Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

(ВЕСТНИК САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА)

- *Математика*
- *Математические методы в естественных науках*

ТОМ 23 • № 3 • 2017 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНИТИ URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ
Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Свидетельство о регистрации средства массовой информации **ПИ № ФС 77-67328** от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге
АО Агентство «Роспечать» 80307
ISSN 2541-7525

Цена свободная

Подписано в печать 02.11.2017 г.
Формат $60 \times 84/8$.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Печ. л. 11
Typeset by $\LaTeX 2_\varepsilon$.
Тираж 50 экз. Заказ №

Издательство Самарского университета,
443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Отпечатано в типографии Самарского университета

DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES

(VESTNIK OF SAMARA STATE UNIVERSITY)

- *Mathematics*
- *Mathematical Methods in Natural Sciences*

VOL. 23 • № 3 • 2017

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation
The journal is piblished since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 — Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Adress of editorial stuff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Certificate of registration of means of mass media **ПИ № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

Price free

Passed for printing 02.11.2017.
Format $60 \times 84/8$.
Litho paper. Instant print.
Print. sheets 11.
Typeset by $\LaTeX 2_\varepsilon$.
Circulation 50 copies. Order №

Publishing house of Samara University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Printed in the printing house of Samara University

DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Математические методы в естественных науках

CONTENTS

Mathematics

Mathematical Methods in Natural Sciences

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-7-11

С.А. Алдашев[1]

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучена. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно изучены.

В работах автора найдены явные виды классических решений задач Дирихле в цилиндрических областях для многомерных эллиптических уравнений. В данной статье используется метод, предложенный в работах автора, показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений.

Ключевые слова: корректность, многомерные уравнения, вырождение, задача Дирихле, цилиндрическая область, сферические функции, ортогональность, функция Бесселя.

Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задача Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

В работе для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений доказано однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α , Ω_β представляющее множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся смешанно эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} g(t)\Delta_x u - u_t,\ t > 0, \\ p(t)\Delta_x u + u_{tt},\ t < 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$, и может обращаться в нули при $t = 0$, $g(t) \in C([0, \alpha])$, $p(t) > 0$ при $t < 0$, и может обращаться в нуль при $t = 0$, $p(t) \in C([\beta, 0])$, а Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Задача 1(Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap$ $\cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(t, \theta). \tag{3}$$

Алдашев Серик Аймурзаевич (aldash51@mail.ru), кафедра математики и математического моделирования, Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина 125.

при этом $\varphi_1(1,\theta)=\psi_1(\alpha,\theta),\varphi_2(1,\theta)=\psi_2(\beta,\theta),\psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,...$ - пространства Соболева.

Имеет место ([3])

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)|\leqslant c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leqslant c_2,\ \ c_1,\,c_2=const.$$

Через $\bar\varphi_{1n}^k(r)$, $\bar\varphi_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$.

Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l>\frac{3m}{2}$, то задача 1 однозначно разрешима.

Доказательства теоремы. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\right)-u_t=0, \tag{5}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $\quad n=0,1,...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных фукций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar u_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$g(t)\left(\bar u_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar u_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar u_n^k\right)-\bar u_{nt}^k=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...\,, \tag{7}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, соответственно запишется в виде

$$\bar u_n^k(r,\alpha)=\bar\varphi_{1n}^k(r),\quad \bar u_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,....\tag{8}$$

В (7), (8) произведя замену переменных $\bar\upsilon_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$ получим

$$g(t)\left(\bar\upsilon_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar\upsilon_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar\upsilon_n^k\right)-\bar\upsilon_{nt}^k=\overline{f}_n^k(r,t), \tag{9}$$

$$\bar\upsilon_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r),\quad \bar\upsilon_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,...\,, \tag{10}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t)=\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_{1n}^k(t),\ \varphi_{1n}^k(r)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar\upsilon_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (9), (10) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv g(t)\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=f_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\widetilde\varphi_{1n}^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{12}$$

$$\bar\lambda_n=\frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},\ f_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\overline{f}_n^k(r,t),\ \widetilde\varphi_{1n}^k(r)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k r, t + \upsilon_{2n}^k(r,t)$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha) = 0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{16}$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r),\ \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учетом (18), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu_{s,n} R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{19}$$

$$R_s(1) = 0,\ \left|R_s(0)\right| < \infty, \tag{20}$$

$$T_{st} + \mu_{s,n} g(t) T_s(t) = -a_{ns}^k(t),\ 0 < t < \alpha, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является ([4])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{23}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (21), (22)является

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\mu_{s,n}^2 \int_0^t g(\xi) d\xi))(\int_t^\alpha a_{ns}^k(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^\xi g(\xi_1) d\xi_1) d\xi). \tag{24}$$

Подставляя (23) в (18) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \tag{25}$$

Ряды (25) — разложения в ряды Фурье-Бесселя [5],если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{26}$$

$$b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{27}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, ...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (17), (23), (24) получим решение задачи (13), (14)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_s(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16), с учетом (18), будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 g(t) T_s = 0,\ 0 < t < \alpha,\ T_s(\alpha) = b_{ns}^k,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{ns} \exp(-\mu_{s,n}^2 \int_t^\alpha g(\xi) d\xi). \tag{29}$$

Из (23), (29) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k \sqrt{r} (\exp \mu_{s,n}^2 \int_t^\alpha g(\xi) d\xi) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{30}$$

где b_{ns}^k находится из (27).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{31}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (28) и (30).

Учитывая формулу ([5]) $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки ([6, 3])

$$J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}\right) + 0\left(\tfrac{1}{z^{3/2}}\right), \ \nu \geqslant 0,$$
$$|k_n| \leqslant c_1 n^{m-2}, \ \left| \tfrac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \ j = \overline{1, m-1}, \ q = 0, 1, \ldots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_1(t,\theta)$, $\varphi_1(r,\theta)$, как в [7, 8], можно доказать, что полученное решение (31) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Далее, из (28), (30), (31) $t \to +0$ при имеем

$$\begin{gathered} u(r,\theta,t) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \\ \tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^\xi g(\xi_1) d\xi_1) d\xi + \right. \\ \left. + b_{ns}^k \exp(\mu_{s,n}^2 \int_0^\alpha g(\xi) d\xi) \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \end{gathered} \tag{32}$$

Из (26)–(28), (30), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (32), мы приходим в области Ω_β к задаче Дирихле для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений

$$p(t)\Delta_x u + u_{tt} = 0 \tag{33}$$

с данными

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \ u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta), \tag{34}$$

которое имеет единственное решение в классе $C(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$ [8].

В [8] приводится явный вид решения задачи (33), (34), поэтому можно записать представления решения и для задачи 1.

Теорема доказано.

Отметим, что приведенная теорема анонсировано в [9].

Литература

[1] Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка: Сб. переводов. Математика. 1963. Т. 7. № 6. С. 99–121.

[2] Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характерической формой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. 360 с.

[3] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

[4] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 297 с.

[6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1966. 724 с.

[7] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 170 с.

[8] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 6. С. 936–939.

[9] Алдашев С.А. Задача Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений // Тез. докладов межд. научной конференции "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных". М.: МГУ. 2016. С. 14.

References

[1] Fiker G. *K edinoi teorii kraevykh zadach dlia elliptiko-parabolicheskikh uravnenii vtorogo poriadka: Sb. perevodov* [On a unified theory of boundary-value problems for second-order elliptic-parabolic equations: collection of translations]. *Matematika* [Mathematics], 1963, Vol. 7, no. 6, pp. 99–121 [in Russian].

[2] Oleinik O.A., Radkevich E.V. Uravneniia s neotritsatel'noi kharaktericheskoi formoi [Equations with a nonnegative characteristic form]. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 2010, 360 p. [in Russian].

[3] Mikhlin S.G. *Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia* [Multidimensional singular integrals and integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1962, 254 p. [in Russian].

[4] Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of ordinary differential equations]. M.: Nauka, 1965, 703 p. [in Russian].

[5] Bateman G., Erdei A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 2* [Higher transcendental functions. Vol. 2]. M.: Nauka, 1974, 297 p. [in Russian].

[6] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M: Nauka, 1966, 724 p. [in Russian].

[7] Aldashev S.A. *Kraevye zadachi dlia mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravnenii* [Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations]. Almaty: Gylym, 1994, 170 p. [in Russian].

[8] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia vyrozhdaiushchikhsia mnogomernykh ellipticheskikh uravnenii* [Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for degenerate multidimensional elliptic equations]. /Mathematical Notes], 2013, Vol. 94, Issue 6, pp. 936–939 [in Russian].

[9] Aldashev S.A. *Zadacha Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia vyrozhdaiushchikhsia mnogomernykh elliptiko-parabolicheskikh uravnenii* [The Dirichlet problem in a cylindrical domain for degenerate multidimensional elliptic-parabolic equations]. In: *Tez. dokladov mezhd. nauchnoi konferentsii "Aktual'nye problemy teorii uravnenii v chastnykh proizvodnykh"* [Abstracts of the reports of the international scientific conference "Actual problems of the theory of partial differential equations"]. M.: MGU, 2016, p. 14 [in Russian].

S.A. Aldashev[2]

THE CORRECTNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR DEGENERATE MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

The correctness of boundary value problems on the plane for elliptic equations by the method of the theory of analytic functions of a complex variable has been well studied. When investigating similar questions, when the number of independent variables is greater than two, problems of a fundamental nature arise. A very attractive and convenient method of singular integral equations loses their validity due to the absence of any full theory of multidimensional singular integral equations. Boundary value problems for second-order elliptic equations in domains with edges have been studied in detail. In the author's papers explicit forms of classical solutions of Dirichlet problems in cylindrical domains for multidimensional elliptic equations are found. In this paper we use the method proposed in the author's works, we show the unique solvability and obtain an explicit form of classical solution of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for degenerate multidimensional elliptico-parabolic equations.

Key words: correctness, multidimensional equations, degeneration, Dirichlet problem, cylindrical domain, spherical functions, orthogonality, Bessel function.

Статья поступила в редакцию 29/*IX*/2017.
The article received 29/*IX*/2017.

[2] *Aldashev Serik Aimurzaevich* (`aldash51@mail.ru`), Department of Mathematics and Mathematical Modeling, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125, Pushkin street, Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan.

УДК 517.95, 624.07 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-12-17

А.Б. Бейлин[1]

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЕМ ОДНОГО ИЗ КОНЦОВ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ

В статье рассматривается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня, жестко закрепленного на одном конце. Режим возможных смещений второго конца неизвестен и подлежит определению. Условие переопределения задается в виде интеграла по пространственной переменной. В статье показано, что для нахождения решения задача может быть сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. В качестве иллюстрации рассмотрен пример, позволяющий выписать ядро интегрального уравнения в явном виде.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, колебания тонкого стержня, обратная задача, интегральное условие переопределения.

Введение

Исследованиям математических моделей колебательных процессов различной природы посвящено большое количество работ. Отметим здесь лишь некоторые из них, наиболее близкие к содержанию настоящей статьи [1–4]. Интерес к этой тематике вызван прежде всего тем, что колебательные процессы возникают в различных механических системах [5–8]. Для того чтобы обеспечить надежную работу сложной современной техники в процессе ее эксплуатации необходим контроль, который производят с помощью диагностических процедур. Однако приборы диагностики не всегда можно установить в непосредственном контакте с исследуемым объектом. Следовательно, возникает необходимость осуществлять диагностику на основе косвенных данных. С другой стороны, во избежание непредвиденных ситуаций нужно уметь управлять процессом и до проведения испытаний реального объекта знать допустимые интервалы значений входных данных. Например, как нужно закрепить концы стержня, чтобы его колебания не выводили систему из заданного режима. В связи с этим и возникают задачи об управлении колебаниями, которые также называют обратными задачами математической физики [9–12].

В статье [13] рассмотрена обратная задача определения краевого условия задачи для гиперболического уравнения и доказана ее однозначная разрешимость. Но для практических целей удобно иметь формулы, позволяющие найти решение в явном виде, что возможно крайне редко, либо получить возможность нахождения приближенных решений.

В предлагаемой статье рассматривается обратная задача для уравнения колебаний струны, которое является частным случаем уравнения, изученного в [13], и показывается, как можно определить режим допустимых смещений правого конца тонкого стержня при заданной энергии. Все известные входные данные взяты в максимально простом виде, что не ограничивает общности, но дает возможность наглядно продемонстрировать предложенный метод. Опираясь на известные методы решения смешанных задач для уравнения колебаний струны, исследуемая обратная задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра относительно искомой функции, играющей роль краевого условия на правом конце.

1. Постановка задачи.

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим задачу о колебании стержня, один конец которого, $x = 0$, жестко закреплен, а закон движения второго конца, $x = l$, не задан и подлежит определению. Таким образом, мы приходим к обратной задаче, которая заключается в следующем: найти пару функций $(u(x,t), h(t))$, обладающих свойствами

$$u \in C^1(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T), \quad h \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T),$$

Бейлин Александр Борисович (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС, Самарский государственный технический университет, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

удовлетворяющих уравнению
$$Lu \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{1.1}$$
начальным условиям
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.2}$$
краевым условиям
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = h(t) \tag{1.3}$$
и условию переопределения, в качестве которого часто задается интегральное среднее искомого решения [10; 11]
$$\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = E(t). \tag{1.4}$$
Заметим, что однородность начальных данных не ограничивает общности, но упрощает многие преобразования.

Задача (1.1)—(1.4) может быть трактована как задача управления, а именно, как задача определения таких условий на входные данные, а именно, функцию $h(t)$, позволяющую сохранить заданную энергию $E(t)$.

2. Разрешимость задачи.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:
$$a > 0, \quad f, f_{tt} \in C(\bar{Q}_T),$$
$$K \in C[0,l], \ \ K(l) \neq 0, \ \ K(0) = 0, E \in C^2[0,T],$$
а также условия согласования $E(0) = E'(0) = 0$. Очевидно, что искомая функция $h(t)$ должна удовлетворять условиям $h(0) = h'(0) = 0$.

Прежде всего получим соотношение между $h(t)$ и $u(x,t)$, которое в дальнейшем и приведет к желаемому результату.

Пусть (u,h) — решение задачи (1.1)—(1.4), $K(l) \neq 0$ Проинтегрируем равенство (1.1), умноженное на $K(x)$, по промежутку $(0,l)$. Учитывая условия (1.3) и (1.4), получим после элементарных преобразований
$$h(t) = \frac{E''(t)}{a^2K(l)} + \frac{K'(l)}{K(l)}u(l,t) -$$
$$-\frac{1}{a^2K(l)}\int\limits_0^l K''(x)u(x,t)dx - \frac{1}{a^2K(l)}\int\limits_0^l K(x)f(x,t)dx. \tag{2.5}$$
Теперь видно, что найдя $u(x,t)$ как решение прямой задачи (1.1)—(1.3), где $h(t)$ считаем временно известной, мы можем рассчитывать, что найдем $h(t)$ из соотношения (2.5). Нашей ближайшей целью является обоснование возможности реализовать описанную схему и получить таким образом решение задачи (1.1)—(1.4). В качестве первого шага мы рассмотрим прямую задачу (1.1)—(1.3). Так как второе из краевых условий (2.5) неоднородно, то для того чтобы воспользоваться методом разделения переменных перейдем к задаче с однородными условиями, введя новую неизвестную функцию
$$v(x,t) = u(x,t) - xh(t).$$
Действительно, теперь нам нужно найти функцию $v(x,t)$ как решение следующей задачи
$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) - xh''(t), \tag{2.6}$$
$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \tag{2.7}$$
$$v(0,t) = 0, \quad v_x(0,t) = 0. \tag{2.8}$$
Применив метод разделения переменных, полагая $v(x,t) = X(x)T(t)$, легко находим собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:
$$X_n(x) = \sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}.$$
Так как начальные и граничные условия нулевые, то единственное решение однородного уравнения тривиально. Поэтому сразу переходим к нахождению решения неоднородного уравнения (2.6). Введем еще некоторые упрощения исключительно для наглядности и не ограничивая общности, а именно, пусть $f(x,t) = 0$, $K(x) = x^2$. Итак, решение задачи (2.6)—(2.8) ищем в виде
$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}, \tag{2.9}$$

где $V_n(t)$ подлежат определению и должны удовлетворять условиям

$$V_n(0) = V_n'(0) = 0$$

для того чтобы начальные условия (2.7) были выполнены для $v(x,t)$. Заметим, что выполнение граничных условий гарантируют собственные функции $X_n(x)$. Подставив (2.9) в (2.6), приходим к задаче Коши:

$$V_n''(t) + \omega_n^2 V_n(t) = h_n(t), \quad V_n(0) = V_n'(0) = 0, \tag{2.10}$$

где $\omega_n = \frac{\pi(1+2n)a}{2l}$, $h_n(t)-$ коэффициенты Фурье функции $-xh''(t)$. Решение этой задачи, как известно, выражается формулой

$$V_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t h_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau. \tag{2.11}$$

Найдем коэффициенты Фурье функции $-xh''(t)$:

$$h_n(t) = -h''(t)\frac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}dx = \frac{(-1)^{n+1}4l^2h''(t)}{\pi^2(1+2n)^2}.$$

Теперь решение задачи Коши можно записать так:

$$V_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\frac{(-1)^{n+1}4l^2}{\pi^2(1+2n)^2}\int\limits_0^t h''(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau. \tag{2.12}$$

Тогда, подставив в полученную формулу $\omega_n = \frac{\pi(1+2n)a}{2l}$, получим решение задачи (2.6)—(2.8)

$$v(x,t) = \frac{8l^3}{\pi^3 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2n)^3}\int\limits_0^t h''(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}. \tag{2.13}$$

Сходимость этого ряда не вызывает сомнений. Однако мы по-прежнему рассматриваем функцию $h(t)$ как известную. Приступим теперь к нахождению этой функции, применив к решению (2.13) условие переопределения, представленное в виде (2.5). Предварительно сделаем некоторые преобразования.

Проинтегрировав дважды по частям правую часть формулы (2.12), получим

$$\int\limits_0^t h''(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau = \omega_n h(t) - \omega_n^2\int\limits_0^t h(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau.$$

Тогда (2.13) примет вид

$$v(x,t) = \frac{16l^2}{a\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1+2n)^3}[\omega_n h(t) -$$

$$-\omega_n^2\int\limits_0^t h(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau]\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x. \tag{2.14}$$

Обратимся к формуле (2.5) и подставим в нее найденное решение $u(x,t) = v(x,t) + xh(t)$ где $v(x,t)$ определяется равенством (2.14). После элементарных преобразований получим

$$\frac{1-a^2}{a^2}h(t) = \frac{E''(t)}{a^2l^2} + \frac{2}{l}v(l,t) - \frac{2}{a^2l^2}\int\limits_0^l v(x,t)dx. \tag{2.15}$$

Подставив в эту формулу найденное решение $v(x,t)$, мы придем к интегральному уравнению относительно $h(t)$, ядро которого представлено в виде ряда. Однако при некоторых дополнительных ограничениях можно получить явное представление ядра, что и будет показано.

Пусть $T \leqslant \frac{l}{a}$. Тогда можно эффективно воспользоваться следующими формулами [14]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}, \quad (0.234(2,4)),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi, \quad (1.442(1)),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{4}x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad (1.444(5)).$$

Учтя эти формулы и вычислив $\int_0^l \sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}dx = \frac{2l}{\pi(1+2n)}$, получим

$$v(l,t) = a\int\limits_0^t h(\tau)d\tau - lh(t),$$

$$\int\limits_0^l v(x,t)dx = -\frac{l^2}{2}h(t) + \frac{8al}{\pi^2}\int\limits_0^t h(\tau)\left[\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{2l} + \frac{\pi^2 a}{8l}(t-\tau)\right]d\tau.$$

Подставив полученные выражения в (2.14), приходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$h(t) - \int\limits_0^t H(t,\tau)h(\tau)d\tau = g(t), \tag{2.16}$$

где обозначено

$$H(t,\tau) = a + \frac{16}{al\pi^2}\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{2l} + \frac{2}{l^2}(t-\tau),$$

$$g(t) = \frac{E''(t)}{a^2l^2}.$$

Уравнение (2.16) в силу ограниченности ядра однозначно разрешимо [15]. Существование производных функции $h(t)$ вытекает из свойств $E(t)$ и гладкости ядра.

Подводя итоги проведенным исследованиям, сформулируем полученный результат.

Если выполнены условия

$$a > 0, \quad f, f_{tt} \in C(Q_T),$$

$$K \in C[0,l], \;\; K(l) \neq 0, \;\; K(0) = 0, E \in C^3[0,T] \cap C^4(0,T),$$

а также условия согласования $E(0) = E'(0) = 0$, то в области Q_T существует единственное решение задачи (1.1)—(1.4). В частном случае, $f = 0, \quad K(x) = x^2, \quad T \leqslant \frac{l}{a}$, интегральное уравнение, определяющее режим смещений правого конца стержня, принимает простой вид, пригодный для применения приближенных методов его решения.

Литература

[1] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992. 431 с.

[2] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // Доклады РАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 56–61.

[3] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3(114). С. 9–19.

[4] Бейлин А.Б. Задача о продольных колебаниях упруго закреплённого нагруженного стержня // Вестник Самарского гос. Тех. Ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 2. С. 249–258.

[5] Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

[6] Хазанов Х.С. Механические колебания систем с распределёнными параметрами: Учеб. пособие. Самара: Самар. Госуд. Аэрокосмич. Ун-т, 2002. 80 с.

[7] Вейц В.Л., Дондошанский В.К., Чиряев В.И. Вынужденные колебания в металлорежущих станках. М-Л.: Машгиз, 1959 288 с.

[8] Кумабэ Д. Вибрационное резание. М.: Машиностроение, 1985. 424 с.

[9] Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 35. № 5. С. 692–704.

[10] Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2013. 94(2). С. 207–217.

[11] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems. 1988. № 4. P. 35–45.

[12] Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Труды института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1.

[13] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным режимом на части границы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 2.

[14] Градштейн В.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.

[15] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

References

[1] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992, 431 p. [in Russian].

[2] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. *Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia* [Theory of free vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *Doklady RAN* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 2007, Vol. 417, no. 1, pp. 56–61 [in Russian].

[3] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [A Problem on Longitudinal Vibration in a Short Bar with Dynamical Boundary Conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[4] Beylin A.B. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh uprugo zakreplennogo nagruzhennogo sterzhnia* [Task on longitudinal vibration of an elastic attached loaded rod]. *Vestnik Samarskogo gos. Tekh. Un-ta. Seriia: Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2016, Vol. 20, no. 2, pp. 249–258 [in Russian].

[5] Babakov I.M. *Teoriia kolebanii* [Theory of vibrations]. M.: Nauka, 1968, 560 p. [in Russian].

[6] Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniia sistem s raspredelennymi parametrami: Ucheb. posobie* [Mechanical oscillations of systems with distributed parameters: textbook]. Samara: Samar. Gosud. Aerokosmich. Un-t, 2002, 80 p. [in Russian].

[7] Veiz V.L., Dondoshansky V.K., Chiriaev V.I. *Vynuzhdennye kolebaniia v metallorezhushchikh stankakh* [Forced oscillations in metal-cutting machines]. M-L.: Mashgiz, 1959, 288 p. [in Russian].

[8] Kumabe D. *Vibratsionnoe rezanie* [Vibration Cutting]. M.: Mashinostroenie, 1985, 424 p. [in Russian].

[9] Ilin V.A., Tikhomirov V.V. *Volnovoe uravnenie s granichnym upravleniem na dvukh kontsakh i zadacha o polnom uspokoenii kolebatel'nogo protsessa* [The wave equation with boundary control at two ends and the problem of complete damping of a vibration process]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 1990, Vol. 35, no. 5, pp. 692–704 [in Russian].

[10] Kamynin V.L. *Obratnaia zadacha opredeleniia mladshego koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nabliudeniia* [The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equation with integral observation]. *Matem. zametki* [Mathematical notes], 2013, **94(2)**, pp. 207–217 [in Russian].

[11] Cannon J.R., Lin Y. *Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems*, 1988, no. 4, pp. 35–45 [in English].

[12] Denisov A.M. *Obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nym kraevym usloviem, soderzhashchim zapazdyvaiushchii argument* [The inverse problem for a hyperbolic equation with nonlocal boundary condition involving retarding argument]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics. Ural Branch of Russian Academy of Sciences], 2012, Vol. 18, no. 1 [in Russian].

[13] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o kolebaniiakh sterzhnia s neizvestnym rezhimom na chasti granitsy* [On Certain Problem for Hyperbolic Equation with unknown behavior on a part of the boundary]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2017, no. 2, pp. 9–19 [in Russian].

[14] Gradstein V.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series, and products]. M: Fizmatgiz, 1963, 1100 p. [in Russian].

[15] Mikhlin S.G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniiam* [Lectures on linear integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1959, 232 p. [in Russian].

A.B. Beylin[2]

ON CERTAIN CONTROL PROBLEM OF DISPLACEMENT AT ONE ENDPOINT OF A THIN BAR

In this paper, we study an inverse problem for hyperbolic equation. This problem arises when we consider vibration of a thin bar if one endpoint is fixed but behavior of the other is unknown and is the subject to find. Overdetermination is given in the form of integral with respect to spacial variable. The problem is reduced to the second kind Volterra integral equation. Special case is considered.

Key words: hyperbolic equation, vibration of a thin bar, inverse problem, integral overdetermination.

Статья поступила в редакцию 28/ V/2017.
The article received 28/ V/2017.

[2] *Beylin Alexander Borisovich* (abeilin@mail.ru), Department of Automated Machining and Tool Systems, Samara State Technical University, 133, Molodogvardeiskaya str., Samara, 443010, Russian Federation.

УДК 519.999 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-18-25

А.В. Дюжева[1]

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассматривается краевая задача с нелокальными динамическими условиями для гиперболического уравнения. Особенностью краевых условий является присутствие в них производных по переменной времени как первого, так и второго порядков. Кроме того, краевые условия являются нелокальными, а именно, они представляют собой соотношения, связывающие значения производных на разных частях границы. Подобные задачи возникают при изучении колебаний стержня с учетом эффекта демпфирования и при наличии точечных масс. В работе доказано существование единственного обобщенного решения. Доказательство базируется на полученных априорных оценках и методе Галеркина.

Ключевые слова: нелокальная задача, динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, априорные оценки, эффекта демпфирования, производная второго порядка, метод Галеркина.

Введение

В статье рассмотрена нелокальная задача для гиперболического уравнения, к которой может привести математическое моделирование процесса, связанного с колебаниями механической системы.

В случае, если размеры объекта, колебания которого исследуются, невелики, то режим на одном из его концов может оказывать существенное влияние на поведение объекта на другом конце. Этот эффект был замечен еще Стекловым В.А. в его работе [7]. Математически это выражается в том, что граничные условия становятся нелокальными. Именно этот случай рассмотрен в предлагаемой работе. Особенностью изучаемой задачи является вид нелокальных условий, содержащих значение производных по переменной времени как первого, так и второго порядка на обоих концах промежутка $[0, l]$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, где $l, T < \infty$ и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (1.1) в области Q_T, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{1.2}$$

и динамическим граничным условиям

$$\begin{aligned} a(0,t)u_x(0,t) &= (\alpha_1(t)u_t(0,t))_t + (\beta_1(t)u_t(l,t))_t, \\ a(l,t)u_x(l,t) &= (\alpha_2(t)u_t(0,t))_t + (\beta_2(t)u_t(l,t))_t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1.1), его правая часть, а такие функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ в (1.3) достаточно гладкие, $a(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_T$.

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

2. Разрешимость задачи

Обозначим:
$\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in (0,T)\},\ \Gamma_l = \{(x,t) : x = l, t \in (0,T)\}$,
$W(Q) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), u_t \in L_2(\Gamma_0 \cup \Gamma_l)\}$,
$\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1, v(x,T) = 0\}$.

Введем понятие обобщенного решения, используя известную процедуру [4]: умножим (1.1) на функцю $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ и после интегрирования по области Q_T, получаем равенство:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt+ \tag{2.1}$$

$$+\int_0^T v_t(0,t)[\alpha_1(t)u_t(0,t) + \beta_1(t)u_t(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^T v_t(l,t)[\alpha_2(t)u_t(0,t) + \beta_2(t)u_t(l,t)]dt = \int_0^T \int_0^l fvdxdt.$$

Определение Обобщенным решением задачи (1.1)-(1.3) будем называть функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = 0$ и тождеству (2.1) для любой функции $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

Теорема Пусть выполняются следующие условия:

$$H1.\ \ a \in C(\bar{Q}_T),\ \ a_t \in C(\bar{Q}_T),\ \ c \in C(\bar{Q}_T),$$

$$f \in L_2(Q_T),\ \ f(x,0) = 0;$$

$$H2.\ \ \alpha_i, \beta_i \in C^1[0,T],$$

$$H3.\ \ \alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0,\ \ \alpha_1(t) < 0,\ \ \beta_2(t) > 0,\ \ \forall t \in [0,T];$$

$$H4.\ \ \alpha_1(t)\xi_1^2 - 2\alpha_2(t)\xi_1\xi_2 - \beta_2(t)\xi_2^2 > 0,\ \ \forall t \in [0,T];$$

$$\alpha_1'(t)\xi_1^2 - 2\alpha_2'(t)\xi_1\xi_2 - \beta_2'(t)\xi_2^2 > 0,\ \ \forall t \in [0,T],$$

$$H5.(\alpha_1' - \alpha_1)\xi_1^2 - 2(\alpha_2' - \alpha_2)\xi_1\xi_2 - (\beta_2' - \beta_2)\xi_2^2 \leqslant 0,\ \ \forall t \in [0,T],$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3).

Доказательство. Заметим, что в силу условий теоремы 1 найдутся числа

$$K > 0,\ \ K_1 > 0,\ \ a_0 > 0,\ \ a_1 > 0,\ \ c_0 > 0$$

такие, что

$$\max_{[0,T]} |\alpha_i(t),\ \ \beta_i(t), \alpha_i'(t),\ \ \beta_i'(t)| \leqslant K,\ \ \max_{\bar{Q}_T} |c(x,t)| \leqslant c_0,$$

$$a(x,t) \geqslant a_0,\ \ \max_{\bar{Q}_T} |a(x,t), a_t(x,t)| \leqslant a_1,$$

$$\int_0^T \int_0^l f^2 dxdt \leqslant K_1.$$

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. Сначала с помощью метода Галеркина построим последовательность приближенных решений. На следующем этапе выведем априорные оценки приближенных решений. Полученные оценки позволят выделить слабо сходящиуюся подпоследовательности из последовательности приближенных решений. Затем мы покажем, что предел этой подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение. На заключительном этапе докажем его единственность.

Существование. Для доказательства существования обобщенного решения построим сначала последовательность приближенных решений при помощи метода Галеркина.

Будем искать приближенное решение поставленной задачи (1.1)-(1.3) в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) w_k(x), \tag{2.2}$$

где $\{w_k(x)\}_1^\infty$ - линейно независимая и полная в $W_2^1(0,l)$ система функций, в которой $w_k(x) \in C^2[0,l]$, из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j)dx+$$

$$+w_j(0)[(\alpha_1(t)u_t^m(0,t))_t + (\beta_1(t)u_t^m(l,t))_t]- \tag{2.3}$$

$$-w_j(l)[(\alpha_2(t)u_t^m(0,t))_t + (\beta_2(t)u_t^m(l,t))_t] = \int_0^l f(x,t)w_j dx.$$

Подставив (2.2) в (2.3), получим
$$\sum_{k=1}^{m}[A_{kj}c_k''(t)+B_{kj}c_k'(t)+D_{kj}c_k(t)=f_j(t), \tag{2.4}$$
где
$$f_j(t)=\int_0^l f(x,t)w_j(x)dx,$$
$$A_{kj}(t)=\int_0^l w_k(x)w_j(x)dx+\alpha_1(t)w_k(0)w_j(0)+\beta_1(t)w_k(l)w_j(0)-$$
$$-\alpha_2(t)w_k(0)w_j(l)-\beta_2(t)w_k(l)w_j(l),$$
$$B_{kj}(t)=\alpha_1'(t)w_k(0)w_j(0)+\beta_1'(t)w_k(l)w_j(0)-$$
$$-\alpha_2'(t)w_k(0)w_j(l)-\beta_2'(t)w_k(l)w_j(l),$$
$$D_{kj}(t)=\int_0^l a(x,t)w_k'(x)w_j'(x)+c(x,t)w_k(x)w_j(x)dx.$$
Добавив начальные условия
$$c_k(0)=c_k'(0)=0, \tag{2.5}$$
приходим к задаче Коши для системы (2.4).

Для доказательства существования решения задачи Коши покажем сначала, что систему (2.4) можно разрешить относительно $c_k''(t)$. Рассмотрим квадратичную форму $q=\sum_{k,j=1}^m A_{kj}\xi_k\xi_j$ и убедимся в том, что матрица $A=(A_{kj})_{k,j=1}^m$ положительно определена. Использовав выражение коэффициентов A_{kj}, получим следующее представление квадратичной формы:
$$q=\sum_{k,j=1}^{m}\int_0^l w_k(x)w_j(x)\xi_k\xi_j dx+\alpha_1(t)w_k(0)w_j(0)\xi_k\xi_j+$$
$$+\beta_1(t)w_k(l)w_j(0)\xi_k\xi_j-\alpha_2(t)w_k(0)w_j(l)\xi_k\xi_j-\beta_2(t)w_k(l)w_j(l)\xi_k\xi_j.$$
Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим
$$q=\int_0^l|\xi|^2dx+\alpha_1(t)|\xi(0)|^2+(\beta_1(t)-\alpha_2(t))|\xi(0)||\xi(l)|-\beta_2(t)|\xi(l)|^2,$$
где $\xi=\sum_{k=1}^m w_k\xi_k$.

Из условий H3 и H4 теоремы следует
$$q=\int_0^l|\xi|^2dx+\alpha_1(t)|\xi(0)|^2+2\beta_1(t)|\xi(0)||\xi(l)|-\beta_2(t)|\xi(l)|^2>0.$$
Следовательно, система (2.4) разрешима относительно старших производных и задача (2.4), (2.5) эквивалентна задаче Коши с условием $c_k(0)=0$ для системы уравнений первого порядка:
$$(I-\tilde{B})C'(t)=\tilde{A}C(t)+\tilde{F}(t), \tag{2.6}$$
где $C(t)=(c_1'(t),..c_m'(t))$, $B=(B_{kj})_{k,j=1}^m$ - матрица из коэффициентов при $c_k'(t)$ в (2.4), матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{F}$ - результат разрешения (2.4) относительно $c_k''(t)$, $\tilde{B}=A^{-1}B$. Если $det(I-\tilde{B})\neq 0$, то систему (2.6) сведем к системе интегральных уравнений
$$C(t)=\int_0^t KC(\tau)d\tau+\int_0^t F(\tau)d\tau,$$
где $K=(I-\tilde{B})^{-1}\tilde{A}$, $F=(I-\tilde{B})^{-1}\tilde{F}$, которая однозначно разрешима при выполнении условий теоремы. Если же $det(I-\tilde{B})=0$, то после элементарных преобразований мы придем к системе алгебраических уравнений относительно $c_k(t)$. Заметим, что в последнем случае условие $c_k(0)=0$ будет выполнено в силу требования теоремы $f(x,0)=0$.

Итак, в силу разрешимости задачи (2.4), (2.5) последовательность приближенных решений задачи (1.1)-(1.3) построена.

Следующим шагом доказательства является обоснование возможности выделить из нее слабо сходящуюся подпоследовательность, а затем возможности перехода к пределу в (2.3). Для этого нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и переходим.

Априорная оценка Умножим (2.3) на $c_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. В результате получим:
$$\int_0^\tau\int_0^l(u_{tt}^m u_t^m+a(x,t)u_{xt}^m u_x^m+c(x,t)u^m u_t^m)dxdt+ \tag{2.7}$$

$$+\int_0^\tau u_t(0,t)[\alpha_1(t)u^m_{tt}(0,t)+\alpha_1'(t)u^m_t(0,t)+\beta_1(t)u^m_{tt}(l,t)+\beta_1'(t)u^m_t(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^\tau u_t(l,t)[\alpha_2(t)u^m_{tt}(0,t)+\alpha_2'(t)u^m_t(0,t)+\beta_2(t)u^m_{tt}(l,t)+\beta_2'(t)u^m_t(l,t)]dt=$$
$$=\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u^m_t dxdt.$$

Интегрируя по частям (2.7) и учитывая условие Н3, получим

$$1. \int_0^\tau\int_0^l [u^m_{tt}u^m_t+au^m_{xt}u^m_x]dxdt= \tag{2.8}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^l((u^m_t)^2+(au^m_x)^2)dx-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(a_tu^m_x)^2dxdt;$$
$$2. \int_0^\tau \alpha_1(t)u^m_{tt}(0,t)u^m_t(0,t)dt= \tag{2.9}$$
$$=\frac{1}{2}\alpha_1(\tau)(u^m_t(0,\tau))^2-\frac{1}{2}\int_0^\tau\alpha_1'(t)(u^m_t(0,t))^2dt;$$
$$3. \int_0^\tau \alpha_2(t)u^m_{tt}(0,t)u^m_t(l,t)dt=\int_0^\tau\alpha_2(t)u^m_t(0,t)u^m_{tt}(l,t)dt+ \tag{2.10}$$
$$+\int_0^\tau\alpha_2'(t)u^m_t(0,t)u^m_t(l,t)dt-\alpha_2(\tau)u^m_t(l,\tau)u^m_t(0,\tau);$$
$$4. -\int_0^\tau\beta_2(t)u^m_{tt}(l,t)u^m_t(l,t)dt= \tag{2.11}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\tau\beta_2'(u^m_t(l,t))^2dt-\frac{1}{2}\beta_2(\tau)(u^m_t(l,\tau))^2.$$

Тогда из (2.7)следует:

$$\frac{1}{2}\int_0^l[(u^m_t(x,\tau))^2+a(x,\tau)(u^m_x(x,\tau))^2]dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(a_tu^m_x)^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l cuu_tdxdt+$$
$$\frac{1}{2}\alpha_1(\tau)(u^m_t(0,\tau))^2-\alpha_2(\tau)u^m_t(l,\tau)u^m_t(0,\tau)-\frac{1}{2}\beta_2(\tau)(u^m_t(l,\tau))^2-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau[\alpha_1'(u^m(0,t))^2dt-\int_0^\tau\alpha_2'(t)u^m_t(0,t)u^m_t(l,t)dt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\beta_2'(u^m_t(l,t))^2dt=$$
$$=\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u^m_tdxdt.$$

Используя условия Н4 и Н5 теоремы, неравенство Коши:

$$\int_0^\tau\int_0^l|fu^m_t|dxdt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(u^m_t)^2dxdt,$$

и воспользовавшись неравенством

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx\leqslant\tau\int_0^\tau\int_0^l u_t^2dxdt,$$

которое следует из представления

$$u(x,\tau)dx=\tau\int_0^\tau u_tdxdt,$$

получим

$$\int_0^l[(u^m_t(x,\tau))^2+(u^m_x(x,\tau))^2+(u^m(x,\tau))^2]dx+ \tag{2.12}$$
$$+\alpha_1(\tau)(u^m_t(0,\tau))^2-2\alpha_2(\tau)u^m_t(l,\tau)u^m_t(0,\tau)-\beta_2(\tau)(u^m_t(l,\tau))^2\leqslant$$
$$\leqslant c_3\int_0^\tau\int_0^l[(u^m_t)^2+(u^m_x)^2+(u^m)^2]dxdt+$$
$$+\int_0^\tau[\alpha_1(u^m(0,t))^2dt-2\alpha_2(t)u^m_t(0,t)u^m_t(l,t)dt-\beta_2(u^m_t(l,t))^2dt+$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt,$$

где $c_3=\frac{c_1}{c_2}$, $c_1=\min\{1,a_0\}$, $c_2=\max\{a_1,c_0,c\}$.

К (2.12) применим лемму Гронуолла, что приводит к неравенству

$$\int_0^l[(u_t^m(x,\tau))^2+(u_x^m(x,\tau))^2+(u^m(x,\tau))^2]dx+$$
$$+\alpha_1(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2-2\alpha_2(\tau)u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)-\beta_2(\tau)(u_t^m(l,\tau))^2\leqslant$$
$$\leqslant e^{c_3\tau}\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt.$$

Проинтегрировав по t от 0 до τ, получим

$$||u||^2_{W_2^1(Q)}+\int_0^\tau[\alpha_1(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2- \tag{2.13}$$
$$-2\alpha_2(\tau)u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)-\beta_2(\tau)(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant p,$$

где $p=\frac{1}{c_3}(e^{c_3T}-1)||f||^2_{L_2(Q_T)}$.

Из (2.13) в частности

$$||u^m||^2_{W_2^1(Q_T)}\leqslant p, \tag{2.14}$$

$$\int_0^\tau[\alpha_1(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2-\beta_2(\tau)(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant \tag{2.15}$$
$$\leqslant 2\int_0^\tau\alpha_2(\tau)u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)dt+p.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma\int_0^\tau[(u_t^m(0,\tau))^2+(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant K\int_0^\tau[(u_t^m(0,\tau))^2+(u_t^m(l,\tau))^2]dt+p,$$

если $\alpha_1\geqslant\gamma>0$, $-\beta_2\geqslant\gamma>0$, а так же $\gamma-|\alpha_2|>0$, то

$$\int_0^\tau[(u_t^m(0,\tau))^2+(u_t^m(l,\tau))^2]dt\leqslant\frac{p}{\gamma-K}.$$

Это означает, что справедливо

$$||u_t||^2_{\Gamma_0}\leqslant p_1,\ \ ||u_t||^2_{\Gamma_l}\leqslant p_1. \tag{2.16}$$

Полученные оценки (2.14) и (2.16) позволяют утверждать, что $||u^m||^2_{W(Q_T)}\leqslant p$. то означает, что из построенной последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ к некоторой $u\in W(Q_T)$. Покажем, что этот предел и есть искомое обобщенное решение. Для этого докажем справедливость тождества (2.1). Умножим каждое из соотношений (2.3) на $\delta_l(t)\in W_2^1(0,t),\delta_l(T)=0$; обозначим $\eta(x,t)=\sum_{l=1}^m\delta_l(t)w_l(x)$. Полученные равенства просуммируем по l от 1 до m и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T\int_0^l(u_{tt}^m\eta+u_x^m\eta_x+cu^m\eta)dxdt+$$
$$+\int_0^T\eta(0,t)[(\alpha_1(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_1(t)u_t^m(l,t))_t]dt-$$
$$-\int_0^T\eta(l,t)[(\alpha_2(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_2(t)u_t^m(l,t))_t]dt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt.$$

Проинтегрируем первое слагаемое в интеграле слева, получим

$$\int_0^T\int_0^l(-u_t^m\eta_t(x,t)+u_x^m\eta_x+cu^m\eta)dxdt+\int_0^l u_t^m(x,0)\eta(x,0)dx+$$
$$+\int_0^T\eta(0,t)[(\alpha_1(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_1(t)u_t^m(l,t))_t]dt-$$
$$-\int_0^T\eta(l,t)[(\alpha_2(t)u_t^m(0,t))_t+(\beta_2(t)u_t^m(l,t))_t]dt= \tag{2.17}$$

$$= \int_0^T \int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt.$$

Зафиксировав в (2.17) $\eta(x,t)$, перейдем к пределу и увидим, что тождество (2.1) выполняется для предельной функции $u(x,t)$. Однако еще нельзя утверждать, что $u(x,t)-$ искомое обобщенное решение, так как тождество (2.1) пока выполняется не для всех функций $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, а только для функций вида $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \delta_j(t)w_j(x)$. Но множество всех таких функций плотно в $\hat{W}_2^1(Q_T)$ (см.[4], с.215), поэтому утверждение о существовании решения задачи из пространства $W_2^1(Q_T)$ доказано полностью.

Единственность. Предположим, что существует два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1.1)-(1.3). Тогда $u = u_1 - u_2$ - решение соответствующей однородной задачи. Это означает, что $u(x,0) = 0$ и выполняется тождество (2.1) с $f(x,t) = 0$:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt+$$
$$+\int_0^T v_t(0,t)[\alpha_1(t)u_t(0,t) + \beta_1(t)u(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(l,t)[\alpha_2(t)u_t(0,t) + \beta_2(t)u_t(l,t)]dt = 0. \tag{2.18}$$

Положим в тождестве (2.18)

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Выбранная таким образом функция принадлежит пространству $\hat{W}_2^1(Q_T)$. Заметим, что $v_t(x,t) = u(x,t)$.

Проинтегрируем по частям (2.18)

$$-\int_0^\tau \alpha_1 u(0,t)u_t(0,t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1' u^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\alpha_1 u^2(0,t);$$
$$\int_0^\tau \alpha_2 u(0,t)u_t(l,t)dt = \alpha_2 u(0,t)u(l,t)-$$
$$-\int_0^\tau \alpha_2 u(0,t)u_t(l,t)dt - \int_0^\tau \alpha_2' u(0,t)u(l,t)dt;$$
$$\int_0^\tau \beta_2 u(l,t)u_t(l,t)dt = \frac{1}{2}\beta_2 u^2(l,t) - \int_0^\tau \beta_2' u^2(l,t).$$

Применяя условия H3, получаем

$$-\frac{1}{2}\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx + \int_0^T \int_0^l c v_t v dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^l a_t v_x^2 dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1' u^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_2 u^2(l,t)dt - \int_0^\tau \alpha_2' u(0,t)u(l,t)dt-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_1 u^2(0,t) + \frac{1}{2}\beta_2 u^2(l,t) + \alpha_2 u(0,t)u(l,t) = 0.$$

Сделаем следующую оценку:

$$|\int_0^\tau \int_0^l c v v_t dxdt| \leqslant \frac{c_0}{2}\int_0^\tau \int_0^l [v^2 + v_t^2]dxdt.$$

Из представления функции $v(x,t)$ следует неравенство:

$$\int_0^\tau \int_0^l v^2 dxdt \leqslant \tau^2 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt.$$

Учитывая, что $a(x,t) > 0$ всюду в $\overline{Q}_T$, а также принимая во внимание H4, получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a v_x^2(x,\tau)]dx + \alpha_1 u^2(0,t) - 2\alpha_2 u(0,t)u(l,t) - \beta_2 u^2(l,t) \leqslant$$
$$\leqslant c_0 \int_0^\tau \int_0^l [v^2 + v_t^2]dxdt + a_1 \int_0^\tau \int_0^l [v_x^2]dxdt+$$
$$+\int_0^\tau [\alpha_1' u^2(0,t) - 2\alpha_2' u(0,t)u(l,t) - \beta_2' u^2(l,t)]dt.$$

Положим $w(x,t)=\int_0^t v_x(x,\eta)d\eta$. Нетрудно видеть, что

$$v_x(x,t)=-w(x,t)+w(x,\tau),\;\; v_x(x,0)=w(x,\tau).$$

Тогда

$$\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt=\int_0^\tau\int_0^l[w^2(x,t)-2w(x,t)w(x,\tau)+w^2(x,\tau)]dxdt.$$

Оценив интеграл справа и применив неравенство Коши, получим

$$\int_0^\tau\int_0^l v_l^2(x,t)dxdt=\frac{2}{\epsilon}\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,t)dxdt+2\epsilon\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dxdt.$$

Так как $\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dxdt=\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dx$, то выбрав ϵ так чтобы $a_0-2a_1\epsilon\geqslant\frac{a_0}{2}>0$, получим

$$m_0\int_0^l[u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)]dx+\alpha_1u^2(0,t)-2\alpha_2u(0,t)u(l,t)-\beta_2u^2(l,t)\leqslant$$

$$\leqslant c_1\int_0^\tau\int_0^l[w^2+u^2]dxdt+\int_0^\tau[\alpha_1'u^2(0,t)-2\alpha_2'u(0,t)u(l,t)-\beta_2'u^2(l,t)]dt,$$

где $m_0=\min\{1,\frac{a_0}{2}\}$. В силу Н5, имеем

$$\int_0^\tau[\alpha_1'u^2(0,t)-2\alpha_2'u(0,t)u(l,t)-\beta_2'u^2(l,t)]dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\tau[\alpha_1u^2(0,t)-2\alpha_2u(0,t)u(l,t)-\beta_2u^2(l,t)]dt.$$

Тогда

$$\int_0^l[u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)]dx+\alpha_1u^2(0,t)-2\alpha_2u(0,t)u(l,t)-\beta_2u^2(l,t)\leqslant$$

$$\leqslant c_2(\int_0^\tau\int_0^l[w^2+u^2]dxdt+\int_0^\tau[\alpha_1u^2(0,t)-2\alpha_2u(0,t)u(l,t)-\beta_2u^2(l,t)]dt),$$

где $c_2=\max\{c_1,1\}$.

Применив к этому неравенству лемму Гроноулла, получаем

$$\int_0^l[u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)]dx+\alpha_1u^2(0,t)-2\alpha_2u(0,t)u(l,t)-\beta_2u^2(l,t)\leqslant 0.$$

Откуда приходим к утверждению $u(x,t)\equiv 0$. Это означает, что существует не более одного решения поставленной задачи.

Литература

[1] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным условием его закрепления на часим границы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. №2(23). С. 7–14.

[2] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 120 с.

[3] Дюжева А.В. Задача с динамическими условиями для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. №2(23). С. 7–14.

[4] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

[5] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения, 2006. №8(42). С. 1072–1077.

[6] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. №4(86). С. 56–64.

[7] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.:Наука,1983.

[8] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 42 с.

References

[1] Beylin A.B., Pulkina L.S *Zadacha o kolebaniiakh sterzhnia s neizvestnym usloviem ego zakrepleniia na chasim granitsy* [A problem on vibration of a bar with unknown boundary condition on a part of the boundary]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural science Series], 2017, № 2(23), pp. 7–14 [in Russian].

[2] Gording L. *Zadacha Koshi dlia giperbolicheskikh uravnenii* [The Cauchy problem for hyperbolic equations]. M.: Izd-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. [in Russian].

[3] Dyuzheva A.V. *Zadacha s dinamicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Problem with time-dependent boundary conditions for hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural science Series], 2017, № 2(23), pp. 7–14 [in Russian].

[4] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

[5] Lazhetich N.L. *O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka* [On classical solvability of a mixed problem for one-dimensional hyperbolic equation of the second order]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, no. 42(8), pp. 1072–1077 [in Russian].

[6] Pulkina L.S., Dyuzheva A.V. *Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal problem with Steklov's time-varying boundary conditions for a hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural science Series], 2010, no. 4(86), pp. 56–64 [in Russian].

[7] Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Basic problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1983 [in Russian].

[8] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 2004, 798 p. [in Russian].

A.V. Duyzheva[2]

NONLOCAL PROBLEM WITH DYNAMICAL BOUNDARY CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this article, we consider a boundary-value problem with nonlocal dynamical conditions for hyperbolic equation. A feature of such conditions is the presence of both first and second order derivatives with respect to time-variable. Furthermore, boundary conditions are nonlocal to the extent that their representation is a relation between values of the derivatives on different parts of the boundary. The problem under consideration arise when we study vibration of a bar with damping and point masses. The existence and uniqueness of a generalized solution are proved. The proof is based on apriori estimates and Galerkin procedure.

Key words: nonlocal problem, nonlocal dynamical conditions, hyperbolic equation, generalized solution, second order derivatives, bar with damping, apriori estimates, Galerkin procedure.

Статья поступила в редакцию 28/*VII*/2017.
The article received 28/*VII*/2017.

[2] *Duzheva Alexandra Vladimirovna* (aduzheva@rambler.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517.956 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-26-33

В.А. Киричек [1]

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассматривается начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для одномерного гиперболического уравнения. Нелокальное граничное условие является динамическим, так как представляет собой соотношение, в которое помимо значений производных искомого решения по пространственным переменным входят производные первого порядка по переменной времени, а также интеграл от искомого решения по пространственной переменной. Доказано существование единственного обобщенного решения, принадлежащего пространству Соболева. Для доказательства однозначной разрешимости задачи использованы методы, разработанные специально для исследования нелокальных задач. Применение этих методов позволило получить априорные оценки, с помощью которых доказана единственность решения. Доказательство существования решения базируется на полученных в работе априорных оценках и методе Галеркина.

Ключевые слова: нелокальное граничное условие, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, пространство Соболева.

Введение

Важное место при изучении дифференциальных уравнений с частными производными занимают задачи с нелокальными условиями. Нелокальными условиями называются соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных в различных граничных и внутренних точках области, в которой ищется решение задачи. Интегральные условия могут быть различных видов. Например, интегральные условия по пространственной переменной, по переменной времени. Залдачи с нелокальными условиями невозможно исследовать с помощью методов для классических задач. Поэтому необходимо найти другие способы для их изучения. Для некоторых случаев методы уже разработаны, например, если интегральное условие содержит внеинтегральное слагаемое, представляющее собой производную по нормали к границе области.

В работе рассмотрена задача для гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием, представлено обоснование поставленной задачи и доказано существование единственного обобщенного решения.

1. Постановка задачи

Поставим задачу: найти для уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

решение в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{1.2}$$

и граничным условиям, второе из которых представляет собой нелокальное условие

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \alpha u_t(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t) = 0 \tag{1.3}$$

Обозначим

$$\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in [0,T]\}, \Gamma_l = \{(x,t) : x = l, t \in [0,T]\},$$

Киричек Виталия Александровна (vitalya29@gmail.com), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l,$$
$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T),\ \ u_t \in L_2(\Gamma)\},$$
$$\hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T),\ \ v(x,T) = 0\}.$$

Введем понятие обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3). Следуя известной процедуре [7], выведем тождество, которое будет основой нашего определения

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-u_t v_t - a u_x v_x + cuv)dxdt = \int\limits_0^l \psi(x)v(x,0)dx + \int\limits_0^T \alpha u_t(l,t)v(l,t)dt+$$
$$+\int\limits_0^T av(l,t)\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt. \tag{1.4}$$

Определение. Функция $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (1.1) - (1.3), если она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству (1.4) для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$.

2. Основной результат

Теорема. Пусть выполняются следующие условия

$$c \in C(\bar{Q}_T), a \in C(\bar{Q}_T), a_t \in C(\bar{Q}_T),$$
$$\alpha > 0, f \in L_2(Q_T), \quad \varphi \in W_2^1(0,l), \quad \psi \in L_2(0,l).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение поставленной задачи.

Доказательство Для доказательства единственности обобщенного решения покажем, что функция $u(x,t)$, которая представляет собой разность двух обобщенных решений $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, равна нулю всюду в области Q_T. Очевидно, что $u(x,0) = 0$ и выполняется тождество

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-u_t v_t - a u_x v_x + cuv)dxdt = \int\limits_0^T \alpha u_t(l,t)v(l,t)dt+$$
$$+\int\limits_0^T av(l,t)\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dxdt. \tag{2.1}$$

Выберем в качестве $v(x,t)$ в этом тождестве функцию

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_\tau^t u(x,\eta)d\eta; & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0; & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\tau \in [0,T]$ и произвольно. Легко заметить, что эта функция принадлежит пространству $\hat{W}_2^1(Q_T)$ и $v_t = u$.

В результате интегрирования по частям получим

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + a v_x^2(x,0))dx + 2l\int\limits_0^\tau \alpha u^2(l,t)dt = -2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t v_x^2 dxdt-$$
$$-2\int\limits_0^\tau av(l,t)\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dxdt - 2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cuvdxdt. \tag{2.3}$$

Проведем некоторые оценки. В силу условий теоремы существует такая положительная константа c_1, что $max|c(x,t)| \leqslant c_1$. Применив неравенство Коши, получим

$$2|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cuvdxdt| \leqslant c_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v^2 + v_t^2)dxdt.$$

Аналогично в силу теоремы существует положительная константа a_1 такая, что $max|a_t(x,t)| \leqslant a_1$, тогда

$$|\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2 dxdt| \leqslant a\int_0^\tau\int_0^l v_x^2 dxdt.$$

Применив неравенство Коши, получим

$$2|\int_0^\tau av(l,t)\int_0^l K(x)u(x,t)dxdt| \leqslant \int_0^\tau a^2v^2(l,t)dt + \int_0^\tau(\int_0^l Kudx)^2dt. \tag{2.4}$$

Оценим первое и второе слагаемые правой части полученного неравенства

$$\int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2dxdt.$$

$$(\int_0^l K(x)udx)^2 \leqslant \int_0^l K^2(x)dx\int_0^l u^2dx \leqslant K\int_0^l u^2dx.$$

Используя полученные оценки в итоге придем к неравенству

$$\int_0^l (u^2(x,\tau)+av_x^2(x,0))dx + 2l\alpha\int_0^\tau u^2(l,t)dt \leqslant c_1\int_0^\tau\int_0^l(v^2+v_t^2)dxdt+$$

$$+2l\int_0^\tau a^2v_x^2dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l a^2v^2dxdt + K\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + 2a_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2dxdt.$$

Обозначим $m = c_1 + K + c_1\tau + \frac{2a\tau}{l}, m_0 = c_1 + \frac{2a}{l}$. Пусть $m_1 = max[m_0, m]$, тогда неравенство примет вид

$$\int_0^l (u^2 + av_x^2(x,0))dx \leqslant m_1\int_0^\tau\int_0^l(u^2+v_x^2)dxdt. \tag{2.5}$$

Введем вспомогательную функцию

$$w(x,t) = \int_0^t u_x d\eta,$$

из этого представления следует

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau), v_x(x,0) = -w(x,\tau).$$

Тогда

$$v_x^2 \leqslant 2w^2(x,t) + 2w^2(x,\tau).$$

Так как τ является произвольным, то выберем его так, чтобы $a - 2m_1\tau > 0$. Пусть для определенности $a - 2m_1\tau > \frac{a}{2}$. Возьмем $a_1 = \max[1, \frac{a}{2}]$. В итоге

$$a_1\int_0^l (u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau))dx \leqslant m_2\int_0^\tau\int_0^l(u^2+w^2)dxdt.$$

Применняя лемму Гронуолла, получим, что $u(x,\tau) = 0$ для любого $\tau \in [0; \frac{a}{4m_1}]$. Если рассмотреть теперь задачу с начальными данными при $\tau = \frac{a}{4m_1}$, то проведя те же рассуждения, что и выше, докажем, что $u(x,\tau) = 0$ при $\tau \in [0; \frac{a}{2m_1}]$. За конечное число шагов получим, что $u = 0$ во всей области Q_T.

Для доказательства существования обобщенного решения применим метод компактности. Для этого сначала построим последовательность приближенных решений поставленной задачи методом Галеркина. Рассмотрим последовательность $\{w_n(x)\}$, где $w_n \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, которая является линейно независимой и образует полную систему в $W_2^1(\Omega)$. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m d_k(t)w_k(x) \tag{2.6}$$

из соотношений

$$\int_{\Omega}(u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j)dx + \alpha u_t^m(l,t)w_j(l) + a w_j(l)\int_0^l K(x)u(x,t)dx = \int_{\Omega} f w_j dx, \tag{2.7}$$

которые представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно $d_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^m d_k''(t)A_{kj} + \alpha\sum_{k=1}^m d_k'(t)C_{kj} + \alpha\sum_{k=1}^m d_k(t)(B_{kj}+A_{kj}) = f_j(t), \tag{2.8}$$

где $A_{kj} = \int\limits_0^l w_k(x)w_j(x)dx, C_{kj} = w_k(l)w_j(l), B_{kj} = \int\limits_0^l (aw_k(x)'w_j(x)' +$

$+ cw_k(x)w_j(x))dx + a(l,t)w_j(l)\int\limits_0^l K(x)w_k(x)dx, f_j(t) = \int\limits_{\Omega} fw_jdx$. Добавим начальные условия

$$d_k(0) = \gamma_k, \quad d_k'(0) = \eta_k. \tag{2.9}$$

γ_k и η_k такие, что $\varphi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^m \gamma_k w_k(x), \psi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^m \eta_k w_k(x)$. При $m \to \infty$ эти суммы аппроксимируют $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в нормах W_2^1 и L_2 соответственно $\varphi^m(x) \to \varphi(x)$ и $\psi^m(x) \to \psi(x)$. Получили задачу Коши (2.8), (2.9). Такая задача разрешима тогда и только тогда, когда матрица A_{kj} является обратимой. В силу условий на $w_j(x)$ матрица A_{kj} — невырожденная. На w_k налагают дополнительное требование об ортогональности в L_2. В силу теорем обыкновенных диффиренциальных уравнений задача (2.8) с начальными условиями (2.9) однозначно разрешима, и $d_k'' \in L_1(0,T)$. Следовательно, последовательность приближенных решений $\{u^m\}$ построена.

Теперь докажем ограниченность этой последовательности в W_2^1. Для этого нужно получить априорные оценки. Умножим (2.7) на d_j', просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ

$$\int_0^\tau\int_0^l u_{tt}^m u_t^m dxdt + \int_0^\tau\int_0^l a u_x^m u_{xt}^m dxdt + \int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt +$$

$$+\alpha\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt + \int_0^\tau a u_t^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt = \int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dt. \tag{2.10}$$

Проинтегрировав по частям последнее равенство, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l ((u_t^m(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2)dx + \alpha\int_0^\tau u_t^m(l,t))^2 dt +$$

$$+\int_0^\tau a u_t^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt = \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^m(x,0))^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t (u_x^m)^2 dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l a(u_x^m(x,0))^2 dx - \int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt. \tag{2.11}$$

С помощью ограничений на $a(x,t), a_t(x,t)$ и $c(x,t)$, сформулированных в теореме, оценим сверху правую часть (2.11). Получим оценку второго слагаемого

$$\int_0^\tau\int_0^l a_t (u_x^m)^2 dxdt \leqslant a_1\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2 dxdt.$$

Теперь оценим предпоследнее и последнее слагаемые

$$\int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt \leqslant c_1\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2)dxdt,$$

$$\int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt.$$

Получим неравенство

$$\int_0^l ((u_t^m(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2)dx + 2\int_0^\tau \alpha(u_t^m(l,t))^2dt+$$

$$+2\int_0^\tau au_t^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt \leqslant \int_0^l (u_t^m(x,0))^2dx + \ a_1\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2dxdt+$$

$$+\int_0^l a(u_x^m(x,0))^2dx - c_1\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2)dxdt+$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt + \int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2dxdt. \qquad (2.12)$$

Прведем оценку последнего слагаемого левой части (2.12). Но сначала проинтрегрируем его по частям

$$\int_0^\tau au_t^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt = -\int_0^\tau au^m(l,t)\int_0^l K(x)u_t^m dxdt-$$

$$-\int_0^\tau a_tu^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt + a(x,\tau)u^m(l,\tau)\int_0^l K(x)u^m(x,\tau)dx.$$

Оценим каждое слагаемое, входящее в последенее равенство, по отдельности

$$|\int_0^\tau au^m(l,t)\int_0^l K(x)u_t^m dxdt| \leqslant \frac{a_0}{2}\int_0^\tau (u^m(l,t))^2dt + \frac{a_0}{2}\int_0^\tau(\int_0^l Ku_t^m dx)^2dt$$

Используя ранее выведенное неравенство для оценки функции на границе области, получим

$$\int_0^\tau (u^m(l,t))^2dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt,$$

тогда

$$|\int_0^\tau au^m(l,t)\int_0^l K(x)u_t^m dxdt| \leqslant a_0l\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2dxdt + \frac{a_0}{l}\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{a_0K^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2dxdt.$$

Аналогично проводится оценка остальных слагаемых

$$|\int_0^\tau a_tu^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt| \leqslant a_1l\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2dxdt + \frac{a_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{a_1K^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt,$$

$$|a(x,\tau)u^m(l,\tau)\int_0^l K(x)u^m(x,\tau)dx| \leqslant 2la_0\int_0^l (u_x^m)^2dx + \frac{2a_0}{l}\int_0^l (u^m)^2dx+$$

$$+a_0K^2\int_0^l (u^m)^2dx.$$

Тогда

$$\int_0^\tau au_t^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m dxdt \leqslant l(a_0+a_1)\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{1}{l}(a_0+a_1)\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt+\frac{a_1K^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2dxdt+$$

$$+\frac{a_1K^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt+2la_0\int_0^l (u_x^m)^2dx+a_0(\frac{2}{l}+K^2)\int_0^l (u^m)^2dx.$$

Пусть $E=\max[1,a-2la_0,1-a_0(\frac{2}{l}+K^2)]$, а $N=\max[A,B,C]$, тогда, учитывая свойства норм в пространствах L_2 и W_2^1, получим

$$E\int_0^l((u^m)^2+(u_t^m)^2+a(u_x^m)^2)dx\leqslant N\int_0^\tau\int_0^l((u^m)^2+(u_t^m)^2+$$

$$+(u_x^m)^2)dxdt+||f||_{L_2}^2+||\psi||_{L_2}^2+m||\varphi||_{W_2^1}^2.$$

Так как f является ограниченной функцией в $L_2(Q_T)$, φ в $W_2^1(Q_T)$, а ψ в $L_2(Q_T)$,то $||f||_{L_2}^2+$ $+||\varphi||_{W_2^1}^2+$ $+\,||\psi||_{L_2}^2\leqslant P$, где P положительная константа. Тогда последнее неравенство примет вид

$$E\int_0^l((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)_{t=\tau}dx\leqslant M\int_0^\tau\int_0^l((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)dxdt+P.$$

К этому неравенству применима лемма Гронуола, после ее применения и интегрирования по t от 0 до T получим

$$\int_0^T\int_0^l((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)_{t=\tau}dxdt\leqslant\frac{P}{N}(e^{\frac{N}{E}T}-1).$$

Пусть $\frac{P}{N}(e^{\frac{N}{E}T}-1)=L$, тогда $||u^m||_{W_2^1(Q_T)}^2\leqslant L$. Значит последовательность функций ограничена в W_2^1, следовательно, можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из этого же пространства, то есть к $u\in W_2^1$.Покажем , что этот предел и есть искомое обобщенное решение задачи (1.1) - (1.3).Чтобы доказать это, нужно показать, что для любой функции $v(x,t)\in W_2^1$ выполняется интегральное тождество (1.4) с $\psi(x)=0$

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t-au_xv_x+cuv)dxdt=\int_0^T\alpha u_t(l,t)v(l,t)dt+$$

$$+\int_0^l K(x)u(x,t)\int_0^T av(l,t)dxdt+\int_0^T\int_0^l fvdxdt. \tag{2.13}$$

Для этого нужно показать, что для некоторого всюду плотного в W_2^1 множества функций выполняется тождество (2.13). Возьмем функции $\eta^m(x,t)\in W_2^1(0,T)$ и $\eta(x,T)=0$. Умножим (2.7) на η^m. После умножения проинтегрируем по t от 0 до T и просуммируем по j от 1 до m

$$\int_0^T\int_0^l(u_t^m\eta_t^m+au_x^m\eta_x^m+cu^m\eta^m)dxdt+\alpha\int_0^T au_t^m(l,t)\eta^m dt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l f\eta^m dxdt.$$

Последнее равенство справедливо для любых функций $\eta(x,t)=$ $=\sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$. Перейдем к пределу при $m\to\infty$ при фиксированной $\eta(x,t)$

$$\int_0^T\int_0^l(u_t\eta_t+au_x\eta_x+cu\eta)dxdt+\alpha\int_0^l au_t(l,t)\eta(l,t)dt=\int_0^T\int_0^l f\eta dxdt.$$

(2.7) выполняется для предельной функции $u(x,t)$, если $v(x,t)=\eta(x,t)$, поэтому нельзя утверждать,что $u(x,t)$ искомое решение, так как (2.7) выполняется для $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$, а не для любых функций $v(x,t) \in \hat{W}_2^1$. Обозначим множество функций $\eta(x,t)$ через Θ_m. Объединение $\bigcup\limits_j \Theta_j$ является плотным в W_2^1 [7], поэтому тождество для предельной функции $u(x,t)$ выполняется для любых функций $v(x,t) \in \hat{W}_2^1$.

Теорема полностью доказана.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 728 с.

[2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave mation with internal and boundary damping // Journal of applied physics 111, 014702 (2012).

[3] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS. 2010. 240 с.

[4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. № 28. P. 1–10.

[5] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. 2014. № 3(114). С. 9—19.

[6] Пулькина Л.С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2016. № 9. С. 42–50.

[7] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

[1] Бейлин С.А. Об одной краевой задаче для волнового уравнения // Вестник СамГУ. 2011. № 5(86). С. 12–17.

[8] Рогожников А.М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний // Сборник статей молодых ученых ВМК МГУ. 2013. Т. 10. С. 188–214.

[9] Cannon J. R. The solution of tne heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21. P. 155–160.

[10] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.

[11] Пулькина Л.С. Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 1991. № 11. С. 48–51.

[12] Пулькина Л.С. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения // Математические заметки. 1992. Т. 51. Вып. 3. С. 91–96.

References

[1] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977, 728 p. [in Russian].

[2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave mation with internal and boundary damping. *Journal of applied physics* 111, 014702 (2012) [in English].

[3] Korpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010, 240 p. [in Russian].

[4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 1998, no. 28, pp. 1–10 [in English].

[5] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [Task on longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[6] Pulkina L.S. *Zadacha s dinamicheskim nelokal'nym usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2016, no. 9, pp. 42–50 [in Russian].

[7] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

[8] Beylin S.A. *(*Ob odnoi kraevoi zadache dlia volnovogo uravneniia) [On a certain problem for a wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2011, no. 5(86), pp. 12–17 [in Russian].

[9] Rogozhnikov A.M. *O razlichnykh tipakh granichnykh uslovii dlia odnomernogo uravneniia kolebanii* [On various types of boundary conditions for the one-dimensional equation of oscillations]. *Sbornik statei molodykh uchenykh VMK MGU* [Collection of articles of young scientists of the faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of MSU], 2013, Vol. 10, pp. 188–214 [in Russian].

[9] Cannon J.R. The solution of tne heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, Vol. 21, pp. 155–160 [in Russian].

[10] Kamynin L.I. *Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviiami* [A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1964, Vol. 4, no. 6, pp. 1006–1024 [in Russian].

[11] Pulkina L.S. *Ob odnoi neklassicheskoi zadache dlia vyrozhdaiushchegosia giperbolicheskogo uravneniia* [A nonclassical problem for a degenerate hyperbolic equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1991, no. 11, pp. 48–51 [in Russian].

[12] Pulkina L.S. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlia vyrozhdaiushchegosia giperbolicheskogo uravneniia* [Certain nonlocal problem for a degenerate hyperbolic equation]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes], 1992, Vol. 51, no. 3, pp. 48–51 [in Russian].

V.A. Kirichek[2]

PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION FOR A HYPERBOLIC EQUATION

In this paper we consider an initial-boundary problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional hyperbolic equation. Nonlocal condition is dynamic so as represents a relation between values of derivatives with respect of spacial variables of a required solution, first-order derivatives with respect to time variable and an integral of a required solution of spacial variable. We prove the existence and uniqueness of a generalized solution, which belongs to the Sobolev space. To prove uniquely solvability of the problem techniques developed specifically for research nonlocal problems are used. The application of these methods allowed us to obtain a priori estimates, through which the uniqueness of the solution is proved. The proof is based on the a priori estimates obtained in this paper and Galyorkin's procedure.

Key words: nonlocal boundary condition, hyperbolic equation, generalized solution, Sobolev space.

Статья поступила в редакцию 28/*VI*/2017.
The article received 28/*VI*/2017.

[2] *Kirichek Vitaliia Alexandrovna* (vitalya29@gmail.com), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517.987 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-34-40

Т.А. Срибная[1]

О ПРОДОЛЖЕНИИ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

В работе доказаны теоремы о продолжении неаддитивных функций множества, область определения которых, вообще говоря, не является кольцом, на сигма-кольцо множеств. Показано, что непрерывная сверху в нуле исчерпывающая композиционная субмера первого или второго рода может быть продолжена с мультипликативного класса множеств на сигма-кольцо множеств до полной непрерывной в нуле квазитреугольной субмеры. Найдены условия, при выполнении которых композиционная субмера первого (второго) рода продолжается до композиционной субмеры того же рода. Полученное в работе продолжение композиционной субмеры в общем случае не является единственным. Рассмотрены некоторые частные виды субмер, для которых имеет место единственность продолжения.

Ключевые слова: кольцо множеств, сигма-кольцо множеств, мультипликативный класс множеств, исчерпывающая функция множества, непрерывная в нуле функция множества, продолжение функции множества, квазитреугольная субмера, композиционная субмера.

Введение

В настоящее время, наряду с решением задачи о продолжении аддитивных функций множества и полимер [1–3], большое внимание уделяется вопросу о продолжении неаддитивных функций множества (см., например, [4–9]) в связи с приложениями таких функций в различных областях математики: в теории меры, в теории экстремальных задач, в теории игр.

Для простейших классов неаддитивных функций множества теоремы о продолжении доказаны в работах [4; 5]. В работах [6; 7] решена задача о продолжении функций множества, принадлежащих к классу жордановых внешних мер. В работах [8; 9] изучены вопросы о продолжении вещественнозначной квазитреугольной субмеры и субмеры со значениями в частично упорядоченной полугруппе. При этом в работах [6; 7] используется общий топологический принцип продолжения по непрерывности, а в работах [8; 9] продолжение строится конструктивно.

В предлагаемой статье рассматривается вопрос о продолжении непрерывных сверху в нуле, исчерпывающих композиционных субмер первого и второго рода, область определения которых Σ, вообще говоря, не является кольцом, на $\sigma-$кольцо $\overline{\Sigma} \supset \Sigma$ с сохранением свойств композиционности и непрерывности в нуле.

Поскольку, в общем случае, композиционная субмера не является непрерывной в порожденной FN — топологии [10], то при решении задачи о продолжении композиционной субмеры нужно либо строить топологию на Σ, относительно которой субмера была бы равномерно непрерывной, либо строить продолжение конструктивно.

В данной работе выбран второй путь, то есть продолжение композиционной субмеры строится конструктивно, при этом, так же как и в работах [8; 9], применяется лебеговская схема продолжения меры ([11], глава 1. п. 1.5).

1. Определения и обозначения. Примеры

Пусть T — некоторое множество, Σ — некоторый непустой класс подмножеств множества T, $\varnothing \in \Sigma$; $R(\Sigma)$ и $S(\Sigma)$ — соответственно, кольцо и σ — кольцо, порожденные классом Σ; Σ_σ — класс счетных объединений множеств класса Σ; $\Sigma_{\sigma\delta}$ — класс счетных пересечений множеств класса Σ_σ. Если $E \subset T$, то через $E \cap \Sigma$ будем обозначать класс множеств A, для которых $A \subset E$, $A \in \Sigma$; через E' будем обозначать

Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnayata@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

дополнение множества E. Множества $A, B \in \Sigma$ такие, что $A \cup B \in \Sigma$ и $A \cap B = \varnothing$, будем называть парой множеств из Σ и обозначать как $(A, B) \in \Sigma$.

Непустой класс множеств Σ будем называть мультипликативным классом множеств, или кратко, m-классом, если для любых двух множеств из Σ их разность принадлежит Σ.

Из этого определения следует, что, если Σ — m- класс, то

1) $\varnothing \in \Sigma$,

2) если $A, B \in \Sigma$, то $A \cap B \in \Sigma$,

3) если $A, B, C \in \Sigma$, причем $A \subset C$, $B \subset C$, то $A \cup B \in \Sigma$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что функции множества φ заданы на классе множеств Σ, принимают значения из $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$ и $\varphi(\varnothing) = 0$.

Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ сконденсирована на классе множеств $\mathcal{P} \subset \Sigma$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого множества $E \in \Sigma$ существует такое множество $e \in \mathcal{P}$, что

$$\varphi(E \triangle e) < \varepsilon.$$

Функцию множества

$$\varphi'(E) = \sup\{\varphi(A), A \in E \cap \Sigma\}, E \subset T,$$

называют супремацией функции φ.

Определение 1. Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ непрерывна (соответственно, непрерывна сверху, непрерывна снизу) на множестве $E \in \Sigma$, если для любой последовательности множеств $E_n \in \Sigma$, сходящейся к E (соответственно, $E_n \downarrow E$, $E_n \uparrow E$), справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi(E).$$

В случае, если функция множества φ непрерывна (непрерывна сверху) на пустом множестве, говорят, что функция φ непрерывна в нуле (соответственно, непрерывна сверху в нуле).

В случае, если функция множества φ непрерывна снизу на каждом множестве $E \in \Sigma$, говорят, что функция φ непрерывна снизу на Σ.

Определение 2. Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ исчерпывающая, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $E_n \in \Sigma$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = 0.$$

Определение 3. Монотонную функцию множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ называют квазитреугольной субмерой на Σ, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ справедливо: если $\varphi(A) < \delta$ и $\varphi(B) < \delta$, то $\varphi(A \cup B) < \varepsilon$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$ — класс непрерывных, строго возрастающих функций, заданных на $\mathbb{R}^+$ и таких ,что

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \ f(0) = 0; \ f(x) \geqslant x, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Функцию множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ назовем композиционной, если существуют такие функции g, f_1, $f_2 \in \mathcal{F}$, что для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ справедливо

$$\varphi(A \cup B) \leqslant g(f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B)).$$

Монотонную композиционную функцию множества будем называть композиционной субмерой первого рода, если $g(x) = x$, и композиционной субмерой второго рода во всех остальных случаях.

Пример 1. Если φ — аддитивная функция на классе Σ, то для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ справедливо

$$(\varphi(A \cup B))^n \leqslant 2^{n-1}\varphi(A) + 2^{n-1}\varphi(B).$$

Отсюда следует, что функции множества $\mu(E) = \varphi^n(E)$, $E \in \Sigma$, и $\nu(E) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(\varphi(E))^k$, $E \in \Sigma$, где $c_1, c_2, ..., c_n$ — некоторый набор неотрицательных чисел,являются композиционными субмерами, для которых $g(x) = x$, $f_1(x) = f_2(x) = 2^{n-1}x$.

Пример 2. Пусть φ — аддитивная функция на классе Σ. Функция множества $\psi(E) = (\exp\varphi(E)) - 1$ является композиционной субмерой, для которой $g(x) = x$, $f_1(x) = f_2(x) = x^2 + x$.

2. Свойства композиционных субмер и их супремаций

Предложение 1. Пусть φ — композиционная субмера первого рода на m- классе Σ. Если φ непрерывна сверху в нуле, то ее супремация φ' является композиционной субмерой второго рода на классе Σ_σ.

Доказательство. Пусть $E, F \in \Sigma_\sigma$, $E \cap F = \varnothing$. Пусть $A_n \subset R(\Sigma)$, $B_n \subset R(\Sigma)$ и $A_n \uparrow E$, $B_n \uparrow F$. Тогда $(A_n \cup B_n) \uparrow (E \cup F)$.

Пусть $C \in (E \cup F) \cap \Sigma$.

Тогда $(A_n \cup B_n) \cap C \uparrow (E \cup F) \cap C$.

Так как Σ m - класс, то $(A_n \cup B_n) \cap C \in \Sigma$.

Таким образом имеем

$$\varphi(C) \leqslant f_1\varphi(C \cap (A_n \cup B_n)) + f_2\varphi(C \setminus (C \cap (A_n \cup B_n))).$$

Переходя к пределу, в силу непрерывности сверху в нуле функции φ, получим

$$\varphi(C) \leqslant \lim_{n\to\infty} f_1\varphi(C \cap (A_n \cup B_n)).$$

Отсюда, в силу произвольности множества $C \in (E \cup F) \cap \Sigma$, получим

$$\varphi'(E \cup F) \leqslant \lim_{n\to\infty} f_1\varphi(C \cap (A_n \cup B_n)) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} f_1(f_1\varphi(C \cap A_n) + f_2(C \cap B_n)) \leqslant f_1(f_1\varphi'(E) + f_2\varphi'(F)).$$

Предложение 2. Пусть φ — композиционная субмера на кольце Σ. Если φ непрерывна снизу на Σ, то ее супремация φ' является композиционной субмерой на классе Σ_σ того же рода, что и φ.

Доказательство. Пусть φ — композиционная субмера первого рода. Пусть $E \in \Sigma_\sigma$, пусть E_n возрастающая последовательность множеств из Σ, для которой $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Пусть $C \in E \cap \Sigma$. Так как функция φ непрерывна снизу, то

$$\varphi(C) = \lim_{n\to\infty} \varphi(C \cap E_n).$$

Отсюда, в силу монотонности функции φ, получим

$$\varphi(C) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n).$$

Так как множество $C \in E \cap \Sigma$ выбрано произвольно, то

$$\varphi'(E) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n).$$

Отсюда и из условия $E_n \in \Sigma$, $E_n \subset E$ получим

$$\varphi'(E) = \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n). \tag{2.1}$$

Пусть теперь $E, F \in \Sigma_\sigma$, $E \cap F = \varnothing$.

Пусть A_n, B_n — возрастающие последовательности множеств из Σ такие, что

$$A_n \uparrow E, \ \ B_n \uparrow F.$$

В силу (2.1) получим

$$\varphi'(E \cup F) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n \cup B_n).$$

Так как

$$\varphi(A_n \cup B_n) \leqslant f_1\varphi(A_n) + f_2\varphi(B_n) \leqslant f_1\varphi'(E) + f_2\varphi'(F),$$

то

$$\varphi'(E \cup F) \leqslant f_1\varphi'(E) + f_2\varphi'(F),$$

Случай, когда φ — композиционная субмера второго рода, рассматривается аналогично.

Заметим, что в ходе доказательства показано, что функции $f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$ для субмеры φ' на Σ_σ, те же, что и для субмеры φ на Σ.

Предложение 3. Пусть φ — композиционная субмера первого рода на кольце Σ, причем $f_1(x) = x$. Если φ непрерывна сверху в нуле, то ее супремация φ' является композиционной субмерой первого рода на классе Σ_σ, для которой $f_1(x) = x$.

Доказательство. Покажем, что функция φ удовлетворяет условиям предложения 2.

Пусть $E \in \Sigma$, $E_n \subset \Sigma$, $E_n \uparrow E$.

Так как

$$E \subset E_n \cup (E \setminus E_n),$$

то

$$\varphi(E) \leqslant \varphi(E_n) + f_2\varphi(E \setminus E_n), \ \ n = 1, 2, ...$$

Переходя к пределу и учитывая непрерывность сверху в нуле функции φ, получим

$$\varphi(E) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n). \tag{2.2}$$

Так как функция φ монотонна, то

$$\varphi(E_n) \leqslant \varphi(E), \;\; n = 1, 2, ...,$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) \leqslant \varphi(E). \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что функция φ непрерывна снизу на Σ.

Отсюда, в силу предложения 2 и замечания к нему, получим, что супремация φ' является композиционной субмерой первого рода на Σ_σ, для которой $f_1(x) = x$.

3. Теоремы о продолжении

Теорема 1. Пусть φ композиционная субмера, заданная на m- классе Σ. Если функция φ непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая, то существуют σ- кольцо $\overline{\Sigma}$ и квазитреугольная субмера $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$ такие, что

(1) $\overline{\Sigma} \supset S(\Sigma)$;

(2) $\overline{\varphi}$ является продолжением φ на $\overline{\Sigma}$;

(3) $\overline{\varphi}$ — полная функция на $\overline{\Sigma}$;

(4) $\overline{\varphi}$ сконденсирована на классе $R(\Sigma)$;

(5) $\overline{\varphi}$ непрерывна в нуле на $\overline{\Sigma}$;

(6) множество $E \in \overline{\Sigma}$ тогда и только тогда, когда $E = A \triangle B$, где $A \in \Sigma_{\sigma\delta}$, $B \subset A'$, $A' \in \Sigma_{\sigma\delta}$, $\overline{\varphi}(A') = 0$.

Доказательство. Пусть φ композиционная субмера первого рода. Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть $\delta = \min\{f_1^{-1}(\frac{\varepsilon}{2}), f_2^{-1}(\frac{\varepsilon}{2})\}$. Тогда для любой пары множеств $(A, B) \in \Sigma$ из условий $\varphi(A) < \delta$, $\varphi(B) < \delta$ следует

$$\varphi(A \cup B) < f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B) < \varepsilon.$$

Таким образом, функция φ является квазитреугольной субмерой.

Обозначим через $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ наследственное σ- кольцо, порожденное классом Σ_σ.

Положим

$$\overline{\varphi}_0(E) = \inf\{\varphi'(F), E \subset F, F \in \Sigma_\sigma\}, \;\; E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma).$$

Обозначим через $\overline{\Sigma}$ класс тех и только тех подмножеств σ- кольца $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$, на которых функция $\overline{\varphi}_0$ сконденсирована на кольце $R(\Sigma)$:

$$\overline{\Sigma} = \{E : E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma), \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists e \in R(\Sigma) : \overline{\varphi}_0(E\triangle e) < \varepsilon\}.$$

В силу теоремы 2.1 [9] класс множеств $\overline{\Sigma}$ является σ- кольцом, а функция $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0 \,|_{\overline{\Sigma}}$ является квазитреугольной субмерой на $\overline{\Sigma}$, для которой выполнены утверждения (2)—(6) теоремы.

Теорема 2. Пусть φ монотонная функция множества, заданная на m- классе Σ. Если функция φ непрерывна сверху в нуле, исчерпывающая на Σ, а ее супремация φ' на классе Σ_σ является композиционной субмерой некоторого рода, то существуют σ- кольцо $\overline{\Sigma}$ и композиционная субмера $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$ того же рода, что и супремация φ', для которых выполнены утверждения (1)—(6) теоремы 1.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ — наследственное σ- кольцо, порожденное классом Σ_σ; пусть

$$\overline{\varphi} = \inf\{\varphi'(F), E \subset F, F \in \Sigma_\sigma\}, \;\; E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma).$$

Покажем, что функция $\overline{\varphi}_0$ является композиционной субмерой на $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ того же рода, что и супремация φ' на классе Σ_σ (с теми же функциями $g, f_i \in \mathcal{F}$, $\; i = 1, 2$, что и для супремации φ').

Пусть, для определенности, φ — квазитреугольная субмера второго рода. Пусть $E_1, E_2 \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Пусть $F_1, F_2 \in \Sigma_\sigma$, причем $E_1 \subset F_1$, $E_2 \subset F_2$. . Тогда

$$\overline{\varphi}_0(E_1 \cup E_2) \leqslant \varphi'(F_1 \cup F_2) \leqslant g(f_1\varphi'(F_1) + f_2\varphi'(F_2)).$$

Отсюда, в силу произвольности множеств $F_1, F_2 \in \Sigma_\sigma$ и определения функции $\overline{\varphi}_0$, получим

$$\overline{\varphi}_0(E_1 \cup E_2) \leqslant g(f_1\overline{\varphi}_0(E_1) + f_2\overline{\varphi}_0(E_2)).$$

Положим

$$\overline{\Sigma} = \{E : E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma), \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists e \in R(\Sigma) : \overline{\varphi}_0(E\triangle e) < \varepsilon\};$$

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0 \,|_{\overline{\Sigma}} \,.$$

Для завершения доказательства осталось применить теорему 1.

Из предложений 1, 2 и теоремы 2 вытекает справедливость следствий 1 и 2.

Следствие 1. Пусть функция множества φ задана на классе множеств Σ, непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая. Если Σ — m- класс, а φ — композиционная субмера первого рода на Σ, то существуют σ-

кольцо $\overline{\Sigma}$ и композиционная субмера второго рода $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$, для которых выполнены утверждения (1)—(6) теоремы 1.

Следствие 2. Пусть функция множества φ задана на классе множеств Σ, непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая. Если Σ — кольцо множеств, а φ — непрерывная снизу композиционная субмера на Σ, то существуют σ- кольцо $\overline{\Sigma}$ и композиционная субмера $\overline{\varphi}$ на $\overline{\Sigma}$ того же рода, что и φ, для которых выполнены утверждения (1)—(6) теоремы 1.

4. Единственность продолжения частных видов композиционных субмер

Рассмотрим вопрос об единственности продолжения.

Пример. Пусть $p, q > 0$. Пусть $T = [0; 2p]$, λ — мера Лебега на T, Σ — кольцо множеств, порожденное полукольцом промежутков вида $(a; b]$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2p$. На $\mathbb{R}^+$ определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} x, 0 \leqslant x < p; \\ x + q, p \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Пусть Σ_0 — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств отрезка $[0; 2p]$. Для любого множества $E \in \Sigma_0$ положим $\mu(E) = g\lambda(E)$. Пусть $(A, B) \in \Sigma_0$, тогда

$$\mu(A \cup B) = g\lambda(A \cup B) = g(\lambda(A) + \lambda(B)) \leqslant k\lambda(A) + k\lambda(B),$$

где $k = 1 + \frac{q}{p}$.

Отсюда следует, что μ — композиционная субмера первого рода,

$$f_1(x) = f_2(x) = \left(1 + \frac{q}{p}\right) x.$$

Рассмотрим сужение μ_1 функции μ на кольцо Σ, положив для любого множества $E \in \Sigma$

$$\mu_1(E) = \mu(E).$$

В силу теоремы 1 функцию μ_1 можно продолжить до квазитреугольной (точнее, до композиционной субмеры) $\overline{\mu}_1$ на σ- кольцо $\overline{\Sigma} \supset \Sigma$.

Покажем, что даже на классе Σ_σ функции $\overline{\mu}_1$ и μ принимают различные значения.

Пусть

$$E_0 = (0; p); \;\; E_n = \left(\frac{1}{2^n}; p - \frac{1}{2^n}\right]; \;\; n = 1, 2, ...$$

Так как $E_n \in \Sigma$ и $E_n \uparrow E_0$, то $E_0 \in \Sigma_\sigma$.

Тогда по определению функции $g(x)$, имеем

$$\mu(E_0) = g\lambda(E_0) = p + q.$$

В то же время, так как $E_0 \in \Sigma_\sigma$, то

$$\overline{\mu}_1(E_0) = \mu'(E_0) = \sup\{\mu(A), \;\; A \in E_0 \cap \Sigma\} = \sup\{g\lambda(A), A \in E_0 \cap \Sigma\} = p.$$

Данный пример показывает, что, вообще говоря, даже композиционная субмера первого рода продолжается не единственным образом.

В то же время, если в теореме 1 предположить, что класс множеств Σ — кольцо, а φ — композиционная субмера первого рода на Σ, причем $f_1(x) = x$ (в частном случае φ может быть монотонной полуаддитивной функцией множества), то продолжение $\overline{\varphi}$ функции множества φ на σ- кольцо $\overline{\Sigma} \supset \Sigma$, для которого выполнены утверждения (1)—(6), является единственным.

Покажем это.

Предположим, что существуют σ- кольца $\overline{\Sigma}_1$ и $\overline{\Sigma}_2$, композиционные субмеры $\overline{\varphi}_1$ на $\overline{\Sigma}_1$ и $\overline{\varphi}_2$ на $\overline{\Sigma}_2$, для которых справедливы утверждения (1)—(6) теоремы 1.

На σ- кольце $S(\Sigma)$, порожденном кольцом Σ, зададим функцию

$$\nu(E) = \overline{\varphi}_1(E) + \overline{\varphi}_2(E), \;\; E \in S(\Sigma.)$$

В силу теоремы 1 функция ν множества является квазитреугольной субмерой, непрерывной сверху в нуле и исчерпывающей на $S(\Sigma)$. Отсюда следует, что для любого множества $E \in S(\Sigma)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $e \in \Sigma$, что $\nu(E \triangle e) < \varepsilon$.

Пусть $E \in S(\Sigma)$. Последовательно полагая $\varepsilon = 1; \frac{1}{2}; ...; \frac{1}{n}$, построим последовательность множеств $\{e_n\} \subset \Sigma$ такую, что

$$\lim_{n \to \infty} \nu(E \triangle e_n) = 0.$$

Из предложения 3 и теоремы 2 следует, что функции множества $\overline{\varphi}_1$ и $\overline{\varphi}_2$ являются композиционными субмерами первого рода, для которых $f_1(x) = x$.

Так как

$$E \subset e_n \cup (E \setminus e_n), \;\; n = 1, 2, ...,$$

то

$$\overline{\varphi}_i(E) \leqslant \overline{\varphi}_i(e_n) + f\overline{\varphi}_i(E \setminus e_n), \;\; f \in \mathcal{F}; \;\; i = 1, 2; \;\; n = 1, 2, ...$$

Переходя к пределу, получим

$$\overline{\varphi}_i(E) \leqslant \lim_{n \to \infty} \overline{\varphi}_i(e_n), \;\; i = 1, 2.$$

Так как $e_n \subset E \cup (e_n \setminus E)$, $n = 1, 2, ...,$ то

$$\overline{\varphi}_i(e_n) \leqslant \overline{\varphi}_i(E) + f\overline{\varphi}_i(e_n \setminus E), \;\; f \in \mathcal{F}; \;\; i = 1, 2, ...$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\varphi}_i(e_n) \leqslant \overline{\varphi}_i(E), \;\; i = 1, 2.$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\varphi}_i(e_n) = \lim_{n \to \infty} \varphi(e_n), \;\; i = 1, 2,$$

то

$$\overline{\varphi}_1(E) = \overline{\varphi}_2(E).$$

Отсюда, учитывая структуру множеств σ- колец $\overline{\Sigma}_1$ и $\overline{\Sigma}_2$ (утверждение (6) теоремы 1), получим

$$\overline{\Sigma}_1 = \overline{\Sigma}_2 = \overline{\Sigma},$$

а также

$$\overline{\varphi}_1(E) = \overline{\varphi}_2(E)$$

для любого множества $E \in \overline{\Sigma}$.

Замечание 1. Основные результаты работы, распространяющие классическую теорему о лебеговском продолжении меры ([11], теорема 1.5.6) на случай неаддитивных функций множества, были депонированы автором в работе [12].

Замечание 2. Применение конструкции Лебега к продолжению неаддитивных функций множества позволило найти условия на функции множества (композиционность, непрерывность сверху в нуле, исчерпываемость), достаточные для продолжения таких функций с мультипликативного класса множеств на сигма-кольцо.

Литература

[1] Ricanova Z. On the extension of measures with values in partially ordered semigroups // Math. Nachr. 1982. V. 106. P. 201–209.

[2] Boccuto A. On Stone-type extensions for group-valued measures // Math. Slov. 1995. V. 45. № 3. P. 309–315.

[3] Dobrakov I. On extension of vector polymeasures, II // Math. Slov. 1995. V. 45. № 4. P. 377–380.

[4] Алексюк В.Н. Безносиков Ф.Д. Продолжение непрерывной внешней меры на булевой алгебре // Изв. вузов. Матем. 1972. № 4. С. 3–9.

[5] Гусельников Н.С. О продолжении квазилипшицевых функций множества // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 21–31.

[6] Малюгин С.А. Топология покрывающих множеств и непрерывное продолжение внешних мер. // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 2. С. 285–292.

[7] Савельев Л.Я. Внешние меры и внешние топологии // Сиб. матем. журн. 1983. № 2. С. 133–149.

[8] Климкин В.М., Срибная Т.А. Продолжение квазитреугольной субмеры // Изв. вузов. Матем. 1992. № 2. С. 42–48.

[9] Срибная Т.А. Продолжение функции множества со значениями в частично упорядоченной полугруппе // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2007. № 6 (56). С. 269–280.

[10] Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration, I, II // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci Math. Astr. Phus. 1972. V. 20. № 4. P. 269–276, 277–286.

[11] Богачев В.И. Основы теории меры // Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2006. Т. 1. 583 с.

[12] Срибная Т.А. О продолжении композиционной функции множества // Деп. в ВИНИТИ РАН. Самарский государственный университет. Самара. 2013. № 52-В2013. 15 с.

References

[1] Ricanova Z. On the extension of measures with values in partially ordered semigroups. *Math. Nachr*, 1982, Vol. 106, pp. 201–209 [in Englsih].

[2] Boccuto A. On Stone-type extensions for group-valued measures. *Math. Slov.*, 1995, Vol. 45, № 3, pp. 309–315 [in English].

[3] Dobrakov I. On extension of vector polymeasures, II. *Math. Slov.*, 1995, Vol. 45, № 4, pp. 377–380 [in English].

[4] Aleksyuk V.N., Beznosikov F.D. *Prodolzhenie nepreryvnoi vneshnei mery na bulevoi algebre* [Continuation of a continuous exterior measure on a Boolean algebra]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1972, no. 4, pp. 3–9 [in Russian].

[5] Guselnikov N.S. *O prodolzhenii kvazilipshitsevykh funktsii mnozhestva* [On the extension of quasi-Lipschitz set functions]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1975, Vol. 17, no 1, pp. 21–31 [in Russian].

[6] Malyugin S.A. *Topologiia pokryvaiushchikh mnozhestv i nepreryvnoe prodolzhenie vneshnikh mer* [The topology of covering sets and continuous continuation of external measures]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1979, Vol. 26, no 2, pp. 285–292 [in Russian].

[7] Saveliev L.Ya. *Vneshnie mery i vneshnie topologii* [External measures and external topologies]. *Cib. matem. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1983, no. 2, pp. 133–149 [in Russian].

[8] Klimkin V.M., Sribnaya T.A. *Prodolzhenie kvazitreugol'noi submery* [Continuation of quasi-triangular submeasure]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1992, no 2, pp. 42–48 [in Russian].

[9] Sribnaya T.A. *Prodolzhenie funktsii mnozhestva so znacheniiami v chastichno uporiadochennoi polugruppe* [Continuation of the set function with values in a partially ordered semigroup]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University], 2007, no 6(56), pp. 269–280 [in Russian].

[10] Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration, I, II. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci Math. Astr. Phus*, 1972, Vol. 20, no 4, pp. 269–276, 277–286 [in English].

[11] Bogachev V.I. *Osnovy teorii mery* [Fundamentals of measure theory]. In: *Moskva-Izhevsk: NITs Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika* [Moscow-Izhevsk: scientific research centre Regular and chaotic dynamics], 2006, Vol. 1, 583 p. [in Russian].

[12] Sribnaya T.A. *O prodolzhenii kompozitsionnoi funktsii mnozhestva* [On the continuation of the composite function of the set]. In: Depository in the All-Union Institute of Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences. Samara National Research University. Samara, 2013, no 52-B2013, 15 p. [in Russian].

***T.A. Sribnaya*[2]**

ON THE EXTENSION OF NON-ADDITIVE SET FUNCTIONS

In this paper we prove theorems on the extension of non-additive set functions domain of definition of which, generally speaking, is not a ring, on the sigma-ring of sets. It is shown that continuous from the top at zero, the exhaustive compositional submersion of the first or second kind can be continued from the multiplicative class of sets to the sigma-ring of sets to a complete quasitriangular submerse complete at zero. Conditions are found under which the composition sub-measure of the first (second) kind extends to the composition sub-measure of the same kind. The continuation of the composite submerses obtained in the work is, in general, not unique. Some particular types of submeasures are considered, for which uniqueness of continuation takes place.

Key words: extension of set functions, exhaustive non-additive set functions, composition submeasures.

Статья поступила в редакцию 28/*VIII*/2017.
The article received 28/*VIII*/2017.

[2] *Sribnaya Tatyana Arkadievna* (sribnayata@mail.ru), Department of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517+531.01 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-41-64

М.В. Шамолин[1]

О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ[2]

В предлагаемом цикле работ исследуются уравнения движения динамически симметричного закрепленного n-мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n-мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В данной работе выводятся общие многомерные динамические уравнения изучаемых систем.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

1. Модельные предположения

Рассмотрим однородный $(n-1)$-мерный круговой диск $\mathcal{D}^{n-1}$ с центром в точке D, гиперплоскость которого в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ перпендикулярна державке OD. Диск жестко прикреплен к державке, находящейся на (обобщенном) сферическом шарнире O, и обтекается однородным потоком среды. В этом случае тело представляет собой физический (обобщенный сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила $\mathbf{S}$ воздействия потока среды на диск перпендикулярна диску $\mathcal{D}^{n-1}$, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}_D$ точки D относительно потока и державкой OD, углами $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, измеряемыми в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$ (таким образом, $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты конца вектора $\mathbf{v}_D$), а также тензором приведенной угловой скорости $\tilde{\omega} \cong l\tilde{\Omega}/v_D$, $v_D = |\mathbf{v}_D|$ (l — длина державки, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости маятника). Подобные условия обобщают модель струйного обтекания пространственных тел [1, 2, 3].

Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/l$ определяет ориентацию державки. Тогда $\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}$, где $s(\alpha) = s_1(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha$, при этом коэффициент сопротивления $s_1 \geqslant 0$ зависит лишь от угла атаки α. В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно оси $Dx_1 = OD$ функция $s(\alpha)$ (формально) является четной.

Пусть $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось Dx_1 имеет направляющий вектор $\mathbf{e}$, а оси $Dx_2, \ldots, Dx_{n-1}$ и Dx_n лежат в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$.

Углами $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$ мы определим положение державки OD в n-мерном пространстве $\mathbf{E}^n$. При этом угол ξ будем измерять между державкой и направлением набегающего потока. Другими словами, вводимые углы являются (обобщенными) сферическими координатами точки D центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$ на $(n-1)$-мерной сфере постоянного радиуса OD.

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является $(n-1)$-мерная сфера

$$\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}: \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}, \tag{1.1}$$

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

а фазовым пространством — касательное расслоение $(n-1)$-мерной сферы

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\left\{(\dot{\xi},\dot{\eta}_1,\ldots,\dot{\eta}_{n-2};\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:\right.$$
$$\left.0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2}\mod 2\pi\right\}. \tag{1.2}$$

Тензор (второго ранга) $\tilde{\Omega}$ угловой скорости в системе координат $Dx_1\ldots x_n$ будем определять через кососимметрическую матрицу. Так, для определенности, в случае $n=5$ эта матрица примет вид

$$\tilde{\Omega}=\begin{pmatrix}0&-\omega_{10}&\omega_9&-\omega_7&\omega_4\\ \omega_{10}&0&-\omega_8&\omega_6&-\omega_3\\ -\omega_9&\omega_8&0&-\omega_5&\omega_2\\ \omega_7&-\omega_6&\omega_5&0&-\omega_1\\ -\omega_4&\omega_3&-\omega_2&\omega_1&0\end{pmatrix},\ \ \tilde{\Omega}\in\mathrm{so}(5). \tag{1.3}$$

Расстояние от центра D диска $\mathcal{D}^{n-1}$ до центра давления (точки N) будет иметь вид $|\mathbf{r}_N|=r_N= =DN\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},l\Omega/v_D\right)$, где $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},\ldots,x_{nN}\}$ в системе $Dx_1\ldots x_n$ (волну над Ω опустим).

Сразу же заметим, что, также как и в маломерных случаях, используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по тензору угловой скорости маятника (см. также [3, 4]). Анализ задачи о(б) (обобщенном) сферическом (физическом) маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных многомерных тел.

2. Некоторые общие рассуждения

2.1. Случаи динамической симметрии многомерного тела

Пусть n-мерное твердое тело Θ массы m с гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Theta$ находится в некотором (вообще говоря, неконсервативном) поле сил (это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей n-мерную область евклидового пространства $\mathbf{E}^n$).

Предположим, что оно является динамически симметричным. Так, например, для четырехмерного тела имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_2,I_2,I_2\} \tag{2.1}$$

(так называемый случай (1—3)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_1,I_3,I_3\} \tag{2.2}$$

(случай (2—2)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Для пятимерного тела было бы логично рассмотреть случаи *трех* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_2,I_2,I_2,I_2\} \tag{2.3}$$

(случай (1—4)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,I_1,I_3,I_3,I_3\} \tag{2.4}$$

(случай (2—3)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4x_5$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерная и трехмерная плоскости Dx_1x_2 и $Dx_3x_4x_5$ являются плоскостями динамической симметрии тела.

Соответственно, для n-мерного тела было бы логично рассмотреть случаи $n-1$ независимых равенств главных моментов инерции. При этом возможны $[n/2]$ (здесь [...] — целая часть) вариантов вида (2.1), (2.2) (или (2.3), (2.4)). Так, например, для шестимерного тела возможны три случая — (1—5), (2—4), (3—3).

Для случая n-мерного твердого тела нас будет *прежде всего* интересовать случай $(1—(n-1))$, т.е. когда в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1\ldots x_n$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1,\underbrace{I_2,\ldots,I_2}_{n-1}\}, \tag{2.5}$$

а именно, в гиперплоскости $Dx_2\ldots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

2.2. Динамика на so(n) и $\mathbf{R}^n$

Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbf{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на связную группу его вращений SO(n) (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbf{R}^n \times \mathrm{SO}(n) \tag{2.6}$$

и имеет размерность $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твердого тела (а он является терзором второго ранга [4, 5, 6]), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли* so(n), имеет следующий вид [6, 7]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{2.7}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{2.8}$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2},\ \ \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \ldots,$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2},\ \ \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли so(n), $[.,.]$ — коммутатор в so(n). Так, например, кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли so(5).

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \tag{2.10}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathrm{so}(n), \tag{2.11}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \tag{2.12}$$

из $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли so(n), где

$$\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\},\ \ \mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}, \tag{2.13}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы — это и есть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли so(n).

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_f, f = 1, \ldots, n(n-1)/2$, на алгебре Ли so$(n)$, то введем такую же упорядоченность и для вычисления момента $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$. Действительно, первая группа G_1 координат искомого момента состоит из $n-1$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-1} & \delta_n \\ F_{n-1} & F_n \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_n \\ F_{n-2} & F_n \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_n \\ F_{n-3} & F_n \end{vmatrix},\ \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_n \\ F_1 & F_n \end{vmatrix}.$$

Вторая группа G_2 координат состоит из $n-2$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_{n-1} \\ F_{n-2} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_{n-1} \\ F_{n-3} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-4} & \delta_{n-1} \\ F_{n-4} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ \ldots, (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_{n-1} \\ F_1 & F_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Продолжая далее, заключительная группа G_{n-1} координат состоит из одного минора

$$+\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, первые миноры в любой группе начинаются со знака "+".

Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть *координатами момента* $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ *силы* $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [8, 9, 10]. При этом нам потребуется практически "в лоб" исследовать часть основного уравнения динамики, а именно, в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству* $\mathbf{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса, при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \ \ \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \ \ E = \dot{\Omega}, \tag{2.16}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело, E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Если положение тела Θ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ определяется функциями, которые являются в следующем смысле циклическими, т.е. обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей, и не зависят от положения тела в пространстве), то система уравнений (2.7), (2.15) на многообразии $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (2.6) и может быть исследована самостоятельно.

В частности, правая часть системы (2.7) при $n = 5$ примет вид

$$\begin{gathered} M = \{M_1, M_2, \ldots, M_{10}\} = \\ = \{\delta_4F_5 - \delta_5F_4, \delta_5F_3 - \delta_3F_5, \delta_2F_5 - \delta_5F_2, \delta_5F_1 - \delta_1F_5, \delta_3F_4 - \delta_4F_3, \\ \delta_4F_2 - \delta_2F_4, \delta_1F_4 - \delta_4F_1, \delta_2F_3 - \delta_3F_2, \delta_3F_1 - \delta_1F_3, \delta_1F_2 - \delta_2F_1\}, \end{gathered} \tag{2.17}$$

где $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ — компоненты тензора момента внешней силы в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -M_{10} & M_9 & -M_7 & M_4 \\ M_{10} & 0 & -M_8 & M_6 & -M_3 \\ -M_9 & M_8 & 0 & -M_5 & M_2 \\ M_7 & -M_6 & M_5 & 0 & -M_1 \\ -M_4 & M_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

3. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$

В нашем случае закрепленного маятника реализуется случай (2.5). Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли so(n):

$$
\begin{gathered}
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=\\
=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=\\
=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}+(I_1-I_2)W_{2}(\Omega)=\\
=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}+(I_2-I_1)W_{1}(\Omega)=\\
=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

при этом $r_{n-2}+1=r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t=1,\ldots,n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1,\ldots,\omega_f$, $f=n(n-1)/2$, тензора Ω, причем $(k_j\neq r_i)$

$$
W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1}=\ldots=\omega_{k_s}=0}=0, s=(n-1)(n-2)/2, j=1,\ldots,s, i=1,\ldots,n-1. \tag{3.2}
$$

Поясним формулу (3.2). Всего компонент у тензора $\Omega\in$ so(n) имеется $f=n(n-1)/2$ штук. Соответственно, компонент у момента силы $M_F=(\mathbf{DN},\mathbf{F})$ столько же. Поскольку вспомогательная матрица (2.14) имеет вид

$$
\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN}\\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}, \tag{3.3}
$$

в правой части системы (3.1) $s=(n-1)(n-2)/2$ уравнений содержат тождественный нуль. Эти номера уравнений мы обозначим через $k_1,\ldots,k_s$. При этом соответствующие компоненты $\omega_{k_j}, j=1,\ldots,s$, тензора Ω угловой скорости будем называть *циклическими*.

Оставшиеся номера уравнений, в которых стоят следующие величины со знаком $x_{lN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v\right)s(\alpha)v^2$, $l=2,\ldots,n$, мы обозначаем через $r_1,\ldots,r_{n-1}$, поскольку $f-s=$ $=n(n-1)/2-(n-1)(n-2)/2=n-1$.

Очевидно, что $W_t(0)\equiv 0$ для любых $t=1,\ldots,n-1$, т.е. квадратичные формы $W_t(\Omega)$ обращаются в нуль, когда все компоненты тензора Ω нулевые. Так вот формула (3.2) означает, что для обращения в нуль квадратичных форм $W_t(\Omega)$, $t=1,\ldots,n-1$, достаточно, чтобы все циклические компоненты тензора Ω были нулевые.

В частности, в случае $n=5$ данная система примет вид:

$$
\begin{gathered}
(I_1+2I_2)\dot\omega_1=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_2=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_3=0,\\
3I_2\dot\omega_4+(I_1-I_2)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_5=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_6=0,\\
3I_2\dot\omega_7+(I_2-I_1)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_8=0,\\
3I_2\dot\omega_9+(I_1-I_2)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_{10}+(I_2-I_1)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

поскольку момент силы воздействия среды при $n=5$ определяется через следующую вспомогательную матрицу:

$$
\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N}\\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.5}
$$

где $\{-s(\alpha)v_D^2,0,0,0,0\}$ — разложение силы $\mathbf{S}$ воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$. При этом $r_1=4$, $r_2=7$, $r_3=9$, $r_4=10$.

Поскольку размерность алгебры Ли so(n) равна $f=n(n-1)/2$, система уравнений (3.1) и составляет группу динамических уравнений на so(n).

Видно, что в правую часть системы уравнений (3.1) входят, прежде всего, углы $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

3.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (3.1), полученная из (2.7) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{3.6}$$

обладает $s = (n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \text{const}, \ \ldots, \ \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \text{const}, \ s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{3.7}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{3.8}$$

В частности, система (3.4) обладает первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \ \omega_2 \equiv \omega_2^0, \ \omega_3 \equiv \omega_3^0, \ \omega_5 \equiv \omega_5^0, \ \omega_6 \equiv \omega_6^0, \ \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{3.9}$$

рассматриваемых на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{3.10}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = f - s = n - 1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

При условиях (3.6)–(3.8) система (3.1) примет вид незамкнутой системы $n-1$ уравнений:

$$\begin{array}{c}
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2.
\end{array} \tag{3.11}$$

В частности, при условиях (3.9)–(3.10) система (3.4) примет вид незамкнутой системы четырех уравнений:

$$\begin{array}{c}
3I_2\dot{\omega}_4 = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_7 = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_9 = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_{10} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2.
\end{array} \tag{3.12}$$

4. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{4.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Равенство (4.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1\ldots x_n$.

Действительно, в левой части равенства (4.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1 \ldots x_n$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — единичный вектор вдоль оси вектора $\mathbf{v}_D$. Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ имеет (обобщенные) сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, определяющие разложение (4.2).

В правой части равенства (4.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, \ldots, 0\}$ в системе координат $Dx_1 \ldots x_n$.

На втором слагаемом правой части равенства (4.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, \ldots, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1 \ldots x_n$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (4.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{gathered}
v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi, \\
v_D \sin\alpha \cos\beta_1 = l\omega_{r_{n-1}} + v_\infty \sin\xi \cos\eta_1, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 = -l\omega_{r_{n-2}} + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \cos\eta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} = \\
= (-1)^{n+1} l\omega_{r_2} + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3} \cos\eta_{n-2}, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} = (-1)^n l\omega_{r_1} + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-2}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

В частности, в случае $n = 5$ данная группа уравнений примет вид:

$$\begin{gathered}
v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi, \\
v_D \sin\alpha \cos\beta_1 = l\omega_{10} + v_\infty \sin\xi \cos\eta_1, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 = -l\omega_9 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \cos\eta_2, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 = l\omega_7 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 \cos\eta_3, \\
v_D \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 = -l\omega_4 + v_\infty \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 \sin\eta_3.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

5. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости Ω и координаты $\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ фазового пространства (1.2) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbf{S}^n\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных $\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$, через новые переменные $z_1, \ldots, z_{n-1}$ (из набора z). Для этого производится следующая композиция поворотов на углы $\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\eta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\eta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\eta.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\eta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\eta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\eta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

В частности, при $n=5$ преобразуются величины $\omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}$ посредством композиции следующих трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_3) \circ T_{2,3}(\eta_2) \circ T_{3,4}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

где

$$T_{3,4}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\eta & -\sin\eta \\ 0 & 0 & \sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta & -\sin\eta & 0 \\ 0 & \sin\eta & \cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta & 0 & 0 \\ \sin\eta & \cos\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\eta_1) \circ T_{2,3}(-\eta_2) \circ T_{1,2}(-\eta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

т.е.

$$\begin{gathered} z_1 = \omega_4 \cos\eta_3 + \omega_7 \sin\eta_3, \\ z_2 = (\omega_7 \cos\eta_3 - \omega_4 \sin\eta_3)\cos\eta_2 + \omega_9 \sin\eta_2, \\ z_3 = [(-\omega_7 \cos\eta_3 + \omega_4 \sin\eta_3)\sin\eta_2 + \omega_9 \cos\eta_2]\cos\eta_1 + \omega_{10}\sin\eta_1, \\ z_4 = [(\omega_7 \cos\eta_3 - \omega_4 \sin\eta_3)\sin\eta_2 - \omega_9 \cos\eta_2]\sin\eta_1 + \omega_{10}\cos\eta_1. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$\begin{gathered} z_{n-1} = \dot{\xi}, \\ z_{n-2} = -\dot{\eta}_1 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}, \\ z_{n-3} = \dot{\eta}_2 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_2 = (-1)^{n+1}\dot{\eta}_{n-3}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-4}, \\ z_1 = (-1)^{n}\dot{\eta}_{n-2}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-3}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

В частности, при $n=5$ имеем следующие формулы:

$$\begin{gathered} z_4 = \dot{\xi}, \\ z_3 = -\dot{\eta}_1 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}, \\ z_2 = \dot{\eta}_2 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1, \\ z_1 = -\dot{\eta}_3 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \sin\eta_2. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Таким образом, две группы уравнений (5.1) и (5.7) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \dots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \dots \circ$$

$$\circ T_{n-3,n-2}(\eta_2) T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} (-1)^n \dot{\eta}_{n-2}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-3} \\ (-1)^{n+1}\dot{\eta}_{n-3}\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\eta}_2 \tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \\ -\dot{\eta}_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

В частности, при $n=5$ имеем:

$$\begin{gathered}\omega_4=-\dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3-\dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3-\\ -\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\sin\eta_3-\dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\ \omega_7=\dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3+\dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3+\\ +\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\cos\eta_3-\dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3,\\ \omega_9=-\dot\xi\sin\eta_1\cos\eta_2-\dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\cos\eta_2+\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2,\\ \omega_{10}=\dot\xi\cos\eta_1-\dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1.\end{gathered}\tag{5.10}$$

Видно, что три группы соотношений (3.11), (4.3), (5.9) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v_D}\right),\ \ldots,\ x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v_D}\right),\ s(\alpha).\tag{5.11}$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α, а функции $x_{2N},\ldots,x_{nN}$ могут зависеть, наряду с углами α, β_1, $\ldots$, β_{n-2}, вообще говоря, и от приведенного тензора угловой скорости $l\Omega/v_D$.

6. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного динамически симметричного (случай (2.5)) n-мерного твердого тела с передним торцом (круговым $(n-1)$-мерным диском $\mathcal{D}^{n-1}$) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [9, 11] с той же моделью воздействия среды.

Если $(v,\alpha,\ldots,\beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости центра D диска $\mathcal{D}^{n-1}$, лежащего на оси симметрии тела, Ω — тензор угловой скорости тела (для случая $n=5$ см. (1.3)) в системе координат $Dx_1\ldots x_n$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2,Dx_3,\ldots,Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3=I_2$, $\ldots$, $I_n=I_2$, m — инерционно-массовые характеристики, то может быть получена динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v\cos\alpha\\ v\sin\alpha\cos\beta_1\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix}+\Omega\begin{pmatrix}v\cos\alpha\\ v\sin\alpha\cos\beta_1\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}\\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix}+\\ +\Omega^2\begin{pmatrix}-\sigma\\0\\0\\\ldots\\0\\0\end{pmatrix}+\dot\Omega\begin{pmatrix}-\sigma\\0\\0\\\ldots\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1/m\\0\\0\\\ldots\\0\\0\end{pmatrix},\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\ (n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\ (n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\end{gathered}\tag{6.1}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} + (I_1 - I_2)W_2(\Omega) = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2,$$
$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} + (I_2 - I_1)W_1(\Omega) = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2,$$

где $F_1 = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma = CD$, при этом

$$\left(0, x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \ldots, x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right) \tag{6.2}$$

— координаты точки N приложения силы $\mathbf{S}$ в системе координат $Dx_1x_2\ldots x_n$, связанной с телом, $r_{n-2} + 1 = r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1, \ldots, \omega_f$, $f = n(n-1)/2$, тензора Ω, причем выполнены свойства (3.2).

Так, например, в случае $n = 5$ данная система примет вид:

$$\begin{gathered}
\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\
-\omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\
+\sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_1}{m}, \\
\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\
+\omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\
-\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot{\omega_{10}} = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\
-\dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\
+\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot{\omega}_9 = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\
+\dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 - \dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\
+\omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \sigma(\omega_6\omega_{10} + \omega_5\omega_9 - \omega_1\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_7 = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\
+\dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \omega_4 v\cos\alpha + \omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\
-\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \sigma(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) + \sigma\dot{\omega}_4 = 0, \\
(I_1 + 2I_2)\dot{\omega}_1 = 0, \\
(I_1 + 2I_2)\dot{\omega}_2 = 0, \\
(I_1 + 2I_2)\dot{\omega}_3 = 0, \\
3I_2\dot{\omega}_4 + (I_1 - I_2)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
(I_1 + 2I_2)\dot{\omega}_5 = 0, \\
(I_1 + 2I_2)\dot{\omega}_6 = 0, \\
3I_2\dot{\omega}_7 + (I_2 - I_1)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
(I_1 + 2I_2)\dot{\omega}_8 = 0, \\
3I_2\dot{\omega}_9 + (I_1 - I_2)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_{10} + (I_2 - I_1)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2.
\end{gathered} \tag{6.3}$$

Первая группа уравнений системы (6.1) описывают движение центра масс в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ в проекциях на систему координат $Dx_1\ldots x_n$. Вторая же группа уравнений системы (6.1) получены из (2.7). В частности, первые пять уравнений системы (6.3) описывают движение центра масс в пятимерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^5$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$. Вторые же десять уравнений системы (6.3) также получены из (2.7) при $n = 5$.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (6.1) порядка $n(n+1)/2$ является прямое произведение $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} \times \mathrm{so}(n)$ n-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(n)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (6.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [11, 12]). В частности, фазовым пространством системы динамических уравнений (6.3) пятнадцатого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^4 \times \mathrm{so}(5)$ пятимерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$.

6.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (6.1), частично полученная из (2.7), в силу имеющейся динамической симметрии
$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{6.4}$$
обладает $s = (n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами
$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \mathrm{const}, \ \ldots, \ \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \mathrm{const}, \ s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{6.5}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:
$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{6.6}$$

В частности, система (6.3) обладает первыми интегралами
$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \ \omega_2 \equiv \omega_2^0, \ \omega_3 \equiv \omega_3^0, \ \omega_5 \equiv \omega_5^0, \ \omega_6 \equiv \omega_6^0, \ \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{6.7}$$
рассматриваемых на нулевых уровнях:
$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{6.8}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = f - s = n - 1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

6.2. Неинтегрируемая связь

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [13])
$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{6.9}$$
то в системе (6.1) вместо F_1 будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (6.9). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (6.1), получим при $\cos\alpha \neq 0, \ n > 2$:
$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_p}^2) +$$
$$+ s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{(n-2)I_2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{6.10}$$
где
$$\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) =$$
$$= 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{6.11}$$
Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$, $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (6.9)), а именно:
$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{2N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{3N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ \ldots \\ i_{n-1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{nN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) \tag{6.12}$$
(см. (4.2)).

6.2.1. Редукции в системе

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (6.9). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (6.1) в результате действий порождает независимую систему порядка $n(n+1)/2-(n-1)(n-2)2-1=2(n-1)$ следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix}+\Omega^{(1)}\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix}+$$

$$+\Omega^{(2)}\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}+\dot\Omega^{(1)}\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}
(n-2)I_2\dot\omega_{r_1}=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_2}=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}\tag{6.13}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v, при этом матрицы $\Omega^{(1)},\Omega^{(2)}$ размера $(n-1)\times n$ получаются из матриц Ω,Ω^2, соответственно, удалением первой строки.

В частности, при $n=5$ система (6.3) в результате действий порождает независимую систему восьмого порядка следующего вида:

$$\begin{gathered}
\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1-\dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1+\omega_{10}v\cos\alpha-\sigma\dot\omega_{10}=0,\\
\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2-\\
-\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2-\omega_9 v\cos\alpha+\sigma\dot\omega_9=0,\\
\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\\
-\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_7 v\cos\alpha-\sigma\dot\omega_7=0,\\
\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+\\
+\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_4 v\cos\alpha+\sigma\dot\omega_4=0,\\
3I_2\dot\omega_4=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_7=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_9=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_{10}=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}\tag{6.14}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (6.13) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\dot\alpha v\cos\alpha+\ldots=0,\\
\dot\beta_1 v\sin\alpha+\ldots=0,\\
\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1+\ldots=0,
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot\beta_{n-3} v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}+\ldots=0,\\
\dot\beta_{n-2} v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}+\ldots=0,\\
\dot\omega_{r_1}=(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\omega_{r_2}=(-1)^{n-1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot\omega_{r_{n-2}}=-\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\omega_{r_{n-1}}=\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered}
\tag{6.15}
$$

В частности, система (6.14) эквивалентна системе

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha v\cos\alpha+v\cos\alpha\left\{\omega_{10}\cos\beta_1+[(\omega_7\cos\beta_3-\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2-\omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1\right\}+\\
+\sigma\left\{-\dot\omega_{10}\cos\beta_1+[\dot\omega_9\cos\beta_2-(\dot\omega_7\cos\beta_3-\dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\sin\beta_1\right\}=0,\\
\dot\beta_1 v\sin\alpha+v\cos\alpha\left\{[(\omega_7\cos\beta_3-\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2-\omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1-\omega_{10}\sin\beta_1\right\}+\\
+\sigma\left\{[\dot\omega_9\cos\beta_2-(\dot\omega_7\cos\beta_3-\dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\cos\beta_1+\dot\omega_{10}\sin\beta_1\right\}=0,\\
\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1+v\cos\alpha\left\{[\omega_7\cos\beta_3-\omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2+\omega_9\sin\beta_2\right\}+\\
+\sigma\left\{-[\dot\omega_7\cos\beta_3-\dot\omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2-\dot\omega_9\sin\beta_2\right\}=0,\\
\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2+v\cos\alpha\left\{-\omega_4\cos\beta_3-\omega_7\sin\beta_3\right\}+\\
+\sigma\left\{\dot\omega_4\cos\beta_3+\dot\omega_7\sin\beta_3\right\}=0,\\
\dot\omega_4=-\frac{v^2}{3I_2}x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\omega_7=\frac{v^2}{3I_2}x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\omega_9=-\frac{v^2}{3I_2}x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\omega_{10}=\frac{v^2}{3I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered}
\tag{6.16}
$$

6.2.2. Новые квазискорости в системе

Введем новые квазискорости в системе:

$$
\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\ \omega_{r_2}\\ \ldots\\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix}=T_{1,2}(\beta_{n-2})\circ T_{2,3}(\beta_{n-3})\circ\ldots\circ T_{n-2,n-1}(\beta_1)\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ \ldots\\ z_{n-1}\end{pmatrix},
\tag{6.17}
$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k=1,\ldots,n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$
T_{k,k+1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ 0&\ddots&0&0&0\\ 0&0&M_{k,k+1}&0&0\\ 0&0&0&\ddots&0\\ 0&0&0&0&1\end{pmatrix},
\tag{6.18}
$$

$$
M_{k,k+1}=\begin{pmatrix}m_{k,k}&m_{k,k+1}\\ m_{k+1,k}&m_{k+1,k+1}\end{pmatrix},\quad m_{k,k}=m_{k+1,k+1}=\cos\beta,\quad m_{k+1,k}=-m_{k,k+1}=\sin\beta.
$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$
\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ \ldots\\ z_{n-1}\end{pmatrix}=T_{n-2,n-1}(-\beta_1)\circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2)\circ\ldots\circ T_{1,2}(-\beta_{n-2})\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\ \omega_{r_2}\\ \ldots\\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix}.
\tag{6.19}
$$

В частности, при $n=5$ преобразуются величины $\omega_4,\omega_7,\omega_9,\omega_{10}$ посредством композиции следующих трех поворотов:

$$\begin{pmatrix}\omega_4\\ \omega_7\\ \omega_9\\ \omega_{10}\end{pmatrix}=T_{1,2}(\beta_3)\circ T_{2,3}(\beta_2)\circ T_{3,4}(\beta_1)\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}, \tag{6.20}$$

где

$$T_{3,4}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&0&\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta&0\\0&\sin\beta&\cos\beta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta&0&0\\ \sin\beta&\cos\beta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}=T_{3,4}(-\beta_1)\circ T_{2,3}(-\beta_2)\circ T_{1,2}(-\beta_3)\begin{pmatrix}\omega_4\\ \omega_7\\ \omega_9\\ \omega_{10}\end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

т.е.

$$\begin{gathered}z_1=\omega_4\cos\beta_3+\omega_7\sin\beta_3,\\ z_2=(\omega_7\cos\beta_3-\omega_4\sin\beta_3)\cos\beta_2+\omega_9\sin\beta_2,\\ z_3=[(-\omega_7\cos\beta_3+\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2+\omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1+\omega_{10}\sin\beta_1,\\ z_4=[(\omega_7\cos\beta_3-\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2-\omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1+\omega_{10}\cos\beta_1.\end{gathered} \tag{6.22}$$

6.2.3. Системы нормального вида

Как видно из (6.16), на многообразии

$$\begin{aligned}O_1=\big\{&(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\omega_4,\omega_7,\omega_9,\omega_{10})\in\mathbf{R}^8:\\ &\alpha=\pi k/2,\ \ \beta_1=\pi l,\ \ \beta_2=\pi m,\ \ k,l,m\in\mathbf{Z}\}\end{aligned} \tag{6.23}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha,\ \dot\beta_1,\ \dot\beta_2,\ \dot\beta_3$. Формально, таким образом, на многообразии (6.23) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых l,m неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v,\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение системы (6.16) вырождается.

Из этого следует, что система (6.14) вне и только вне многообразия (6.23) эквивалентна системе

$$\dot\alpha=-z_4+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot z_4=\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{-z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)+$$
$$+z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)-z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\},$$

$$\dot z_3=z_3z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)-z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\}-$$

$$-\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot z_2 = z_2z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+ \tag{6.24}$$

$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_4+z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}+$$

$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}+$$

$$+\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot z_1 = z_1z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$

$$+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{z_4-z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-$$

$$-\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot\beta_1 = z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot\beta_2 = -z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot\beta_3 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\beta_3\right)\right),\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3\right)\right),\\
\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\beta_3+\frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{6.25}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ представляется в виде (6.11).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ в силу (6.22).

В общем случае, на многообразии

$$\begin{aligned}
O_1 = \{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} :\\
\alpha = \frac{\pi}{2}k,\ \ \beta_1 = \pi l_1,\ldots,\beta_{n-3} = \pi l_{n-3},\ \ k,l_1,\ldots,l_{n-3}\in\mathbf{Z}\}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

нельзя однозначно разрешить систему (6.15) относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, $\ldots$, $\dot\beta_{n-2}$. Формально, таким образом, на многообразии (6.26) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых $l_1,\ldots,l_{n-3}$ неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение системы (6.15) вырождается.

Из этого следует, что система (6.13) вне и только вне многообразия (6.26) может быть приведена к следующему виду $(n>2)$:

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) - (z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\right\},$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-$$
$$-\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\dot z_{n-3}=z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\left[-z_{n-1}+z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+$$
$$+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^{s}z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+$$
$$+\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),\tag{6.27}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot z_1=\dot\beta_{n-2}(-\omega_{r_1}\sin\beta_{n-2}+\omega_{r_2}\cos\beta_{n-2})+$$
$$+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$
$$=z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\times$$
$$\times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s}z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\dot\beta_1=z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\dot\beta_2=-z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot\beta_{n-2}=(-1)^{n+1}z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$
$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$

где

$$\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)),$$
$$\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\tag{6.28}$$
$$\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)),$$
$$\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)),$$

а функция $\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v\right)$ представляется в виде (6.11).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ в силу (6.19), при этом $(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N)$ — евклидово скалярное произведение.

6.2.4. Замечания о распределении индексов

В правой части системы (6.27) после общего множителя

$$\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, во втором уравнении системы (6.27) (с левой частью $\dot{z}_{n-1}$) функции (6.28) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2. \tag{6.29}$$

А вот далее, в следующие уравнения системы (6.27) появление набора функций (6.28) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для $\dot{z}_{n-2}$ по-прежнему входит набор функций (6.28) с индексами (6.29). А в уравнение для $\dot{z}_{n-3}$ входит уже набор с индексами

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2 \tag{6.30}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 1.

Таблица 1

Общее распределение индексов набора функций (6.28)

Левая часть (6.27)	Распределение индексов s набора функций (6.28)					
$\dot{z}_{n-2}$	1	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-3}$	2	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-4}$	3	3	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-5}$	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
$\dot{z}_1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

Так минор

$$(1)$$

первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (6.28) при $s = 1$. Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (6.28) при $s = 1, 2$. Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (6.27) функций (6.28) при $s = 1, 2, 3$ и т.д.

6.2.5. Нарушение теоремы единственности

Нарушение теоремы единственности для системы (6.15) на многообразии (6.26) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (6.26) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (6.15), пересекая многообразие (6.26) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (6.9) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (6.10).

Пусть

$$\lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=L\left(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right). \tag{6.31}$$

Заметим, что $|L|<+\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)\right)\right|<+\infty. \tag{6.32}$$

При $\alpha=\pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T=T_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega\right)=m\sigma(\omega_{r_1}^2+\ldots+\omega_{n-1}^2)-\frac{m\sigma Lv^2}{(n-2)I_2},\ \ n>2, \tag{6.33}$$

где значения $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{n-1}$ — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидова пространства $\mathbf{E}^n$, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T=T_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega\right)=\frac{mv^2}{R_0}, \tag{6.34}$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (6.33) и (6.34) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (6.26), что и доказывает сделанное замечание.

6.3. Постоянная скорость центра масс

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C\equiv\mathbf{const} \tag{6.35}$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс), то в системе (6.1) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T-s(\alpha)v^2\equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)=s(\alpha)v^2,\ \ \mathbf{T}\equiv-\mathbf{S}. \tag{6.36}$$

Случай (6.36) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка после некоторого преобразования системы (6.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$\begin{gathered}T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)=\sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1}\tau_{i,j}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j}=\\ =T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2,\ \ \omega_0=v.\end{gathered} \tag{6.37}$$

Введем для начала новые квазискорости (6.17)–(6.19).

Система (6.1) в случаях (6.4)–(6.6) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\dot v+\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\cos\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\\
=\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2-s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha,\\
\dot\alpha v+z_{n-1}v-\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\sin\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\\
=\frac{s(\alpha)v^2-T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha,\\
\dot\beta_1\sin\alpha-z_{n-2}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0.\\
\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1+z_{n-3}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{6.38}$$

$$
\begin{gathered}
\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}+(-1)^n z_1\cos\alpha-\\
-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\\
\dot\omega_{r_1}=(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\omega_{r_2}=(-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot\omega_{r_{n-1}}=\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered}
$$

Здесь, как и ранее, введены функции (6.11), (6.28).

Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ в силу (6.19).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$
z_k=n_1vZ_k,\ \ k=1,\ldots,n-1,\ \ <\cdot>=n_1v<'>,\ \ n_1>0,\ \ n_1=\mathrm{const}, \tag{6.39}
$$

система (6.38) приведется к следующему виду:

$$
v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{6.40}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha'=-Z_{n-1}+\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+\\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-\\
-\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha,
\end{gathered} \tag{6.41}
$$

$$
\begin{gathered}
Z'_{n-1}=\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\right\}-\\
-Z_{n-1}\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right),
\end{gathered} \tag{6.42}
$$

$$
\begin{gathered}
Z'_{n-2}=Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\times\\
\times\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)+\\
+\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-\\
-\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-Z_{n-2}\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right),
\end{gathered} \tag{6.43}
$$

$$
\begin{gathered}
Z'_{n-3}=Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\
-\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\
+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\left[-Z_{n-1}+Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\
+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+\\
+\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-Z_{n-3}\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z\right),
\end{gathered} \tag{6.44}
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

$$Z_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} +$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s Z_{n+1-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} +$$
$$+(-1)^n \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{6.45}$$

$$\beta_1' = Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \tag{6.46}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \tag{6.47}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}} +$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \tag{6.48}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -\sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos\alpha +$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \sin\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) +$$
$$+ \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha. \tag{6.49}$$

Видно, что в системе (6.40)–(6.48) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (6.41)–(6.48) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (6.36) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ (и, далее, от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z_1, \ldots, n_1 Z_{n-1})$) в силу (6.19) и (6.39).

В частности, при $n = 5$ система (6.40)–(6.48) примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{6.50}$$

$$\alpha' = -Z_4 + \sigma n_1 \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right) \sin\alpha +$$
$$+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1} s(\alpha) \cos\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_2, n_1 Z) -$$
$$- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin\alpha, \tag{6.51}$$

$$Z_4' = \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \{-Z_3 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) + Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) -$$
$$-Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)\} - Z_4 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{6.52}$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \{Z_4 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) -$$
$$-Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\} -$$

$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_3\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.53}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_4+Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right]+$$
$$+\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_2\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.54}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left\{Z_4-Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-$$
$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_1\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.55}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.56}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.57}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.58}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -\sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)+$$
$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{6.59}$$

При этом в системе (6.50)–(6.58) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (6.51)–(6.58) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

В частности, при выполнении условия (6.36) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

6.3.1. Замечания о распределении индексов

В правой части системы (6.41)–(6.48) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-{}$ $-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (6.42) (с левой частью Z_{n-1}') функции (6.28) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad \ldots \qquad n-2. \tag{6.60}$$

А вот далее, в уравнения (6.43)–(6.45) появление набора функций (6.28) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (6.28) с индексами (6.60). А в уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами

$$2 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad \ldots \qquad n-2 \tag{6.61}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 2.

Таблица 2

Общее распределение индексов набора функций (6.28)

Левая часть (6.41)–(6.48)	Распределение индексов s набора функций (6.28)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	$\ldots$	$n-2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Z'_{1}	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$\ldots$	$n-2$

Так минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 2 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (6.28) (при $s = 1$). Там же минор второго порядка $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (6.28) (при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (6.41)–(6.48) функций (6.28) (при $s = 1, 2, 3$) и т.д. (см. также [12, 13, 14]).

Литература

[1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.

[2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.

[3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". Т. 125. "Динамические системы". 2013. С. 5–254.

[4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.

[5] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.

[6] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984, № 6. С. 31–33.

[9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

[10] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во "Экзамен ", 2007. 352 с.

[11] Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. 2007. Т. 43. № 10. С. 49–67.

[12] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.

[13] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.

[14] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.

References

[1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113 [in Russian].

[2] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika v trekhmernom prostranstve* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97 [in Russian].

[3] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: "Sovremennaia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory". T. 125. "Dinamicheskie sistemy".* [Journal of Mathematical Sciences. Vol 125. Dynamical Systems], 2013, pp. 5–254 [in Russina].

[4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiiakh* [Some cases of integrability of dynamic systems in transcedent functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2013, no. 9/1(110), pp. 35–41 [in Russian].

[5] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie tipov fazovykh portretov v dinamike tverdogo tela, vzaimodeistvuiushchego s soprotivliaiushcheisia sredoi* [Variety of types of phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 1996, Vol. 349, no. 2, pp. 193–197 [in Russian].

[6] Shamolin M.V. *Dinamicheskie sistemy s peremennoi dissipatsiei: podkhody, metody, prilozheniia* [Dynamical Systems With Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications]. *Fund. i prikl. mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2008, Vol. 14, no. 3, pp. 3–237 [in Russian].

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspects in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].

[8] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetruc spaces automorphysm groups]. *Vestn. Mosk. un–ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].

[9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 3–229 [in Russian].

[10] Shamolin M.V. *Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela* [Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. M.: Izd-vo "Ekzamen ", 2007, 352 p. [in Russian].

[11] Shamolin M.V. *Nekotorye model'nye zadachi dinamiki tverdogo tela pri vzaimodeistvii ego so sredoi* [Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium]. *Prikl. mekhanika* [International Applied Mechanics], 2007, Vol. 43, no. 10, pp. 49–67 [in Russian].

[12] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemosti sistem s dissipatsiei na kasatel'nykh rassloeniiakh k dvumernoi i trekhmernoi sferam* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Two- and Three-Dimensional Spheres]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2016, Vol. 471, no. 5, pp. 547–551 [in Russian].

[13] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoi sfere* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 474, no. 2, pp. 177–181 [in Russian].

[14] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Two-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 475, no. 5, pp. 519–523 [in Russian].

M.V. Shamolin[3]

ON A PENDULUM MOTION IN MULTI-DIMENSIONAL SPACE. PART 1. DYNAMICAL SYSTEMS

In the proposed cycle of work, we study the equations of the motion of dynamically symmetric fixed n-dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of the motion of a free n-dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. In thit work, we derive the general multi-dimensional dynamic equations of the systems under study.

Key words: multi-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Paper received 18/ *VI*/2017.
Paper accepted 18/ *VI*/2017.

[3] *Shamolin Maxim Vladimirovich* (`shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation.

УДК 581.15:581.4(470.67) DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-65-70

З.А. Гусейнова, М.К. Курамагомедов[1]

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ИЗМЕНЧИВОСТИ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ РОДА *NEPETA* L. ПРИ ИНТРОДУКЦИИ В ГОРНЫХ УСЛОВИЯХ ДАГЕСТАНА

Изучена межвидовая изменчивость трех видов рода *Nepeta* L.(*N. pamirica*, *N. pannonica* и *N. subsessilis*) при их интродукции в горных условиях Дагестана на основе комплекса морфологических признаков генеративного побега. Оценка исследованных признаков показала, что по длине и массе побега эти виды превосходят широко распространенный и наиболее продуктивный вид *N. grandiflora*. Весовые признаки всех трех видов находятся на высоком уровне изменчивости. Большая часть изученных признаков находится в положительной корреляционной связи между собой. Репродуктивное усилие положительно коррелирует с массой побега, облиственность — не всегда. Результаты исследований дают возможность оценить изученные виды как устойчивые к условиям интродукции и рекомендовать для выращивания в горной зоне Дагестана.

Ключевые слова: *Nepeta pamirica*, *Nepeta pannonica* и *Nepeta subsessilis*, интродукция, Дагестан, морфологические признаки, изменчивость.

Введение

Котовник (*Nepeta* L.) — довольно широко распространенный род семейства *Lamiaceae* Lindl. Из 82 видов рода *Nepeta*, приведенных во флоре СССР (1), в Дагестане встречается 12 видов (2), шесть из которых являются эндемиками Кавказа (3). Большинство видов котовника относятся к числу хозяйственно-ценных растений (4–7). Одним из путей выявления и сохранения редких и хозяйственно-ценных растений является их интродукция. Известно, что при адаптации растений в условиях интродукции существенную роль играет широкая норма реакции видов (8). Цель данной работы заключалась в исследовании изменчивости морфологических признаков генеративного побега трех видов *Nepeta* при интродукции в горных условиях для оценки их адаптивных возможностей.

Материал и методика

Виды рода *Nepeta* (*N. pamirensis Franch.*, *N. pannonica* L. и *N. subsessilis* Maxim.), которые являются объектами наших исследований, не встречаются во флоре Дагестана. Исследования по интродукции видов проводились на Гунибской экспериментальной базе Горного ботанического сада ДНЦ РАН (Гунибское плато, 1750 м над уровнем моря). Семена для посева были получены по делектусам Ботанических садов. Посев проводился весной 2011 г., всходы были дружные. На третий год вегетации, на фазе цветения на уровне почвы срезали по одному генеративному побегу с 30 особей. Учитывали длину и толщину побега, длину зоны вегетативных и генеративных ветвей, количество и длину междоузлий, количество и длину боковых вегетативных и генеративных ветвей. Определяли сухую массу побега по фракциям и в целом, облиственность (9 (Методические указания ... 1975) и репродуктивное усилие *Re* (10 (Злобин, 1990). Результаты измерений были статистически обработаны с использованием программ Statistica 5.5 и Excel. Уровни варьирования принятые по Зайцеву (11): $CV > 20$ % — высокий, $CV = 11$–20 % — средний, $CV < 10$ % — низкий. Сила корреляции оценивалась по Доспехову (12): $r < 0,3$ — слабая, $r = 0,3 - 0,7$ — средняя, $r > 0,7$ — высокая.

Гусейнова Зиярат Агамирзоевна (guseinovaz@mail.ru), *Курамагомедов Магомед Курамагомедович* (gorbotsad@mail.ru), Горный ботанический сад, Дагестанский научный центр РАН, 367001, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45.

Результаты и их обсуждение

По результатам трехлетних наблюдений все виды зарекомендовали себя как устойчивые к местным климатическим условиям, хорошо переносят длительные периоды жары и недостаток почвенной влаги. Зимний период переносят хорошо, для них характерно дружное весеннее отрастание. Растения проходят полный цикл развития, дают устойчивый семенной материал, сохраняют характерный для них габитус куста.

В условиях интродукции (табл. 1) растения изученных видов формируют значительную надземную массу, сильно ветвятся и хорошо облиственны в зоне ветвления. Согласно полученным данным наблюдается существенное различие между видами по длине побега. Она варьирует в пределах 104,9–135,9 см и достигает максимума у *N. pannonica*. Следует отметить, что изучаемые виды по этому признаку значительно превосходят встречаемые во флоре Дагестана видов котовника. Так, у широко распространенного и наиболее продуктивного вида котовника *N. grandiflora* в условиях интродукции длина побега варьирует в пределах 64,4–106,6 см (13).

Общее количество узлов на побеге — наиболее стабильный признак для изучаемых видов. Интенсивность ветвления побега можно охарактеризовать двумя связанными друг с другом параметрами: общее количество узлов и количество узлов без боковых ветвей. Исходя из этого, следует, что наиболее интенсивное ветвление характерно для *N. pamirica* и *N. pannonica*. При этом длина зоны вегетативных ветвей на одном уровне для всех видов котовника. Что касается длины зоны генеративных ветвей, то она колеблется в пределах 66,8–98,9 см. Однако в количественном отношении число генеративных ветвей меньше вегетативных. По длине вегетативных ветвей проявляется существенное различие между видами. По длине соцветия различия проявляются в меньшей степени. Характер изменчивости длины междоузлий для изучаемых видов имеет свои особенности. Длина междоузлий побегов *N. pannonica* с 1-го по 10-е нарастает, затем с 11-го по 16-е то увеличивается, то уменьшается, с 17-го по предпоследнее уменьшается. Размеры междоузлий для побегов *N. pamirica* с 1-го по 8-е на одном уровне с 9-го междоузлия идет уменьшение. Максимум длины междоузлий для *N. subsessilis* отмечен в 1–4 междоузлиях, с 5-го по 14-е размеры междоузлия на одном уровне, с 15-го — длина междоузлия уменьшается. По-видимому, в условиях интродукции при выравнивании средовых факторов, различия в изменчивости длины междоузлий, приобретенные в процессе естественного отбора, в природных условиях сохраняются.

Интегральным показателем жизненного состояния особи является сухая масса. Результаты учета сухой массы побега (табл. 1) показывают, что по всем видам накопление сухой массы происходит равномерно. Распределение сухой массы побега по фракциям носит неодинаковый характер. Масса стеблей для всех видов выше массы листьев, масса соцветий имеет минимальную долю от общей массы побега.

Таблица 1

Средние данные по морфологическим признакам видов котовника (*ГЭБ*)

№ п/п	Признаки / Виды	*Nepeta pamirica*		*Nepeta pannonica*		*Nepeta subsessilis*	
		$\bar{x} \pm s_x$	CV, %	$\bar{x} \pm s_x$	CV, %	$\bar{x} \pm s_x$	CV, %
1.	Длина побега, см	$104{,}9 \pm 2{,}52$	13,14	$135{,}9 \pm 3{,}08$	12,43	$122{,}8 \pm 1{,}82$	8,12
2.	Толщина стебля, мм	$6{,}3 \pm 0{,}18$	15,69	$6{,}5 \pm 0{,}23$	19,59	$7{,}3 \pm 0{,}17$	13,04
3.	Число междоузлий, шт.	$20{,}7 \pm 0{,}60$	15,77	$25{,}3 \pm 0{,}54$	11,62	$22{,}2 \pm 0{,}32$	7,87
4.	Число вегет. ветвей, шт.	$14{,}6 \pm 0{,}75$	28,13	$15{,}6 \pm 0{,}63$	22,18	$11{,}1 \pm 0{,}54$	26,55
5.	Число генер. ветвей, шт.	$6{,}3 \pm 0{,}35$	30,00	$10{,}9 \pm 0{,}63$	31,40	$7{,}7 \pm 0{,}37$	26,07
6.	Длина вегет. ветви, см	$23{,}8 \pm 1{,}93$	44,45	$14{,}1 \pm 1{,}29$	50,02	$20{,}0 \pm 1{,}40$	38,45
7.	Длина генер. ветви, см	$23{,}8 \pm 1{,}95$	44,83	$28{,}6 \pm 2{,}30$	44,07	$28{,}6 \pm 1{,}79$	34,39
8.	Длина соцветия, см	$26{,}7 \pm 2{,}08$	42,74	$20{,}0 \pm 1{,}32$	36,07	$24{,}7 \pm 1{,}04$	23,06
9.	Длина зоны вегет. ветвей, см	$38{,}1 \pm 2{,}01$	28,92	$37{,}1 \pm 2{,}90$	42,84	$36{,}9 \pm 2{,}17$	32,26
10.	Длина зоны генер. ветвей, см	$66{,}8 \pm 3{,}40$	27,87	$98{,}9 \pm 3{,}12$	17,26	$85{,}9 \pm 2{,}85$	18,16
11.	Масса листьев, г	$4{,}8 \pm 0{,}28$	33,16	$2{,}3 \pm 0{,}19$	44,75	$3{,}7 \pm 0{,}16$	24,14
12.	Масса стеблей, г	$6{,}4 \pm 0{,}45$	38,40	$9{,}2 \pm 0{,}78$	46,52	$7{,}4 \pm 0{,}38$	28,11
13.	Масса соцветий, г	$0{,}6 \pm 0{,}08$	70,96	$1{,}1 \pm 0{,}12$	59,80	$0{,}7 \pm 0{,}08$	61,13
14.	Масса побега, г	$11{,}8 \pm 0{,}73$	33,88	$12{,}6 \pm 1{,}00$	43,66	$11{,}8 \pm 0{,}56$	25,86

При сравнительном анализе изменчивости учтенных признаков обнаружено, что весовые признаки изученных видов находятся на высоком уровне изменчивости. Средний уровень изменчивости имеют такие признаки, как длина побега, толщина стебля и число междоузлий. Степень варьирования высока по количеству боковых ветвей на побег и их длине, по длине соцветий и длине зоны боковых ветвей.

Степень изменчивости большинства морфологических признаков генеративного побега в условиях интродукции у видов различна. Особенно вариабельны такие признаки, как количество междоузлий и генеративных ветвей, длина зоны генеративных ветвей и масса листьев. При регрессионном анализе выяснилось, что достаточно значимы эти различия по признакам вегетативной сферы, где коэффициент детерминации для этих признаков колеблется в пределах 12,55–15,46 %.

Помимо общей продуктивности большой интерес представляют данные по облиственности и репродуктивному усилию (*Re*) (табл. 2). Высокая облиственность побега наблюдается у *N. pamirica.* В данном случае вклад биомассы в формирование листовой части побега значительный. При низкой облиственности *N. pannonica*, равной 18,2 %, для него характерно наиболее высокое репродуктивное усилие. Следует подчеркнуть, что репродуктивное усилие находится в положительной корреляционной связи с массой побега, облиственность — не всегда. Так, при одинаковой массе побега (11,8 г) облиственность у *N. pamirica* и *N. subsessilis* разная и составляет 40,7 и 31,3 %, соответственно, а для *N. pannonica* при большей биомассе побега (12,6 г) облиственность была намного ниже (18,2 %).

Таблица 2

Облиственность и репродуктивное усилие (Re) видов *Nepeta*

Виды	Происхождение образца	Облиственность, %	Репродуктивное усилие (Re), %
N. pamirica	Италия, Бормио, Giardino Botanico Aipino ”Rezia”	40,75	5,1
N. pannonica	Йошкар-Ола, Ботсад Марийского ГТУ	18,2	8,7
N. subsessilis	Италия, Милан, Giardino Botanico ”Caplez”	31,3	5,9

Изменчивость по признакам генеративной сферы побега у видов имеет также определенный интерес. Показатели изменчивости массы 1000 семян представлены в таблице 3. Согласно полученным данным среднее значение весового признака колеблется в пределах 0,441–0,506 г. По коэффициенту вариации масса семян по видам находится на низком уровне изменчивости. Выявленные в условиях интродукции межвидовые различия по массе семян, вероятно можно рассматривать как результат приспособления к условиям интродукции.

Таблица 3

Сравнительная характеристика видов *Nepeta* **по массе 1000 семян**

Виды	Масса семян, г	
	$\bar{x} \pm s_x$	CV, %
N. pamirica	$0{,}487 \pm 0{,}011$	5,5
N. pannonica	$0{,}506 \pm 0{,}007$	3,3
N. subsessilis	$0{,}441 \pm 0{,}013$	7,6

Корреляционный анализ, проведенный по морфологическим признакам генеративного побега, показал наличие положительной корреляционной связи по большинству пар учтенных признаков (табл. 4).

Таблица 4

Коэффициенты корреляции признаков генеративного побега интродуцированных видов *Nepeta*

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
2.	A	0 ,20												
	B	0,52*												
	C	0,43*												
3.	A	0,57*	-0,04											
	B	0,53*	0,53*											
	C	0,40*	0,03											
4.	A	-0,10	-0,02	0,31										
	B	0,03	0,21	0,37*										
	C	-0,01	-0,00	0,10										

Окончание табл. 4

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
5.	A	0,10	0,31	-0,11	-0,38*									
	B	-0,09	0,01	-0,08	-0,08									
	C	0,35	0,31	0,03	-0,43*									
6.	A	0,03	0,63*	-0,28	-0,15	0,15								
	B	0,14	0,12	-0,06	-0,14	-0,02								
	C	0,24	0,51*	0,12	-0,19	0,33								
7.	A	0,13	0,49*	-0,26	-0,56*	0,56*	0,39*							
	B	0,29	0,36	-0,00	-0,47*	-0,10	0,21							
	C	0,31	0,30	0,20	-0,40*	0,21	0,17							
8.	A	0,59*	0,26	0,36	-0,33	0,35	0,25	0,53*						
	B	0,09	-0,03	0,08	-0,23	-0,38*	0,39*	0,44*						
	C	0,33	0,37*	0,37*	0,05	-0,03	-0,02	0,57*						
9.	A	-0,12	0,09	0,04	0,86*	-0,32	0,15	-0,41*	-0,35					
	B	0,46*	0,13	0,45*	0,48*	-0,05	-0,34	-0,35	-0,39*					
	C	-0,01	0,11	-0,14	0,63*	-0,48*	0,08	-0,25	-0,22					
10.	A	0,81*	0,10	0,40*	-0,58*	0,26	-0,06	0,34	0,64*	-0,68*				
	B	0,60*	0,38*	0,13	-0,37*	-0,07	0,43*	0,57*	0,41*	-0,42*				
	C	0,64*	0,19	0,36*	-0,49*	0,59*	0,09	0,39*	0,38*	-0,77*				
11.	A	0,14	0,78*	-0,05	0,07	0,15	0,77*	0,27	0,22	0,19	-0,01			
	B	0,36	0,60*	0,43*	-0,06	-0,19	0,03	0,33	-0,01	0,20	0,18			
	C	0,27	0,70*	-0,06	-0,05	0,28	0,45*	0,26	0,31	0,05	0,14			
12.	A	0,50*	0,85*	-0,01	-0,22	0,41*	0,64*	0,55*	0,48*	-0,08	0,41*	0,76*		
	B	0,74*	0,72*	0,39*	-0,02	0,00	0,23	0,57*	0,08	0,13	0,64*	0,57*		
	C	0,56*	0,85*	-0,02	-0,09	0,50*	0,43*	0,39*	0,29	0,05	0,32	0,70*		
13.	A	0,34	0,27	0,08	-0,29	0,64*	0,05	0,69*	0,62*	-0,35	0,46*	0,20	0,48*	
	B	0,51*	0,63*	0,34	-0,20	0,04	0,28	0,59*	0,33	-0,28	0,77*	0,31	0,78*	
	C	0,33	0,50*	0,10	-0,40*	0,51*	0,10	0,57*	0,51*	-0,34	0,48*	0,41*	0,64*	
14.	A	0,40*	0,87*	-0,02	-0,14	0,39*	0,70*	0,52*	0,45*	0,02	0,30	0,88*	0,97*	0,49*
	B	0,69*	0,76*	0,42*	-0,02	-0,02	0,22	0,59*	0,12	0,07	0,65*	0,64*	0,99*	0,81*
	C	0,50*	0,85*	-0,02	-0,13	0,49*	0,43*	0,42*	0,36	0,00	0,32	0,82*	0,97*	0,70*

Обозначения: A — *N. Pamirica*, B — *N. Pannonica*, C — *N. Subsessilis*; признаки обозначены цифрами в соответствии с таблицей 1.

По всем трем видам в положительной, значимой на уровне $P \leqslant 0{,}05$ корреляционной связи находятся: длина побега — с числом междоузлий, длиной зоны генеративных ветвей, массой стеблей и побега в целом; толщина стебля — с массой листьев, стеблей и побега; длина генеративной ветви — с длиной соцветия, массой стеблей, соцветий и побега; длина зоны генеративных ветвей — с массой соцветий; масса листьев с массой стеблей и побега; масса стеблей — с массой соцветий и побега; масса соцветий с массой побега. Число вегетативных ветвей в положительной связи с длиной зоны вегетативных ветвей и отрицательной с длиной генеративных ветвей и зоны генеративных ветвей. Для остальных пар признаков корреляционная связь слабая или отрицательная и различна по видам.

Выводы

1. В условиях интродукции растения изученных видов формируют значительную массу. По длине генеративного побега эти виды превосходят широко распространенный и наиболее продуктивный вид *N. grandiflora*.

2. Большая часть изученных признаков находится в положительной корреляционной связи между собой.

3. Весовые признаки видов находятся на высоком уровне изменчивости.

4. Результаты исследований дают возможность оценить виды как устойчивые к условиям интродукции в горной зоне Дагестана, и рекомендовать для выращивания в горной зоне Дагестана.

5. Полученные данные имеют интерес для понимания механизмов приспособительных реакций интродуцентов и могут быть использованы для интродукционного прогнозирования.

Литература

[1] Флора СССР. Т. XX. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1954. 555 с.

[2] Муртазалиев Р.А. Конспект флоры Дагестана. Махачкала: Изд. дом "Эпоха ", 2009. Т. 3. 303 с.

[3] Литвинская С.А., Муртазалиев Р.А. Кавказский элемент во флоре Российского Кавказа: география, созология, экология. Краснодар: ООО "Просвещение-Юг ", 2009. 439 с.

[4] Аскарова Р.Н. О котовниках Кавказа // Материалы по флоре и систематике высших растений Азербайджана. Баку, 1972. С. 72–110.

[5] Шилурова С.С. Изменчивость состава эфирного масла *Nepeta transcaucasica* Grossh. // Раст. ресурсы. 1982. Т. XVII. Вып. 3. С. 382–387.

[6] Маланкина Е.Л. Некоторые итоги интродукции эфиромасличных растений из семейства Яснотковых в условиях Московской области // Биологическое разнообразие. Интродукция растений: материалы 3-й Междунар. науч. конф. Санкт-Петербург. 2003. С. 232–233.

[7] Страт А.Г., Бодруг М.В. Семенная продуктивность растений котовника кошачьего (*Nepeta cataria* L.) при интродукции в Молдове // Биологическое разнообразие. Интродукция растений: материалы 3-й Междунар. науч. конф. Санкт-Петербург. 2003. С. 259–260.

[8] Синская Е.Н. Учение о виде и таксонах (конспект лекций). Л.: Сельхозиздат, 1961.

[9] Методические указания по изучению коллекции многолетних кормовых трав. Л., 1975. 19 с.

[10] Злобин Ю.А. Анализ роста растений. Агрономический аспект // С/х биология. 1992. № 3. С. 36–41.

[11] Зайцев Г.М. Математическая статистика в экспериментальной ботанике. М.: Наука, 1984. 424 с.

[12] Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. М.: Колос, 1973. 336 с.

[13] Курамагомедов М.К., Гусейнова З.А. Особенности межпопуляционной изменчивости *Nepeta grandiflora* M. Bieb. при интродукции в горных условиях Дагестана // Ж. Фундаментальные исследования. 2014. № 3. С. 93–99.

References

[1] *Flora SSSR. T. XX* [Flora of the USSR. Vol. XX]. M.-L.: Izd-vo AN SSSR, 1954, 555 p. [in Russian].

[2] Murtazaliev R.A. *Konspekt flory Dagestana* [Synopsis of the flora of Dagestan]. Makhachkala: Izd. dom "Epokha", 2009, Vol. 3, 303 p. [in Russian].

[3] Litvinskaya S.A., Murtazaliev R.A. *Kavkazskii element vo flore Rossiiskogo Kavkaza: geografiia, sozologiia, ekologiia* [Caucasian element in the flora of the Russian Caucasus: geography, sociology, ecology]. Krasnodar: OOO "Prosveshchenie-Iug", 2009, 439 p. [in Russian].

[4] Askarova R.N. *O kotovnikakh Kavkaza* [About the Caucasus nepetas]. In: *Materialy po flore i sistematike vysshikh rastenii Azerbaidzhana* [Materials on the flora and systematics of higher plants of Azerbaijan]. Baku, 1972, pp. 72–110 [in Russian].

[5] Shilurova S.S. *Izmenchivost' sostava efirnogo masla Nepeta transcaucasica Grossh.* [Variability of essential oil composition of *Nepeta transcaucasica* Grossh.]. *Rastitelnye Resursy*, 1982, Vol. XVII, Issue 3, pp. 382–387 [in Russian].

[6] Malankina E.L. *Nekotorye itogi introduktsii efiromaslichnykh rastenii iz semeistva Iasnotkovykh v usloviiakh Moskovskoi oblasti* [Some results of the introduction of essential oil plants from the family Yasnotkovie in the Moscow Region]. In: *Biologicheskoe raznoobrazie. Introduktsiia rastenii: materialy 3-i Mezhdunar. nauch. konf.* [Biological diversity. Introduction of plants: materials of the 3rd International academic conference]. St. Petersburg, 2003, pp. 232–233 [in Russian].

[7] Strat A.G., Bodrug M.V. *Semennaia produktivnost' rastenii kotovnika koshach'ego (Nepeta cataria L.) pri introduktsii v Moldove* [Seed productivity of *Nepeta cataria* L. plants when introduced in Moldova]. In: *Biologicheskoe raznoobrazie. Introduktsiia rastenii: materialy 3-i Mezhdunar. nauch. konf.* [Biological diversity. Introduction of plants: materials of the 3rd International academic conference]. St. Petersburg, 2003, pp. 259–260 [in Russian].

[8] Sinskaya E.N. *Uchenie o vide i taksonakh (konspekt lektsii)* [The doctrine of species and taxon (lecture notes)]. L.: Sel'khozizdat, 1961 [in Russian].

[9] *Metodicheskie ukazaniia po izucheniiu kollektsii mnogoletnikh kormovykh trav* [Methodological guidelines for studying the collection of perennial forage grasses]. L., 1975, 19 p. [in Russian].

[10] Zlobin Yu.A. *Analiz rosta rastenii. Agronomicheskii aspekt* [Analysis of plant growth. Agronomical aspect]. *S/kh biologiia* [Agricultural biology], 1992, no. 3, pp. 36–41 [in Russian].

[11] Zaitsev G.M. *Matematicheskaia statistika v eksperimental'noi botanike* [Mathematical statistics in experimental botany]. M.: Nauka, 1984, 424 p. [in Russian].

[12] Dospekhov B.A. *Metodika polevogo opyta* [Methodology of field experience]. M.: Kolos, 1973, 336 p. [in Russian].

[13] Kuramagomedov M.K., Guseinova Z.A. *Osobennosti mezhpopuliatsionnoi izmenchivosti Nepeta grandiflora M. Bieb. pri introduktsii v gornykh usloviiakh Dagestana* [Features of interpopulation variability of *Nepeta grandiflora* M. Bieb. at introduction in mountain conditions of Dagestan]. *Zh. Fundamental'nye issledovaniia* [Fundamental research], 2014, no. 3, pp. 93–99 [in Russian].

Z.A. Guseynova, M.K. Kuramagomedov[2]

COMPARATIVE ASSESSMENT OF VARIABILITY OF THE MORPHOLOGICAL TRAITS OF SOME SPECIES OF THE GENUS *NEPETA* L. AT INTRODUCTION IN MOUNTAIN CONDITIONS OF DAGESTAN

Interspecific variability of three species of the genus *Nepeta* L. (*N. pamirica*, *N. pannonica* and *N. subsessilis*) was studied with their introduction in the mountainous conditions of Dagestan on the basis of a complex of morphological features of generative shoot. The evaluation of the examined features revealed that along the length and mass of the shoot these species superior are widespread and most productive species *N. grandiflora*. Weight features of all three species are at a high level of variability. Most of the traits studied are in a positive correlation with each other. Reproductive effort positively correlates with the mass of shoot, but the foliage — not always. The results of the studies make it possible to evaluate the studied species as being resistant to the conditions of introduction, and recommend for cultivation in the mountainous zone of Dagestan.

Key words: *Nepeta pamirica*, *Nepeta pannonica* and *Nepeta subsessilis*, introduction, Dagestan, morphological features, variability.

Статья поступила в редакцию 25/*V*/2017.
The article received 25/*V*/2017.

[2] *Guseynova Ziyarat Agamirzoyevna* (guseinovaz@mail.ru), *Kuramagomedov Mahomed Kuramagomedovich* (gorbotsad@mail.ru), Mountain Botanical Garden, Dagestan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 45, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, 367001, Russian Federation.

УДК 539.2+537.226 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-3-71-83

В.А. Калытка[1]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ДИЭЛЕКТРИКАХ С ВОДОРОДНЫМИ СВЯЗЯМИ

Проводится аналитическое исследование закономерностей релаксационной (объемно-зарядовой) поляризации в диэлектрических материалах класса кристаллов с водородными связями (КВС) в широком диапазоне температур (1–1500 K) и напряженностей поляризующего поля (100 кВ/м–100 МВ/м) при частотах переменного поля порядка 1 кГц–10 МГц. Построено обобщенное нелинейное по поляризующему полю квазиклассическое кинетическое уравнение протонной релаксации, имеющее (в данной модели) смысл уравнения неразрывности тока протонов, решаемое методом последовательных приближений путем разложения в бесконечные степенные ряды по степеням параметра сравнения. Установлено, что в области слабых полей (100–1000 кВ/м) и высоких температур (100–250 K) обобщенное кинетическое уравнение преобразуется к линеаризованному уравнению Фоккера-Планка, а в области низких (70–100 K) и достаточно высоких (250–450 K) температур проявляются нелинейные поляризационные эффекты, обусловленные соответственно туннелированием протонов и релаксацией объемного заряда. При сверхнизких (1–10 K) и сверхвысоких (500–1500 K) температурах в области сильных полей (10 МВ/м–100 МВ/м) вклад такого рода эффектов в поляризацию существенно усиливается. Исследуется влияние нелинейностей на времена релаксации для микроскопических актов переходов протонов через потенциальный барьер.

Ключевые слова: кристаллы с водородными связями (КВС), протонная релаксация и протонная проводимость, обобщенное нелинейное кинетическое уравнение, уравнение Фоккера-Планка.

Введение

Современный уровень развития материаловедения требует создания материалов с заранее заданными свойствами с целью их использования в различных отраслях науки и техники. **Актуально** исследование широкого спектра физических свойств (электрофизических, магнитных, оптических, механических, тепловых и др.) инструментальных и конструкционных материалов, работающих в экстремальных условиях (сверхнизкие температуры, сильные электрические поля, высокие и сверхвысокие частоты, интенсивное лазерное излучение и т.д.). Для выполнения такой программы необходимо проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований *нелинейных эффектов* возникающих в различных металлах и их сплавах, полупроводниках и диэлектриках, магнитных материалах под воздействием постоянных и переменных электромагнитных полей, внешних ультразвуковых и температурных полей, а также ионизирующих излучений. Результаты этих работ найдут применение в изоляционной и кабельной технике, микроэлектронике, оптоэлектронике и лазерной технике, в электрохимических технологиях и альтернативной энергетике.

Объект исследования в данной работе — *кристаллы с водородными связями (КВС)* обладают уникальными физическими свойствами, связанными с наличием в их кристаллической структуре водородной подрешетки и представляют определенный фундаментальный и прикладной научный интерес, как *протонные полупроводники и диэлектрики*[1].

КВС находят *практическое применение* в качестве изоляционных материалов для токоотводящих элементов электрогенераторов ТЭС, тонкопленочных теплоизоляторов на основе органических полимеров и их композитов [2], элементов памяти ЭВМ, регуляторов параметров лазерного излучения (KDP, DKDP) [3], топливных элементов в водородной энергетике [4; 5], упрочняющих добавок при изготовлении железобетонных конструкций и др.

Предмет исследования состоит в построении математической модели протонной релаксации при *нелинейной объемно-зарядовой поляризации* в КВС в широком теоретическом диапазоне варьирования тем-

Калытка Валерий Александрович (kalytka@mail.ru), кафедра "Энергетические системы", Карагандинский государственный технический университет, 100012, Казахстан, г. Караганда, пр. Бульвар Мира, 56.

ператур ($T \approx 1$–1500 K) и напряженностей электрического поля ($E_0 \approx 100$ кВ/м–100 МВ/м). Электроды блокирующие [1; 6–10]. Экспериментальный диапазон изменения температуры ($T \approx 70$–450 K) включает температурные области (зоны) *квантовых* ($T \approx 70$–100 K) и термически активируемых ($T \approx 100$–250 K) переходов протонов по водородным связям [1; 6–10]. Физическая модель принимается согласно основополагающим принципам *квазиклассической кинетической теории протонной релаксации* в КВС [1].

1. Сравнительный анализ различных теоретических методов описания протонной релаксации в КВС. Постановка задачи исследования

На настоящее время теоретическое описание *кинетики объемно-зарядовой поляризации* КВС проводится с учетом *нелинейных эффектов*, связанных с влиянием *нелинейностей второго и третьего порядка по поляризующему полю* на параметры спектров термостимулированных токов деполяризации (ТСТД) [6] и диэлектрических потерь [7; 8]. Эти эффекты в области достаточно высоких температур ($T > 250$ K) проявляются в виде нелинейной зависимости амплитуды плотности ТСТД от модуля напряженности электрического поля [1], а в области низких температур ($T \approx 70$–100 K), когда основной вклад в релаксацию вносят квантовые переходы протонов, приводят к отклонению от классических законов дебаевской дисперсии [8].

Предлагаемые в [1; 8–10] модели протонной релаксации строятся на математическом аппарате применимом только к определенному экспериментальному интервалу температур, а при отклонении от данного интервала возникают существенные расхождения между теоретическими и измеренными значениями параметров релаксаторов [6; 9]. Методы [6; 9; 10] не позволяют детально исследовать высокотемпературные и низкотемпературные максимумы термостимулированного тока и $\operatorname{tg}\delta(T)$.

Численный расчет энергии активации протонов в окрестности первых двух (низкотемпературных) монорелаксационных максимумов плотности ТСТД в халькантите $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ ($T_{\max,1} = 94$ K; $T_{\max,2} = 138$ K) [1] и слюде флогопита $KMg_3\,(AlSi_3O_{10})\,(OH)_2$ ($T_{\max,1} = 100$ K; $T_{\max,2} = 130$ K) [1] методами [6; 10] дает существенное расхождение между теорией и экспериментом. Так, для халькантита: $U_{0,\exp,1} = 0,07 \pm 0,01$ эВ, $U_{0,th,1} = U_{0,\text{кв},1} = 0,13$ эВ; $U_{0,\exp,2} = 0,11 \pm 0,01$ эВ, $U_{0,th,2} = U_{0,\text{кв},2} = 0,21$ эВ (таблица на стр. 82 в [6], таблица 1 на стр. 136 в [10]). Для флогопита: $U_{0,\exp,1} = 0,05 \pm 0,01$ эВ, $U_{0,th,1} = U_{0,\text{кв},1} = 0,08$ эВ; $U_{0,\exp,2} = 0,17 \pm 0,02$ эВ, $U_{0,th,2} = U_{0,\text{кв},2} = 0,2$ эВ (таблица 2 на стр. 136 в [10]). В области высокотемпературных максимумов $J_{\exp}(T)$ халькантита ($T_{\max} = 170, 206, 230, 246$ K (рисунок 1 на стр. 81 [6], рисунок 3 на стр. 134 в [10])) и флогопита ($T_{\max} = 178, 206, 235, 260$ K (рисунок 4 на стр. 135 в [10])) значения $U_{0,th} = U_{0,\text{кв}}$ и $U_{0,\exp} = U_{0,\text{э}}$ хорошо согласуются, однако амплитуды теоретических максимумов $J_{\max,th}$ на 2–4 порядка ниже измеренных $J_{\max,\exp}$. Применение матрицы плотности, в ВКБ-приближении, позволяет учесть квазидискретность спектра энергий протонов [9] приводит к согласованию величин $U_{0,th} = U_{0,\text{мп}}$ и $U_{0,\exp} = U_{0,\text{э}}$ при низких температурах, а при высоких температурах, как и следовало ожидать, влияние квантовых эффектов на значения $U_{0,\text{мп}}$ несущественно (таблица на стр. 12 в [9], таблицы 3,4 на стр. 140 в [10]). При этом соотношение $J_{\max,th}$ и $J_{\max,\exp}$ для всех максимумов практически одинаковое [9].

Недостаток математической модели в [9] состоит в громоздкости формулы для расчета $J_{th}(T)$ — выражения (28), (29) на стр. 10,11 в [9]. Также, при выводе рабочих формул (на стр. 80, 81 в [6]; (26) на стр. 10 в [9]) не исследованы нелинейные эффекты при объемно-зарядовой поляризации протекающей в области достаточно высоких температур ($T > 250$ K). По этой причине теоретические зависимости $J_{th}(T)$ в области седьмого максимума плотности ТСТД ($T_{\max} = 290$ K — в халькантите; $T_{\max} = 360$ K — во флогопите [1]) в работах [6; 9] численно рассчитать не удалось. Вероятно, неучтенные в моделях [6; 9; 10] токи проводимости приводят к колоссальному превышению $J_{\max,\exp}$ над значениями $J_{\max,th}$ при температурах $T > 250$ K.

Таким образом, *существующие методы расчета спектров термостимулированных токов в КВС характеризуются рядом модельных неточностей и несоответствием между теорией и экспериментом, как в области низких ($T < 100$ K), так и в области высоких ($T > 100$ K) температур.*

По результатам прецизионных измерений температурных спектров тангенса угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta(T)$ в онотском тальке $Mg_3(Si_4O_{10})(OH)_2$ и в гипсе $CaSO_4 \cdot 0,5H_2O$, на частоте переменного электрического поля $\nu_1 = 7 \cdot 10^6$ Гц, обнаружено 4 максимума: в тальке при $T_{\max} = 160$ K, 220 K, 265 K, 310 K (рисунок 29 в [1]); в гипсе при $T_{\max} = 145$ K, 210 K, 270 K, 320 K (рисунок 28 в [1]). Измерения $\operatorname{tg}\delta(T)$ проводились также на частоте $\nu_2 = 12 \cdot 10^6$ Гц [1]. Поскольку экспериментальная энергия активации вычислялась в [1] по формуле $U_{0,\exp} = \frac{k_B T_{\max,1} T_{\max,2}}{T_{\max,2} - T_{\max,1}} \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, без учета потерь проводимости, в области высоких температур (четвертый максимум) имеет место существенный разброс значений $U_{0,\exp}$

(таблица 6 в [1]). Низкотемпературные максимумы $\operatorname{tg}\delta(T)$ в КВС ($T \approx 70 - 100$ K) измерить вообще не удалось [1].

Теоретические значения энергии активации $U_{0,th,1}$, вычисленные с помощью кинетической теории, в линейном приближении теории возмущений [1], попадают в доверительный интервал измеренных значений $U_{0,\exp}$ (таблица 2.1). Низкотемпературную ветвь ($T < 100$ K) спектра $\operatorname{tg}\delta(T)$ методами [1; 10] исследовать не удалось.

Конечно — разностная схема решения квантового кинетического уравнения [7], в силу громоздкости самого алгоритма численного расчета, не является рациональной в плане оптимизации процедуры сопоставления результатов теории и эксперимента, хотя позволяет исследовать параметры низкотемпературного максимума ($T_{\max}; \operatorname{tg}\delta(T_{\max})$) в зависимости от толщины кристаллического слоя, варьируемого в пределах от 3 нм до 30 мкм. Вычисленные в [7] при толщине $d = 30$ мкм энергии активации $U_{0,th,2}$ согласуются со значениями $U_{0,th,1}$ только в области первого максимума (160 K в тальке; 145 K в гипсе), а при более высоких температурах существенно расходятся (таблица 2.1).

Участок температурного спектра $\operatorname{tg}\delta_{th}(T)$ при $T > 350$ K методами [7], как и в [1], рассчитать не удается.

Таблица 2.1

Энергия активации релаксаторов в онотском тальке и гипсе, рассчитанная с помощью кинетической теории $U_{0,th,1}$ [1] и в конечных разностях $U_{0,th,2}$ [7].

$Mg_3(Si_4O_{10})(OH)_2$				$CaSO_4 \cdot 0,5H_2O$			
$T_{\max}$, K	Энергия активации, эВ			$T_{\max}$, K	Энергия активации, эВ		
	$U_{0,\exp}$	$U_{0,th,1}$	$U_{0,th,2}$		$U_{0,\exp}$	$U_{0,th,1}$	$U_{0,th,2}$
160	$0,9 \pm 0,02$	0,87	0,89	145	$1,1 \pm 0,02$	0,95	0,97
220	$0,18 \pm 0,03$	0,15	0,18	210	$0,2 \pm 0,05$	0,13	0,25
265	$0,36 \pm 0,04$	0,33	0,39	270	$0,45 \pm 0,07$	0,43	0,51
310	$0,4 \pm 0,08$	0,35	0,46	320	$0,6 \pm 0,2$	0,45	0,52

Таким образом, *существующие методы исследования спектров диэлектрических потерь в КВС характеризуются недостаточной разрешающей способностью экспериментальной установки (измеритель добротности ВУП — 560 [1]) и рядом модельных недоработок при построении теоретических графиков* $\operatorname{tg}\delta_{th}(T)$ и при вычислении энергии активации $U_{0,th}$ в диапазонах температур $T < 100$ K и $T > 350$ K.

Предложенные в [11; 12] способы описания туннельной релаксации протонов являются оценочными и не раскрывают влияния формы (прямоугольной [1], параболической [8; 10]) и параметров потенциального барьера на характеристики (амплитуда, температурное положение) теоретических максимумов термостимулированного тока и на спектры $\varepsilon'(\omega; T)$, $\varepsilon''(\omega; T)$.

В экспериментальном диапазоне варьирования параметров $E_0 \approx 10^5 \div 10^6$ В/м, $T \approx 70 \div 450$ K, когда условие малости безразмерного параметра $\varsigma_0 = \frac{qE_0 a}{k_B T} \approx 0,001 \div 0,01$ выполняется при любой комбинации значений E_0, T, для описании релаксационной поляризации в КВС в переменном электрическом поле $E_{pol}(t) = E_0 \cdot \exp(i\omega t)$ достаточно нелинейной системы уравнений Фоккера-Планка и Пуассона [1], построенной в *первом приближении* по малому параметру $\zeta(x;t) = \frac{qE(x;t)a}{2k_B T} < 1$ [8; 13]. Решение этой системы строится путем разложения в степенные ряды по степеням другого малого параметра $\gamma = \frac{\mu^{(1)}_{mob} \cdot aE_0}{D^{(0)}_{diff}} = \varsigma_0 \cdot \cdot \frac{A^{(1)}}{A^{(0}} < 1$ [10; 13]. Коэффициенты $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ из разложения $A^{(\pm)}_{i,j} \approx A^{(0)} \mp A^{(1)} \cdot \zeta_{i,j}$, где $\zeta_{i,j} = \frac{|\Delta U_{i,j}|}{k_B T} \ll 1$ [1; 13], рассчитаны для моделей прямоугольного [1] и параболического потенциального барьера [10] и удовлетворяют условию $\frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} \leqslant 1$ [13]. Так, согласно формулам (28) и (10.1), (10.2) из [13]

$$\gamma(T) = \frac{qaE_0}{k_B T} \cdot \left(\frac{\exp\left(-\frac{U_0}{k_B T}\right) + \left\langle D^{(1)} \right\rangle}{\exp\left(-\frac{U_0}{k_B T}\right) + \left\langle D^{(0)} \right\rangle} \right). \tag{1.1}$$

При этом, в диапазоне температур $T \approx 100 \div 250$ K, когда диэлектрическая релаксация в КВС определяется, в основном, термически активируемыми (классическими) переходами протонов и, в силу (1.1) $\gamma \to \gamma_{\text{therm}} = \frac{qaE_0}{k_B T} \cdot \frac{A^{(1)}_{\text{therm}}}{A^{(0)}_{\text{therm}}} = \frac{qaE_0}{k_B T} \approx 10^{-3} \div 10^{-2}$, результаты *линейного приближения* по параметру γ [1] хорошо согласуются с экспериментом [6; 9].

В области низких температур ($T \approx 70 \div 100$ K) **актуален** вопрос об исследовании *нелинейностей*, обусловленных влиянием туннельных переходов протонов на *недебаевские закономерности поведения* частотно-температурных спектров комплексной диэлектрической проницаемости (КДП) [13]. При этом значения

$$\gamma \to \gamma_{\rm tunn} = \frac{qaA^{(1)}_{\rm tunn}E_0}{k_BT\cdot A^{(0)}_{\rm tunn}} = \frac{qaE_0}{k_BT}\cdot\frac{\left\langle D^{(1)}\right\rangle}{\left\langle D^{(0)}\right\rangle} \qquad (1.2)$$

существенно возрастают $\gamma_{\rm tunn} \approx 10^{-2}\div 10^{-1}$ и, при решении кинетического уравнения [1] , **в продолжение линейной теории [1]**, должны учитываться члены более высокого (начиная со *второго*) порядка теории возмущений. Эта задача, в принципе, решена в *третьем приближении* по параметру γ [13; 14], однако в [14] кинетические коэффициенты вычисляются без учета прозрачности потенциального барьера, а в [13] не исследованы теоретические спектры $\varepsilon'(\omega;T)$, $\varepsilon''(\omega;T)$.

Цель данной работы состоит в построении и исследовании схемы аналитического решения *обобщенного нелинейного по полю кинетического уравнения*, описывающего механизм релаксационной (объемно-зарядовой) поляризации в КВС в широком диапазоне температур ($T = 1-1500$ K) при напряженностях поляризующего поля $E_0 \approx 10^5\div 10^8$ В/м.

Физическую модель протонной релаксации принимаем согласно [1; 10]. По предложенной в [15] схеме, применительно к модели невырожденного протонного газа в КВС [10], численная оценка корреляторов (формулы (47), (48) в [15]) неравновесного распределения (формула (51) в [15]) протонов в электрическом поле, в области высоких температур (350–450 K) дает пренебрежительно малый параметр протон-фононного взаимодействия $\alpha^2\cdot\sqrt{\beta\hbar\omega_0} \equiv \alpha^2\cdot\sqrt{\frac{h\nu_0}{k_BT}} \approx 0,005\cdot\alpha^2$ (в силу (79) из [15]). В области низких температур (70–100 K) соответственно $\alpha^2\cdot\beta\hbar\omega_0 \approx 0,05\cdot\alpha^2$ (в силу (83) из [15]). При этом $\alpha^2 \ll 1$ [15]. Поскольку в области сверхнизких температур (4-25 K), когда $\alpha^2\cdot\beta\hbar\omega_0 \approx (0,1\div 1)\cdot\alpha^2$, расчет параметра α^2 представляет собой отдельную задачу, для упрощения математической модели, протон-фононное взаимодействие, как и в [1; 6; 9; 10], формально учитывать не будем, а влияние температуры на релаксацию протонной подсистемы закладываем в выражения для кинетических коэффициентов $A^{(0)}$,$A^{(1)}$ [13].

Протон-протонное взаимодействие, из-за малой равновесной концентрации протонов $n_0 \approx 10^{17}\div 10^{21}$ м$^{-3}$, также не учитываем [10].

2. Исследование нелинейного кинетического уравнения протонной релаксации

В общем случае, кинетическое уравнение электропереноса протонов по водородным связям (уравнение баланса числа частиц (протонов) в потенциальных ямах) имеет вид [1]

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = A^{(-)}_{i-1,i}n_{i-1} + A^{(+)}_{i+1,i}n_{i+1} - \left(A^{(+)}_{i,i-1} + A^{(-)}_{i,i+1}\right)n_i \qquad (2.1)$$

где n_{i-1}, n_i, n_{i+1} — концентрация релаксаторов (протонов) в стационарных состояниях (потенциальных ямах) номера $(i-1)$, (i), $(i+1)$; $A^{(\pm)}_{i,j}$ — скорость вероятности перехода протона между состояниями (i,j) в направлении по полю $A^{(-)}_{i,j}$, или против поля $A^{(+)}_{i,j}$ соответственно [1].

В области сверхнизких температур ($T \approx 1\div 10$ K) и слабых полей ($E_0 \approx 100-1000$ кВ/м), высоких температур ($T \approx 500\div 1500$ K) и сильных полей ($E_0 \approx 10-100$ МВ/м), когда работает условие $\varsigma_0 = \frac{qE_0a}{k_BT} \approx 0,01\div 1$, *первого приближения* по параметру $\zeta(x;t) = \frac{qE(x;t)a}{2k_BT} < 1$, при решении уравнения (2.1), *недостаточно*. В этом случае расчет кинетических коэффициентов $A^{(\pm)}_{i,j}$ будем проводить с помощью разложений в *бесконечные ряды по степеням параметра* $\zeta_{i,j} = \frac{|\Delta U_{i,j}|}{k_BT} < 1$, где $|\Delta U_{i;j}| \approx \frac{qE_ia}{2}$ [1; 10; 13]. В этом случае влияние туннелирования на параметр $\gamma_{\rm tunn}(T) = \varsigma_0(T)\cdot\frac{\left\langle D^{(1)}(T)\right\rangle}{\left\langle D^{(0)}(T)\right\rangle}$ в (1.2) усиливается. Тогда

$$A^{(\pm)}_{i,j}\left(|\Delta U_{i,j}(x;t)|;T\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\mp 1)^l}{l!}\cdot\zeta^l_{i,j}(x;t)\cdot A^{(l)}(T). \qquad (2.2)$$

Коэффициенты $A^{(l)}(T)$ формально совпадают с результатом из [8]

$$A^{(l)}(T) = \frac{\nu_0}{2}\left(\exp(-X) + \left\langle D^{(l)}\right\rangle\right), \quad \left\langle D^{(l)}\right\rangle = \frac{\Lambda^l\exp(-\Lambda) - X^l\exp(-X)}{X^{l-1}(X-\Lambda)}, \qquad (2.3)$$

где $X = \frac{U_0}{k_BT}$, $\Lambda = \frac{\pi\delta_0\sqrt{mU_0}}{\hbar\sqrt{2}}$; U_0 — энергия активации (высота потенциального барьера); ν_0 — линейная частота собственных колебаний протонов в невозмущенной потенциальной яме; δ_0 — ширина потенциального барьера; m — масса протона.

На основании (2.2), с учетом $|\Delta U_{i;i\pm 1}| \approx \frac{qE_ia}{2}$, $|\Delta U_{i\pm 1;i}| \approx \frac{qE_{i\pm 1}a}{2}$ [1], находим

$$A^{(-)}_{i-1;i} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\cdot\left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^l\cdot A^{(l)}\cdot E^l_{i-1}, \quad A^{(+)}_{i+1;i} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\cdot\left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^l\cdot A^{(l)}\cdot E^l_{i+1}, \qquad (2.4)$$

$$A_{i;i+1}^{(-)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^l \cdot A^{(l)} \cdot E_i^l, \quad A_{i;i-1}^{(+)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^l \cdot A^{(l)} \cdot E_i^l. \tag{2.5}$$

Подстановка (2.4), (2.5) в (1.2) дает

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^l A^{(l)} \cdot \left[n_{i-1}E_{i-1}^l + n_{i+1}(-1)^l E_{i+1}^l\right] -$$

$$-2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^{2l} A^{(2l)} \cdot n_i E_i^{2l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^{2l} A^{(2l)} \cdot \left[n_{i-1}E_{i-1}^{2l} - 2n_i E_i^{2l} + n_{i+1}E_{i+1}^{2l}\right] +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^{2l+1} A^{(2l+1)} \cdot \left[n_{i-1}E_{i-1}^{2l+1} - n_{i+1}E_{i+1}^{2l+1}\right]. \tag{2.6}$$

Применяя к (2.6) конечно-разностные схемы

$$\begin{gathered} \frac{n_{i-1}E_{i-1}^{2l} + n_{i+1}E_{i+1}^{2l} - 2n_iE_i^{2l}}{a^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(n_iE_i^{2l}\right), \\ \frac{n_{i-1}E_{i-1}^{2l+1} - n_{i+1}E_{i+1}^{2l+1}}{a} \to -2\frac{\partial}{\partial x}\left(n_iE_i^{2l+1}\right), \end{gathered} \tag{2.7}$$

имеем

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^{2l} A^{(2l)}\left(n_iE_i^{2l}\right)\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{(2l+1)!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^{2l+1} A^{(2l+1)}\left(n_iE_i^{2l+1}\right)\right],$$

откуда, с помощью тождеств

$$\frac{A_{i,i+1}^{(-)} + A_{i,i-1}^{(+)}}{2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot \left(\frac{qaE_i}{2k_BT}\right)^{2l} \cdot A^{(2l)},$$

$$\frac{A_{i,i+1}^{(-)} - A_{i,i-1}^{(+)}}{2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \cdot \left(\frac{qaE_i}{2k_BT}\right)^{2l+1} \cdot A^{(2l+1)}$$

получим

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{A_{i,i+1}^{(-)} + A_{i,i-1}^{(+)}}{2} \cdot n_i\right) - a\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(A_{i,i+1}^{(-)} - A_{i,i-1}^{(+)}\right) \cdot n_i\right). \tag{2.8}$$

Опуская в (2.8) индекс "i" переходим к *обобщенному нелинейному по полю* $E(x;t)$ кинетическому уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D_{diff}(x;t) \cdot n(x;t)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_{mob}(x;t) \cdot n(x;t)\right). \tag{2.9}$$

В (2.9) приняты обозначения

$$D_{diff}(x;t) = a^2 \frac{A^{(-)} + A^{(+)}}{2}, \quad v_{mob}(x;t) = a\left(A^{(-)} - A^{(+)}\right), \tag{2.10}$$

$$A^{(\mp)}(x;t) = A^{(0)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^l}{l!} \cdot \left(\frac{|\Delta U(x;t)|}{k_BT}\right)^l \cdot A^{(l)}. \tag{2.11}$$

В (2.11) $|\Delta U(x;t)| = \frac{qE(x;t)a}{2}$ — обусловленное электрическим полем $E(x;t)$ приращение потенциальной энергии протона при его переходе через потенциальный барьер, при условии $|\zeta(x;t)| = \left|\frac{\Delta U(x;t)}{k_BT}\right| < 1$.

На основании (2.10), (2.11), используя коэффициенты $D_{diff}^{(2l)} = a^2 \cdot A^{(2l)}$, $\mu_{mob}^{(2l+1)} = \frac{qa^2A^{(2l+1)}}{k_BT}$, имеем

$$D_{diff}(x;t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot D_{diff}^{(2l)} \cdot \left(\frac{\Delta U(x;t)}{k_BT}\right)^{2l},$$

$$v_{mob}(x;t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \cdot \mu_{mob}^{(2l+1)} \cdot \left(\frac{\Delta U(x;t)}{k_BT}\right)^{2l} \cdot E(x;t). \tag{2.12}$$

В (2.12) $v_{mob}(x;t) = \mu_{mob}(x;t) \cdot E(x;t)$, $\mu_{mob}(x;t) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \cdot \mu_{mob}^{(2l+1)} \cdot \left(\frac{\Delta U(x;t)}{k_B T}\right)^{2l}$.

Обозначая $z(x;t) = \frac{E(x;t)}{E_0}$, $\zeta_0 = \frac{qE_0 a}{2k_B T} < 1$, преобразуем (2.12)

$$D_{diff}(x;t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot D_{diff}^{(2l)} \cdot \zeta_0^{2l} \cdot z^{2l}(x;t),$$

$$v_{mob}(x;t) = E_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \cdot \mu_{mob}^{(2l+1)} \cdot \zeta_0^{2l} \cdot z^{2l+1}(x;t). \tag{2.13}$$

Уравнение Пуассона запишем в виде [1; 10]

$$\frac{\partial z(x;t)}{\partial x} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty E_0} \cdot \rho(x;t). \tag{2.14}$$

В (2.14) $\rho(x;t) = n(x;t) - n_0$ есть концентрация протонов избыточная над их равновесной концентрацией n_0; ε_∞ — высокочастотная диэлектрическая проницаемость. Граничное условие $\int\limits_0^d E(x;t)dx = V_0 \cdot \exp(i\omega t)$, где $V_0 = E_0 d$, ω — амплитуда и круговая частота ЭДС, d — толщина кристалла [1], представим в форме

$$\int_0^d z(x;t)dx = d \cdot \exp(i\omega t). \tag{2.15}$$

Уравнение (2.9) преобразуется к одномерному уравнению неразрывности

$$q\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{j}_x}{\partial x} = 0. \tag{2.16}$$

В (2.16) плотность тока

$$\vec{j}_x(x;t) = q\left\{v_{mob}(x;t) \cdot n(x;t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{diff}(x;t) \cdot n(x;t)\right)\right\} \tag{2.17}$$

В начальный момент времени [1; 10]

$$n(x;0) = n_0. \tag{2.18}$$

Для модели блокирующих электродов $\vec{j}_x(0;t) = \vec{j}_x(d;t) = 0$ [1], согласно (2.17), имеем

$$\left[v_{mob}(x;t) \cdot n(x;t)\right]\Big|_{x=\{0;d\}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{diff}(x;t) \cdot n(x;t)\right)\right]\Bigg|_{x=\{0;d\}}. \tag{2.19}$$

В общем случае, преобразуем (2.9), (2.18), (2.19) к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D_{diff}(x;t) \cdot \rho(x;t)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_{mob}(x;t) \cdot \rho(x;t)\right) +$$

$$+ n_0 \frac{\partial^2 D_{diff}(x;t)}{\partial x^2} - n_0 \frac{\partial v_{mob}(x;t)}{\partial x}, \tag{2.20}$$

$$\rho(x;0) = 0, \tag{2.21}$$

$$\left[v_{mob}(x;t) \cdot \rho(x;t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{diff}(x;t) \cdot \rho(x;t)\right)\right]\Bigg|_{x=\{0;d\}} =$$

$$= n_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{diff}(x;t) \cdot \rho(x;t)\right) - v_{mob}(x;t)\right)\Bigg|_{x=\{0;d\}}. \tag{2.22}$$

Решение уравнения (2.20) будем строить методом последовательных приближений, в виде *бесконечных рядов по степеням параметра сравнения* ζ_0

$$\rho(x;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{(k)}(x;t) \cdot \zeta_0^k. \tag{2.23}$$

Подставляя (2.12), (2.13) и (2.23) в (2.20), с учетом (2.14), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_0^k \cdot \frac{\partial \rho^{(k)}}{\partial t} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} A^{(2l)} \left\{ \frac{1}{(2l)!}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(m)}z^{2l}\right) - \frac{E_0\mu_{mob}^{(2l+1)}a}{D_{diff}^{(2l)}(2l+1)!}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(m)}z^{2l+1}\right)\right\}\zeta_0^{2l+m}+$$

$$+\frac{qan_0}{\varepsilon_0\varepsilon_\infty E_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} A^{(2l)} \left\{ \frac{1}{(2l)!}\cdot 2l\cdot\left[\frac{qa(2l-1)}{\varepsilon_0\varepsilon_\infty E_0}z^{2(l-1)}\cdot\rho^{(m)}\cdot\rho(x;t)+z^{2l-1}\frac{\partial\rho^{(m)}}{\partial\xi}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2l+1)!}(2l+1)z^{2l}\rho^{(m)}\frac{\mu_{mob}^{(2l+1)}aE_0}{D_{diff}^{(2l)}}\right\}\zeta_0^{2l+m}. \qquad (2.24)$$

Пренебрегая в (2.24) слагаемым порядка $\rho^{(m)}\cdot\rho(x;t)$ и вводя обозначения $\gamma^{(2l+1)} = \frac{E_0\mu_{mob}^{(2l+1)}a}{D_{diff}^{(2l)}}$, $\phi = \frac{qa}{\varepsilon_0\varepsilon_\infty E_0}$, $\theta^{(2l+1)} = n_0\phi\gamma^{(2l+1)}$, $\xi = \frac{x}{a}$, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\zeta_0^k\cdot\frac{\partial\rho^{(k)}}{\partial t} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} A^{(2l)}\left\{\frac{1}{(2l)!}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(m)}z^{2l}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(m)}z^{2l+1}\right)\right\}\zeta_0^{2l+m}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} A^{(2l)}\left\{\frac{1}{(2l)!}\cdot 2l\cdot\phi n_0\cdot z^{2l-1}\frac{\partial\rho^{(m)}}{\partial\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2l+1)!}(2l+1)\theta^{(2l+1)}z^{2l}\rho^{(m)}\right\}\zeta_0^{2l+m}. \qquad (2.25)$$

На основании (2.25), при четных значениях номера $k = 2l+m = 2s$, $s = 0,1,2,3,...,$ имеем

$$\frac{\partial\rho^{(2s)}}{\partial\tau^{(0)}} = \sum_{l=0}^{s}\frac{A^{(2l)}}{A^{(0)}}\left\{\frac{1}{(2l)!}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(2(s-l))}z^{2l}\right)-\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(2(s-l))}z^{2l+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2l}{(2l)!}\cdot\phi n_0\cdot z^{2l-1}\frac{\partial\rho^{(2(s-l))}}{\partial\xi}-\frac{2l+1}{(2l+1)!}\cdot\theta^{(2l+1)}z^{2l}\rho^{(2(s-l))}\right\}, \qquad (2.26)$$

а при нечетных значениях номера $k = 2l+m = 2s+1$ соответственно

$$\frac{\partial\rho^{(2s+1)}}{\partial\tau^{(0)}} = \sum_{l=0}^{s}\frac{A^{(2l)}}{A^{(0)}}\left\{\frac{1}{(2l)!}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(2(s-l)+1)}z^{2l}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(2(s-l)+1)}z^{2l+1}\right)+$$

$$\left.+\frac{2l}{(2l)!}\cdot\phi n_0\cdot z^{2l-1}\frac{\partial\rho^{(2(s-l)+1)}}{\partial\xi}-\frac{2l+1}{(2l+1)!}\cdot\theta^{(2l+1)}z^{2l}\rho^{(2(s-l)+1)}\right\}. \qquad (2.27)$$

В (2.26), (2.27) используется безразмерное время $\tau^{(0)} = A^{(0)}t$.

Из (2.21), с учетом (2.23), пишем

$$\rho^{(2s)}(\xi;0) = 0, \quad \rho^{(2s+1)}(\xi;0) = 0. \qquad (2.28)$$

Подставляя (2.12), (2.13) и (2.23) в (2.22), с учетом (2.14), получим

$$\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[E_0\frac{1}{(2l+1)!}\mu_{mob}^{(2l+1)}\cdot\left(z^{2l+1}\cdot\rho^{(m)}\right)-\frac{1}{(2l)!}\cdot D_{diff}^{(2l)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(z^{2l}\cdot\rho^{(m)}\right)\right]\zeta_0^{2l+m}-\right.$$

$$-n_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_\infty E_0}\cdot\frac{1}{(2l)!}\cdot D_{diff}^{(2l)}\cdot 2lz^{2l-1}\cdot\rho^{(m)}\cdot\zeta_0^{2l+m}+$$

$$\left.\left.+\ n_0E_0\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)!}\mu_{mob}^{(2l+1)}\cdot z^{2l+1}\zeta_0^{2l}\right]\right|_{x=\{0;d\}} = 0. \qquad (2.29)$$

Далее имеем

$$\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}D_{diff}^{(2l)}\left[\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\left(z^{2l+1}\cdot\rho^{(m)}\right)-\frac{1}{(2l)!}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(z^{2l}\cdot\rho^{(m)}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2l)!}\cdot n_0\phi\cdot 2lz^{2l-1}\cdot\rho^{(m)}\right]\zeta_0^{2l+m}+$$

$$+n_0\sum_{l=0}^{\infty}D_{diff}^{(2l)}\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\cdot z^{2l+1}\zeta_0^{2l}\Bigg]\Bigg|_{x=\{0;d\}}=0. \qquad (2.30)$$

На основании (2.30), при четных значениях номера $k=2l+m=2s,\ s=0,1,2,3,...,$ имеем

$$\Bigg[\sum_{l=0}^{s}D_{diff}^{(2l)}\left[\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\left(z^{2l+1}\cdot\rho^{(2(s-l))}\right)-\frac{1}{(2l)!}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(z^{2l}\cdot\rho^{(2(s-l))}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2l)!}\cdot n_0\phi\cdot 2lz^{2l-1}\cdot\rho^{(2(s-l))}\right]\zeta_0^{2s}+$$

$$+\ n_0\sum_{l=0}^{s}D_{diff}^{(2l)}\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\cdot z^{2l+1}\zeta_0^{2l}\Bigg]\Bigg|_{x=\{0;d\}}=0, \qquad (2.31)$$

а при нечетных значениях номера $k=2l+m=2s+1$ соответственно

$$\Bigg[\sum_{l=0}^{s}D_{diff}^{(2l)}\left[\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\left(z^{2l+1}\cdot\rho^{(2(s-l)+1)}\right)-\frac{1}{(2l)!}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(z^{2l}\cdot\rho^{(2(s-l)+1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\ \frac{1}{(2l)!}\cdot n_0\phi\cdot 2lz^{2l-1}\cdot\rho^{(2(s-l)+1)}\right]\zeta_0^{2s+1}+$$

$$+\ n_0\sum_{l=0}^{s}D_{diff}^{(2l)}\frac{1}{(2l+1)!}\cdot\gamma^{(2l+1)}\cdot z^{2l+1}\zeta_0^{2l}\Bigg]\Bigg|_{x=\{0;d\}}=0. \qquad (2.32)$$

На основании (2.26), (2.27), (2.28), (2.31), (2.312), в "нулевом" приближении по параметру ζ_0, принимая $k=2l+m=0,\ l=0,\ m=0,$ имеем

$$\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial\tau^{(0)}}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(0)}\right)-\gamma^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(0)}z\right)-\theta^{(1)}\rho^{(0)}, \qquad (2.33)$$

$$\rho^{(0)}(\xi;0)=0,\quad \left[\gamma^{(1)}\left(z\cdot\rho^{(0)}\right)-\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial\xi}+n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z\right]\Bigg|_{x=\{0;d\}}=0. \qquad (2.34)$$

В первом приближении по параметру ζ_0, соответственно $k=2l+m=1,\ l=0,\ m=1,$

$$\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial\tau^{(0)}}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(1)}\right)-\gamma^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(1)}z\right)-\theta^{(1)}\rho^{(1)}, \qquad (2.35)$$

$$\rho^{(1)}(\xi;0)=0,\quad \left[\left(\gamma^{(1)}(z\cdot\rho^{(1)})-\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial\xi}\right)\zeta_0+n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z\right]\Bigg|_{x=\{0;d\}}=0. \qquad (2.36)$$

Очевидно, что выражение (2.35) определяет функцию $\tilde{\rho}^{(1)}=\rho^{(1)}\zeta_0$. При этом выполняется равенство $\tilde{\rho}^{(1)}=\rho^{(0)}$.

Во втором приближении $k=2l+m=2,\ l=0,\ m=2;l=1,\ m=0$

$$\frac{\partial\rho^{(2)}}{\partial\tau^{(0)}}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(2)}\right)-\gamma^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(2)}z\right)-\theta^{(1)}\rho^{(2)}+\frac{A^{(2)}}{A^{(0)}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(0)}z^2\right)-\frac{1}{3!}\cdot\gamma^{(3)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(0)}z^3\right)+\phi n_0\cdot z\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\cdot\theta^{(3)}z^2\rho^{(0)}\right], \qquad (2.37)$$

$$\rho^{(2)}(\xi;0)=0,\quad \Bigg[D_{diff}^{(0)}\left[\gamma^{(1)}\left(z\cdot\rho^{(2)}\right)-\frac{\partial\rho^{(2)}}{\partial\xi}\right]\zeta_0^2+n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z+$$

$$+D_{diff}^{(2)}\left[\frac{1}{3!}\cdot\gamma^{(3)}\left(z^3\cdot\rho^{(0)}\right)-\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(z^2\cdot\rho^{(0)}\right)-\frac{2}{2!}\cdot n_0\phi\cdot z\cdot\rho^{(0)}\right]\zeta_0^2+$$

$$+\frac{1}{3!}n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2\Bigg]\Bigg|_{x=\{0;d\}}=0. \qquad (2.38)$$

Очевидно, что выражение (2.37) определяет функцию $\tilde{\rho}^{(2}=\rho^{(2)}\zeta_0^2$. При этом, в (2.38) используются обозначения $\rho^{(0)}\zeta_0^2=\tilde{\rho}^{(1)}\zeta_0$ и $n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2$.

В третьем приближении по параметру $\zeta_0,\ k=2l+m=3,\ l=0,\ m=3;\ l=1,\ m=1,$

$$\frac{\partial\rho^{(3)}}{\partial\tau^{(0)}}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(3)}\right)-\gamma^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(3)}z\right)-\theta^{(1)}\rho^{(3)}+\frac{A^{(2)}}{A^{(0)}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\rho^{(1)}z^2\right)-\frac{1}{3!}\cdot\gamma^{(3)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho^{(1)}z^3\right)+\phi n_0\cdot z\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\cdot\theta^{(3)}z^2\rho^{(1)}\right], \tag{2.39}$$

$$\rho^{(3)}(\xi;0)=0,\quad \left[D^{(0)}_{diff}\left[\gamma^{(1)}\left(z\cdot\rho^{(3)}\right)-\frac{\partial\rho^{(3)}}{\partial\xi}\right]\zeta_0^3+n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z+\right.$$
$$+D^{(2)}_{diff}\left[\frac{1}{3!}\cdot\gamma^{(3)}\left(z^3\cdot\rho^{(1)}\right)-\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(z^2\cdot\rho^{(1)}\right)-\frac{2}{2!}\cdot n_0\phi\cdot z\cdot\rho^{(1)}\right]\zeta_0^3+$$
$$\left.\left.+\frac{1}{3!}n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2\right]\right|_{x=\{0;d\}}=0. \tag{2.40}$$

Выражение (2.39) определяет функцию $\tilde{\rho}^{(3}=\rho^{(3}\zeta_0^3$. При этом, в (2.40) используются $n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z$ и $\rho^{(1)}\zeta_0^3==\tilde{\rho}^{(1)}\zeta_0^2,\ n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2$.

В последующих приближениях по параметру ζ_0:

1) $k=2l+m=4,\ l=0,\ m=4,\ l=1,\ m=2;\ l=2,\ m=0$ определяет функцию $\tilde{\rho}^{(4)}=\rho^{(4)}\zeta_0^4$ с помощью $n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z,\ \rho^{(2)}\zeta_0^4=\tilde{\rho}^{(2)}\zeta_0^2,\ n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2$ и $\rho^{(0)}\zeta_0^4=\tilde{\rho}^{(1)}\zeta_0^3,\ n_0\cdot\gamma^{(5)}\cdot z^5\cdot\zeta_0^4$;

2) $k=2l+m=5,\ l=0,\ m=5,\ l=1,\ m=3,\ l=2,\ m=1$ определяет функцию $\tilde{\rho}^{(5)}=\rho^{(5)}\zeta_0^5$ с помощью $n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z,\ \rho^{(3)}\zeta_0^5=\tilde{\rho}^{(3)}\zeta_0^2,\ n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2$ и $\rho^{(1)}\zeta_0^5=\tilde{\rho}^{(1)}\zeta_0^4,\ \gamma^{(5)}\cdot z^5\cdot\zeta_0^4$;

3) $k=2l+m=6,\ l=0,\ m=6,\ l=1,\ m=4,\ l=2,\ m=2,l=3,\ m=0$ определяет функцию $\tilde{\rho}^{(6)}=\rho^{(6)}\zeta_0^6$ с помощью $n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z,\ \rho^{(4)}\zeta_0^6=\tilde{\rho}^{(4)}\zeta_0^2,\ n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2,\ \rho^{(2)}\zeta_0^6=\tilde{\rho}^{(2)}\zeta_0^4,\ \gamma^{(5)}\cdot z^5\cdot\zeta_0^4$ и $\rho^{(0)}\zeta_0^6=\tilde{\rho}^{(1)}\zeta_0^6,\ \gamma^{(7)}\cdot z^7\cdot\zeta_0^6$;

4) $k=2l+m=7,\ l=0,\ m=7,\ l=1,\ m=5,\ l=2,\ m=3,l=3,\ m=1$ определяет функцию $\tilde{\rho}^{(7)}=\rho^{(7)}\zeta_0^7$ с помощью $n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z,\ \rho^{(5)}\zeta_0^7=\tilde{\rho}^{(5)}\zeta_0^2,\ n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2,\ \rho^{(3)}\zeta_0^7=\tilde{\rho}^{(3)}\zeta_0^4,\ \gamma^{(5)}\cdot z^5\cdot\zeta_0^4$ и $\rho^{(1)}\zeta_0^7=\tilde{\rho}^{(1)}\zeta_0^6,\ \gamma^{(7)}\cdot z^7\cdot\zeta_0^6$ и т.д.

В приближении четного порядка $k=2l+m=2s$ по параметру ζ_0,

$$l=0,\ m=2s,\ l=1,\ m=2(s-1),\ l=2,\ m=2(s-2),\ l=3,\ m=2(s-3),$$
$$l=4,\ m=2(s-4),\ldots,l=l,\ m=2(s-l),\ldots,l=s,\ m=0,$$

функция $\tilde{\rho}^{(2s)}=\rho^{(2s)}\zeta_0^{2s}$ определяется с помощью

$$n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z,$$
$$\rho^{(2(s-1))}\zeta_0^{2s}=\tilde{\rho}^{(2(s-1))}\zeta_0^2,\ \ n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2,\ \ \rho^{(2(s-2))}\zeta_0^{2s}=\tilde{\rho}^{(2(s-2))}\zeta_0^4,\gamma^{(5)}\cdot z^5\cdot\zeta_0^4,$$
$$\rho^{(2(s-3))}\zeta_0^{2s}=\tilde{\rho}^{(2(s-3))}\cdot\zeta_0^6,\ \ \gamma^{(7)}\cdot z^7\cdot\zeta_0^6,\ \ \rho^{(2(s-4))}\zeta_0^{2s}=\tilde{\rho}^{(2(s-4))}\cdot\zeta_0^8,\ \ \gamma^{(9)}\cdot z^9\cdot\zeta_0^8,\ldots,$$
$$\rho^{(2(s-l))}\zeta_0^{2s}=\tilde{\rho}^{(2(s-l))}\cdot\zeta_0^{2l},\ \ \gamma^{(2l+1)}\cdot z^{(2l+1)}\cdot\zeta_0^{2l},\ldots,$$
$$\rho^{(0)}\zeta_0^{2s}=\tilde{\rho}^{(1)}\cdot\zeta_0^{2s-1},\ \ \gamma^{(2s+1)}\cdot z^{(2s+1)}\cdot\zeta_0^{2s}. \tag{2.41}$$

В приближении нечетного порядка $k=2l+m=2s+1$ по параметру ζ_0,

$$l=0,\ m=2s+1,\ l=1,\ m=2(s-1)+1,$$
$$l=2,\ m=2(s-2)+1,\ l=3,\ m=2(s-3),\ l=4,$$
$$m=2(s-4),\ldots,l=l,\ m=2(s-l),\ldots,l=s,\ m=0$$

функция $\tilde{\rho}^{(2s+1)}=\rho^{(2s+1)}\zeta_0^{2s+1}$ определяется с помощью

$$n_0\cdot\gamma^{(1)}\cdot z,$$
$$\rho^{(2(s-1)+1)}\zeta_0^{2s+1}=\tilde{\rho}^{(2(s-1)+1)}\zeta_0^2,\ \ n_0\cdot\gamma^{(3)}\cdot z^3\cdot\zeta_0^2,\ \ \rho^{(2(s-2)+1)}\zeta_0^{2s+1}=$$
$$=\tilde{\rho}^{(2(s-2)+1)}\zeta_0^4,\gamma^{(5)}\cdot z^5\cdot\zeta_0^4,$$
$$\rho^{(2(s-3)+1)}\zeta_0^{2s}=\tilde{\rho}^{(2(s-3)+1)}\cdot\zeta_0^6,\ \ \gamma^{(7)}\cdot z^7\cdot\zeta_0^6,\ \ \rho^{(2(s-4)+1)}\zeta_0^{2s+1}=$$
$$=\tilde{\rho}^{(2(s-4)+1)}\cdot\zeta_0^8,\ \ \gamma^{(9)}\cdot z^9\cdot\zeta_0^8,\ldots,$$
$$\rho^{(2(s-l)+1)}\zeta_0^{2s+1}=\tilde{\rho}^{(2(s-l)+1)}\cdot\zeta_0^{2l},\ \ \gamma^{(2l+1)}\cdot z^{(2l+1)}\cdot\zeta_0^{2l},\ldots,$$
$$\rho^{(0)}\zeta_0^{2s+1}=\tilde{\rho}^{(1)}\cdot\zeta_0^{2s},\quad \gamma^{(2s+1)}\cdot z^{(2s+1)}\cdot\zeta_0^{2s}. \tag{2.42}$$

Для полного описания схемы решения кинетического уравнения (2.20) представим (2.14), (2.15) в виде

$$\frac{\partial z(\xi;\tau^{(0)})}{\partial\xi}=\phi\rho(\xi;\tau^{(0)}),\qquad \int\limits_0^{\frac{d}{a}}z(\xi;\tau^{(0)})d\xi=\frac{d}{a}\cdot\exp\left(\frac{i\omega\tau^{(0)}}{A^{(0)}}\right). \tag{2.43}$$

Непосредственная реализация данной схемы, в виде аналитических функций $\tilde{\rho}^{(2s)}(\xi;\tau^{(0)})=\rho^{(2s)}(\xi;\tau^{(0)})\cdot\cdot\zeta_0^{2s},\ \tilde{\rho}^{(2s+1)}(\xi;\tau^{(0)})=\rho^{(2s+1)}(\xi;\tau^{(0)})\cdot\zeta_0^{2s+1}$, выходит за пределы данной работы и будет выполнена в дальнейшем.

3. Влияние нелинейностей на время релаксации

Выражения (2.10), (2.12) позволяют представить время релаксации для микроскопических актов переходов протонов через потенциальный барьер

$$\tau(T) = \frac{1}{\Omega(x;t)}, \quad \Omega(x;t) = \frac{D_{diff}(x;t)}{a^2}, \tag{3.1}$$

где $\Omega(x;t)$ — средняя частота переходов, в виде

$$\tau(T) = \frac{1}{A^{(0)}(T) + \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot (\frac{qa}{2k_BT})^{2l} \cdot A^{(2l)} \cdot E^{2l}(x;t)}. \tag{3.2}$$

Дальнейшее исследование выражения (3.2) будем строить относительно критической температуры $T_{mov} = \frac{\hbar\sqrt{2U_0}}{\pi\delta_0 k_B \sqrt{mU_0}}$ [8], разделяющей температурные области (зоны) туннельных ($T < T_{mov}$, $X > \Lambda$) и термически активируемых ($T > T_{mov}$, $X < \Lambda$) переходов протонов. Так, принимая для низкотемпературных максимумов плотности ТСТД халькантита $U_0 = 0,07$ эВ [1], для флогопита $U_0 = 0,05$ эВ [1], при $\delta_0 = 0,85 \cdot 10^{-10}$ м [10], получаем соответственно: $T_{mov,chalcanthite} \approx 99$ К, $T_{mov,ph\log opite} \approx 83$ К.

В области температур $T \ll T_{mov}$, $\frac{\Lambda}{X} = \frac{\pi\delta_0 k_B T\sqrt{m}}{\hbar\sqrt{2U_0}} \ll 1$ и $A^{(2l)} \to A^{(2l)}_{tunn} = \frac{\nu_0}{2}\left\langle D^{(2l)}\right\rangle$, формула (3.2), в пределе, дает

$$\tau(T) \to \tau_{tunn}(T) = \frac{2}{\nu_0\left[\left\langle D^{(0)}\right\rangle + \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot \left(\frac{\Delta U}{k_BT}\right)^{2l} \cdot \left\langle D^{(2l)}\right\rangle\right]}, \tag{3.3}$$

откуда, в силу $\left\langle D^{(2l)}\right\rangle \approx \frac{\Lambda^{2l}}{X^{2l}\left(1-\frac{\Lambda}{X}\right)} \exp(-\Lambda)$, имеем

$$\tau_{tunn}(T) \approx \frac{2\left(1-\frac{\Lambda}{X}\right) \cdot \exp(\Lambda)}{\nu_0\left[1 + \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot \left(\Lambda\frac{\Delta U}{U_0}\right)^{2l}\right]}, \tag{3.4}$$

и, при условии $\Lambda\frac{\Delta U}{U_0} \ll 1$,

$$\tau_{tunn}(T) \approx \frac{2\left(1-\frac{\Lambda}{X}\right) \cdot \exp(\Lambda)}{\nu_0 \mathrm{ch}\left(\frac{\Lambda \cdot \Delta U}{U_0}\right)}. \tag{3.5}$$

При сверхнизких температурах, когда $\frac{\Lambda}{X} \to 0$, из (3.5)

$$\tau_{tunn(T)} \to \frac{2 \cdot \exp(\Lambda)}{\nu_0}. \tag{3.6}$$

Выражение (3.5) указывает на слабую зависимость времени релаксации от температуры в области туннельных переходов ($T \ll T_{mov}$), а выражение (3.6) позволяет утверждать, что вблизи температуры абсолютного нуля время релаксации есть функция только параметров релаксаторов и параметров потенциального рельефа, заложенных в параметре Λ.

Формула (3.3), с учетом (2.2), преобразуется к виду

$$\tau(T) = \frac{2}{\nu_0\left(\exp\left(-\frac{U_0}{k_BT}\right) \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{\Delta U}{k_BT}\right) + \frac{\exp(-\Lambda)\cdot \mathrm{ch}\left(\frac{\Lambda\cdot\Delta U}{U_0}\right) - \exp\left(-\frac{U_0}{k_BT}\right)\cdot \mathrm{ch}\left(\frac{\Delta U}{k_BT}\right)}{1-\frac{\Lambda k_BT}{U_0}}\right)}, \tag{3.7}$$

откуда, в нулевом приближении по полю ($\Delta U = 0$), в области низких температур $\left(\frac{\Lambda k_BT}{U_0} \ll 1\right)$, очевидно $\tau^{(0)}(T) \approx \frac{2\left(1-\frac{\Lambda \cdot k_BT}{U_0}\right)}{\nu_0} \cdot e^{\Lambda}$, а при сверхнизких температурах имеем $\tau^{(0)}(0) \to \frac{2}{\nu_0} \cdot e^{\Lambda}$, что согласуется с (3.5), (3.6).

Из (3.3), с учетом (2.2), очевидно

$$\tau(T) = \left[\frac{1}{\tau^{(0)}(T} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot \left(\frac{qa}{2k_BT}\right)^{2l} \cdot \frac{1}{\tau^{(2l)}(T)} \cdot E^{2l}(x;t)\right]^{-1}. \tag{3.8}$$

В (3.8)

$$\tau^{(2l)}(T) = \frac{2}{\nu_0}\left[\exp(-X) + \frac{\left(\frac{\Lambda}{X}\right)^{2l}\exp(-\Lambda) - \exp(-X)}{1-\frac{\Lambda}{X}}\right]^{-1}. \tag{3.9}$$

Принимая в (3.9) $\frac{\Lambda}{X} \ll 1$, приближенно имеем $\tau^{(2l)}(T) \to \frac{2}{\nu_0} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\Lambda}{X}\right)^{2l} \cdot \exp(-\Lambda)}{1-\frac{\Lambda}{X}} \right]^{-1}$, откуда, в пределе $\frac{\Lambda}{X} \to 0$, начиная с порядка $2l = 2$, $\tau^{(2l)}(0) \to \infty$. Исключение представляет случай $2l = 0$, $\tau^{(0)}(0) \to \frac{2}{\nu_0} \cdot \exp(\Lambda)$. Тогда, из (3.8) имеем $\tau(0) \to \frac{\tau^{(0)}(0)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\Lambda \cdot \Delta U}{U_0}\right)}$, что согласуется с выражениями (3.5), (3.6)

$$\tau_{tunn}(T) \approx \frac{\tau^{(0)}(0) \cdot \left(1 - \frac{\Lambda}{U_0} \cdot k_B T\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\Lambda \cdot \Delta U}{U_0}\right)}. \tag{3.10}$$

Выводы

1 . Из сравнительного анализа существующих методов теоретического описания релаксационной поляризации в КВС установлено, что феноменологическая модель [1; 10], построенная в линейном приближении по параметру $\zeta(x;t) = \frac{qE(x;t)a}{2k_B T} < 1$ [1; 13], ограничена по поляризующему полю ($E_0 \approx 100-1000$ кВ/м) и температуре ($T \approx 70 \div 250$ K) и применима, для сравнения с экспериментом, в интервале значений параметра $\varsigma_0 = \frac{qE_0 a}{k_B T} \approx 0,001 \div 0,01$. При температурах $T \approx 100 \div 250$ K линейное приближение по малому параметру γ [1] хорошо согласуется с экспериментом [6; 9], а вне данного диапазона температур роль *нелинейных* поляризационных эффектов усиливается, что требует учета последующих (как минимум с третьего) приближений теории возмущений. Природа этих нелинейностей объясняется влиянием туннельных (квантовых) переходов протонов ($T \approx 70 \div 100$ K) и релаксацией объемного заряда ($T \approx 250 \div 450$ K) и обуславливает отклонении от *дебаевских законов* частотно-температурной дисперсии комплексной диэлектрической проницаемости (КДП) [13]. 2. Построено *обобщенное квазиклассическое кинетическое уравнение* (2.20), позволяющее, на основе единой аналитической схемы, *методом последовательных приближений* (2.23), исследовать механизм *нелинейной релаксационной (объемно-зарядовой) поляризации* в КВС в диапазоне температур $T \approx 1 \div 1500$ K и полей $E_0 \approx 10^5 \div 10^8$ В/м. Доказано, что уравнение Фоккера-Планка [1] получается из уравнения (2.20) в линейном приближении по параметру $\zeta(x;t) = \frac{qE(x;t)a}{2k_B T}$. Учет более высоких степеней параметра $\zeta_0 = \frac{qE_0 a}{2k_B T}$ в (2.23) усиливает влияние квантовых эффектов на малый параметр теории возмущений (1.2). 3. Формально обобщенное кинетическое уравнение (2.20) применимо и к другим, схожим с КВС по структуре и свойствам кристаллической решетки, кристаллам с ионной проводимостью. Не исключается применимость развиваемых аналитических методов к исследованию суперионной проводимости и квазисегнетоэлектрического эффекта (1250 K, 1 кГц) в корундо-циркониевой-керамике (КЦК) [16]. 4. Исследовано влияние нелинейностей на времена релаксации для микроскопических процессов переходов протонов через потенциальный барьер (выражения (3.2), (3.3), (3.8)). Установлена слабая зависимость времени релаксации от температуры при квантовых переходах (3.5), (3.10). Вблизи температуры абсолютного нуля время релаксации от температуры не зависит (3.6).

Литература

[1] Тонконогов М.П. Диэлектрическая спектроскопия кристаллов с водородными связями. Протонная релаксация // УФН. 1998. Т. 168, № 1. С. 29–54.

[2] Антонова А.М., Воробьев А.В., Ляликов Б.А. К выбору материалов для нетрадиционной тепловой изоляции оборудования ТЭС и АЭС // Энергетика: экология, надежность, безопасность: материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции. Томск: Издательство ТПУ, 2008. С. 289.

[3] Белоненко М.Б. Особенности нелинейной динамики лазерного импульса в фоторефрактивном сегнетоэлектрике с водородными связями // Квантовая электроника. 1998. Т. 25, № 3. С. 255–258.

[4] Reijers R., Haije W. Literature review on high temperature proton conducting materials // Energy research Centre of the Netherlands. 2008. ECN-E-08-091.

[5] Ярославцев А.Б. Основные направления разработки и исследования твердых электролитов // Успехи химии. 2016. Т. 85. С. 1255.

[6] Тонконогов М.П., Исмаилов Ж.Т., Тимохин В.М., Фазылов К.К., Калытка В.А., Баймуханов З.К. Нелинейная теория спектров термостимулированных токов в сложных кристаллах с водородными связями // Известия Вузов. Физика. 2002. № 10. С. 76–84.

[7] Анненков Ю.М., Калытка В.А., Коровкин М.В. Квантовые эффекты при миграционной поляризации в нанометровых слоях протонных полупроводников и диэлектриков при сверхнизких температурах // Известия Вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 1. С. 31–37.

[8] Калытка В.А., Коровкин М.В. Дисперсионные соотношения для протонной релаксации в твердых диэлектриках // Известия Вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 12. С. 150–159.

[9] Тонконогов М.П., Кукетаев Т.А., Фазылов К.К., Калытка В.А. Квантовые эффекты при термодеполяризации в сложных кристаллах с водородными связями // Известия ВУЗов. Физика. 2004. № 6. С. 8–15.

[10] Калытка В.А., Коровкин М.В. Протонная проводимость. Монография. Издательский Дом: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 180 с.

[11] Тимохин В.М. Особенности протонного транспорта в широкозонных диэлектриках // Прикладная физика. 2012. № 1. С. 12–18.

[12] Тимохин В.М. Туннельный эффект и протонная релаксация в электротехнических материалах // Успехи современного естествознания. 2010. № 3. С. 134–136.

[13] Калытка В.А., Никонова Т.Ю. Нелинейные электрофизические свойства протонных полупроводников и диэлектриков // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП - 2016): труды XIII Международной научно-практической конференции. Электронно-физическая секция. Новосибирск, 2016. Т. 2. С. 57–65.

[14] Калытка В.А., Баймуханов З.К., Мехтиев А.Д. Нелинейные эффекты при поляризации диэлектриков со сложной кристаллической структурой // Доклады академии наук высшей школы Российской Федерации. 2016. № 3(32). С. 7–21.

[15] Самойлович А.Г., Клингер М.И., Кореблит Л.Л. Новый вывод неравновесной функции распределения в полупроводниках // ФТТ: сб. статей II. 1959. С. 121–135.

[16] Анненков Ю.М., Ивашутенко А.С., Власов И.В., Кабышев А.В. Электрические свойства корундо-циркониевой керамики // Известия Томского политехнического университета. 2005. Т. 308, № 7. С. 35–38.

References

[1] Tonkonogov M.P. *Dielektricheskaia spektroskopiia kristallov s vodorodnymi sviaziami. Protonnaia relaksatsiia* [Dielectric spectroscopy of crystals with hydrogen bonds. Proton relaxation]. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 1998, Vol. 168, no. 1, pp. 29–54 [in Russian].

[2] Antonova A.M, Vorobyov A.V., Lyalikov B.A. *K vyboru materialov dlia netraditsionnoi teplovoi izoliatsii oborudovaniia TES i AES* [To the choice of materials for non-traditional thermal insulation for thermal and nuclear power stations]. In: Energetika: ekologiia, nadezhnost', bezopasnost': materialy XIV Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii [Energy: ecology, reliability, safety: proceedings of the 14-th Russian scientific and technical conference]. Tomsk: Izdatel'stvo TPU, 2008, p. 289 [in Russian].

[3] Belonenko M.B. Osobennosti nelineinoi dinamiki lazernogo impul'sa v fotorefraktivnom segnetoelektrike s vodorodnymi sviaziami [Peculiarities of laser pulse nonlinear dynamics in photorefractive ferroelectrics with hydrogen bonds]. *Kvantovaia elektronika* [Quantum electronics], 1998, Vol. 25, no. 3, pp. 255-258 [in Russian].

[4] Reijers R., Haije W. Literature review on high temperature proton conducting materials. *Energy research Centre of the Netherlands*, 2008, ECN-E-08-091 [in English].

[5] Yaroslavtsev A.B. *Osnovnye napravleniia razrabotki i issledovaniia tverdykh elektrolitov* [The main directions of development and research of solid electrolytes]. *Uspekhi khimii* [Russian chemical reviews], 2016, Vol. 85, p. 1255 [in Russian].

[6] Tonkonogov M.P., Ismailov Zh.T., Timokhin V.M., Fazylov K.K., Kalytka V.A., Baimukhanov Z.K. *Nelineinaia teoriia spektrov termostimulirovannykh tokov v slozhnykh kristallakh s vodorodnymi sviaziami* [Nonlinear theory of spectra of thermally stimulated currents in complex crystals with hydrogen-bonds]. *Izvestiia Vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 2002, no. 10, pp. 76–84 [in Russian].

[7] Annenkov Yu.M., Kalytka V.A., Korovkin M.V. *Kvantovye effekty pri migratsionnoi poliarizatsii v nanometrovykh sloiakh protonnykh poluprovodnikov i dielektrikov pri sverkhnizkikh temperaturakh* [Quantum effects under migratory polarization in nanometer layers of proton semiconductors and dielectrics at ultralow temperatures]. *Izvestiia Vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 2015, Vol. 58, no. 1, pp. 35–41. DOI: 10.1007/s11182-015-0459-z. Translated from *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika*, 2015, Vol. 58, no. 1, pp. 31–37 [in Russian].

[8] Kalytka V.A., Korovkin M.V. *Dispersionnye sootnosheniia dlia protonnoi relaksatsii v tverdykh dielektrikakh* [Dispersion relations for proton relaxation in solid dielectrics]. *Izvestiia Vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 2017, Vol. 59, no. 12, pp. 2151–2161. DOI: 10.1007/s11182-017-1027-5. Translated from *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika*, 2016, Vol. 59, no. 12, pp. 150–159 [in Russian].

[9] Tonkonogov M.P., Kuketayev T.A., Fazylov K.K., Kalytka V.A. *Kvantovye effekty pri termodepoliarizatsii v slozhnykh kristallakh s vodorodnymi sviaziami* [Quantum effects under thermostimulated depolarization in compound hydrogen-bonded crystals]. *Izvestiia Vuzov. Fizika* [Russian Physics Journal], 2004, Vol. 47, no. 6, pp. 583–590. Translated from *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika*, 2004, Vol. 47, no. 6, pp. 8–15 [in Russian].

[10] Kalytka V.A., Korovkin M.V. *Protonnaia provodimost'. Monografiia* [Proton conductivity. Monograph]. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015, 180 p. [in Russian].

[11] Timokhin V.M. *Osobennosti protonnogo transporta v shirokozonnykh dielektrikakh* [Peculiarities of the proton transport in widezone crystals]. *Prikladnaya Fizika* [Applied Physics], 2012, no. 1, pp. 12–18 [in Russian].

[12] Timokhin V.M. *Tunnel'nyi effekt i protonnaia relaksatsiia v elektrotekhnicheskikh materialakh* [Tunneling effect and proton relaxation in electrical materials]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniia* [Advances in current natural sciences], 2010, no. 3, pp. 134–136 [in Russian].

[13] Kalytka V.A., Nikonova T.Yu. *Nelineinye elektrofizicheskie svoistva protonnykh poluprovodnikov i dielektrikov* [Non-linear electrophysical properties of proton semiconductors and dielectrics]. In: *Aktual'nye problemy elektronnogo priborostroeniia (APEP - 2016): trudy XIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii. Elektronno-fizicheskaia sektsiia* [Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2016): proceedings of XIII International scientific and practical conference. In 12 Volumes. Volume 2: Electron-Physical Section]. Novosibirsk, 2016, Vol. 2, pp. 57–65 [in Russian].

[14] Kalytka V.A., Baimukhanov Z.K., Mekhtiev A.D. *Nelineinye effekty pri poliarizatsii dielektrikov so slozhnoi kristallicheskoi strukturoi* [Non-linear effects under polarization of dielectrics with compound crystalline structure]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii Doklady akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii* [Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences], 2016, no. 3(32), pp. 7–21. Doi: 10.17212/1727-2769-2016-3-7-21. [in Russian].

[15] Samoylovich A.G., Klinger M.I., Koreblit L.L. *Novyi vyvod neravnovesnoi funktsii raspredeleniia v poluprovodnikakh* [New conclusion of unbalanced distribution function in semiconductors]. In: *FTT: sb. statei II* [Solid State Physics: collection of articles II], 1959, no. 2, pp. 121–135 [in Russian].

[16] Annenkov Yu., Ivashutenko A.S., Vlasov I.V, Kabyshev A.V. *Elektricheskie svoistva korundo-tsirkonievoi keramiki* [The electrical properties of corundum-zirconium ceramics]. *Izvestiia Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2005, Vol. 308, no. 7, pp. 35–38 [in Russian].

V.A. Kalytka[2]

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF NON-LINEAR RELAXATING POLARIZATION IN DIELECTRICS WITH HYDROGEN BONDS

Analytical investigating of the patterns of relaxation (volume-charge) polarization in dielectric materials class hydrogen bonded crystals (HBC) in the wide range of temperature (1–1500 K) and polarizing field strengths (100 kV/m–100 MV/m) in alternating field at frequencies of about 1 kHz–10 MHz is made. The generalized nonlinear by the polarizing field the semi-classical kinetic equation of proton relaxation, having (in this model) sense the protons current continuity equation solving by method of successive approximation by decomposition in infinite power series in comparison parameter is built. It is established that in the range of low fields (100–1000 kV/m) and high temperatures (100–250 K) the generalized kinetic equation is converted to the linearized Fokker-Planck equation and at low (70–100 K) and sufficiently high (250–450 K) temperatures are showed the nonlinear polarization effects caused respectively by proton tunneling and volume charge relaxation. With ultra - low (1–10 K) and ultra-high (500–1500 K) temperatures in the range of high fields (10 MV/m–100 MV/m) the contribution of such effects to the polarization is amplified. The influence of the non-linearities to relaxation times for microscopic acts of transitions protons through the potential barrier is studied.

Key words: hydrogen bonded crystals (HBC), proton relaxation and conductivity, generalized nonlinear kinetic equation, equations of Fokker-Planck.

Статья поступила в редакцию 28/*VII*/2017.
The article received 28/*VII*/2017.

[2]*Kalytka Valeriy Aleksandrovich* (kalytka@mail.ru), Department of Power Engineering Systems, Karaganda State Technical University, 56, Bulvar Mira Av., Karaganda, 100012, Kazakhstan.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алдашев Серик Аймурзаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики Казахского национального педагогического университета им. Абая, академик АЕН РК. Тема докт. дис.: "Краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа" (защ. в 1990 г.). Автор и соавтор более 200 научных работ, в т. ч. монографий "Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений" (1994 г.), "Вырожденные многомерные гиперболические уравнения" (2007 г.).

Область научных интересов: краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.

Бейлин Александр Борисович, канд. техн. наук, доц. кафедры "Автоматизированные станочные и инструментальные системы " Самарского государственного технического университета. Тема канд. дис.: "Обеспечение точности монтажа пространственно расположенных трубопроводов ГТД " (защ. в 1988 г.). Автор и соавтор 40 научных работ.

Область научных интересов: диагностика состояния станочного оборудования, виброакустическая диагностика, размерный анализ машин и механизмов.

Дюжева Александра Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Нелокальные задачи со смещением и интегральными условиями первого рода для гиперболических уравнений" (защ. в 2012 г.).

Область научных интересов: нелокальные задачи, динамические условия, интегральные условия, гиперболические уравнения.

Киричек Виталия Александровна, аспирант кафедры уравнений математической физики Самарского национального исследовательского университета им. Королева, окончила Самарский университет по специальности "Математика и механика".

Область научных интересов: уравнения с частными производными, граничные и нелокальные задачи для гиперболических уравнений.

Срибная Татьяна Аркадьевна, канд. физ.-мат.наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций Самарского университета. Тема канд. дис.: "Функции множества со значениями в упорядоченном пространстве и их применение" (защ. в 1994 г.). Автор и соавтор 30 научных работ.

Область научных интересов: теория меры, непрерывность и равномерная непрерывность неаддитивных функций множества, продолжение неаддитивных функций множества.

Шамолин Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, академик РАЕ. Тема докт. дис.: "Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой" (защ. в 2004 г.). Автор и соавтор имеет более 350 печатных работ, в т. ч. 9 монографий.

Область научных интересов: прикладная математика, методы математического моделирования; классическая механика, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой; качественная теория динамических систем, типичность, абсолютная и относительная грубость; динамика многомерного твердого тела в неконсервативных силовых полях; дифференциальная и топологическая диагностика, задачи дифференциальной диагностики в диагностических пространствах; теория фракталов; математическая логика и информатика.

Калытка Валерий Александрович, к-т физ.-мат. наук, доктор PhD, доцент кафедры "Энергетические системы" Карагандинского государственного технического университета. Тема канд. дис.: "Аналитическое исследование термостимулированных токов деполяризации в кристаллах с водородными связями при низких температурах" (защ. в 2012 г.). Автор и соавтор более 115 научных работ, в т. ч. монографий "Кинетика миграционной поляризации" (2010 г.), "Протонная проводимость" (2015 г.).

Область научных интересов: теоретическая и математическая физика; физика твердого тела; диэлектрическая спектроскопия; физика конденсированного состояния.

Гусейнова Зиярат Агамирзоевна, канд. биол. наук, старший научный сотрудник Горного ботанического сада ДНЦ РАН. Тема канд. дис.: "Сравнительный анализ проявлений репродуктивных стратегий растений (на примере родовых комплексов *Medicago* L. и *Helianthemum* Mill." (защ. в 2011 г). Автор 84 научных работ, в том числе соавтор монографии: "Проблема адаптивных стратегий растений" (2013 г).

Область научных интересов: популяционная ботаника, экология и биология видов растений, интродукция растений, лекарственные растения.

Курамагомедов Магомед Курамагомедович, канд. биол. наук, старший научный сотрудник Горного ботанического сада ДНЦ РАН. Тема канд. дис.: "Физиологические особенности главного и боковых побегов ячменя Винер при нормальном и недостаточном увлажнении почвы" (защ. в 1975 г). Автор 101 научной работы, в том числе 18 работ в журналах рецензируемых ВАК.

Область научных интересов: физиология растений, экология растений, интродукция растений.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aldashev Serik Aimurzaevich, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, prof., head of the Dept. of Fundamental and Applied Mathematics, Abay Kazakh National Pedagogical University, Academician of AEN RK. Subject of Doctoral thesis: "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type" (1990). Author and coauthor of 200 scientific works, including monographs "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type" (1994), "Degenerate multidimensional hyperbolic equations" (2007).

Research interests: boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type.

Beylin Alexander Borisovich, Candidate of Technical Sciences, assisstant professor of the Department of Automated Machine-tool and Instrumental Systems, Samara State Technical University. Subject of Candidate's thesis: "Control of accuracy of assembly of spatial pipelines GTE". Author and coauthor of 40 scientific works.

Research interests: diagnostics of state of machine's equipment, vibro-aucoustic diagnostics, dimensional analysis of machines and tools.

Dyuzheva Alexandra Vladimirovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assisstant professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Nonlocal problems with displacement and integral conditions of the first kind for hyperbolic equations" (2012).

Research interests: nonlocal problems, dynamic conditions, integral conditions, hyperbolic equations.

Kirichek Vitaliia Alexandrovna, postgraduate student of the 1st year of study of the specialty "Mathematics and Mechanics Samara National Research University.

Research interests: differential equations with partial derivatives, boundary and nonlocal problems for hyperbolic equations.

Sribnaya Tatyana Arcadievna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara University. Subject of Candidate's thesis: "Set functions with valued in ordered space and their application" (1994). Author and coauthof of 30 scientific works.

Research interests: measure theory, continuous and uniform continuous non-additive set functions, extension non-additive set functions, functions on an ortomodular lattice.

Shamolin Maxim Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University. Academician of Russian Academy of Natural History. Subject of Doctoral thesis: "Methods of analysis of certain classes of nonconservative systems in dynamics of a rigid body interacting with a medium" (2004). Author of more than 350 publications (including 9 monographs).

Research interests: applied mathematics, methods of mathematical modeling, classical mechanics, dynamics of a rigid body interacting with a medium, qualitative theory of dynamic systems, tipicity, absolute and relative roughness, dynamics of multi-dimensional rigid body in nonconservative fields of forces, differential and topological diagnostics, problems of differential diagnostics in diagnostical spaces, fractal theory, mathematical logic and informatics.

Kalytka Valeriy Aleksandrovich, Candidate of Physycal and Mathematical Sciences, PhD, Associate Professor of the Department "Power engineering systems" Karaganda State Technical University.

Research interests: theoretical and mathematical physics, Solid state physics, dielectric spectroscopy and Physics of condensed media.

Guseynova Ziyarat Agamirzoyevna, Candidate of Biology, Senior Scientific Researcher of the Mountain Botanical Garden, DSC RAS. Subject of Candidate's thesis: "Comparative analysis of the manifestations of reproductive strategies of plants (on for example, generic complexes *Medicago* L. and *Helianthemum* Mill." (2011). Author and coauthor of 84 scientific works, including monographs "The problem of adaptive strategies of plants" (2013).

Research interests: population botany, ecology and biology of plants, introduction of plants, medical plants.

Kuramagomedov Mahomed Kuramagomedovich, Candidate of Biology, Senior Scientific Researcher of the Mountain Botanical Garden, DSC RAS. Subject of Candidate's thesis: "Physiological characteristics of main and lateral shoots of barley Winer under normal and insufficient soil moisture" (1975). Author and coauthor of 101 scientific works.

Research interests: physiology of plants, plant ecology, introduction of plants.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу *http://vestnik.samsu.ruhttp://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*.

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегий журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: nsvestnik@samsu.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы LaTeX2$_\varepsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского университета (адрес указан выше). Использование других реализаций TeX'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами LaTeX'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("-"), двойной дефис ("–")[1], тройной дефис ("—")[2]. Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных"фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

[1] Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--~`

[2] Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

Уважаемые авторы, просим предоставить сведения для размещения в журнале на странице "Сведения об авторах"

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры ...., в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности ".........".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of ...., in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in "...........".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.