избыточное ΔP . В достаточно тонких капиллярах влияние силы тяжести на форму мениска мало. По этой причине можно сделать допущение, что мениск представляет из себя сегмент полусферы, подходящего к стенкам капилляра под контактным углом смачивания θ . Тогда, для определения высоты h капиллярного подъема можно воспользоваться формулой Жюрена [5]:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g}, \quad (9)$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Формула (9) содержит значения поверхностного натяжения σ , угла смачивания θ и справедлива только для очень тонких капилляров. А для очень тонких капилляров (радиусом порядка нескольких десятков нанометров) имеет место размерная зависимость поверхностного натяжения и угла смачивания. Поэтому возникает вопрос – какова будет высота \tilde{h} подъема жидкости в нанокapилляре, если принимать во внимание размерные эффекты σ и θ . Для σ уже имеется асимптотическая формула (8). Размерная зависимость краевого угла смачивания была рассмотрена в работе [6]. Обобщая полученные в ней результаты, можно записать, что

$$\cos \theta = \cos \theta^{(\infty)} \left(1 \pm \frac{2\delta}{r} \right), \quad (10)$$

где $\theta^{(\infty)}$ – краевой угол смачивания для массивного капилляра, знак плюс соответствует выпуклой поверхности, а минус – вогнутой. В итоге, исходя из (8), (10) и (9), приходим к заключению, что

$$h = \tilde{h}.$$

Таким образом, в рамках использованного в данной работе приближения в нанокapилляре размерный эффект поверхностного натяжения полностью компенсируется размерным эффектом краевого угла смачивания и формула (9) не нуждается в какой-либо поправке.

Литература

- [1] Оно С., Кондо С. Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. М.: ИЛ, 1963. 284 с.
- [2] Рехвиашвили С.Ш., Кишტიкова Е.В. О размерной зависимости поверхностного натяжения // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 1. С. 148–152.
- [3] Tolman R.C. The effect of droplet size on surface tension // J. Chem. Phys. 1949. Vol. 17. № 3. P. 333–337. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1747247>.
- [4] Рехвиашвили С.Ш., Кишტიкова Е.В. Влияние размерной зависимости поверхностного натяжения на динамику пузырька в жидкости // ЖЭТФ. 2014. Т. 145. Вып. 6. С. 1116–1120. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044451014060160>.
- [5] Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. 568 с.
- [6] Рехвиашвили С.Ш., Кишტიкова Е.В. Поверхностное натяжение, линейное натяжение и краевой угол смачивания малой капли в изотермических условиях // Физикохимия поверхности и защита материалов. 2014. Т. 50. № 1. С. 3–7. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044185614010112>.

References

- [1] Ono S., Kondo S. *Molekuliarnaia teoriia poverkhnostnogo natiazheniia v zhidkostiakh* [Molecular Theory of Surface Tension in Liquids]. M.: IL, 1963, 284 p. [in Russian].
- [2] Rekhviashvili S.Sh., Kishtikova E.V. *O razmernoï zavisimosti poverkhnostnogo natiazheniia* [On the size dependence of the surface tension]. *ZhTF* [Technical Physics], 2011, Vol. 81. Issue 1, pp. 148–152 [in Russian].
- [3] Tolman R.C. The effect of droplet size on surface tension. *J. Chem. Phys.*, 1949, Vol. 17, no. 3, pp. 333–337 [in English]. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1747247>.
- [4] Rekhviashvili S.Sh., Kishtikova E.V. *Vliianie razmernoï zavisimosti poverkhnostnogo natiazheniia na dinamiku puzyr'ka v zhidkosti* [Influence of the size dependence of surface tension on the dynamics of a bubble in a liquid]. *ZhETF* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2014, Vol. 145, Issue 6, pp. 1116–1120 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044451014060160>.
- [5] Adamson A. *Fizicheskaia khimiia poverkhnostei* [Physical Chemistry of Surfaces]. M.: Mir, 1979, 568 p. [in Russian].
- [6] Rekhviashvili S.Sh., Kishtikova E.V. *Poverkhnostnoe natiazhenie, lineinoe natiazhenie i kraevoi ugol smachivaniia maloi kapli v izotermicheskikh usloviakh* [Surface and linear tension and the contact angle of a small drop under isothermal conditions]. *Fizikokhimiia poverkhnosti i zashchita materialov* [Physicochemistry of the surface and protection of materials], 2014, Vol. 50, no. 1, pp. 3–7 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044185614010112>.

A.A. Sokurov²

CAPILLARY RISE WITH SIZE-DEPENDENT SURFACE TENSION AND CONTACT ANGLE

In this paper we consider the size dependent of surface tension in nanocapillary. Based on the analogue of the Gibbs-Tolman-Koenig-Buff differential equation it is shown that for sufficiently small values of the capillary radius the Tolman's equation for the surface tension holds. Taking into account the size dependent of the surface tension and the contact angle the problem of the capillary rise is discussed.

Key words: capillary, capillary rise, Jurin's law, surface tension, contact angle, size dependence, radius of curvature, Young–Laplace equation.

Статья поступила в редакцию 18/II/2018.
The article received 18/II/2018.

²Sokurov Aslan Arturovich (asokuroff@gmail.com), Department of Theoretical and Mathematical Physics, Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алдашев Серик Аймурзаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики Казахского национального педагогического университета им. Абая, академик АЕН РК. Тема докт. дис.: "Краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа" (защ. в 1990 г.). Автор и соавтор более 200 научных работ, в т. ч. монографий "Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений" (1994 г.), "Вырожденные многомерные гиперболические уравнения" (2007 г.).

Область научных интересов: краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.

Шукюров Айдын Шукюр оглы, д-р философии по математике, доцент, ведущий научный сотрудник отдела негармонического анализа Института математики и механики НАН Азербайджана.

Область научных интересов: базисы в банаховых и гильбертовых пространствах, фреймы, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Штурма — Лиувилля.

Яковлева Юлия Олеговна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка" (защ. в 2013 г.). Автор и соавтор 36 научных работ.

Область научных интересов: гиперболические дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений гиперболического типа, краевые задачи.

Нарожнов Виктор Валерьевич, младший научный сотрудник лаборатории Автоматизации измерений института прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино — Балкарский научный центр Российской академии наук" (сокращенно ИПМА КБНЦ РАН). Автор 14 научных работ.

Область научных интересов: численные методы, математическое и компьютерное моделирование, механика сплошных сред, автоматизация измерений.

Гусейнова Зиярат Агамирзиевна, канд. биол. наук, старший научный сотрудник Горного ботанического сада ДНЦ РАН. Тема канд. дис.: "Сравнительный анализ проявлений репродуктивных стратегий растений (на примере родовых комплексов *Medicago* L. и *Helianthemum* Mill.)" (защ. в 2011 г.). Автор 84 научных работ, в том числе соавтор монографии: "Проблема адаптивных стратегий растений" (2013 г.).

Область научных интересов: популяционная ботаника, экология и биология видов растений, интродукция растений, лекарственные растения.

Курамагомедов Магомед Курамагомедович, канд. биол. наук, старший научный сотрудник Горного ботанического сада ДНЦ РАН. Тема канд. дис.: "Физиологические особенности главного и боковых побегов ячменя Винер при нормальном и недостаточном увлажнении почвы" (защ. в 1975 г.). Автор 101 научной работы, в том числе 18 работ в журналах рецензируемых ВАК.

Область научных интересов: физиология растений, экология растений, интродукция растений.

Мамчурев Мухтар Османович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела Теоретической и математической физики ФГБНУ ИПМА КБНЦ РАН (Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук). Тема канд. дис.: "Фазовый переход "диэлектрик-металл" в щелочно-галлоидных кристаллах в условиях высоких давлений" (защ. в 2011 г.). Автор и соавтор 42 научных работ.

Область научных интересов: уравнение состояния вещества, фазовые переходы, фазовые диаграммы.

Сокуров Аслан Артурович, младший научный сотрудник отдела Теоретической и математической физики института прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино — Балкарский научный центр Российской академии наук" (сокращенно ИПМА КБНЦ РАН). Автор 21 научной работы.

Область научных интересов: поверхностные и межфазные явления, математическая физика, численные методы, математическое моделирование, компьютерное моделирование.

 INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aldashev Serik Aimurzaevich, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, prof., head of the Dept. of Fundamental and Applied Mathematics, Abay Kazakh National Pedagogical University, Academician of AEN RK. Subject of Doctoral thesis: "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type" (1990). Author and coauthor of 200 scientific works, including monographs "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type" (1994), "Degenerate multidimensional hyperbolic equations" (2007).

Research interests: boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type.

Shukurov Aydin Shukur, Ph.D. in mathematics; Associate Professor, Leading Research Fellow, Department of Non-harmonic Analysis, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan.

Research interests: basis in Banach and Hilbert spaces, frames, ordinary differential equations, Sturm – Liouville problems.

Yakovleva Julia Olegovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis "Boundary value problems of hyperbolic differential equations and systems of hyperbolic differential equations of the third and fourth order" (2013). Author and coauthor of 36 scientific works.

Research interests: hyperbolic differential equations, system of hyperbolic differential equations, boundary value problems.

Narozhnov Viktor Valerievich, junior researcher, laboratory of the Automation of Measurements, Institute of Applied Mathematics and Automation – Branch of the Federal State Budgetary Scientific Establishment "Federal Scientific Center "Kabardino – Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"(IAMA KBSC RAS). Author of 14 scientific works.

Research interests: numerical methods, mathematical and computer modeling, continuum mechanics, automation of measurements.

Guseynova Ziyarat Agamirzoyevna, Candidate of Biological Sciences, senior scientific researcher of the Mountain Botanical Garden, DSC RAS. Subject of Candidate's thesis: "Comparative analysis of manifestations of reproductive strategies of plants (on the example of generic complexes *Medicago* L. and *Helianthemum* Mill." (2011). Author and coauthor of 84 scientific works, including monographs "Problem of adaptive strategies of plants" (2013).

Research interests: population botany, ecology and biology of plants, introduction of plants, medical plants.

Kuramagomedov Mahomed Kuramagomedovich, Candidate of Biological Sciences, senior scientific researcher of the Mountain Botanical Garden, DSC RAS. Subject of Candidate's thesis: "Physiological characteristics of main and lateral shoots of barley Winer under normal and insufficient soil moisture" (1975). Author and coauthor of 101 scientific works.

Research interests: physiology of plants, plant ecology, introduction of plants.

Mamchuev Mukhtar Osmanovic, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, researcher at the Department of Theoretical and Mathematical Physics FGBNU IPMA KBNTS RAS (Federal State Institution of Science Research Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria, Russian Academy of Sciences Research Center). Topic of Cand. Dis.: "Phase transition "insulator-metal" in alkali halide crystals under high pressure" (2011). Author and co-author of 42 scientific works.

Research interests: equation of state of matter, phase transitions, phase diagrams.

Sokurov Aslan Arturovich, junior researcher, Department of Theoretical and Mathematical Physics, Institute of Applied Mathematics and Automation – Branch of the Federal State Budgetary Scientific Establishment "Federal Scientific Center "Kabardin – Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"(IAMA KBSC RAS). Author of 21 scientific works.

Research interests: surface and interfacial phenomena, mathematical physics, numerical analysis, mathematical modeling, computer simulation.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>.

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: psvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\LaTeX_2\epsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского университета (адрес указан выше). Использование других реализаций \TeX 'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами \LaTeX 'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("."), двойной дефис ("—")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

**Уважаемые авторы, просим предоставить сведения
для размещения в журнале
на странице "Сведения об авторах"**

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры, в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности ".....".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of, in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in ".....".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.