Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

(ВЕСТНИК САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА)

- *Математика*
- *Механика*
- *Математическое моделирование*

2017
№ 2

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНИТИ URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ
Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, д-р тех. наук, проф.

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф.
Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф.

Ответственный секретарь:

А.В. Дюжева, канд. физ.-мат наук, доц.

Редактрование
Л.С. Пулькина
Компьютерная верстка, макет
М.А. Лихобабенко
Оформление выходных данных
Т.А. Мурзинова
Информация на английском языке
М.С. Стрельников

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Свидетельство о регистрации средства массовой информации **ПИ № ФС 77-67328** от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге
АО Агентство «Роспечать» 80307
ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

Цена свободная

Подписано в печать . .2017 г.
Формат 70 × 108/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Печ. л. 8
Typeset by $\LaTeX 2_\varepsilon$.
Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство Самарского университета,
443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Отпечатано в типографии Самарского университета

Редакционная коллегия:

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)
В.В. Ивахник, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
И.Г. Кретова, д-р мед. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
С.В. Курбатова, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
Л.М. Кавеленова, д-р биол. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
О.Н. Макурина, д-р биол. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
Л.А. Онучак, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)
А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
Давиде М. Прозерпио, д-р химии, проф. (Миланский университет, Милан, Италия)
П.П. Пурыгин, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)
Стасис Руткаускас, д-р физ.-мат наук, проф. (Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва)
Г.Л. Рытов, канд. пед. наук, доц. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)
В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

© Самарский университет, 2017

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY

NATURAL SCIENCE SERIES

(VESTNIK OF SAMARA STATE UNIVERSITY)

- *Mathematics*
- *Mechanics*
- *Mathematical Modelling*

2017

№ 2

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation
The journal is piblished since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 — Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:
E.V. Shakhmatov, Dr. of Engineering, prof.

Deputy chief editors:
A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.
L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

Executive editor:
A.V. Dyuzheva, Cand. of Phys.-Math. Sci., assistant prof.

Editing
L.S. Pulkina
Computer makeup, dummy
M.A. Likhobabenko
Making the output
T.A. Murzinova
Information in English
M.S. Strelnikov

Adress of editorial stuff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Certificate of registration of means of mass media **ПИ № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

Price free

Passed for printing . .2017.
Format 70 × 108/16.
Litho paper. Instant print.
Print. sheets 8.
Typeset by LaTeX2$_\varepsilon$.
Circulation 500 copies. Order №

Publishing house of Samara University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Printed in the printing house of Samara University

Editorial board:
S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)
V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
I.G. Kretova, Dr. of Medicine, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
S.V. Kurbatova, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
L.M. Kavelenova, Dr. of Biological Sciences, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
O.N. Makurina, Dr. of Biological Sciences, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
L.A. Onuchak, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Universite Paris-Sud 11, Orsya, France)
A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
A.V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. (Milan University, Milan, Italy)
P.P. Purygin, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
V.V. Revin, Dr. of Biological Sciences, prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)
Stasis Rutkauskas, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Vilnius University, Vilnius, Lithuania)
G.L. Rytov, Cand. of Pedagogic Sciences, assistant prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)
V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

© Samara University, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Механика

Математическое моделирование

CONTENTS

Mathematics

Mechanics

Mathematical Modelling

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 624.07

А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина[1]

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ УСЛОВИЕМ ЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

В статье рассматривается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний неоднородного стержня, упруго закрепленного на одном конце, а поведение стержня на другом его конце подлежит определению. Условие переопределения задается в виде интеграла по пространственной переменной. В статье получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи в пространстве Соболева. Доказательство существования и единственности решения задачи базируется на полученных в работе априорных оценках.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, обратная задача, интегральное условие переопределения.

Введение

В статье изучается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t),$$

состоящая в определении как ее решения, так и режима на одном из концов интервала изменения пространственной переменной.

Эту задачу можно рассматривать как математическую модель процесса колебаний стержня переменного сечения, способ закрепления одного из концов которого нам известен, а второго — нет.

Колебательные процессы могут возникать в любой механической системе. Причинами их появления для механизмов разнообразных по конструкции и областям применения могут являться как внутренние источники (неуравновешенность сил и моментов, неравномерность вращения, переменная жесткость опор и т. п.), так и внешние (аэродинамические нагрузки, инерционные нагрузки). Конструктивные элементы многих механизмов могут быть представлены как стержни, зачастую переменного сечения. Например, в газотурбинных авиационных двигателях это лопатки компрессора и турбины ([1, с. 291], [2, с. 270]), в самолетостроении – это крылья большого удлинения [3], в металлообрабатывающем оборудовании — это валы приводов подач и главного движения, включая шпиндель ([4, с. 191]), в устройствах ультразвуковой обработки материалов и сборки (разборки) соединений – волноводы (концентраторы) ([5, с. 174]). Поэтому в различных областях техники приходится решать задачи о колебаниях сложных стержневых систем. Для обеспечения надежной работы сложной современной техники (авиационных двигателей, многоцелевых станков с числовым программным управлением, газоперекачивающих агрегатов и т. д.) в процессе ее эксплуатации проводят диагностические процедуры, что позволяет определить текущее техническое состояние и оценить возможность дальнейшей работы на прогнозируемый период времени с помощью неразрушающего контроля. Приборы виброакустической диагностики невозможно установить рядом с непосредственным источником колебаний, к тому же таких источников может быть много. Поэтому анализ результатов измерений и принятие решений по управлению приходится проводить на основе косвенной информации о процессе колебаний, которая обычно поступает в виде некоторого среднего значения. В математической модели такая информация обычно представлена в виде интеграла.

Таким образом, следствия протекания колебательных процессов могут быть различными, как и причины, их вызывающие, поэтому естественно возникает необходимость теоретического изучения колебаний

[1]© Бейлин А.Б., Пулькина Л.С., 2017

Бейлин Александр Борисович (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС, Самарский государственный технический университет, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

с целью определения допустимых областей изменения параметров, влияющих на протекание процесса, и качественных свойств решений соответствующих математических задач. Исследованию математических моделей колебательных процессов посвящено значительное количество статей. Отметим здесь некоторые из них, наиболее близкие к тематике нашей статьи [7–10] и обратим внимание на список литературы в них.

В нашей статье рассматривается обратная задача для одномерного гиперболического уравнения, состоящая в определении как ее решения, так и режима на одном из концов интервала изменения пространственной переменной.

1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим задачу о колебании стержня, один конец которого, $x = 0$, закреплен упруго, а закон движения второго конца, $x = l$, не задан и подлежит определению. Таким образом, мы приходим к обратной задаче, которая заключается в следующем: найти пару функций $(u(x,t), h(t))$, удовлетворяющих уравнению

$$Lu \equiv u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1.1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.2}$$

краевым условиям

$$u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = h(t) \tag{1.3}$$

и условию переопределения, в качестве которого часто задается интегральное среднее искомого решения [11–13]

$$\int_0^l K(x)u(x,t)dx = E(t). \tag{1.4}$$

Заметим, что однородность начальных данных не ограничивает общности, но упрощает многие преобразования.

Задача (1.1)–(1.4) может быть трактована как задача управления, а именно, как задача определения таких условий на входные данные, которые позволят найти функцию $h(t)$, позволяющую сохранить заданную энергию $E(t)$.

Многие авторы для доказательства разрешимости обратных задач используют следующую схему: сначала решается прямая задача, в нашем случае это задача (1.1)–(1.3), при этом функция $h(t)$ считается временно известной, а затем применяется условие переопределения. Если, как в рассматриваемой задаче, условие переопределения задано в виде (1.4), то задача сводится к операторному уравнению первого рода относительно неизвестной функции $h(t)$ [11; 12; 14] Этот метод не всегда оказывается эффективным, в частности, когда неизвестная функция входит в краевое условие. Мы применим другой подход, который подробно реализован в следующем разделе статьи.

2. Разрешимость задачи

В этом разделе мы сформулируем и докажем однозначную разрешимость задачи (1.1)–(1.4), но сначала введем определения и обозначения, для чего нам потребуется сделать некоторые предварительные преобразования.

Пусть (u,h) — решение задачи (1.1)–(1.3), $K(l) \neq 0$ и выполняются условия согласования

$$\int_0^l K(x)u(x,0)dx = E(0), \quad \int_0^l K(x)u_t(x,0)dx = E'(0). \tag{2.1}$$

Проинтегрируем равенство (1.1), умноженное на $K(x)$, по промежутку $(0,l)$. Учитывая условия (1.3) и (1.4), получим

$$E''(t) - a(l,t)K(l)h(t) + a(l,t)K'(t)u(l,t) - a(0,t)[\alpha K(0) + K'(0)]u(0,t) -$$
$$- \int_0^l [(aK')_x - Kc]udx = \int_0^l Kfdx. \tag{2.2}$$

Обозначив
$$H(x,t) = \frac{K(x)c(x,t) - (a(x,t)K'(x))_x}{a(l,t)K(l)}, \quad \beta(t) = -\frac{a(0,t)(\alpha K(0) + K'(0)}{a(l,t)K(l))},$$
$$\gamma = \frac{K'(l)}{K(l)}, \quad g(t) = \frac{E''(t) - \int_0^l Kf dx}{a(l,t)K(l)},$$
перепишем (2.2) так:
$$h(t) = \beta u(0,t) + \gamma u(l,t) + \int\limits_0^l H(x,t)u(x,t)dx + g(t). \tag{2.3}$$

Пусть теперь выполняются (1.1)–(1.3) и (2.3). Проинтегрировав равенство (1.1), умноженное на $K(x)$, по промежутку $(0,l)$, получим
$$\int\limits_0^l K(x)u_{tt}dx - a(l,t)K(l)h(t) + a(l,t)K'(t)u(l,t) - a(0,t)[\alpha K(0) + K'(0)]u(0,t)-$$
$$-\int\limits_0^l [(aK')_x - Kc]udx = \int\limits_0^l Kfdx.$$
Так как по предположению выполняется (2.3), то выполняется и (2.2), но тогда
$$\int\limits_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx = E''(t),$$
что можно переписать в виде уравнения
$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx - E(t)\right] = 0.$$
Из условий согласования (2.1) получаем нулевые начальные данные, которым должна удовлетворять искомая функция этого дифференциального уравнения, поэтому решением полученной задачи Коши может быть только нуль, стало быть,
$$\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = E(t),$$
что означает выполнение условия (1.4).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма. Если $K(l) \neq 0$ и выполняются условия согласования (2.1), то задачи (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.3), (2.3) эквивалентны.

Доказанная лемма позволяет рассматривать вместо задачи (1.1)–(1.4) задачу (1.1)–(1.3), (2.3), преимущество которой заключается в явном представлении функции $h(t)$ через функцию $u(x,t)$. Возможность такого представления подсказывает выбор метода доказательства разрешимости задачи, что будет продемонстрировано ниже. Не менее существенным является и тот факт, что коэффициенты уравнения (1.1) суть функции, зависящие от обеих переменных и не заданы явно. Произвольность коэффициентов не позволяет применить метод Фурье либо рассчитывать на возможность получения общего решения уравнения. Поэтому изучение вопроса о существовании решения задачи мы начнем с введения определения слабого решения. Для этого получим тождество, на котором это определение будет базироваться, используя стандартную процедуру [15], а именно, проинтегрируем по частям равенство $\int_0^T \int_0^l (Lu-f)vdxdt = 0$, где $v \in C^1(\bar{Q}_T)$ и $v(x,T) = 0$ в предположении, что $u(x,t)$ — решение прямой задачи (1.1)–(1.3). Получим
$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt - \alpha \int\limits_0^T a(0,t)u(0,t)v(0,t)dt =$$
$$= \int\limits_0^T a(l,t)h(t)v(l,t)dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l fvdxdt. \tag{2.4}$$
Обозначим
$$\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v : v \in W_2^1(Q_T), \quad v(x,T) = 0,$$

где $W_2^1(Q_T)$ — пространство Соболева.

Определение. Пару функций $(u(x,t),h(t))$ будем называть слабым решением задачи (1.1)–(1.3), (2.3), если $u \in W_2^1(Q_T)$, $u(x,0)=0$ и удовлетворяет тождеству (2.4) для всех функций $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, а функция $h(t)$ удовлетворяет (2.3) в смысле равенства функций из $L_2(0,T)$.

Теорема. Пусть выполняются условия

$$a, c \in C(Q_T),\ \ a_t \in C(Q_T), f \in L_2(Q_T),$$
$$K \in C[0,T],\ \ K(l) \neq 0,\ \ K'(l) = 0,\ \ \alpha K(0) - K'(0) = 0,$$
$$E \in C^2[0,T], \quad \alpha > 0,$$

а также условия согласования (2.1). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1.1)–(1.3), (2.3).

Доказательство. Аппроксимируем слабое решение $(u(x,t),h(t))$, положив $u^0 = 0$ и определив (u^m,h^m) равенствами

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-u_t^m v_t + a u_x^m v_x + c u^m v)dxdt - \alpha\int\limits_0^T a(0,t)u^m(0,t)v(0,t)dt =$$
$$= \int\limits_0^T a(l,t)h^m(t)v(l,t)dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt, \tag{2.5}$$

$$h^m(t) = \int\limits_0^l H(x,t)u^{m-1}dx + g(t). \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что функция u^m, удовлетворяющая тождеству (2.5), является слабым решением прямой задачи (1.1)–(1.3), которая представляет собой частный случай задачи для многомерного гиперболического уравнения, рассмотренной в монографии О.А. Ладыженской ([15, с. 225]). Условия теоремы позволяют воспользоваться сформулированным в [15] результатом об однозначной разрешимости этой задачи в слабом смысле. Для дальнейшего нам потребуется оценка этого решения, вывод которой мы кратко продемонстрируем. Будем рассматривать уравнение (1.1) при $f = 0$. Объяснение этого выбора будет очевидно ниже.

Для построения аппроксимаций $u^{mN}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N c_k(t)w_k(x)$ слабого решения $u^m(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) выбирается базис $\{w_k\}$ из $W_2^1(Q_T)$, а $c_k(t)$ находятся из соотношений

$$\int\limits_0^l (u_{tt}^{mN}w_j + a u_x^{mN}w_j' + c u^{mN}w_j)dx + \alpha a(0,t)u^{mN}(0,t)w_j(0) = a(l,t)h^m(t)w_j(l).$$

Умножив каждое из этих соотношений на $c_j'(t)$, просуммировав по j от 1 до N, а затем проинтегрировав по $(0,\tau)$, $\tau \in [0,T]$, получим

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_{tt}^{mN}u_t^{mN} + a u_x^{mN}u_{xt}^{mN} + c u^{mN}u_t^{mN})dxdt +$$
$$+\alpha\int\limits_0^\tau a(0,t)u^{mN}(0,t)u_t^{mN}(0,t)dt = \int\limits_0^\tau a(l,t)h(t)u_t^{mN}(l,t)dt.$$

Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\int\limits_0^l [(u_t^{mN}(x,\tau))^2 + a(u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx + \alpha a(0,\tau)(u^{mN}(0,\tau))^2 =$$
$$= \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t(u^{mN})^2dxdt - 2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l c u^{mN}u_t^{mN}dxdt + \alpha\int\limits_0^\tau a_t(0,t)(u^{mN}(0,t))^2dt -$$
$$-2\int\limits_0^\tau a(l,t)h_t(t)u^{mN}(l,t)dt + 2\int\limits_0^\tau a_t(l,t)h(t)u^{mN}(l,t)dt. \tag{2.7}$$

Оценим правую часть последнего равенства. В силу условий теоремы и гиперболичности уравнения (1.1) всюду в $\bar{Q}_T$ найдутся такие положительные числа a_0, a_1, c_0, p такие, что

$$a(x,t) \geqslant a_0, \max_{\bar{Q}_T}\{|a|,|a_t|\} \leqslant a_1, \max_{\bar{Q}_T}|c| \leqslant c_0, \;\; p^2 = \max_{[0,T]}\int_0^l H^2(x,t)dx.$$

Применив теперь неравенства Коши и "Коши с ε", получим

$$\Big|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t(u^{mN})^2dxdt\Big| \leqslant a_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l(u^{mN})^2dxdt;$$

$$\Big|-2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cu^{mN}u_t^{mN}dxdt\Big| \leqslant c_0\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l[(u^{mN})^2+(u^{mN})^2]dxdt;$$

$$\Big|\int\limits_0^\tau a_t(0,t)(u^{mN}(0,t))^2dt\Big| \leqslant a_1\int\limits_0^\tau(u^{mN}(0,t))^2dt;$$

$$\Big|-2\int\limits_0^\tau a(l,t)h_t(t)u^{mN}(l,t)dt\Big| \leqslant a_1\varepsilon\int\limits_0^\tau(h_t^m(t))^2dt+\frac{a_1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau(u^{mN}(l,t))^2dt;$$

$$\Big|2\int\limits_0^\tau a_t(l,t)h(t)u^{mN}(l,t)dt\Big| \leqslant a_1\varepsilon\int\limits_0^\tau(h^m(t))^2dt+\frac{a_1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau(u^{mN}(l,t))^2dt.$$

Для оценки интегралов, содержащих следы искомого решения на боковой границе воспользуемся неравенствами

$$u^2(0,t) \leqslant 2l\int\limits_0^l u_x^2dx+\frac{2}{l}\int\limits_0^l u^2dx, \qquad u^2(l,t) \leqslant 2l\int\limits_0^l u_x^2dx+\frac{2}{l}\int\limits_0^l u^2dx,$$

которые вытекают из представлений

$$u(0,t)=\int\limits_x^0 u_\xi d\xi+u(x,t), \qquad u(l,t)=\int\limits_x^l u_\xi d\xi+u(x,t)$$

и доказаны, например, в [16]. Тогда из (2.7) следует неравенство

$$\int\limits_0^l[(u_t^{mN}(x,\tau))^2+a(u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx+\alpha a(0,\tau)(u^{mN}(0,\tau))^2 \leqslant$$

$$\leqslant P\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l[(u^{mN})^2+(u_t^{mN})^2+(u_x^{mN})^2]dxdt+a_1\varepsilon\int\limits_0^\tau[(h^m)^2+(h_t^m)^2]dt,$$

где постоянная P выражается через $a_1, c_0, l, \varepsilon^{-1}$. К обеим частям полученного неравенства прибавим неравенство

$$\int\limits_0^l(u^{mN}(x,\tau))^2dx \leqslant \tau\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l(u_t^{mN})^2dxdt,$$

которое является следствием представления $u^{mN}(x,\tau)=\int_0^\tau u_t^{mN}dt$, что приводит нас к следующему неравенству

$$m_0\int\limits_0^l[(u_t^{mN}(x,\tau))^2+(u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx \leqslant$$

$$\leqslant M_0\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l[(u^{mN})^2+(u_t^{mN})^2+(u_x^{mN})^2]dxdt+a_1\varepsilon\int\limits_0^\tau[(h^m)^2+(h_t^m)^2]dt, \tag{2.8}$$

где

$$m_0=\min\{1,a_0\}, \quad M_0=\max\{\frac{4a_1(1+\varepsilon)+c_0\varepsilon}{l\varepsilon}, c_0+1, 4a_1l\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\}.$$

Применив к последнему неравенстве лемму Гроноулла, получаем
$$\int\limits_0^l [(u_t^{mN}(x,\tau))^2 + (u_x^{mN}(x,\tau))^2]dx \leqslant \frac{a_1}{m_0}\varepsilon e^{\frac{M_0}{m_0}\tau} \int\limits_0^T [(h^m)^2 + (h_t^m)^2]dt,$$
и после интегрирования по $\tau \in [0,T]$ наша оценка готова:
$$||u^{mN}||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}||h^m||_{W_2^1(0,T)}.$$
Здесь мы обозначили $C^2 = \frac{a_1}{M_0}(e^{\frac{M_0}{m_0}T} - 1)$. Так как в полученной оценке C не зависит от N, то и
$$||u^m||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}||h^m||_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.9}$$

Вернемся к построению аппроксимаций (u^m, h^m). Так как $u^0 = 0$, то из (2.6) находим h^1. На следующем шаге из (2.5) находим u^1 как решение прямой задачи. Продолжая этот процесс, получим последовательность приближенных решений (u^m, h^m). Покажем, что эта последовательность сходится.

Обозначим $z^m = u^m - u^p$, $\quad r^m = h^m - h^p$. Тогда справедливы соотношения, вытекающие из (2.5) и (2.6) соответственно
$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-z_t^m v_t + a z_x^m v_x + c z^m v)dxdt - \alpha\int\limits_0^T a(0,t)z^m(0,t)v(0,t)dt =$$
$$= \int\limits_0^T a(l,t)h^m(t)v(l,t)dt, \tag{2.10}$$
$$h^m(t) = \int\limits_0^l H(x,t)z^{m-1}dx. \tag{2.11}$$
Из (2.9) следует оценка
$$||z^m||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}||r^m||_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.12}$$
Из равенства (2.11)
$$(r^m(t))^2 \leqslant k^2\int\limits_0^l (z^{m-1}(x,t))^2dx, \quad (r_t^m(t))^2 \leqslant k^2\int\limits_0^l (z_t^{m-1}(x,t))^2dx,$$
где $k^2 = \max\limits_{[0,T]}\int\limits_0^l H^2(x,t)dx$, вытекает
$$||r^m||_{W_2^1(0,T)} \leqslant k\sqrt{\varepsilon}||z^{m-1}||_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.13}$$
Комбинируя (2.12) и (2.13), получаем
$$||z^m||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant Ck\sqrt{\varepsilon}||z^{m-1}||_{W_2^1(Q_T)}, \tag{2.14}$$
$$||r^m||_{W_2^1(0,T)} \leqslant Ck\sqrt{\varepsilon}||r^{m-1}||_{W_2^1(0,T)} \tag{2.15}$$
для $m = 1, 2, ...$ Выберем теперь ε так, чтобы $Ck\sqrt{\varepsilon} < 1$. Тогда из (2.14) и (2.15) сразу же следует, что последовательности $\{||z^m||_{W_2^1(Q_T)}\}$ и $\{||r^m||_{W_2^1(0,T)}\}$ являются бесконечно убывающими геометрическими, что влечет за собой фундаментальность последовательностей $(\{u^m\}, h^m)$. Но тогда в силу полноты пространств $W_2^1(Q_T)$ и $W_2^1(0,T)$ существует единственная пара функций (u,h) таких, что

$u^m \to u$ в $W_2^1(Q_T)$, $h^m \to h$ в $W_2^1(0,T)$.

Так как из сильной сходимости следует слабая, то, переходя к пределам в (2.5) и (2.6) убеждаемся в том, что пара функций (u,h) является искомым решением задачи (1.1)–(1.3), (2.3), а в силу доказанной эквивалентности и поставленной задачи (1.1)–(1.4).

Литература

[1] Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

[2] Биргер И.А., Б.Ф. Шорр, Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.

[3] Хазанов Х.С. Механические колебания систем с распределенными параметрами: учеб. пособие. Самара: Самар. Госуд. Аэрокосмич. Ун-т, 2002. 80 с.

[4] Вейц В.Л., Дондошанский В.К., Чиряев В.И. Вынужденные колебания в металлорежущих станках. М-Л.: Машгиз, 1959. 288 с.

[5] Кумабэ Д. Вибрационное резание. М.: Машиностроение, 1985. 424 с.

[6] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992. 431 с.

[7] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // Докдады РАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 56–61.

[8] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. № 3(114). 2014. С. 9–19.

[9] Бейлин А.Б. Задача о продольных колебаниях упруго закрепленного нагруженного стержня. Вестник Самарского гос. Тех. Ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 2. С. 249–258.

[10] Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратых задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сибирский мат. журнал. 1993. Т. 34. № 5.

[11] Камынин В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2013. 94(2). С. 207–217.

[12] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems. 1988. № 4. P. 35–45.

[13] Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Труды института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1.

[14] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

[15] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74-–83.

References

[1] Babakov I.M. *Teoriia kolebanii* [Theory of vibrations]. M.: Nauka, 1968, 560 p. [in Russian].

[2] Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. *Raschet na prochnost' detalei mashin: Spravochnik* [Valculation of stress of machine elements: Reference book]. M.: Mashinostroenie, 1993, 640 p. [in Russian].

[3] Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniia sistem s raspredelennymi parametrami: ucheb. posobie* [Mechanical oscillations of systems with distributed parameters: textbook]. Samara, Samar. Gosud. Aerokosmich. Un-t, 2002, 80 p. [in Russian].

[4] Veitz V.L., Dondoshanskii V.K., Chiriaev V.I. Vynuzhdennye kolebaniia v metallorezhushchikh stankakh [Forced oscillations in cutting machines]. M-L.: Mashgiz, 1959, 288 p. [in Russian].

[5] Kumabe D. *Vibratsionnoe rezanie* [Vibration Cutting]. M.: Mashinostroenie, 1985, 424 p. [in Russian].

[6] Rao J.S. *Advanced Theory of Vibration.* N.Y.: Wiley, 1992, 431 p. [in Russian].

[7] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. *Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia* [Theory of free and forced vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *Doklady RAN* [Dokladyi Akademii nauk], 2007, Vol. 417, no. 1, pp. 56–61 [in Russian].

[8] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [A Problem on Longitudinal Vibration in a Short Bar with Dynamical Boundary Conditions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 9–19.

[9] Beylin A.B. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh uprugo zakreplennogo nagruzhennogo sterzhnia* [The problem of longitudinal oscillations of an elastically fixed loaded rod]. *Vestnik Samarskogo gos. Tekh. Un-ta. Seriia: Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2016, Vol. 20, no. 2, pp. 249–258 [in Russian].

[10] Prilepko A.I., Kostin A.B. Ob obratnykh zadachakh opredeleniia koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii. II [On inverse problems of determining of a coefficient in a parabolic equation. II]. *Sibirskii mat. zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1993, Vol. 34, no. 5 [in Russian].

[11] Kamynin V.L. *Obratnaia zadacha opredeleniia mladshego koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nabliudeniia* [The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equation with integral observation]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 2013, **94**,(2), pp. 205–213 [in Russian].

[12] Cannon J.R., Lin Y. *Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. Inverse Problems*, 1988, no. 4, pp. 35–45 [in Russian].

[13] Denisov A.M. *Obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nym kraevym usloviem, soderzhashchim zapazdyvaiushchii argument* [The inverse problem for a hyperbolic equation with nonlocal boundary condition involving retarding argument]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN], 2012, Vol. 18, No. 1 [in Russian].

[15] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [The boundary value problems in mathematical physics]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].

[16] Pulkina L.S. Kraevye zadachi dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nymi usloviiami I i II roda [Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2012, no. 4, pp. 74–83 [in Russian].

A.B. Beylin, L.S. Pulkina[2]

A PROBLEM ON VIBRATION OF A BAR WITH UNKNOWN BOUNDARY CONDITION ON A PART OF THE BOUNDARY

In this paper, we study an inverse problem for hyperbolic equation. This problem arises when we consider vibration of a nonhomogeneous bar if one endpoint is fixed by spring but behavior of the other is unknown and is the subject to find. Overdetermination is given in the form of integral with respect to spacial variable. Unique solvability of this problem is proved under some conditions on data. The proof is based on a priori estimates in Sobolev space.

Key words: hyperbolic equation, inverse problem, integral overdetermination.

Статья поступила в редакцию 5/*VII*/2017.
The article received 5/*VII*/2017.

[2] *Beylin Alexander Borisovich* (abeilin@mail.ru), Department of Automated Machining and Tool Systems, Samara State Technical University, 133, Molodogvardeiskaya str., Samara, 443010, Russian Federation.

Pulkina Ludmila Stepanovna (louise@samdiff.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federstion.

УДК 511.334

Г.В. Воскресенская[1]

ФУНКЦИИ МАККЕЯ И ТОЧНОЕ РАССЕЧЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ[2]

В статье рассматриваются структурные проблемы в теории модулярных форм. Полностью изучен феномен точного рассечения для пространств $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, где χ — квадратичный характер с условием $\chi(-1) = (-1)^k$. Доказано, что для уровней $N \neq 3,\ 17,\ 19$ рассекающая функция является мультипликативным эта–произведением целого веса. Таблица рассекающих функций приведена в статье. Показано, что пространство рассекающей функции одномерно. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна-Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, дивизор функции, структурные теоремы, формула Коэна-Остерле.

Введение

В настоящей статье мы рассмотрим структурные проблемы пространств модулярных форм. Основные классические определения и обозначения можно найти в книгах [1–4]. Опишем модельную задачу для наших исследований. В классическом случае уровня $N = 1$ рассматривается полная модулярная группа $\Gamma = \Gamma(1) = SL_2(\mathbf{Z})$, известен следующий факт: любая параболическая форма четного веса $k \geqslant 12$ $g(z) \in S_k(\Gamma)$ (для меньших весов их нет) является произведением дельта-функции $\Delta(z)$ на модулярную (не обязательно параболическую) форму $h(z)$ веса $k - 12$. При $k = 12$ пространство $S_{12}(\Gamma) = <\Delta(z)>$. Имеем,

$$S_k(\Gamma) = \Delta(z) \cdot M_{k-12}(\Gamma).$$

Такая ситуация называется *точным рассечением.* Пусть V — линейное пространство, состоящее из функций.

Определение.

Говорят, что имеет место *точное рассечение*, если любая функция из пространства V есть произведение фиксированной функции $g(z)$ на функцию из пространства W, то есть

$$V = g(z) \cdot W,$$

$g(z)$ называется *рассекающей функцией.*

В этой статье мы исследуем ситуацию для уровней $N > 1$. В случае четного веса характер рассекающей функции тривиальный, в случае нечетного веса характер χ рассекающей функции квадратичный с условием $\chi(-1) = -1$.

Заметим, что $\Delta(z) = \eta^{24}(z)$, где $\eta(z)$ — эта–функция Дедекинда, коэффициенты Фурье $\Delta(z)$ мультипликативны. Функция $\eta(z)$ не имеет нулей на верхней полуплоскости, это существенно. Всего эта–произведений с мультипликативными коэффициентами целого веса существует ровно двадцать восемь, они были открыты в 1985 году Дж. МакКеем и двумя его коллегами. Их называют *мультипликативными эта–произведениями* или *функциями МакКея.*

Мы покажем, что в рассматриваемых случаях точное рассечение имеет место в том и только том случае, когда рассекающая функция — мультипликативное ета–произведение, если уровень $N \neq 3, 17, 19$. Исключительные уровни также исследованы.

Теоремы 1–2 в статье цитируются, теоремы 3-6 являются новыми.

[1]© Воскресенская Г.В., 2017

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00154А.

Сначала мы приведем известные факты, которые являются основой исследований, а затем доказательства новых результатов.

1. Функции МакКея

Определение.

$\eta-$**частным** называется функция вида: $f(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j \in \mathbf{N},\ t_j \in \mathbf{Z}$. Если $t_j \in \mathbf{N}\ \forall j$, то $f(z)$ называется $\eta-$**произведением.**

Линейная комбинация $\eta-$частных называется $\eta-$полиномом. Приведем мультипликативные эта–произведения целого веса с указанием весов и характеров.

Далее эти функции появятся в наших рассмотрениях в качестве рассекающих функций.

Об их интересных разнообразных свойствах можно прочесть в [5–8].

Таблица 1

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8 z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1

2. Порядок в параболических вершинах

Теорема 1.

Пусть $m,\ n,\ N-$*натуральные числа,* $n|N,\ \ (m,n) = 1.$

Если $f(z)$ *удовлетворяет условию теоремы 2, то порядок нуля в параболической вершине* $\frac{m}{n}$ *равен*

$$\frac{N}{24} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n, a_j)^2 t_j}{(n, \frac{N}{n}) n a_j}.$$

Непосредственно проверяется, что порядок функции МакКея в каждой параболической вершине равен 1.

Эта теорема была доказана А. Биаджиоли в 1990 году [10].

3. Формула размерности

Эта формула была открыта в 1977 французскими математиками Ж. Остерле и А. Коэном [4].

Пусть χ — характер Дирихле, $\chi(-1)=(-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p — максимальную степень, в которой p делит N, через s_p — максимальную степень, в которой p делит f.

$$\lambda(r_p,s_p,p)=\begin{cases} p^{r'}+p^{r'-1}, & 2s_p\leqslant r_p=2r',\\ 2p^{r'}, & 2s_p\leqslant r_p=2r'+1,\\ 2p^{r_p-s_p}, & 2s_p\geqslant r_p \end{cases}$$

$$\nu_k=\begin{cases} 0, & k\equiv 1 \ (mod\ 2),\\ -\frac{1}{4}, & k\equiv 2 \ (mod\ 4),\\ \frac{1}{4}, & k\equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$\mu_k=\begin{cases} 0, & k\equiv 1 \ (mod\ 3),\\ -\frac{1}{3}, & k\equiv 2 \ (mod\ 3),\\ \frac{1}{3}, & k\equiv 0 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Теорема 2.

Если k — целое, χ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1)=(-1)^k$, то

$$dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi))-dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi))=$$
$$\frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1})-\frac{1}{2}\cdot\prod_{p|N}\lambda(r_p,s_p,p)+\ \nu_k\cdot\sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)}\chi(x)+\mu_k\cdot\sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)}\chi(x)$$

Если $k>2$, то $dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi))=0$. Левая часть становится равна $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi))$. Если $k\leqslant 0$, то $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi))=0$. Левая часть становится равна $-dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi))$.

Теорема 3.

Пусть $f(z)\in S_l(\Gamma_0(N),\chi)$ — мультипликативное эта–произведение с характером χ.
Тогда имеет место точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(N),\chi^k)=f(z)\cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N),\chi^{k-1}).$$

Доказательство.

Для мультипликативных эта–произведений χ – квадратичный характер,
$\chi(-1)=-1$. Пусть $g(z)\in S_k(\Gamma_0(N),\chi^k)$. Тогда $ord_s g(z)\geqslant 1$ для любой параболической вершины s. Если $f(z)$ — мультипликативное эта–произведение с характером χ веса l, тогда

$$h(z)=\frac{g(z)}{f(z)}\in M_{k-l}(\Gamma_0(N),\chi^{k-1}),$$

так как $ord_s h(z)\geqslant 0$. Здесь мы используем тот факт, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — модулярные формы уровня N с характерами χ_1 и χ_2 соответственно, то
$f_1(z)\cdot f_2(z)$ является модулярной формой уровня N с характером $\chi_1\cdot\chi_2$.

4. Одномерность пространства рассекающей функции

Теорема 4.

Если
$$S_k(\Gamma_0(N),\chi)=f(z)\cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N),\chi_1),$$
где $f(z)\in S_l(\Gamma_0(N),\chi_2)$, $\quad\chi=\chi_1\cdot\chi_2$, то $dim\ S_l(\Gamma_0(N),\chi_2)=1$.

Доказательство.

Для уменьшения громоздкости введем обозначения

$$V = S_k(\Gamma_0(N), \chi), \quad W = M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi_1), \quad U = S_l(\Gamma_0(N), \chi_2).$$

Допустим противное: $dim\ S_l(\Gamma_0(N), \chi_2) > 1$.

Тогда пространство $f(z) \cdot W \subset V$ для любого $f(z) \in U$.

Пусть $h(z) \in W$, и $h(z)$ не является параболической формой, s — такая параболическая вершина, в которой она не обращается в ноль. Пусть $f(z)$ — такая функция из U, что $ord_s(f)$ минимальный. Пусть $g(z)$ такая функция из U, что $ord_s\ g(z) > ord_s\ f(z)$. Имеем, $f(z) \cdot h(z) = g(z) \cdot h_1(z)$, $h(z),\ h_1(z) \in W$. Но это равенство невозможно, так как порядок в s у функции справа больше, чем порядок в s у функции слева. Значит, все параболические формы из W имеют одинаковый порядок в s, но это также невозможно, так как если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — нормированные формы из W, то $f_1(z) - f_2(z)$ имеет больший порядок в s. Полученные противоречия доказывают теорему.

5. Интерпретация компонент формулы размерности

Известно, что индекс $\mu_0(N) = |\Gamma : \Gamma_0(N)| = N \cdot \prod_{p|N}(1+p^{-1})$. Поэтому первое слагаемое в сумме справа равно $\frac{k-1}{12} \cdot \mu_0(N)$.

Второе слагаемое обозначим через $\frac{1}{2} \cdot D_1 = \frac{1}{2} \cdot \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p)$.

Покажем, что D_1 равно количеству $\mu_0(N)$ параболических вершин относительно $\Gamma_0(N)$ [4]. Известно, что

$$\mu_\infty(N) = \sum_{d|N} \phi((d, \frac{N}{d})).$$

Сначала покажем, что $\mu_\infty(N)$ — мультипликативная функция. Пусть N и M — взаимно простые натуральные числа, тогда $\forall d|N,\ \delta|M$ числа $(d, \frac{N}{d})$ и $(\delta, \frac{N}{\delta})$ взаимно просты; когда d пробегает все делители N, δ пробегает все делители M, $d\delta$ пробегает все делители NM. Получаем,

$$\mu_\infty(N) \cdot \mu_\infty(M) = \sum_{d|N} \phi((d, \frac{N}{d})) \cdot \sum_{\delta|M} \phi((\delta, \frac{M}{\delta})) =$$

$$\sum_{d|N} \sum_{\delta|M} \phi((d, \frac{N}{d})) \cdot \phi((\delta, \frac{M}{\delta})) = \sum_{d|N} \sum_{\delta|M} \phi((d, \frac{N}{d}) \cdot (\delta, \frac{M}{\delta})) =$$

$$\sum_{d|N} \sum_{\delta|M} \phi((d\delta, \frac{NM}{d\delta})) = \sum_{\tilde{d}|MN} \phi((\tilde{d}, \frac{NM}{\tilde{d}})) = \mu_\infty(NM).$$

Пусть $N = p^{2r'}$. Тогда

$$\mu_\infty(N) = 2(\phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) + ... + \phi(p^{r'-1})) + \phi(p^{r'}) =$$
$$2(1 + p - 1 + p^2 - p + ... + p^{r'-1} - p^{r'-2}) + p^{r'} - p^{r'-1} = p^{r'} + p^{r'-1}.$$

Пусть $N = p^{2r'+1}$. Тогда

$$\mu_\infty(N) = 2(\phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) + ... + \phi(p^{r'})) = 2p^{r'}.$$

Теперь из формулы для $\lambda(r_p, s_p, p)$ следует, что $D_1 = \mu_0(N)$. Также получим: если число n свободно от квадратов, $(n, m) = 1$, то

$$\mu_\infty(n \cdot m^2) = \prod_{p^{2l+1}\|n} 2 \cdot p^{l_p} \cdot \prod_{p^{2l+1}\|m} p^{l_p} + p^{l_p-1}.$$

Обозначим через $D_{2,\chi} = \sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)} \chi(x)$. Если χ — тривиальный характер, то $D_{2,\chi} = D_2$. Если N делится на 4 или на простое $p \equiv 3(4)$, то $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

Если $N = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ или $N = 2p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$, где $p_i \equiv 1(4)$, то $D_2 = 2^s$ — количество делителей числа $\tilde{N} = p_1...p_s$. Далее будет показано, что если χ — квадратичный характер с условием $\chi(-1) = -1$, то $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

Обозначим через $D_{3,\chi} = \sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)} \chi(x)$. Если χ — тривиальный характер, то $D_{3,\chi} = D_3$. Если N делится на 2, 9 или на простое $p \equiv 2(3)$, то $D_3 = 0$.

Если $N = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ или $N = 3p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$, где $p_i \equiv 1(3)$, то $D_3 = 2^s$ — количество делителей числа $\tilde{N} = p_1...p_s$.

Параметр $D_{3,\chi}$ даст нетривиальный вклад в результат наших исследований.
Сейчас мы докажем формулу, которая станет основой нашей техники.

Теорема 5.

Пусть n свободно от квадратов, $(n,m)=1$, тогда

$$\frac{\mu_0(n\cdot m^2)}{\mu_\infty(n\cdot m^2)} = m\cdot \prod_{p^{2l_p+1}\| n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2}.$$

Доказательство.

Проведем преобразования:

$$\frac{\mu_0(n\cdot m^2)}{\mu_\infty(n\cdot m^2)} = \frac{n\cdot m^2\cdot \prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right)}{\prod_{p^{2l_p+1}\|n} 2\cdot p^{l_p}\cdot \prod_{p^{l_p}\|m} p^{l_p}+p^{l_p-1}} =$$

$$n\cdot m\cdot \frac{\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot \prod_{p^{l_p}\|m} p^{l_p}+p^{l_p-1}}{\prod_{p^{2l_p+1}\|n} 2\cdot p^{l_p}\cdot \prod_{p^{l_p}\|m} p^{l_p}+p^{l_p-1}} =$$

$$n\cdot m\cdot \prod_{p^{2l_p+1}\|n} \frac{p+1}{2\cdot p^{l_p+1}} = m\cdot \prod_{p^{2l_p+1}\|n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2}.$$

Формула получена.

6. Свойства характеров

В этом параграфе мы докажем некоторые свойства квадратичных характеров χ с условием $\chi(-1)=$ $=-1$, которые существенно используются в доказательствах.

Утверждение 1.

Если $N=p^l$, $l\geqslant 2$, p — нечетное простое число, то не существует квадратичного характера со свойством $\chi(-1)=-1$ по модулю N.

Доказательство.

Пусть g — первообразный корень по модулю p^l, $\chi(g)=-1$, иначе характер был бы тривиальным. Имеем,

$$-1\equiv g^{\frac{p^{l-1}(p-1)}{2}}(mod\ p^l),\quad \chi(-1)=\chi(g)\cdot\chi(g)^{\frac{p-1}{2}}=-\chi(g)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Если $p\equiv 3(mod\ 4)$, то $\chi(-1)=1$, если $p\equiv 1(mod\ 4)$, то $-1\equiv h^2(mod\ p^l)$, $h=g^{\frac{p^{l-1}(p-1)}{4}}$, следовательно $\chi(-1)=1$.

Утверждение 2.

Если $N=p_1^{l_1}...p_s^{l_s}$, $l_j\geqslant 2$, p_j — нечетные простые числа, то не существует квадратичного характера со свойством $\chi(-1)=-1$ по модулю N.

Доказательство.

Такой характер должен представляться в виде произведения $\chi=\chi_1...\chi_s$ характеров χ_j по модулю $p_j^{l_j}$, среди которых хотя бы один χ_j таков, что $\chi_j(-1)=-1$. Но такого характера нет в силу утверждения 1.

Утверждение 3.

Не существует нетривиального квадратичного характера со свойством
$\chi(-1)=-1$ по модулю 2.

Доказательство.

Это следует из того, что $1 \equiv -1 (mod\ 2)$.

Утверждение 4.

Не существует нетривиального квадратичного характера со свойством $\chi(-1) = -1$ *по модулю простого числа* $p \equiv 1(mod\ 4)$.

Доказательство.

Пусть g — первообразный корень по модулю p.
Имеем,

$$-1 \equiv h^2 (mod\ p), \quad h = g^{\frac{p-1}{4}}, \quad \chi(-1) = 1.$$

Из этого следует, что если χ — нетривиальный характер, то $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.
Из доказанных утверждений получаем очевидное следствие.

Следствие.

Не существует квадратичного характера со свойством $\chi(-1) = -1$ по модулю N, если
1) $N = p_1^{l_1} ... p_s^{l_s}$, $l_j \geqslant 2$, p_j — нечетные простые числа;
2) $N = 2p_1^{l_1} ... p_s^{l_s}$, $l_j \geqslant 2$, p_j — нечетные простые числа;
3) $N = p_1 ... p_s$, $p_j \equiv 1(mod\ 4)$, p_j — нечетные простые числа;
4) $N = 2p_1 ... p_s$, $p_j \equiv 1(mod\ 4)$, p_j — нечетные простые числа;
5) $N = p_1^{k_1} ... p_s^{k_s} \cdot q_1^{l_1} ... q_t^{l_t}, k_j \geqslant 1, l_j \geqslant 2$, $p_j \equiv 1(mod\ 4)$, $q_j \equiv 3(mod\ 4)$, $p_j\ q_j$ — нечетные простые числа;
6) $N = 2p_1^{k_1} ... p_s^{k_s} \cdot q_1^{l_1} ... q_t^{l_t}$, $k_j \geqslant 1, l_j \geqslant 2$, $p_j \equiv 1(mod\ 4)$, $q_j \equiv 3(mod\ 4)$, $p_j\ q_j$ — нечетные простые числа.

7. Формулировка основной теоремы

Доказательство этой теоремы образуют рассуждения следующих пунктов 8 и 9 вместе с результатом теоремы 3.

Теорема 6.

Пусть χ *— квадратичный характер по модулю* $N \neq 3,\ 17,\ 19$ *такой, что* $\chi(-1) = -1$, k, l *— положительные числа. Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi^k) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-l}),$$

где $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi^l)$ *тогда и только тогда* $f(z)$ *— мультипликативное эта–произведение.*
При $N = 3,\ 17,\ 19$ *точное рассечение также имеет место, рассекающая функция не является эта–произведением. Причем должны выполняться условия*
$N = 17,\ k \equiv 2(4), k \geqslant 6,\ l = 2;\ N = 19,\ k \equiv 2(6), k \geqslant 8,\ l = 2.$
Здесь χ^l *— тривиален, если* l *— четно.*

8. Рассечение функциями нечетного веса с характерами

Как мы уже отмечали в этом случае $D_2 = 0$. Разберем сначала случай, когда $D_3 = 0, \quad D_1 = D_{1,\chi}$.

8.1. Рассечение функциями веса 1 при $D_3 = 0, \quad D_1 = D_{1,\chi}$

Если $dim\ S_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$, то $dim\ S_2(\Gamma_0(N)) = dim\ M_1(\Gamma_0(N), \chi)$.
Вычислим эти размерности и получим уравнение.
$dim\ M_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_\infty(N)$,
$dim\ S_2(\Gamma_0(N)) = 1 + \frac{N}{12} \cdot \mu_0(N) - \frac{1}{2} \cdot \mu_\infty(N)$.
Отсюда получим

$$\frac{\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} = 12.$$

Это условие является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным. Учитывая теорему 5 , получим для $N = m^2 \cdot n, \quad (m,n) = 1, \quad n$ свободно от квадратов.

$$m \cdot \prod_{p^{2l_p+1}\|n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2} = 12.$$

Проанализировав это равенство элементарными методами, получим
$N = 23,\ 33,\ 35,\ 42,\ 44,\ 56,\ 60,\ 63,\ 80,\ 96,\ 108,\ 128,\ 144.$

Для $N = 23,\ 44,\ 63,\ 80,\ 108,\ 128,\ 144$ существуют одномерные пространства $S_1(\Gamma_0(N), \chi) = < f(z) >$, порожденные мультипликативными эта–произведениями, указанными в таблице 1. Далее, пусть $g(z) \in S_1(\Gamma_0(N), \psi)$.

Тогда $\frac{g(z)}{f(z)} \in M_0(\Gamma_0(N), \psi \cdot \chi^{-1})$, так как порядок $f(z)$ в каждой параболической вершине равен 1. Это возможно лишь при условии, что $\psi \cdot \chi^{-1}$ — тривиальный характер, пространство $M_0(\Gamma_0(N), \psi \cdot \chi^{-1})$ состоит из констант. То есть $\psi = \chi$.

Покажем теперь, что для уровней $N = 33,\ 35,\ 42,\ 56,\ 60,\ 96$ не существует параболических форм веса 1 с характером χ. Пусть N — один из этих уровней, кроме 42. Для каждого из этих уровней существует параболическая форма $g_N(z)$ веса 2 уровня N с тривиальным характером, у которой все нули сосредоточены в параболических вершинах и имеют порядок 2, первый коэффициент этой формы равен 1.

Имеем

$$deg(div\ \ g_N(z)) = 2\mu_\infty(N).$$

Если $f(z) \in S_1(\Gamma_0(N), \chi)$, то порядок этой формы в каждой параболической вершине не менее 1,

$$deg(div\ \ g_N(z)) = deg(div\ \ f^2(z)).$$

Следовательно, функция $f(z)$ в каждой параболической вершине имеет ноль порядка 1, других нулей нет. Если считать, что первый коэффициент функции $f(z)$ равен 1, то $g_N(z) = f^2(z)$. Но анализ первых коффициентов функции $g_N(z)$ показывает, что она не является квадратом другого ряда Фурье.

Выпишем эти функции явно:
$g_{33}(z) = \eta(33z)\eta(11z)\eta(3z)\eta(z),$
$g_{35}(z) = \eta(35z)\eta(7z)\eta(5z)\eta(z),$
$g_{56}(z) = \eta(28z)\eta(14z)\eta(4z)\eta(2z),$
$g_{60}(z) = \eta(30z)\eta(10z)\eta(6z)\eta(2z),$
$g_{96}(z) = \eta(24z)\eta(12z)\eta(8z)\eta(4z).$

Для уровня $N = 42$ ситуация аналогична. Контрольная функция имеет вес 4 $g_{42}(z) = \eta(42z)\eta(21z)\eta(14z)\eta(7z)\eta(6z)\eta(3z)\eta(2z)\eta(z)$, ее ряд Фурье не является четвертой степенью другого ряда Фурье.

Теперь рассмотрим рассекающие функции веса 3. Из условия $dim\ \ S_3(\Gamma_0(N),\ \chi) = 1$ получим

$$\frac{2\mu_0(N)}{12} = \frac{1}{2} \cdot \mu_\infty(N) + 1.$$

Пусть l — четное. Из условия $dim\ \ S_{l+3}(\Gamma_0(N),\ \chi) = dim\ \ M_l(\Gamma_0(N))$, получаем

$$\frac{3\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} = 12.$$

Из этих двух равенств получим $\mu_\infty(N) = 6$. Если $N = m^2 \cdot n$, то

$$\mu_\infty(N) = \prod_{p^{2l_p+1}\|n} 2 \cdot p^{l_p} \cdot \prod_{p^{l_p}\|m} p^{l_p} + p^{l_p-1} = 6.$$

Получим $N = 16$ или $N = 4p$, p — нечетное. Размерность $dim\ \ S_3(\Gamma_0(4p),\ \chi) = 1$ только для $p = 3$. Для $N = 12,\ 16$ существуют мультипликативные эта–произведения $f(z)$, порождающие $S_3(\Gamma_0(N),\ \chi)$. Как и выше можно показать, что характер определяется однозначно.

Далее, если бы точное рассечение обеспечивалось параболической формой веса $k \geqslant 5$, то выполнялось бы условие

$$\frac{k\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} = 12.$$

При нечетном $k \geqslant 5$ это невозможно.

8.2. Рассечение при условии $D_3 = 0, \quad D_{1,\chi} < D_1$

Пусть $N = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$, так как характер χ нетривиален, то $k_j = 1$, но в этом случае $r_{p_j} = 1$, $2s_{p_j}$ может равняться 0 или 2, но в обоих случаях $D_{1,\chi} = D_1$. Учитывая свойства характеров, доказанные в пункте , получаем, что $4|N$.

8.2.1. Уровни 4 и 8

Пусть $\tilde{\chi}$ — характер по модулю 2^α, тогда $\tilde{\chi}$ определяется значениями $\tilde{\chi}(-1)$ и $\tilde{\chi}(5)$, числа - 1 и 5 — образующие $(\mathbf{Z}/2^\alpha\mathbf{Z})^*$. [9].

Пространство $M_0(\Gamma_0(4))$ двумерно, его базис образуют функции $\frac{\eta^8(4z)}{\eta^4(2z)}$, $\frac{\eta^8(2z)}{\eta^4(4z)}$.

Рассмотрим характер

$$\chi_4(d) = \begin{cases} 1, & d \equiv 1 \ (4), \\ -1, & d \equiv 3 \ (4). \end{cases}$$

Здесь $D_1 = 3$, $D_{1,\chi} = 2$. Пространство $S_5(\Gamma_0(4), \ \chi_4)$ одномерно и порождено мультипликативным эта–произведением $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$. Пространство $S_3(\Gamma_0(4), \ \chi_4)$ одномерно и порождено мультипликативным эта–произведением $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$.

Имеем $\tilde{\chi}(-1) = -1$. Если $\tilde{\chi}(d) = -1$, при $d \equiv 5 \ (8)$, то $D_1 = \ D_{1,\chi}$. Такую ситуацию мы сейчас не рассматриваем.

Остается единственный вариант

$$\tilde{\chi} = \begin{cases} -1, & d \equiv 3 \ (8), \\ 1, & d \equiv 5 \ (8), \\ -1, & d \equiv 7 \ (8). \end{cases}$$

В этом случае $\tilde{\chi} = \chi_4$.

8.2.2. Анализ других уровней $N : 4|N$

Проанализируем условие $dim \ S_k(\Gamma_0(N), \ \chi) = 1$, $4|N$, $D_{1,\chi} < D_1$.

Используя формулу размерности, получим оценку

$$2 \leqslant \frac{k\mu_0(N)}{\mu_\infty(N)} \leqslant 11.$$

В явном виде

$$2 \leqslant k \cdot m \cdot \prod_{p^{2l_p+1}\|n} \frac{p^{l_p}(p+1)}{2} \leqslant 11.$$

Проведя анализ элементарными методами, получим значения

$k = 1$, $N = 4$, 8, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 64, 72, 100;

$k = 3$, $N = 4$, 8;

$k = 5$, $N = 4$.

Покажем, что реализуются только два варианта, которые мы рассмотрели в предыдущем пункте:

$k = 3$, $N = 8$;

$k = 5$, $N = 4$.

Пусть N равняется одному из уровней $N = 36$, 32 24, 20. Если пространство $S_1(\Gamma_0(N), \chi)$ одномерно и порождено $g_N(z)$, то $g_N^2(z) \in S_2(\Gamma_0(N)$, но пространство $S_2(\Gamma_0(N)$ для этих уровней одномерно и порождено мультипликативными эта–произведениями. Если первый коэффициент функции $g_N(z)$ равен 1, то получим

$g_{36}^2(z) = \eta^4(6z)$,

$g_{32}^2(z) = \eta^2(8z)\eta^2(4z)$,

$g_{24}^2(z) = \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$,

$g_{20}^2(z) = \eta^2(10z)\eta^2(2z)$.

Но если $f(z)$ — мультипликативное эта–произведение, и $f(z) = g^2(z)$, то $g(z)$ модулярной формой не является.

Пусть $N = 40$, 64, 72.

Пусть $S_1(\Gamma_0(N), \chi) = < g(z) >$. Тогда функция $g(z) \in S_1(\Gamma_0(2N), \chi)$, но для каждого такого $2N$ пространство $S_1(\Gamma_0(2N), \psi)$ порождается мультипликативным эта–произведением с характером ψ, тогда

$$\frac{g(z)}{f(z)} \in M_0(\Gamma_0(2N), \chi \cdot \psi^{-1}).$$

Если характер $\chi \cdot \psi^{-1}$ — тривиальный, то $g(z) = c \cdot f(z)$, что невозможно, так как у $g(z)$ уровень N, а если этот характер нетривиален, то пространство $M_0(\Gamma_0(2N), \chi \cdot \psi^{-1})$ должно быть нулевым, но $g(z)$ — ненулевая функция.

Рассмотрим уровни $N = 4,\ 8,\ 16$.

Если $S_1(\Gamma_0(N), \chi) = < g(z) >$, то $g^2(z) \in S_2(\Gamma_0(32))$, но это пространство порождено $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, и корень из этой функции не является модулярной формой.

Пусть теперь $N = 100$.

Если N_1 — нечетно, и модуль χ не делится на 2, то в формуле для размерности $dim\ S_k(\Gamma_0(2^\alpha N_1, \chi))$ имеет место равенство $D_1 = D_{1,\chi}$ в силу того, что значения $r_2 = 2,\ s_2;\ r_5 = 0, 1, 2,\ s_5 = 2$.

В заключение заметим, что так как $S_3(\Gamma_0(8), \chi_4)$ одномерно, то $S_3(\Gamma_0(8), \chi_4) = \{0\}$, так как оно было бы собственным подпространством.

9.3. Условие $D_3 \neq 0$.

В этом параграфе мы изучаем только нечетные уровни. Рассмотрим сначала уровень $N = 3$. Пространство $S_k(\Gamma_0(3), (\frac{d}{3}))$ одномерно только при $k = 7$. Вычисления размерностей показывают, что имеет место точное рассечение параболической формой веса 7 с указанным характером, которая, однако, не является эта–частным.

Далее $D_3 \neq 0$ в случае $N = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$ или $N = 3 \cdot p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$, где $p_j \equiv 1(3)$. Если x — решение сравнения $x^2 + x + 1 \equiv 0(N)$, то $x^3 \equiv 1(N),\ x \not\equiv 1(N)$. Тогда $\chi(x) = 1$, иначе $\chi(1) = -1$, что невозможно. Учитывая информацию о характерах, получим $N = p_1...p_s$ или $N = 3 \cdot p_1...p_s$. В этом случае $D_1 = D_{1,\chi}$, так как уровень не делится на 4. Вычисляем $D_1 = D_3 = D_{3,\chi} = 2^s$.

Если имеет место точное рассечение и $dim\ S_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$, то

$$dim\ S_3(\Gamma_0(N), \chi) = dim\ M_2(\Gamma_0(N)) \neq 0.$$

$$dim\ M_2(\Gamma_0(N)) = \frac{\mu_0(N)}{12} + \frac{1}{2} \cdot D_1 - \frac{1}{3} \cdot D_3,$$

$$dim\ S_3(\Gamma_0(N, \chi)) = \frac{2\mu_0(N)}{12} - \frac{1}{2} \cdot D_1 + \frac{1}{3} \cdot D_3,$$

получаем равенство

$$\frac{\mu_0(N)}{12} = 2^s - \frac{2}{3} \cdot 2^s = \frac{2^s}{3}.$$

$$\mu_0(N) = N \cdot \prod_{p|N}(1 + \frac{1}{p}) = 2^{s+2}.$$

Это равенство приводит к условию $(p_1+1)...(p_s+1) = 2^{s+2}$, или $4(p_1+1)...(p_s+1) = 2^{s+2}$. Это реализуется только при $s = 1, p = 7$.

Но на самом деле этот уровень соответствует другой ситуации: $dim\ S_3(\Gamma_0(N), (\frac{d}{7})) = 1$. В этом случае имеет место точное рассечение мультипликативным эта–произведением $\eta^3(7z)\eta^3(z)$. Пространства меньших весов уровня 7 — нулевые.

Пусть далее $k \geqslant 5, \quad k \equiv 1(3)$.

$$dim\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) = (k-1)(p_1 - 1)...(p_s - 1) - 2^{s-1} = 1.$$

$$(k-1)(p_1 - 1)...(p_s - 1) - 2^{s-1} = 1 + 2^{s-1}.$$

Получаем неравенство из условия $p_j \geqslant 7$.

$$(k-1) \cdot 6^s \leqslant 1 + 2^{s-1}.$$

$$(k-1) \cdot 3^s \leqslant \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2} \leqslant 1.$$

Получим противоречие. Аналогично исследуются остальные случаи:
$k \equiv 0,\ 2(3)$ и $N \equiv 3 \cdot p_1...p_s$. возможностей точного рассечения здесь также нет.

9. Рассечение функциями четного веса

Известно, что $dim\ S_{12}(\Gamma) = 1$. Значит, $\forall N > 1,\ dim\ S_k(\Gamma_0(N)) > 1$. Следовательно, достаточно проверить веса $l \leqslant 12$. Если $dim\ S_2(\Gamma_0(p)) > 1$, то $dim\ S_k(\Gamma_0(N)) > 1,\ \forall k \geqslant 2$ и уровня N, делящегося на p. Поэтому для точного рассечения необходимым условием является $dim\ S_2(\Gamma_0(p)) \leqslant 1$, где p — простой делитель уровня N. Это условие выполняется для $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 17,\ 19$. Далее в таблице мы укажем все четные l и уровни N такие, что $dim\ S_l(\Gamma_0(N)) = 1$, и $dim\ S_k(\Gamma_0(N)) = 0$ при $k < l$. Если N_1 делится на N, $N_1 > N$, то $dim\ S_l(\Gamma_0(N_1)) > 1$, и точное рассечение невозможно. Поэтому все приведенные в таблице случаи исчерпывают все возможности точного рассечения параболическими формами четного веса с тривиальным характером. Во всех случаях, кроме $N = 17, 19$ рассекающая функция — мультипликативное эта–произведение. Для уровней $N = 17, 19$ точное рассечение имеет место только для весов, указанных в теореме 6. Таким образом, все случаи рассмотрены, и теорема 6 доказана.

Таблица 2

N	$Min\ l$
11, 12, 14,15, 17, 19, 20, 27, 36	2
5, 8,9	4
3,4,7	6
2	8
1	12

Литература

[1] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[2] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004. 488 с.

[3] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products // L.N.M. 1987. V. 1395. P. 173–200.

[4] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S. Providence. 2004. 216 p.

[5] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[6] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

[7] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // LNM. 1976. V. 627. P. 69–78.

[8] Воскресенская Г.В. Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. мат. и ее прил. Темат.обз. 2017. Т. 136. С. 103–137.

[9] Чудаков Н.Г. Введение в теорию L — функций Дирихле. М.: Гостехиздат, 1947. 204 с.

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300.

References

[1] Koblitz N. *Vvedenie v ellipticheskie krivye i moduliarnye formy* [Introduction in elliptic curves and modular forms]. M.:Mir, 1988, 320 p. [in Russian].

[2] Knapp A. *Ellipticheskie krivye* [Elliptic curves]. M.: Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].

[3] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products. *L.N.M.*, 1987, Vol. 1395, pp. 173–200 [in English].

[4] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S. Providence, 2004, 216 p. [in English].

[5] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions. *Contemp.Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 89–98 [in English].

[6] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262 [in English].

[7] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. *LNM*, 1976, Vol. 627, pp. 69–78 [in French].

[8] Voskresenskaya G.V. *Eta-funktsiia Dedekinda v sovremennykh issledovaniiakh* [Dedekind's eta–function in modern investigations]. *Itogi nauki i tekhn. Ser.: Sovrem. mat. i ee pril. Temat.obz.* [Journal of Mathematical Sciences], 2017, Vol. 136, pp. 103–137 [in Russian].

[9] Chudakov N.G. *Vvedenie v teoriiu L — funktsii Dirikhle* [Introduction in Dirichlet L —functions]. M.:Gostekhizdat, 1947, 204 p. [in Russian].

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm.*, 1990, Vol. LIV, no. 4, pp. 273–300 [in Russian].

G.V. Voskresenskaya[3]

MACKAY FUNCTIONS AND EXACT CUTTING IN SPACES OF MODULAR FORMS[4]

In the article we consider structure problems in the theory of modular forms. The phenomenon of the exact cutting for the spaces $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, where χ is a quadratic character with the condition $\chi(-1) = = (-1)^k$. We prove that for the levels $N \neq 3,\ 17,\ 19$ the cutting function is a multiplicative eta–product of an integral weight. In the article we give the table of the cutting functions. We prove that the space of an cutting function is one–dimensional. Dimensions of the spaces are calculated by the Cohen-Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, cusps, Eisenstein series, divisor of function, structure theorems, Cohen-Oesterle formula.

Статья поступила в редакцию 29/ *VI*/2017.
The article received 29/ *VI*/2017.

[3] *Voskresenskaya Galina Valentinovna* (galvosk@mail.ru), Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Samara, Russian Federation.

[4]The work is performed with the financial support of the grant of the Russian Foundation for Basic Research 16-01-00154A.

УДК 519.999

С.В. Кириченко[1]

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В статье рассмотрена нелокальная задача для модельного уравнения с доминирующей смешанной производной четвертого порядка. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи, в которой два из четырех условий являются нелокальными и представляют собой интегралы как по пространственной переменной, так и по переменной времени. Для доказательства предложен новый метод, основанный на эквивалентности поставленной задачи и системы уравнений второго порядка.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, доминирующая производная.

Введение

В статье изучается уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = 0,$$

которое представляет собой частный случай уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - (bu_x)_x) - au_{xx} = f(x,t) \qquad (N)$$

Уравнение (N) принято называть в современной литературе псевдогиперболическим уравнением. Однако его также часто называют уравнением с доминирующей производной. Для уравнения (N) рассматриваются как начально-краевые задачи, так и задачи типа задачи Гурса [1, 2]. В последнее время для уравнения (N) ставятся и изучаются также и нелокальные задачи [3–6], в которых нелокальные условия представлены интегральными либо по пространственной переменной, либо по переменной времени, которые заменяют собой краевые или начальные условия соответственно.

В предлагаемой работе рассмотрена задача с двумя интегральными условиями, причем одно из них — интеграл по пространственной переменной, а другое – интеграл по переменной времени. Заметим, что оба эти условия суть условия I рода, что всегда вызывает трудности при доказательстве разрешимости. В статье предложен метод, позволяющий преодолеть эти трудности.

1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = 0 \qquad (1)$$

и поставим для него задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad (3)$$

$$\int_0^T K(t)u(x,t)dt = \psi(x), \qquad (4)$$

[1] © Кириченко С.В., 2017

Кириченко Светлана Викторовна (svkirichenko@mail.ru), кафедра прикладной математики, информатики и информационных систем, Самарский государственный университет путей сообщения, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

$$\int_0^l H(x)u(x,t)dx = E(t). \tag{5}$$

Функции $K(t), E(t)$ заданы на $[0,T]$, $\varphi(x), \psi(x), H(x)$ на $[0,l]$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$K \in C[0,T], E \in C^2(0,T) \cap C[0,T], \varphi \in C^2[0,l], \psi \in C^2[0,l], H \in C[0,l], \tag{6}$$

а также условиям согласования

$$\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0, E(0) = \int_0^l H(x)\varphi(x)dx, \int_0^l H(x)\psi(x)dx = \int_0^T K(t)E(t)dt. \tag{7}$$

Обозначим

$$\tilde{C}(Q_T) = \{u : u \in C^2(Q_T), \quad u_{xxtt} \in C(Q_T)\}$$

Теорема. Если функции $K(t), E(t), \varphi(x), \psi(x), H(x)$ удовлетворяют в $\overline{Q}_T$ условиям (6), (7), то найдутся такие числа l_0, T_0, что при $l < l_0$, $T < T_0$ существует единственное решение задачи (1–5) $u(x,t) \in \tilde{C}(Q_T)$.

Доказательство.

Сведем поставленную задачу к двум задачам для уравнений второго порядка. Для этого введем новые неизвестные функции $u_{tt} = v(x,t)$, $u_{xx} = w(x,t)$.

Пусть $u(x,t)$ — решение поставленной задачи. Так как $u_{xxtt} = u_{tt} - u_{xx}$, то нетрудно видеть, что пара функций (v,w) будет решением системы уравнений

$$w_{tt} + w = v,$$

$$v_{xx} - v = -w,$$

удовлетворяющим условиям

$$w(x,0) = \varphi''(x),$$

$$\int_0^T K(t)w(x,t)dt = \psi''(x),$$

$$v(0,t) = 0,$$

$$\int_0^l H(x)v(x,t)dx = E''(t),$$

которую для дальнейшего нам будет удобно представить в виде двух задач.

Задача 1. Найти функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую в области Q_T уравнению

$$w_{tt} + w = v \tag{8}$$

и условиям

$$w(x,0) = \varphi''(x), \tag{9}$$

$$\int_0^T K(t)w(x,t)dt = \psi''(x). \tag{10}$$

Задача 2. Найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую в области Q_T уравнению

$$v_{xx} - v = -w \tag{11}$$

и условиям

$$v(0,t) = 0, \tag{12}$$

$$\int_0^l H(x)v(x,t)dx = E''(t). \tag{13}$$

Каждую из этих задач можно рассматривать как нелокальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром.

Решив систему уравнений второго порядка (8) и (11) с условиями (9, 10, 12, 13), мы тем самым решим поставленную задачу (1–5). Для этого сначала покажем их эквивалентность.

Запишем уравнение (11) в виде $v - w - v_{xx} = 0$. Так как $v(x,t) = u_{tt}$, $w(x,t) = u_{xx}$, то $v_{xx}(x,t) = u_{xxtt}$. Подставляя в последнее уравнение, приходим к уравнению (1).

Теперь равенство $u_{tt} = v(x,t)$ проинтегрируем дважды по t, тогда получаем

$$u(x,t) - u(x,0) - tu(x,0) = \int_0^t \int_0^\tau v(x,\tau')d\tau' d\tau.$$

Подставим $x = 0$:

$$u(0,t) - u(0,0) - tu(0,0) = \int_0^t \int_0^\tau v(0,\tau')d\tau' d\tau.$$

Так как $v(0,t) = 0$, $u(0,0) = 0$, то $u(0,t) = 0$.

Далее из условия (13) имеем:

$$\int_0^l H(x)vdx = \int_0^l H(x)u_{tt}dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\int_0^l H(x)udx) = E''(t).$$

Тогда,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\int_0^l H(x)udx - E(t)) = 0 \Rightarrow \int_0^l H(x)udx - E(t) = At + B.$$

Подставим $t = 0$, получим

$$\int_0^l H(x)u(x,0)dx - E(0) = B \Rightarrow \int_0^l H(x)\varphi(x)dx - E(0) = B.$$

В силу условий согласования следует, что $B = 0$.

Умножим равенство $\int_0^l H(x)udx - E(t) = At$ на функцию $K(t)$ и проинтегрируем по t

$$\int_0^T K(t) \int_0^l H(x)udxdt - \int_0^T K(t)E(t)dt = A\int_0^T K(t)tdt.$$

Поменяем пределы интегрирования в первом слагаемом, а ко второму слагаемому применим условия (7):

$$\int_0^l H(x) \int_0^T K(t)udtdx - \int_0^l H(x)\psi(x)dxt = A\int_0^T K(t)tdt.$$

Если выполняются условия (4), то левая часть последнего равенства обращается в нуль. Следовательно, $A = 0$. В результате приходим к равенству $\int_0^l H(x)udx = E(t))$.

Перейдем к решению задач 1 и 2.

Решая уравнение (8) методом вариации постоянной, получим:

$$w(x,t) = A(x)cost + B(x)sint + \int_0^t v(x,\tau)sin(t-\tau)d\tau.$$

Применяя условия (8), (9), находим

$$A(x) = \varphi''(x),$$

$$B(x) = \frac{\psi''(x) - \varphi''(x)\int_0^T K(t)costdt - \int_0^T v(x,\tau)\int_\tau^T K(t)sin(t-\tau)dtd\tau}{\int_0^T K(t)sintdt}.$$

Введем обозначения:

$$æ(\tau) = \int_\tau^T K(t)sin(t-\tau)dt,$$

$$b(x,t) = (æ(0))^{-1} sint[\psi''(x) - \varphi''(x) \int\limits_0^T K(t) cost dt] + \varphi''(x) cost.$$

Тогда

$$w(x,t) = \int\limits_0^t v(x,\tau) sin(t-\tau) d\tau - \frac{sint}{æ(0)} \int\limits_0^T æ(\tau) v(x,\tau) d\tau + b(x,t). \tag{14}$$

Решая аналогично задачу 2, получаем

$$v(x,t) = \frac{E''(t) shx}{h(0)} - \int\limits_0^x w(\xi,t) sh(x-\xi) d\xi + \frac{shx}{h(0)} \int\limits_0^l h(\xi) w(\xi,t) d\xi, \tag{15}$$

где

$$h(\xi) = \int\limits_\xi^l H(x) sh(x-\xi) dx.$$

Введем обозначения:

$$V(\xi,t) = \int\limits_0^t v(\xi,\tau) sin(t-\tau) d\tau - \frac{sint}{æ(0)} \int\limits_0^T æ(\tau) v(\xi,\tau) d\tau,$$

$$Gv = \int\limits_0^x sh(x-\xi) V(\xi,t) d\xi + \frac{shx}{h(0)} \int\limits_0^l h(\xi) V(\xi,t) d\xi, \tag{16}$$

$$F(x,t) = \frac{E''(t) shx}{h(0)} - \int\limits_0^x b(\xi,t) sh(x-\xi) d\xi + \frac{shx}{h(0)} \int\limits_0^l h(\xi) b(\xi,t) d\xi.$$

Подставляя (14) в (15), получим:

$$v(x,t) = Gv + F(x,t). \tag{17}$$

Рассмотрим полученное уравнение (17) и докажем, что оно однозначно разрешимо. Для этого покажем, что оператор $z(v) = Gv + F$ сжимающий.

Расстояние зададим формулой $\rho(v_1, v_2) = \max\limits_{\bar{Q}_T} |v_1 - v_2|$.

Рассмотрим теперь $|z(v_1) - z(v_2)| = |Gv_1 - Gv_2|$.

$$|Gv_1 - Gv_2| \leqslant |\int\limits_0^x sh(x-\xi)(V_1 - V_2) d\xi| + |\frac{shx}{h(0)}| \cdot |\int\limits_0^l h(\xi)(V_1 - V_2) d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant |V_1 - V_2| (|\int\limits_0^x sh(x-\xi) d\xi| + |\frac{shx}{h(0)}| \cdot |\int\limits_0^l h(\xi) d\xi|).$$

Оценим теперь $|V_1 - V_2|$:

$$|V_1 - V_2| \leqslant |\int\limits_0^t (v_1 - v_2) sin(t-\tau) d\tau| + |\frac{sint}{æ(0)}| \cdot |\int\limits_0^T æ(\tau)(v_1 - v_2) d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant |v_1 - v_2| (|\int\limits_0^t sin(t-\tau) d\tau| + |\frac{sint}{æ(0)}| \cdot |\int\limits_0^T æ(\tau) d\tau|).$$

Преобразуем следующие интегралы

$$\int\limits_0^l h(\xi) d\xi = \int\limits_0^l \int\limits_\xi^l H(x) sh(x-\xi) dx d\xi = \int\limits_0^l H(x) \int\limits_0^x sh(x-\xi) d\xi dx = \int\limits_0^l H(x)(chx - 1) dx;$$

$$\int\limits_0^T æ(\tau) d\tau = \int\limits_0^T \int\limits_\tau^T K(t) sin(t-\tau) dt d\tau = \int\limits_0^T K(t) \int\limits_0^t sin(t-\tau) d\tau dt = \int\limits_0^T K(t)(1 - cost) dt.$$

Окончательно получаем:

$$|Gv_1 - Gv_2| \leqslant |v_1 - v_2| \cdot [|chx - 1| + \frac{|shx| \int\limits_0^l |H(x)| \cdot |chx - 1| dx}{|\int\limits_0^l H(x) shx dx|}] \cdot$$

$$\cdot [|1 - cost| + \frac{\int\limits_0^T |K(t)|(1 - cost) dt}{|\int\limits_0^T K(t) sint dt|}].$$

Найдем такие значения переменных x и t, чтобы неотрицательная постоянная

$$C = [|chx - 1| + \frac{|shx| \int\limits_0^l |H(x)| \cdot |chx - 1| dx}{|\int\limits_0^l H(x) shx dx|}] \cdot [|1 - cost| + \frac{\int\limits_0^T |K(t)|(1 - cost) dt}{|\int\limits_0^T K(t) sint dt|}] \leqslant 1.$$

Неравенство $C \leqslant 1$ будет верным, если положим:

$$|chx - 1| + \frac{|shx| \int\limits_0^l |H(x)| \cdot |chx - 1| dx}{|\int\limits_0^l H(x) shx dx|} \leqslant 1$$

и

$$|1 - cost| + \frac{\int\limits_0^T |K(t)|(1 - cost) dt}{|\int\limits_0^T K(t) sint dt|} \leqslant 1.$$

Решая эти два неравенства, получаем, что они верны, если $x < 0,95$, $t < 57$.

В результате получаем, что оператор Gv, определяемый формулой (16), является сжимающим, поэтому функция $v(x,t)$ однозначно определяется из уравнения (17). В силу условий теоремы и эквивалентности задач следует существование единственного решения поставленной задачи (1–5).

Литература

[1] Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. Минск. 1999. 13с. Деп. в ВИНИТИ. 28.06.99 № 2059–В99.

[2] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. о-во, 2001. 226 с.

[3] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Самарский университет, 2012. 196 с.

[4] Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2008. № 2. С. 22–28.

[5] Кириченко С.В. Задача с нелокальным интегральным условием для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. 2014. № 3. С. 42–51.

[6] Юлдашев Т.К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2016. Вып. 1(47). С. 119–127.

References

[1] Utkina E.A. *Ob odnom uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poriadka* [About one partial equation of the fourth order]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], Minsk, 1999, 13 p. VINITI. 28.06.99 № 2059–B99 [in Russian].

[2] Zegalov V.I., Mironov A.N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential equations with the senior partial derivatives]. Kazan: Kazanskoe matem. o-vo, 2001, 226 p. [in Russian].

[3] Pulkina L.S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with nonclassical conditions for the hyperbolic equations]. Samara: Samarskii universitet, 2012, 196 p. [in Russian].

[4] Beylina N.V. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal task with integral conditions for the pseudo-hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2008, no. 2, pp. 22–28 [in Russian].

[5] Kirichenko S.V. *Zadacha s nelokal'nym integral'nym usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia chetvertogo poriadka* [Task with a nonlocal integral condition for the pseudo-hyperbolic equation of the fourth order]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3, pp. 42–51 [in Russian].

[6] Uldashev T.K. *Ob odnom smeshannom differentsial'nom uravnenii chetvertogo poriadka* [About one mixed differential equation of the fourth order]. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University], 2016, Issue 1(47), pp. 119–127 [in Russian].

S.V. Kirichenko[2]

ABOUT ONE NONLOCAL TASK FOR THE EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH THE DOMINATING MIXED DERIVATIVE

In the article the nonlocal task for the model equation from the dominating mixed derivative of the fourth order is considered. The unique solubility of an objective in which two of four conditions are nonlocal is proved and represent integrals both on a space variable, and on time variable. For the proof the new method based on equivalence of an objective and set of equations of the second order is offered.

Key words: pseudo-hyperbolic equation, nonlocal task, integral conditions, dominating derivative.

Статья поступила в редакцию 10/*VII*/2017.
The article received 10/*VII*/2017.

[2] *Kirichenko Svetlana Viktorovna* (svkirichenko@mail.ru), Department of Applied Mathematics, Informatics and Information Systems, Samara State University of Railway Transport, 18, 1-st Besymanniy per., Samara, 443066, Russian Federation.

УДК 517.984.5

М.В. Кукушкин[1]

О НЕКОТОРЫХ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КИПРИЯНОВА

В данной работе изучены качественные свойства оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова. Взяв за основу концепцию многомерного обобщения оператора дробного дифференцирования в смысле Маршо мы адаптировали раннее известную технику доказательств теорем теории дробного исчисления одной переменной, для оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова. Наряду с ранее известным введенным И.А. Киприяновым определением дробной производной по направлению используется новое определение многомерного дробного интеграла в направлении позволяющее расширить область определения формально сопряженного оператора. Доказан ряд утверждений имеющих аналоги в теории дробного исчисления одной переменной. В частности получены достаточные условия представимости дробным интегралом в направлении. Доказано интегральное тождество результатом которого является построение формально сопряженного оператора определенного на множестве функций представимых дробным интегралом в направлении.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, оператор Маршо, оператор Римана-Лиувилля, дробная производная по направлению, дробный интеграл, энергетическое пространство, формально сопряженный оператор, аккретивный оператор.

1. Предварительные сведения

Свойство положительности операторов дробного дифференцирования, как отмечено в [1], является весьма важным в теории дифференциальных уравнений дробного порядка. Более сильное свойство полуограниченности оператора снизу (аналог свойства сильной аккретивности [2, с. 352] для действительных гильбертовых пространств), является свойством более слабым, чем свойство положительной определенности оператора. Однако к примеру, для весовых энергетических пространств порожденных оператором дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и обладающих специальными структурными свойствами, имеют место аналоги классических теорем теории положительно определенных операторов [3]. В данной работе будет рассмотрен случай когда линейный, плотно определенный, полуограниченный снизу оператор можно симметризовать путем суммирования с формально сопряженным оператором. Полученный таким образом положительно определенный оператор обладает, при некоторых дополнительных условиях, специальными спектральными свойствами, о чем сказано в [4].

Следуя обозначениям [5] будем полагать Ω — выпуклая область n — мерного евклидова пространства, P — фиксированная точка границы $\partial\Omega$, $Q(r,\vec{\mathbf{e}})$ — произвольная точка области Ω; обозначим через $\vec{\mathbf{e}}$ — единичный вектор имеющий направление от P к Q, через r — евклидово расстояние между точками P и Q. Будем рассматривать классы Лебега $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ комплекснозначных функций. В полярных координатах суммируемость f на Ω в степени p — означает, что

$$\int\limits_{\Omega} |f(Q)|^p dQ = \int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_{0}^{d(\vec{\mathbf{e}})} |f(Q)|^p r^{n-1} dr < \infty, \tag{1.1}$$

где $d\chi$ — элемент телесного угла поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве и ω — поверхность этой сферы, $d(\vec{\mathbf{e}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} d$ — длина отрезка луча, идущего из точки P по направлению $\vec{\mathbf{e}}$ в пределах Ω. В дальнейшем не ограничивая общности будем рассматривать только те направления $\vec{\mathbf{e}}$ для которых внутренний интеграл в правой части равенства (1.1) существует и является конечным, как известно это почти

[1]© Кукушкин М.В., 2017

Кукушкин Максим Владимирович (kukushkinmv@rambler.ru), отдел дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

все направления. Под классом $\mathrm{Lip}\,\lambda,\ 0<\lambda\leqslant 1$ будем понимать множество функций удовлетворяющих условию Гельдера-Липшица в области $\bar{\Omega}$

$$\mathrm{Lip}\,\lambda := \left\{\rho(Q):\ |\rho(Q)-\rho(P)|\leqslant Mr^{\lambda},\ P,Q\in\bar{\Omega}\right\}.$$

Пусть

$$f\in W_p^l(\Omega),\ lp\leqslant n,\ 0<\alpha<l-\frac{n}{p}+\frac{n}{q},$$
$$p\leqslant q<\frac{np}{n-lp}, \tag{1.2}$$

тогда согласно [6], дробная производная $f^{(\alpha)}$ определенная в [5], существует и принадлежит $L_q(\Omega\times\Omega)$. В этом случае дробная производная $f^{(\alpha)}$ вычисляется по формуле

$$f^{(\alpha)}(P,Q)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{f(Q)-f(P)}{r^{\alpha}}. \tag{1.3}$$

Формула (1.3), остается справедливой при $(P,Q)\in(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$, при этом для почти всех P принадлежащих границе Γ области Ω, $f^{(\alpha)}$ существует, и рассматриваемая как функция одной лишь точки Q будет принадлежать $L_q(\Omega)$. Пусть P фиксированная точка границы $\partial\Omega$. Рассмотрим совокупность всех функций f из $W_p^l(\Omega)$ для которых функция $f^{(\alpha)}(P,Q)$ определенная в (1.3) суммируема как функция точки Q. На введенной совокупности будем рассматривать оператор дробного дифференцирования в смысле Киприянова

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)=f^{(\alpha)}(P,Q).$$

В случае когда в условии (1.2) имеет место строгое неравенство $q>p$, оператор дробного дифференцирования в смысле Киприянова согласно теореме 2 [6], имеет следующее действие

$$\mathfrak{D}^{\alpha}:\overset{0}{W_p^l}(\Omega)\to L_q(\Omega),$$

причем для достаточно малых $\delta>0$ имеет место неравенство

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}f\|_{L_q(\Omega)}\leqslant\frac{K}{\delta^{\nu}}\|f\|_{L_p(\Omega)}+\delta^{1-\nu}\|f\|_{L_p^l(\Omega)}, \tag{1.4}$$

где

$$\nu=\frac{n}{l}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha+\beta}{l}.$$

Постоянная K не зависит от δ, f и точки $P\in\partial\Omega$ по которой построен оператор $\mathfrak{D}^{\alpha}$; β - сколь угодно малое фиксированное положительное число. Следуя терминологии [7] левостороннюю, правостороннюю дробную производную в смысле Римана-Лиувилля на отрезке действительной оси $[a,b]$ порядка $(0<\alpha<1)$ будем обозначать соответственно как D_{a+}^{α}, D_{b-}^{α}; классы функций представимых дробным интегралом на отрезке соответственно обозначим через $I_{a+}^{\alpha}(L_p(a,b))$, $I_{b-}^{\alpha}(L_p(a,b))$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, обозначим $\mathrm{diam}\,\Omega=\mathfrak{d}$. Замыкание множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ обозначим через $H_0^1(\Omega)$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено иное, будем использовать обозначения [5–7]. Определим соответственно левосторонний, правосторонний дробный интеграл в направлении $\vec{\mathbf{e}}$ (всюду далее в направлении)

$$\left(\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha}\psi\right)(Q):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^r\frac{\psi(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(r-t)^{1-\alpha}}dt,\ \left(\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}\psi\right)(Q):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_r^{d(\vec{\mathbf{e}})}\frac{\psi(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-r)^{1-\alpha}}dt,$$
$$\psi\in L_p(\Omega),\ 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Классы функций представимых левосторонним, правосторонним дробным интегралом в направлении будем обозначать соответственно через $\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha}(L_p)$, $\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}(L_p)$. Определим семейство операторов ψ_{ε}^{-}, $\varepsilon>0$ следующим образом

$$\mathfrak{D}(\psi_{\varepsilon}^{-})\subset L_p(\Omega),\ (\psi_{\varepsilon}^{-}f)(Q)=\begin{cases}\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}\frac{f(Q)-f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-r)^{\alpha+1}}dt, & 0\leqslant r\leqslant d-\varepsilon;\\ \frac{f(Q)}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}-\frac{1}{(d-r)^{\alpha}}\right), & d-\varepsilon<r\leqslant d.\end{cases} \tag{1.5}$$

Следуя [7, с. 181] определим усеченную дробную производную в смысле Маршо

$$(\mathbf{D}_{d-,\varepsilon}^{\alpha}f)(Q)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}f(Q)(d-r)^{-\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(\psi_{\varepsilon}^{-}f)(Q). \tag{1.6}$$

Правостороннюю производную в смысле Маршо будем понимать как предел по норме пространства $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$ усеченных производных

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}f=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p)}}\mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon}f.$$

Аналогично одномерному случаю см. (13.1) [7, с. 181] определяется оператор ψ^{+}_{ε}, левосторонняя дробная производная в смысле Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{0+}$.

2. Вспомогательные утверждения

Имеет место следующая лемма об ограниченном действии операторов дробного интегрирования в направлении.

Лемма 2.1 Операторы дробного интегрирования в направлении ограниченно действуют в $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$.

Доказательство. Докажем, что при предположениях теоремы имеют место оценки

$$\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{L_p(\Omega)},\ \|\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{L_p(\Omega)},\ C=\mathfrak{d}^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1). \tag{2.1}$$

Докажем первую оценку (2.1), доказательство второй оценки (2.1) полностью аналогично. Используя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}u\|_{L_p(\Omega)}\Gamma(\alpha)=\left(\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{0}^{r}\frac{g(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(r-t)^{1-\alpha}}dt\right|^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{0}^{r}\frac{g(P+(r-\tau)\vec{\mathbf{e}})}{\tau^{1-\alpha}}d\tau\right|^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{0}^{\mathfrak{d}}\frac{|g(P+(r-\tau)\vec{\mathbf{e}})|}{\tau^{1-\alpha}}d\tau\right)^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{0}^{\mathfrak{d}}\tau^{\alpha-1}d\tau\left(\int\limits_{\Omega}|g(P+(r-\tau)\vec{\mathbf{e}})|^{p}dQ\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{\mathfrak{d}^{\alpha}}{\alpha}\,\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема об ограниченности оператора дробного интегрирования в направлении.

Теорема 2.1. Для того чтобы функция $f(Q)$ была представима в виде $\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi$, $\varphi\in L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$ достаточно, чтобы $f\in L_p(\Omega)$ и чтобы существовал предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi^{-}_{\varepsilon}u$ в смысле нормы $L_p(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $f\in L_p(\Omega)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi^{-}_{\varepsilon}f=\psi$. Рассмотрим функцию

$$(\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{f(Q)}{(d-r)^{\alpha}}+\alpha(\psi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\right\}.$$

Учитывая (1.5) подстановкой убеждаемся в том, что $\varphi^{-}_{\varepsilon}f\in L_p(\Omega)$. Из фундаментальности последовательности $\{\varphi^{-}_{\varepsilon}f\}$ следует, что существует предел $\varphi^{-}_{\varepsilon}f\to\varphi\in L_p(\Omega)$. В силу доказанного в лемме 1 свойства непрерывности оператора $\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}$ в $L_p(\Omega)$, достаточно показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f=f$. Имеем для $0\leqslant r\leqslant d-\varepsilon$

$$(\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=$$

$$=\int\limits_{r}^{d-\varepsilon}\frac{f(P+y\vec{\mathbf{e}})}{(y-r)^{1-\alpha}(d-y)^{\alpha}}dy+\alpha\int\limits_{r}^{d-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}dy\int\limits_{y+\varepsilon}^{d}\frac{f(P+y\vec{\mathbf{e}})-f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-y)^{\alpha+1}}dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{d-\varepsilon}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy.$$

Осуществив преобразования во втором слагаемом, имеем

$$(\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{r}^{d}f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-$$

$$-\alpha\int\limits_r^{d-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}dy\int\limits_{y+\varepsilon}^{d}\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-y)^{\alpha+1}}dt.$$

Сделаем замену переменной, изменим порядок интегрирования, затем сделаем обратную замену переменной вернувшись к прежним обозначениям

$$(\mathfrak{I}^\alpha_{d-}\varphi^-_\varepsilon f)(Q)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int\limits_r^d f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\alpha\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}(y-\varepsilon-r)^{\alpha-1}dy\int\limits_y^d\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-y+\varepsilon)^{\alpha+1}}dt=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int\limits_r^d f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\alpha\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}f(P+t\vec{\mathbf{e}})dt\int\limits_{r+\varepsilon}^t\frac{(y-\varepsilon-r)^{\alpha-1}}{(t-y+\varepsilon)^{\alpha+1}}dy=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\int\limits_r^d f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\alpha\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}f(P+t\vec{\mathbf{e}})dt\int\limits_{r}^{t-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}(t-y)^{-\alpha-1}dy. \tag{2.2}$$

Осуществим следующие замены во внутреннем интеграле второго слагаемого правой части последнего равенства: $y_1=-y$, $r_1=-r$, $t_1=-t$, воспользуемся формулой (13.18) [7, с. 184] затем сделав обратную замену получим

$$\int\limits_r^{t-\varepsilon}(y-r)^{\alpha-1}(t-y)^{-\alpha-1}dy=\int\limits_{t_1+\varepsilon}^{r_1}(r_1-y_1)^{\alpha-1}(y_1-t_1)^{-\alpha-1}dy_1=$$

$$=\frac{1}{\alpha\varepsilon^\alpha}\frac{(r_1-\varepsilon-t_1)^\alpha}{r_1-t_1}=\frac{1}{\alpha\varepsilon^\alpha}\frac{(t-\varepsilon-r)^\alpha}{t-r}.$$

Перепишем (2.2) с учетом полученного равенства, затем преобразуем и сделаем замену $t=\varepsilon\tau+r$

$$(\mathfrak{I}^\alpha_{d-}\varphi^-_\varepsilon f)(Q)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha}\left\{\int\limits_r^d f(P+y\vec{\mathbf{e}})(y-r)^{\alpha-1}dy-\int\limits_{r+\varepsilon}^d\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})(t-\varepsilon-r)^\alpha}{t-r}dt\right\}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha}\int\limits_r^d\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})\left[(t-r)^\alpha_+-(t-\varepsilon-r)^\alpha_+\right]}{t-r}dt=$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha}\int\limits_0^{\frac{d-r}{\varepsilon}}\frac{t^\alpha_+-(t-1)^\alpha_+}{t}f(P+[\varepsilon t+r]\vec{\mathbf{e}})dt,\ t_+=\begin{cases}t,\ t\geqslant 0;\\ 0,\ t<0.\end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\mathcal{K}$ определенную в [7, с. 105] и имеющую следующие свойства

$$\mathcal{K}(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{t^\alpha_+-(t-1)^\alpha_+}{t}\in L_p(\mathbb{R}^1),\ \int\limits_0^\infty\mathcal{K}(t)dt=1,\ \mathcal{K}(t)>0. \tag{2.4}$$

С учетом (2.3), (2.4), считая функцию f продолженной нулем за пределы области Ω, имеем

$$(\mathfrak{I}^\alpha_{d-}\varphi^-_\varepsilon f)(Q)-f(Q)=\int\limits_0^\infty\mathcal{K}(t)\left\{f(P+[\varepsilon t+r]\vec{\mathbf{e}})-f(P+r\vec{\mathbf{e}})\right\}dt. \tag{2.5}$$

Если же $d-\varepsilon<r\leqslant d$, то согласно (1.5) после замены переменной

$$(\mathfrak{I}^\alpha_{d-}\varphi^-_\varepsilon f)(Q)-f(Q)=$$

$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha}\int\limits_r^d\frac{f(P+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-r)^{1-\alpha}}dt-f(Q)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha}\int\limits_r^d\frac{f[P+(d-t+r]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}}dt-f(Q). \tag{2.6}$$

Разобьем поверхность $\omega=\omega_1\cup\omega_2$, где ω_1 — множество всех точек ω для которых $d>\varepsilon$, ω_2 — множество всех точек ω для которых $d\leqslant\varepsilon$. С учетом (2.5), (2.6)

$$\|(\mathfrak{I}^\alpha_{d-}\varphi^-_\varepsilon f)-f\|^p_{L_p(\Omega)}=\int\limits_{\omega_1}d\chi\int\limits_0^{d-\varepsilon}\left|\int\limits_0^\infty\mathcal{K}(t)[f(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}})-f(Q)]dt\right|^p r^{n-1}dr+$$

$$+\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} \left| \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt - f(Q) \right|^{p} r^{n-1}dr+$$

$$+\int\limits_{\omega_2} d\chi \int\limits_{0}^{d} \left| \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt - f(Q) \right|^{p} r^{n-1}dr = I_1+I_2+I_3. \qquad (2.7)$$

Оценим I_1 используя обобщенное неравенство Минковского

$$I_1^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \mathcal{K}(t) \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{0}^{d-\varepsilon} |f(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}})-f(Q)|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt,$$

введем обозначение

$$\mathcal{K}(t) \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{0}^{d-\varepsilon} |f(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}})-f(Q)|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt = h(\varepsilon,t),$$

имеем следующую оценку

$$|h(\varepsilon,t)| \leqslant 2\mathcal{K}(t)\|f\|_{L_p(\Omega)},\ \forall\varepsilon>0. \qquad (2.8)$$

В силу свойства непрерывности в среднем в пространстве $L_p(\Omega)$, для любого фиксированного $0<t<\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon,t)=0. \qquad (2.9)$$

С учетом (2.8), (2.9), в силу мажорантной теоремы Лебега, имеем

$$I_1\to 0,\ \ \varepsilon\to 0.$$

Используя неравенство Минковского оценим I_2

$$I_2^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} \left| \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt \right|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} |f(P+r\vec{\mathbf{e}})|^{p}\, r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} = I_{21}+I_{22}.$$

С помощью обобщенного неравенства Минковского оценим I_{21}

$$I_{21}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} \left| \int\limits_{r}^{d} \frac{f(P+[r-t+d]\vec{\mathbf{e}})}{(d-t)^{1-\alpha}} dt \right|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \left\{ \int\limits_{\omega_1} \left[\int\limits_{d-\varepsilon}^{d} (d-t)^{\alpha-1} \left(\int\limits_{d-\varepsilon}^{t} |f(Q+(d-t)\vec{\mathbf{e}})|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt \right]^{p} d\chi \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Сделав замену переменной в интеграле, повторно применим обобщенное неравенство Минковского

$$I_{21}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \left\{ \int\limits_{\omega_1} \left[\int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1} \left(\int\limits_{d-\varepsilon}^{d-t} |f(Q+t\vec{\mathbf{e}})|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt \right]^{p} d\chi \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1} \left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d-t} |f(Q+t\vec{\mathbf{e}})|^{p} r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Оценим последнее выражение, представив в следующем виде

$$I_{21}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1} \left\{ \int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d-t} |f(P+[r+t]\vec{\mathbf{e}})|^{p} (r+t)^{n-1} \left(\frac{r}{r+t}\right)^{n-1} dr \right\}^{\frac{1}{p}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\int\limits_{0}^{\varepsilon} t^{\alpha-1}\left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d+t-\varepsilon}^{d} |f(Q)|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}} dt \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} |f(Q)|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Мы показали, что

$$I_{21} \leqslant \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\left(\int\limits_{\omega_1} d\chi \int\limits_{d-\varepsilon}^{d} |f(Q)|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\|f\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}.$$

Поскольку из предположений относительно области Ω сделанных в водной части следует $\operatorname{mess}\Omega_\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$, то $I_{21}, I_{22} \to 0$. Следовательно $I_2 \to 0$. Применяя полностью аналогичные рассуждения убеждаемся в том, что $I_3 \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть $f = \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\psi$, $\psi \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}f = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p)}} \mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon}f = \psi.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$f(Q) - f(Q+\tau\vec{\mathbf{e}}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{d-r}\frac{\psi(Q+t\vec{\mathbf{e}})}{t^{1-\alpha}}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\tau}^{d-r}\frac{\psi(Q+t\vec{\mathbf{e}})}{(t-\tau)^{1-\alpha}}dt =$$

$$= \tau^{\alpha-1}\int\limits_{0}^{d-r}\psi(Q+t\vec{\mathbf{e}})k\left(\frac{t}{\tau}\right)dt,\ k(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\alpha-1},\ 0<t<1; \\ t^{\alpha-1}-(t-1)^{\alpha-1},\ t>1. \end{cases}$$

Следовательно при $0 \leqslant r \leqslant d-\varepsilon$

$$(\psi^{-}_{\varepsilon}f)(Q) = \int\limits_{\varepsilon}^{d-r}\frac{f(Q)-f(Q+\tau\vec{\mathbf{e}})}{\tau^{\alpha+1}}d\tau = \int\limits_{\varepsilon}^{d-r}\tau^{-2}d\tau\int\limits_{0}^{d-r}\psi(Q+t\vec{\mathbf{e}})k\left(\frac{t}{\tau}\right)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{d-r}\psi(Q+t\vec{\mathbf{e}})dt\int\limits_{\varepsilon}^{d-r}k\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau^{-2}d\tau = \int\limits_{0}^{d-r}\psi(Q+t\vec{\mathbf{e}})t^{-1}dt\int\limits_{t/(d-r)}^{t/\varepsilon}k(s)ds.$$

Используя формулу (6.12) [7, с.106], получим

$$(\psi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\cdot\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} = \int\limits_{0}^{d-r}\psi(Q+t\vec{\mathbf{e}})\left[\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{K}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{d-r}\mathcal{K}\left(\frac{t}{d-r}\right)\right]dt,$$

поскольку в соответствии с (2.4)

$$\mathcal{K}\left(\frac{t}{d-r}\right) = [\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)]^{-1}\left(\frac{t}{d-r}\right)^{\alpha-1},$$

то

$$(\psi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)\cdot\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} = \int\limits_{0}^{(d-r)/\varepsilon}\mathcal{K}(t)\psi(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}})dt - \frac{f(Q)}{\Gamma(1-\alpha)(d-r)^{\alpha}}.$$

Без ограничения общности считаем функцию $\psi(Q)$ продолженной нулем за границу области Ω. Тогда с учетом (1.6), (2.4)

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon}f)(Q) - \psi(Q) = \int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}(t)\left[\psi(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}}) - \psi(Q)\right]dt,\ 0 \leqslant r \leqslant d-\varepsilon.$$

Для значений $d-\varepsilon < r \leqslant d$ согласно (1.5), имеем

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon}f)(Q) - \psi(Q) = \frac{f(Q)}{\varepsilon^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} - \psi(Q).$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, получим оценку

$$\|(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-,\varepsilon}f)(Q) - \psi(Q)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}(t)\ \|\psi(Q+\varepsilon t\vec{\mathbf{e}}) - \psi(Q)\|_{L_p(\Omega)}dt+$$

$$+\frac{1}{\alpha\Gamma(1-\alpha)}\|f\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}+\|\psi\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}.$$

Все три слагаемых правой части последнего неравенства стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$, как это было показано для правой части (2.7). Теорема доказана.

3. Основные результаты

Следующая лемма может представлять интерес как самостоятельное утверждение.

Лемма 3.1. Имеет место вложение $H_0^1(\Omega)\subset\mathfrak{I}^\alpha_{d-}(L_2)$.

Доказательство. Вначале допустим, что $f\in C_0^\infty(\Omega)$. Рассмотрим

$$\|\psi^-_{\varepsilon_1}f-\psi^-_{\varepsilon_2}f\|_{L_2(\Omega)}=\left(\int\limits_\omega d\chi\int\limits_0^{d-\varepsilon_1}\left|\int\limits_{r+\varepsilon_1}^{r+\varepsilon_2}\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}+$$

$$+\left(\int\limits_\omega d\chi\int\limits_{d-\varepsilon_1}^{d-\varepsilon_2}\left|\int\limits_{r+\varepsilon_1}^{d}\frac{f(Q)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt-\int\limits_{r+\varepsilon_2}^{d}\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}+$$

$$+\left(\int\limits_\omega d\chi\int\limits_{d-\varepsilon_2}^{d}\left|\int\limits_{r+\varepsilon_1}^{d}\frac{f(Q)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt-\int\limits_{r+\varepsilon_2}^{d}\frac{f(Q)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Заметим, что поскольку $f\in C_0^\infty(\Omega)$ то для достаточно малого ε_1, $f(Q)=0,\,r>d-\varepsilon_1$. Из чего следует $I_2+I_3=0$. Осуществим замену переменной в I_1

$$I_1=\left(\int\limits_\omega d\chi\int\limits_0^{d}\left|\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}[t+r])}{t^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}.$$

Используем обобщенное неравенство Минковского

$$I_1\leqslant\int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}t^{-\alpha-1}\left(\int\limits_\omega d\chi\int\limits_0^d|f(Q)-f(Q+\vec{\mathbf{e}}t)|^2\,r^{n-1}dr\right)^{\frac12}dt\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}t^{-\alpha}dt\leqslant\frac{C}{1-\alpha}\left(\varepsilon_1^{1-\alpha}-\varepsilon_2^{1-\alpha}\right),\ C>0.$$

Следовательно в силу теоремы 2.1 имеем $C_0^\infty(\Omega)\subset\mathfrak{I}^\alpha_{d-}(L_2)$. Пусть теперь $f\in H_0^1(\Omega)$, тогда существует последовательность $\{f_n\}\subset C_0^\infty(\Omega)$, $f_n\xrightarrow{H_0^1}f$. В силу доказанного $f_n=\mathfrak{I}^\alpha_{d-}\varphi_n$, $\{\varphi_n\}\in L_2(\Omega)$, таким образом

$$\mathfrak{I}^\alpha_{d-}\varphi_n\xrightarrow{L_2}f. \tag{3.1}$$

Покажем, что существует $\varphi\in L_2(\Omega)$, $\varphi_n\xrightarrow{L_2}\varphi$. Из теоремы 2.2 следует $\mathbf{D}^\alpha_{b-}u_n=\varphi_n$, введем обозначение $f_{n+m}-f_n=c_{n,m}$, будем иметь

$$\|\varphi_{n+m}-\varphi_n\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_\omega d\chi\int\limits_0^d\left|\int\limits_r^d\frac{c_{n,m}(Q)-c_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_\omega d\chi\int\limits_0^d\left|\frac{c_{n,m}(Q)}{(d-r)^\alpha}\right|^2 r^{n-1}dr\right)^{\frac12}=I_1+I_2.$$

Оценим I_1 используя обобщенное неравенство Минковского, затем выразим подынтегральную функцию через производную по направлению $\vec{\mathbf{e}}$

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} I_1 = \left(\int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_0^d \left| \int\limits_0^{d-r} \frac{c_{n,m}(Q) - c_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}t)}{t^{\alpha+1}} dt \right|^2 r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\mathfrak{d}} t^{-\alpha-1} \left(\int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_0^d \left| c_{n,m}(Q) - c_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}t) \right|^2 r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\mathfrak{d}} t^{-\alpha-1} \left(\int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_0^d \left| \int\limits_0^t c'_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}\tau) d\tau \right|^2 r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского, теоремой Фубини

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} I_1 \leqslant \int\limits_0^{\mathfrak{d}} t^{-\alpha-1} \left(\int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_0^d r^{n-1} dr \int\limits_0^t \left| c'_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}\tau) \right|^2 d\tau \int\limits_0^t d\tau \right)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\mathfrak{d}} t^{-\alpha-1/2} \left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} \left| c'_{n,m}(Q+\vec{\mathbf{e}}\tau) \right|^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}} dt \leqslant \frac{\mathfrak{d}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|c'_{n,m}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Рассмотрим I_2, выразим подынтегральную функцию через производную по направлению $\vec{\mathbf{e}}$

$$\Gamma(1-\alpha) I_2 = \left(\int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_0^d \left| c_{n,m}(Q) \right|^2 (d-r)^{-2\alpha} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\omega} d\chi \int\limits_0^d (d-r)^{-2\alpha} \left| \int\limits_r^d c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t) dt \right|^2 r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Используем обобщенное неравенство Минковского, затем оценим

$$\Gamma(1-\alpha) I_2 \leqslant \left\{ \int\limits_{\omega} \left[\int\limits_0^d c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t) \left(\int\limits_0^t (d-r)^{-2\alpha} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 d\chi \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{\omega} \left[\int\limits_0^d c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t) t^{(n-1)/2} \left(\int\limits_0^t (d-r)^{-2\alpha} dr \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 d\chi \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского получим

$$\Gamma(1-\alpha) I_2 \leqslant \left\{ \int\limits_{\omega} \left[\int\limits_0^d |c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)|^2 t^{n-1} dt \int\limits_0^d d\tau \int\limits_0^{\tau} (d-r)^{-2\alpha} dr \right] d\chi \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{\omega} \left[\int\limits_0^d |c'_{n,m}(P+\vec{\mathbf{e}}t)|^2 t^{n-1} dt \int\limits_0^d (d-r)^{1-2\alpha} dr \right] d\chi \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\mathfrak{d}^{2(1-\alpha)}}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \|c'_{n,m}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из очевидного факта фундаментальности последовательности $\{c'_{n,m}\}$ в смысле нормы $L_2(\Omega)$ следует $I_1, I_2 \to 0$. Следовательно последовательность $\{\varphi_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ существует ее предел некоторая функция $\varphi \in L_2(\Omega)$. Поскольку в силу леммы 2.1 оператор дробного интегрирования ограниченно действует в пространстве $L_2(\Omega)$, то

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-} \varphi_n \xrightarrow{L_2} \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-} \varphi.$$

Из чего следует с учетом (3.1) $f=\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\varphi$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)dQ=\int\limits_{\Omega} v(Q)(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}u)(Q)dQ,\ \ u,v\in H^1_0(\Omega). \tag{3.2}$$

Доказательство. Полагая $u,v\in C_0^{\infty}(\Omega)$, осуществим следующие преобразования

$$\int\limits_0^d u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)r^{n-1}dr=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d r^{n-1}dr\int\limits_0^r \frac{(uv)(Q)-u(Q)v(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\frac{t^{n-1}}{r^{n-1}}dt+$$

$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d u(Q)v(Q)r^{n-1-\alpha}dx=I_1+I_2=I,$$

законность осуществленных преобразований вытекает из принадлежности u,v классу $C_0^{\infty}(\Omega)$. Применяя теорему Фубини, затем осуществив несложные преобразования, имеем

$$I_1=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d r^{n-1}dr\int\limits_0^r \frac{(uv)(Q)-u(Q)v(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\frac{t^{n-1}}{r^{n-1}}dt=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d \frac{(uv)(Q)-u(Q)v(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d v(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt\int\limits_t^d \frac{u(P+\vec{\mathbf{e}}t)-u(P+\vec{\mathbf{e}}r)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr+$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d \frac{(uv)(Q)-(uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr.$$

Рассмотрим теперь I_2. Заметим, что в силу леммы 3.1 $uv=\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\psi,\ \psi\in L_2(\Omega)$. Используя теорему Фубини, имеем

$$\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d(\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}\psi)(Q)r^{n-1-\alpha}dr=\frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d\psi(P+\vec{\mathbf{e}}t)dt\int\limits_0^t\frac{r^{n-1-\alpha}}{(t-r)^{1-\alpha}}dr.$$

Используем формулу дробного интегрирования степенной функции (2.44) [7, с.47]

$$\frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d\psi(P+\vec{\mathbf{e}}t)dt\int\limits_0^t\frac{r^{n-1-\alpha}}{(t-r)^{1-\alpha}}dr=\int\limits_0^d\psi(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt.$$

С учетом теоремы 2.2 имеем формулу

$$\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d(uv)(Q)r^{n-1-\alpha}dr=\int\limits_0^d(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt. \tag{3.3}$$

Из последнего равенства следует

$$I_2=\int\limits_0^d(\mathbf{D}^{\alpha}_{d-}uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)t^{n-1}dt=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d\frac{(uv)(P+\vec{\mathbf{e}}t)-(uv)(Q)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d u(Q)v(Q)r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr.$$

Сходимость интеграла во втором слагаемом последнего равенства имеет место поскольку $u,v\in C_0^{\infty}(\Omega)$. Принимая во внимание вышесказанное

$$I_1+I_2=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d v(P+\vec{\mathbf{e}}r)r^{n-1}dr\int\limits_r^d\frac{u(P+\vec{\mathbf{e}}r)-u(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d u(Q)v(Q)r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr=\int\limits_0^d v(Q)(\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}u)(Q)r^{n-1}dr.$$

Интегрируя по мере телесного угла имеем

$$\int\limits_{\Omega} u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)dQ=\int\limits_{\Omega} v(Q)(\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}u)(Q)dQ,\ u,v\in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{3.4}$$

Распространим последнее равенство. Положим $u,v\in H_0^1(\Omega)$, тогда существуют последовательности $\{u_k\},\{v_k\}\subset C_0^{\infty}(\Omega)$ сходящиеся в смысле нормы пространства $H_0^1(\Omega)$ соответственно к u и v. Используя неравенство Коши-Буняковского, неравенство (1.4) несложно показать

$$\int\limits_{\Omega} u_k(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v_k\right)(Q)dQ\to\int\limits_{\Omega} u(Q)\left(\mathfrak{D}^{\alpha}v\right)(Q)dQ,\ k\to\infty. \tag{3.5}$$

В ходе доказательства леммы 3.1 было показано, что $\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}u_k\xrightarrow{L_2}\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}u\in L_2(\Omega)$. Полностью аналогично (3.5) убеждаемся в том, что

$$\int\limits_{\Omega} v_k(Q)(\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}u_k)(Q)dQ\to\int\limits_{\Omega} v(Q)(\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}u)(Q)dQ,\ k\to\infty. \tag{3.6}$$

Осуществляя предельный переход в левой и правой части равенства (3.4) с учетом (3.5),(3.6), получим интегральное тождество (3.2). Лемма доказана.

Симметризуем стандартным способом оператор дробного дифференцирования в смысле Киприянова. Рассмотрим оператор

$$\mathrm{D}^{\alpha}:H_0^1(\Omega)\to L_2(\Omega),\ \mathrm{D}^{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}+\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}\right),$$

имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Оператор D^{α} положительно определенный.

Доказательство. Положим f вещественнозначной. Для $f\in C_0^{\infty}(\Omega)$, оценим следующую разность

$$f(Q)(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}f^2\right)(Q)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{f^2(Q)-f(Q)f(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+$$

$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}|f(Q)|^2r^{-\alpha}dr-\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{f^2(Q)-f^2(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt-$$

$$-\frac{(n-1)!}{2\Gamma(n-\alpha)}|f(Q)|^2r^{-\alpha}dr=\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{[f(Q)-f(P+\vec{\mathbf{e}}t)]^2}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+$$

$$+\frac{(n-1)!}{2\Gamma(n-\alpha)}|f(Q)|^2r^{-\alpha}dr\geqslant 0.$$

Следовательно

$$f(Q)(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)\geqslant\frac{1}{2}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}f^2\right)(Q).$$

Далее используя теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_0^d f(Q)(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)r^{n-1}dr\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^d(\mathfrak{D}^{\alpha}f^2)(Q)r^{n-1}dr=$$

$$=\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d dr\int\limits_0^r\frac{f^2(Q)-f^2(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}t^{n-1}dt+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d|f(Q)|^2r^{n-1-\alpha}dr=$$

$$=\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d t^{n-1}dt\int\limits_t^d\frac{f^2(Q)-f^2(P+\vec{\mathbf{e}}t)}{(r-t)^{\alpha+1}}dr+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d|f(Q)|^2r^{n-1-\alpha}dr=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^d(\mathbf{D}_{d-}^{\alpha}f^2)(Q)r^{n-1}dr+\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^d|f(Q)|^2r^{n-1-\alpha}dr+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d |f(Q)|^2 r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr = I_1,$$

В силу леммы 3.1 имеет место $f^2 \in \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}(L_2)$. Преобразуем первое слагаемое выражения I_1 по формуле (3.3). Суммируя после преобразования слагаемые в I_1, имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d |f(Q)|^2 r^{n-1}(d-r)^{-\alpha}dr \geqslant \frac{\mathfrak{d}^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^d |f(Q)|^2 r^{n-1}dr.$$

Интегрируя левую и правую части последнего неравенства по мере телесного конуса ω имеем

$$\langle f, \mathfrak{D}^{\alpha} f\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\|f\|^2_{L_2(\Omega)},\ f \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

$$\lambda^2 = 2\Gamma(1-\alpha)\mathfrak{d}^{\alpha}.$$

Предположим теперь, что $f \in H_0^1(\Omega)$, существует последовательность $\{f_k\} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что

$$f_k \xrightarrow{H_0^1} f.$$

Из леммы 3.2, существования пределов $(3.5), (3.6)$, следует

$$\langle f, \mathrm{D}^{\alpha} f\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\|f\|^2_{L_2(\Omega)},\ f \in H_0^1(\Omega).$$

Таким образом нами доказана полуограниченность снизу оператора D^{α}. Поскольку справедливо интегральное тождество (3.2), то оператор D^{α} симметричен. В силу того, что $\mathfrak{D}(\mathrm{D}^{\alpha}) \subset C_0^{\infty}(\Omega)$, оператор D^{α} плотно определен. Следовательно положительно определен. Теорема доказана.

Выводы

Таким образом, в данной работе доказан ряд утверждений имеющих аналоги в теории дробного исчисления одной переменной. В частности получены достаточные условия представимости дробным интегралом в направлении. Доказано интегральное тождество результатом которого является построение формально сопряженного оператора определенного на множестве функций представимых дробным интегралом в направлении. Доказана положительная определенность оператора полученного в результате суммирования оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова с формально сопряженным оператором.

Литература

[1] Нахушев А.М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101–109.

[2] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Москва. Мир, 1972. 740 с.

[3] Кукушкин М.В. О весовых пространствах дробно-дифференцируемых функций // Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. 2016. Т. 227. Вып. 42. № 6. С. 60–69.

[4] Кукушкин М.В. Оценка собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах // Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. 2017. Т. 255. Вып. 46. № 6. С. 29–35.

[5] Киприянов И.А. О пространствах дробно-дифференцируемых функций // Изв. АН. СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 865–882.

[6] Киприянов И.А. Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 131. № 2. С. 238–241.

[7] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

References

[1] Nakhushev A.M. *O polozhitel'nosti operatorov nepreryvnogo i diskretnogo differentsirovaniia i integrirovaniia, ves'ma vazhnykh v drobnom ischislenii i v teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the positiveness of operators of continuous and discrete differentiation and integration that are very important in fractional calculus and in the theory of equations of a mixed type]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1998, Vol. 34, no. 1, pp. 101–109 [in Russian].

[2] Kato T. *Teoriia vozmushchenii lineinykh operatorov* [Perturbation theory for linear operators]. M.: Mir, 1972, 740 p. [in Russian].

[3] Kukushkin M.V. *O vesovykh prostranstvakh drobno-differentsiruemykh funktsii* [On the weighted spaces of fractionally differentiable functions]. *Nauchnye vedomosti BelGU, Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics], 2016, Vol. 227, Issue 42, no. 6, pp. 60–69 [in Russian].

[4] Kukushkin M.V. *Otsenka sobstvennykh znachenii zadachi Shturma-Liuvillia dlia differentsial'nogo operatora vtorogo poriadka s drobnymi proizvodnymi v mladshikh chlenakh* [Evaluation of the eigenvalues of Sturm-Liouville problem for a differential operator of the second order with fractional derivative in lower terms].*Nauchnye vedomosti BelGU, Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics], 2017, Vol. 255, Issue 46, no. 6, pp. 29–35 [in Russian].

[5] Kipriyanov I.A. *O prostranstvakh drobno-differentsiruemykh funktsii* [On the spaces of fractionally differentiable functions]. *Izv. An. SSSR. Ser. Matem.* [Proceedings of the Academy of Sciences: Mathematics], 1960, Vol. 24, Issue 6, pp. 865–882 [in Russian].

[6] Kipriyanov I.A. *Operator drobnogo differentsirovaniia i stepeni ellipticheskikh operatorov* [Operator of fractional differentiation and degrees of elliptic operators]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1960, Vol. 131, no. 2, pp. 238–241 [in Russian].

[7] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. [in Russian].

M.V. Kukushkin[2]

ON SOME QUALITATIVE PROPERTIES OF THE OPERATOR OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION IN KIPRIYANOV SENSE

In this paper we investigated the qualitative properties of the operator of fractional differentiation in Kipriyanov sense. Based on the concept of multidimensional generalization of operator of fractional differentiation in Marchaud sense we have adapted earlier known techniques of proof theorems of one-dimensional theory of fractional calculus for the operator of fractional differentiation in Kipriyanov sense. Along with the previously known definition of the fractional derivative in the direction we used a new definition of multidimensional fractional integral in the direction of allowing you to expand the domain of definition of formally adjoint operator. A number of theorems that have analogs in one-dimensional theory of fractional calculus is proved. In particular the sufficient conditions of representability of a fractional integral in the direction are received. Integral equality the result of which is the construction of the formal adjoint operator defined on the set of functions representable by the fractional integral in direction is proved.

Key words: fractional differentiation, operator of Marchaud, operator of Riemann-Liouville, fractional derivative in the direction, fractional integral, energetic space, formally conjugated operator, accretive operator.

Статья поступила в редакцию 30/ *VI*/2017.
The article received 30/ *VI*/2017.

[2] *Kukushkin Maksim Vladimirovich* (kukushkinmv@rambler.ru), Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automatization, 89a, Shortanova street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

МЕХАНИКА

УДК 539.4

Л.В. Степанова, Р.М. Жаббаров[1]

МЕТОД КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВСЕСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В работе получено приближенное решение задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести методом квазилинеаризации. С помощью метода квазилинеаризации найдены четыре приближения решения задачи. Показано, что построенные приближения сходятся к предельному численному решению задачи. Интересной особенностью данной задачи является тот факт, что максимальное значение тангенциального напряжения достигается не на круговом контуре, а во внутренней точке пластины. Показано, что метод квазилинеаризации является эффективным методом решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: метод квазилинеаризации, всестороннее растяжение пластины, поле напряжений в окрестности вершины трещины, нелинейные задачи, степенной закон Бейли-Нортона, аналитическое решение.

Введение

Современные компьютерные технологии обеспечивают быстрое и точное численное решение сложных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем не менее, задача построения аналитических приближенных решений нелинейных задач становится еще более актуальной в настоящее время [1–10]. По всей видимости, разумное сочетание компьютерных технологий и приближенных решений или редукций нелинейных систем дифференциальных уравнений дает перспективный путь исследования физических, экономических, биологических проблем и других задач естествознания. В этом отношении перспективным представляется метод квазилинеаризации, в рамках которого решение строится посредством искусных комбинаций методов линейного приближения и использования возможностей современных вычислительных систем. Последовательные приближения строятся таким образом, чтобы добиться быстрой сходимости, а по возможности и монотонности процесса [3; 5]. Более того, зачастую интерес для приложений представляют именно приближенные аналитические решения, а не численные решения [3–5]. Например, в работах [7–10] разработан эффективный метод идентификации параметров сферической полости или сферического включения, основанный на применении инвариантных интегралов. Авторы вводят в рассмотрение инвариантные интегралы взаимодействия, которые можно аналитически вычислить, ибо имеется решение задачи об одноосном растяжении изотропного линейно упругого пространства со сферической полостью. Инвариантные интегралы сохраняют свое свойство независимости от пути интегрирования и для нелинейных сред, например, для сред со степенными определяющими уравнениями, и, следовательно развитый в [7; 8] метод может быть обобщен и на нелинейные среды при наличии приближенного, но аналитического решения задачи о растяжении пространства со сферической полостью или сферическим включением. Поэтому особенно важными являются методы построения аналитических решений нелинейных задач [6].

В блестящей книге [2] отмечается, что вопросы, связанные с существованием и единственностью решений нелинейных дифференциальных уравнений, весьма сложны и тонки, и в этой области есть много белых пятен. Для того чтобы иметь аналитический фундамент для построения решения нелинейного дифференциального уравнения (например, двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения) и разработать алгоритмы численного решения, необходимо прибегнуть к методике аппроксимаций. В этом отношении метод квазилинеаризации позволяет получить решение нелинейного дифферен-

[1]© Степанова Л.В, Жаббаров Р.М., 2017
Степанова Лариса Валентиновна (stepanovalv@samsu.ru), *Жаббаров Рамиль Муритович* (were-wolff@yandex.ru), кафедра математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

циального уравнения как предел последовательности решений линейных дифференциальных уравнений. Каждое из этих уравнений нетрудно решить численно.

Поэтому целью настоящей работы является приближенное решение задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести с помощью метода квазилинеаризации.

Физическая постановка задачи и метрод квазилинеаризации

Рассмтривается пластина с круговым отверстием (рис. 1), поведение материала которой характеризуется степенным законом Бейли-Нортона

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\sigma_e^{n-1}S_{ij},$$

где $\sigma_e^2 = \sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2$ – интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ – компоненты девиатора тензора напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера. Целью задачи является определение напряженно-деформированного состояния в пластине с центральным круговым отверстием в условиях ползучести.

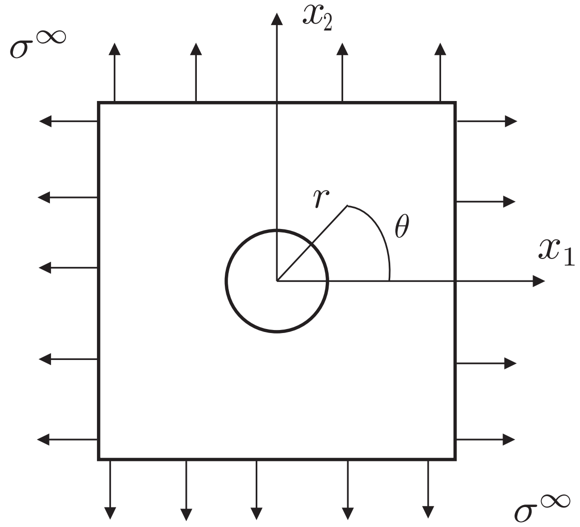

Рис. 1. Пластина с центральным круговым отверстием

Систему уравнение данной задачи формирует уравнение равновесия, условие совместности деформаций и определяющие уравнения степенного закона ползучести. Уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r}\left(\sigma_\theta - \sigma_r\right) \tag{1.1}$$

Условие совместности деформаций принимает форму:

$$\frac{d\dot{\varepsilon}_\theta}{dr} = \frac{1}{r}(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta) \tag{1.2}$$

Определяющие уравнения задачи для рассматриваемого нагружения принимает вид:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e}\left(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta\right) = F_r(\sigma_r, \sigma_\theta), \tag{1.3}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e}\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r\right) = F_\theta(\sigma_r, \sigma_\theta). \tag{1.4}$$

Граничные условия для данной задачи выглядят следующим образом:

$$\sigma_r(r = a) = 0, \quad \sigma_r(r = \infty) = \sigma^\infty,$$

где σ^∞ — приложенные напряжения.

Система из уравнений (1.1)–(1.4) представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных $\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \sigma_r, \sigma_\theta$. Найти аналитическое решение сформулированной системы не удается. Однако можно построить приближенное аналитическое решение задачи с помощью метода квазилинеаризации. Данный метод является итерационным и на каждой итерации вычисляется приближенное решение $(\sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)})$, где $k = 0, 1, 2...$ - номер итерации. В соответствии с методом, требуется провести линеаризацию определяющих соотношений (1.3), (1.4) путем их разложения в ряд Тейлора в окрестности $(k-1)$-ого приближения и определяющие уравнения заменяются на:

$$\dot{\varepsilon}_r = a_r + b_{rr}\sigma_r + b_{r\theta}\sigma_\theta, \tag{1.5}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = a_\theta + b_{\theta r}\sigma_r + b_{\theta\theta}\sigma_\theta, \tag{1.6}$$

где $b_{ij}(i, j = r, \theta)$ — коэффициенты разложения, $a_i(i = r, \theta)$ — свободные члены. При этом значения коэффициентов вычисляются по формулам, где компоненты тензора напряжений берутся из $(k-1)$-го прибижения. Коэффициенты a_i, b_{ij} вычисляются по текущему приближению:

$$a_r = F_r - \sigma_r \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$a_\theta = F_\theta - \sigma_r \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{rr} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r}, \qquad b_{r\theta} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{\theta r} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r}, \qquad b_{\theta\theta} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta}.$$

Уравнения (1.5)–(1.6) могут быть представлены в форме (1.7) – (1.8):

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{b_{\varphi\varphi}}(\dot{\varepsilon}_\varphi - b_{\varphi r}\sigma_r - a_\varphi), \tag{1.7}$$

$$\dot{\varepsilon}_r = a_r - \frac{b_{r\varphi}}{b_{\varphi\varphi}}a_\varphi + \frac{b_{r\varphi}}{b_{\varphi\varphi}}\dot{\varepsilon}_\varphi + \left(b_{rr} - \frac{b_{r\varphi}b_{\varphi r}}{b_{\varphi\varphi}}\right)\sigma_r. \tag{1.8}$$

В качестве примера было приведено было построено решение для степенного закона $f(\sigma_e) = B\sigma^n$. Предварительно был осуществлен переход к безразмерным величинам. Скомбинировав уравнения (1.1), (1.2), с (1.7) и (1.8), получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для получения k-го приближения:

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}\sigma_r \\ \dot{\varepsilon}_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{r} - \dfrac{b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\dfrac{1}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{b_{\theta\theta}} \\ \dfrac{1}{r}\left(b_{rr} - \dfrac{b_{r\theta}b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\right) & -\dfrac{1}{r} + \dfrac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}\dfrac{1}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_r \\ \\ \dot{\varepsilon}_\theta\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} -\dfrac{a_\theta}{b_{\theta\theta}}\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{1}{r}\left(a_r - \dfrac{b_{r\theta}a_\theta}{b_{\theta\theta}}\right)\end{pmatrix}.$$

Результаты решения

С помощью метода квазилинеаризации получено решение задачи о всестороннем растяжении неупругой пластины с центральным круговым отверстием. Целью решения являлось получение распределений компонент тензора напряжений и компонент тензора скоростей деформаций ползучести. Результаты решения для $n = 5$ представлены на графиках (рис. 2–5). На рис. 2 и 3 проиллюстрированы графики компонент тензора напряжений σ_r и σ_θ, полученных с помощью метода квазилинеаризации для $k = 1..4$, где k – номер итерации, а также нулевые приближения. На рис. 4 и 5 изображены сравнения 4-го приближения компонент тензора напряжений с решениемиями, полоченными с помощью метода Рунге-Кутта-Фельберга и пакета Simulia ABAQUS. Можно отметить интересную особенность распределения компоненты σ_θ. Максимальное значение компоненты достигается не на контуре кругового отверстия, а на некотором расстоянии от него.

Результаты решения в пакете Simulia ABAQUS Student Edition

В многоцелевом программном комплексе Simulia ABAQUS с целью проверки достоверности полученного приближенного решения было получено численное решение задачи методом конечного элемента. На рис. 6–9 показаны результаты конечно-элементного решения.

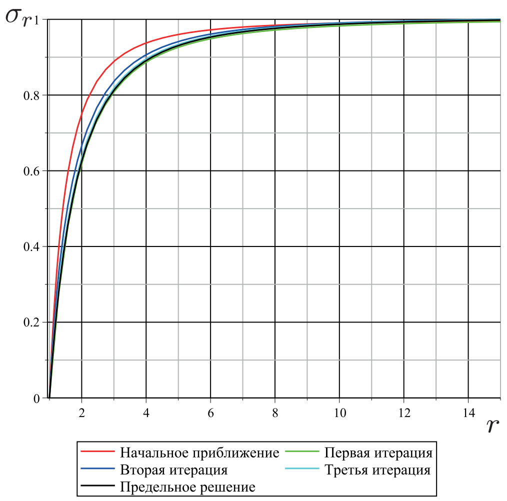

Рис. 2. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r

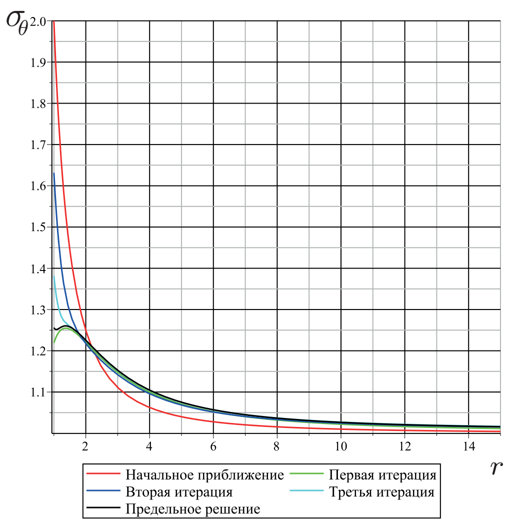

Рис. 3. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ

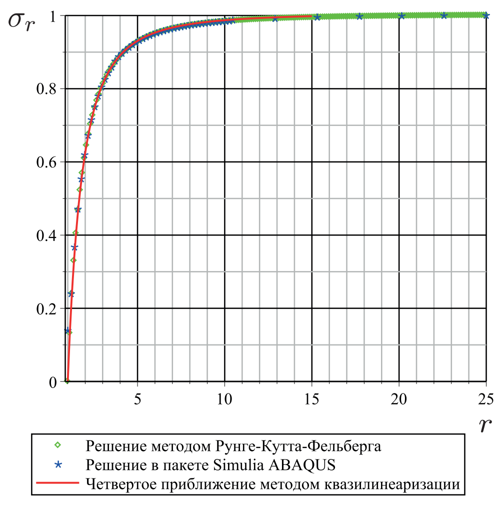

Рис. 4. Численное решение. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r

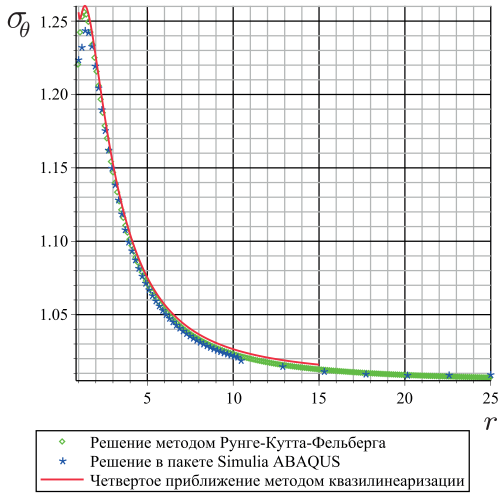

Рис. 5. Численное решение. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ

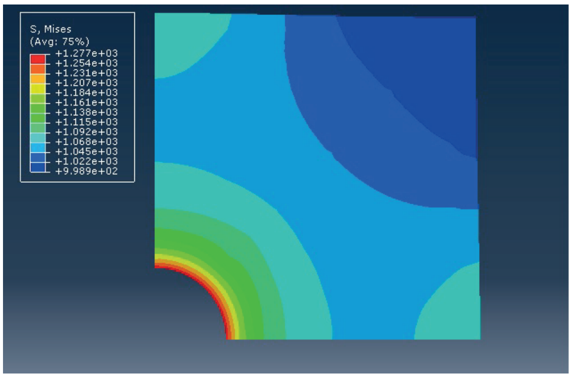

Рис. 6. Распределение интенсивности напряжений

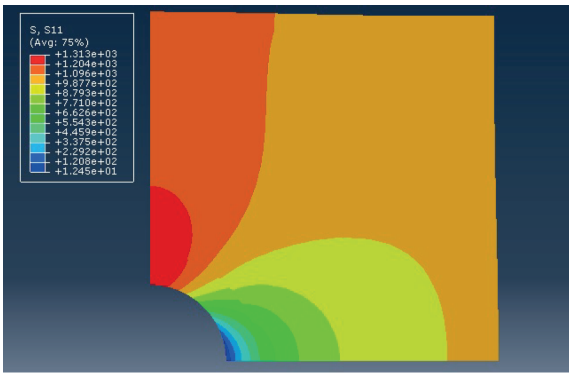

Рис. 7. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{11}

Выводы

•На примере задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием рассмотрена процедура метода квазилинеаризации. Данная задача является удобным примером, ибо для нее можно построить численное решение методом Рунге-Кутта-Фельберга.

•Показано, что четыре итерации сходятся к предельному решению задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести.

•Показано, что метод квазилинеаризации является эффективным методом решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

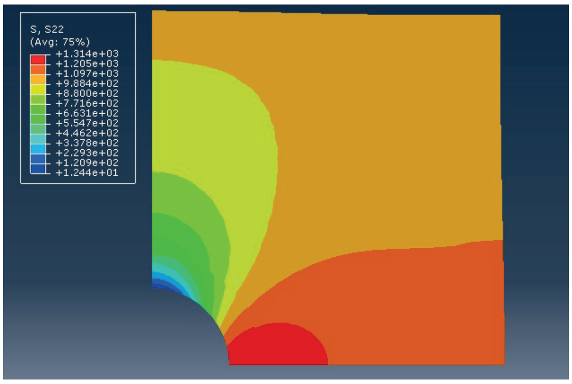

Рис. 8. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{22}

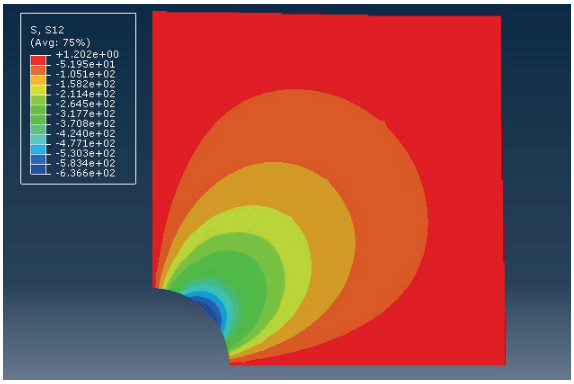

Рис. 9. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{12}

Литература

[1] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2010. 368 с.

[2] Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. 2013. 276 с.

[3] Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 184 с.

[4] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Самарский университет, 2006. 242 с.

[5] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.

[6] Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power – low medium // Comptes Rendus – Mechanique. 2008. № 1–2. P. 232–237.

[7] Shifrin E.I. Symmetry properties of the recipricity gap functional in the linear elasticity // International Journal of Fracture. 2009. T. 159. № 2. C. 209–218.

[8] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // Inverse problems. 2010. T. 26. № 5. C. 055001.

[9] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // International Journal of Solids and Structures. 2013. T. 50. № 22–23. C. 3707–3716.

[10] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Reconstruction of an ellipsoidal defect an anisotropic elastic solid, using results of one static test // Inverse Problems in Science and Egineering. 2013. T. 21. № 5. C. 781–800.

References

[1] Kudryashov N.A. *Metody nelineinoi matematicheskoi fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny: Izdatel'skii dom "Intellekt", 2010, 368 p. [in Russian].

[2] Andrianov I., Avreytsevich Ya. *Metody asimptoticheskogo analiza i sinteza v nelineinoi dinamike i mekhanike deformiruemogo tverdogo tela*, 2013, 276 p. [in Russian].

[3] Bellman R.E., Kalaba R.E. *Kvazilinearizatsiia i nelineinye kraevye zadachi* [Quazilinearization and nonlinear boundary-value problems]. M.: Mir, 1968, 184 p. [in Russian].

[4] Stepanova L.V. *Matematicheskie metody mekhaniki razrusheniia* [Mathematical methods of fracture mechanics]. Samara: Samarskii universitet, 2006, 242 p. [in Russian].

[5] Boyle J.T., Spence J. *Analiz napriazhenii v konstruktsiiakh pri polzuchesti* [Stress analysis for creep]. M.: Mir, 1986, 360 p. [in Russian].

[6] Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power – low medium. *Comptes Rendus – Mechanique*, 2008, №1–2, pp. 232–237 [in English].

[7] Shifrin E.I. Symmetry properties of the recipricity gap functional in the linear elasticity //*International Journal of Fracture*, 2009, Vol. 159, no. 2, pp. 209–218 [in English].

[8] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional //*Inverse problems*, 2010, Vol. 26, no. 5, p. 055001 [in English].

[9] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements //*International Journal of Solids and Structures*, 2013, Vol. 50, no. 22-23, pp. 3707–3716 [in Russian].

[10] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Reconstruction of an ellipsoidal defect an anisotropic elastic solid, using results of one static test //*Inverse Problems in Science and Egineering*, 2013, Vol. 21, no. 5, pp. 781–800 [in English].

L.V. Stepanova, R.M. Zhabbarov[2]

QUAZILINEARIZATION METHOD FOR THE SOLUTION TO THE PROBLEM OF PLATE WITH THE CENTRAL CIRCULAR HOLE UNDER CREEP REGIME

The approximation solution of the problem for an infinite plate with the circular hole under creep regime is obtained by the quazilinearization method. Four approximations of the solution of the nonlinear problems are found. It is shown that with increasing of the number of approximations the solution converges to the limit numerical solution. It is worth to note that the tangential stress reaches its maximum value not at the circular hole but at the internal point of the plate. It is also shown that quazilinearization method is an effective method for nonlinear problems.

Key words: quazilinearization method, plate comprehensively stretching, stress field in the neighborhood of crack tips, nonlinear problems, Beyley-Norton's power law, analytical solution.

Статья поступила в редакцию 29/*VI*/2017.
The article received 29/*VI*/2017.

[2] *Stepanova Larisa Valentinovna* (stepanovalv@samsu.ru), *Zhabbarov Ramil Muritovich* (were-wolff@yandex.ru), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 621.373.12, 517.938

В.В. Зайцев, А.Н. Шилин[1]

ОТОБРАЖЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДЮФФИНГА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

В работе описан переход к дискретному времени в уравнении движения генератора ван дер Поля – Дюффинга. Цель перехода — сформировать отображения генератора, как объекты теории нелинейных колебаний (нелинейной динамики) в дискретном времени. Метод дискретизации основан на использовании отсчетов импульсной характеристики колебательного контура в качестве дискретизирующей последовательности для сигнала в генераторном кольце "активная нелинейность — резонатор — обратная связь". Выбор последовательной схемы возбуждения контура позволяет получить итерируемые отображения в виде рекуррентных формул. Представлены две эквивалентные формы дискретных отображений генератора ван дер Поля – Дюффинга — комплексная и действительная. В приближении медленно меняющихся амплитуд подтверждено, что сформированные дискретные отображения обладают динамическими свойствами аналогового прототипа. Вместе с тем, в рамках численного эксперимента показано, что при высоких уровнях возбуждения на динамику дискретных автогенераторов существенно влияет эффект подмены частот гармоник генерируемого дискретного сигнала. В частности, в дискретном генераторе ван дер Поля – Дюффинга наблюдаются режимы генерации хаотических автоколебаний.

Ключевые слова: автоколебательная система, импульсная характеристика, дискретное отображение, метод медленно меняющихся амплитуд, хаотические автоколебания.

Введение

В теории нелинейных колебаний генератор (осциллятор) ван дер Поля — автоколебательная система на основе высокодобротного резонатора с кубической нелинейностью в цепи положительной обратной связи — служит универсальной моделью систем различной физической природы [1; 2]. Одно из обобщений модели — генератор ван дер Поля – Дюффинга, позволяет учесть дополнительные свойства реальных автоколебаний (в частности, неизохронность) [3; 4]. Ввиду того, что современная теория рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ) представляет интерес временная дискретизация в математической модели, т.е. переход к дискретному отображению осциллятора.

Переход к дискретному времени в математических моделях линейных НВ-систем широко применяется в практике проектирования цифровых фильтров [5]. Помимо решения прикладных задач, такой подход позволяет ввести в рассмотрение колебательные ДВ-системы как объекты исследования теории колебаний. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики в дискретном времени. Это утверждение справедливо для линейных систем [5] и тем более относится к системам, содержащим нелинейности. Например, в [6] представлено так называемое универсальное отображение, получаемое введением дельта-импульсов в гамильтониан системы. Более традиционные способы основаны на конечно-разностных аппроксимациях временных производных в дифференциальных моделях динамических систем. В статье [7] (см. также [8]) дискретизация проведена методом Эйлера. Отмечено, что полученные таким образом отображения наследуют основные черты аналоговых прототипов, но и приобретают новые свойства.

[1]© Зайцев В.В., Шилин А.Н., 2017

Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@samsu.ru), кафедра радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.

Шилин Александр Николаевич (shilax@mail.ru), кафедра радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.

В настоящей работе дискретизацию времени в модели генератора ван дер Поля – Дюффинга предлагается провести с использованием дискретизирующей последовательности в виде отсчетов импульсной характеристики резонатора, входящего в состав генератора. При этом сохраняется линейный отклик системы на внешнее воздействие. Показано, что сформированные при таком подходе дискретные отображения в квазигармоническом приближении воспроизводят характеристики аналоговых генераторов.

1. Структурный синтез АКС

Аналоговый прототип — генератор ван дер Поля – Дюффинга в непрерывном времени описывается уравнением движения вида

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+{\omega_0}^2y=\omega_0\gamma\Big(1-y^2\Big)\frac{dy}{dt}+\mu\omega_0^2y^3, \tag{1.1}$$

где ω_0 и Q — собственная частота и добротность резонансного контура АКС, γ и μ — параметры активной и реактивной нелинейностей. Формально при выполнении условий $Q\gg 1$, $\gamma\ll 1$ АКС (1.1) относится к классу томсоновских.

Используемый способ проектирования ДВ-генератора в определенном смысле можно назвать структурным, поскольку он опирается на представление о структурной схеме томсоновской АКС (1.1), как кольцевом соединении блоков "резонатор — нелинейный усилитель — обратная связь".

Динамическую (инерционную) часть АКС (1.1) представляет резонансный контур с дифференциальным уравнением движения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+{\omega_0}^2y=\omega_0^2x(t), \tag{1.2}$$

где $x(t)$ — сигнал возбуждения. Контур (1.2) имеет импульсную характеристику

$$h(t)=\omega_0\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\sin(\omega_0t).$$

Ее дискретные временные отсчеты, взятые с интервалом Δ, определяют импульсную характеристику ДВ-резонатора:

$$h[n]=\Delta h(t_n)=2\pi\Omega_0\alpha^n\sin(2\pi\Omega_0n). \tag{1.3}$$

Здесь $\Omega_0=\omega_0\Delta/2\pi$ — собственная частота контура, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta$; $\alpha=\exp(-\pi\Omega_0/Q)$ — параметр диссипации.

Так как частотная характеристика ДВ-системы связана с ее импульсной характеристикой дискретным во времени преобразованием Фурье [5]:

$$H(j\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]\exp(-j2\pi\Omega n),$$

то для (1.3), проведя вычисления, получим

$$\begin{aligned}H(j\Omega)=H_+(j\Omega)\quad&+H_-(j\Omega)=\\=-\tfrac{j\pi\Omega_0}{1-\alpha\exp(j2\pi\Omega_0)\exp(-j2\pi\Omega)}\quad&+\tfrac{j\pi\Omega_0}{1-\alpha\exp(-j2\pi\Omega_0)\exp(-j2\pi\Omega)}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Частотная характеристика (1.4) соответствует системе разностных уравнений движения вида

$$\begin{aligned}y[n]&=y_+[n]+y_-[n],\\y_+[n]&=\alpha Z_0y_+[n-1]-j\pi\Omega_0x[n],\\y_-[n]&=\alpha Z_0^*y_-[n-1]+j\pi\Omega_0x[n],\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $Z_0=\exp(j2\pi\Omega_0)$ — множитель поворота. Отметим, что при действительном сигнале $x[n]$ осцилляции $y_-[n]$ комплексно сопряжены по отношению к $y_+[n]$: $y_-[n]=y_+^*[n]$.

В автоколебательной системе с уравнением движения (1.1) роль сигнала возбуждения $x(t)$ играет сигнал на выходе нелинейного усилителя, вход которого через обратную связь взаимодействует с выходом контура $y(t)$:

$$x(t)=\frac{\gamma}{2\pi\Omega_0}\Big(1-y^2(t)\Big)\dot{y}(t)+\mu y^3(t). \tag{1.6}$$

В этой записи введено обозначение для производной по безразмерному времени: $\dot{y}=\Delta dy/dt$.

С учетом связи (1.6) система разностных уравнений движения (1.5) для ДВ-генератора ван дер Поля – Дюффинга принимает вид

$$\begin{aligned}y[n]&=y_+[n]+y_-[n],\\y_+[n]&=\alpha Z_0y_+[n-1]-j\tfrac{\gamma}{2}\Big(1-y^2[n]\Big)\dot{y}[n]-j\mu\pi\Omega_0y^3[n],\\y_-[n]&=\alpha Z_0^*y_-[n-1]+j\tfrac{\gamma}{2}\Big(1-y^2[n]\Big)\dot{y}[n]+j\mu\pi\Omega_0y^3[n].\end{aligned}$$

Сумма второго и третьего уравнений этой системы с учетом первого дает важное соотношение

$$y[n] = \alpha Z_0 y_+[n-1] + \alpha Z_0^* y_+^*[n-1],$$

указывающее на зависимость значения осциллирующей переменной $y[n]$ в текущий момент дискретного времени n от значения переменной $y_+[n-1]$, взятого в предыдущий момент $n-1$. Такая временная зависимость позволяет построить ДВ-осциллятор в форме итерируемого дискретного отображения вида

$$\begin{aligned} y[n] &= 2\alpha \operatorname{Re}\Big(Z_0 y_+[n-1]\Big), \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\tfrac{\gamma}{2}\Big(1-y^2[n]\Big)\dot{y}[n] - j\mu\pi\Omega_0 y^3[n]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В отображении (1.7) для связи отсчетов $\dot{y}[n]$ и $y[n]$ предлагается использовать выражение вида

$$sinc(2\pi\Omega_0)\dot{y}[n] = \cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]. \tag{1.8}$$

Оно является точным для дискретных гармонических колебаний с частотой Ω_0. Как приближенное, предлагается распространить его и на квазигармонические автоколебания. С учетом (1.8) отображение (1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} y[n] =\ & 2\alpha \operatorname{Re}\Big(Z_0 y_+[n-1]\Big), \\ y_+[n] =\ & \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\gamma\tfrac{\pi\Omega_0}{\sin(2\pi\Omega_0)}\Big(1-y^2[n]\Big)\times \\ & \times\Big(\cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]\Big) - j\mu\pi\Omega_0 y^3[n]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Сформированное таким образом нелинейное разностное уравнение (1.9) представляет собой комплексную форму дискретного отображения (уравнения движения) генератора ван дер Поля – Дюффинга. Если ввести в рассмотрение эквивалентные параметры $\gamma_e = \gamma\Big(\pi\Omega_0/\sin(2\pi\Omega_0)\Big)$ и $\mu_e = \mu\pi\Omega_0$, то запись отображения (1.9) можно сделать более компактной:

$$\begin{aligned} y[n] &= 2\alpha \operatorname{Re}\Big(Z_0 y_+[n-1]\Big), \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\gamma_e\Big(1-y^2[n]\Big)\Big(\cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]\Big) - j\mu_e y^3[n]. \end{aligned}$$

Для перехода к действительной форме отображения осциллятора ван дер Поля – Дюффинга дроби в формуле частотной характеристики (1.4) приведем к общему знаменателю. В результате получим выражение

$$H(j\Omega) = \frac{2\pi\Omega_0\alpha\sin(2\pi\Omega_0)\exp(-j2\pi\Omega)}{1 - 2\alpha\cos(2\pi\Omega_0)\exp(-j2\pi\Omega) + \alpha^2\exp(-j4\pi\Omega)}. \tag{1.10}$$

Частотная характеристика (1.10) описывает линейный ДВ-резонатор с разностным уравнением движения

$$y[n] - 2\alpha\cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = 2\pi\Omega_0\alpha\sin(2\pi\Omega_0)x[n-1]. \tag{1.11}$$

Теперь, охватив резонатор (1.11) цепью обратной связи с уравнением (1.6), получим дискретное отображение генератора ван дер Поля – Дюффинга в виде

$$y[n] - 2\alpha\cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = 2\pi\Omega_0\alpha F\Big(y[n-1], y[n-2]\Big) \tag{1.12}$$

с нелинейной в правой частью

$$F\Big(y[n-1], y[n-2]\Big) = \gamma\Big(1-y^2[n-1]\Big)\Big(\cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] - y[n-2]\Big) + \mu\sin(2\pi\Omega_0)y^3[n-1].$$

То обстоятельство, что при переходе от (1.9) к (1.12) не было сделано никаких приближений, указывает на эквивалентность этих форм дискретных отображений генератора ван дер Поля – Дюффинга.

При рассмотрении дискретного отображения (1.12) в качестве самостоятельного объекта нелинейной динамики его запись можно упростить, введя эквивалентные параметры $\gamma_e = 2\pi\Omega_0\alpha\gamma$ и $\mu_e = 2\pi\Omega_0\alpha\sin(2\pi\Omega_0)\mu$. В таком случае отображение (1.12) принимает более компактный вид:

$$\begin{aligned} & y[n] - 2\alpha\cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = \\ & = \gamma_e\Big(1-y^2[n-1]\Big)\Big(\cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] - y[n-2]\Big) + \mu_e y^3[n-1]. \end{aligned} \tag{1.13}$$

2. Метод ММА для ДВ-генератора ван дер Поля

Отображение (1.9) воспроизводит в дискретном времени основные характеристики аналоговой томсоновской АКС (1.1). Это нетрудно показать цифровым анализом генерируемых по алгоритму (1.9) временных рядов, но мы воспользуемся здесь широко распространенным в теории нелинейных колебаний методом медленно меняющихся амплитуд (методом ММА) [9]. Рассмотрение проведем для осциллятора ван дер Поля, положив в (1.1) и (1.9) $\mu = 0$.

Следуя им, генерируемый отображением (1.9) временной ряд (ДВ-автоколебания) представим в виде

$$y_+[n] = \frac{1}{2}A[n]Z_0^n,$$

где $A[n] = a[n]\exp\Big(j\varphi[n]\Big)$ — комплексная амплитуда автоколебаний, $a[n]$ и $\varphi[n]$ — действительные амплитуда и фаза. Тогда первое из уравнений (1.9) можно записать как

$$y[n] = \frac{\alpha}{2}A[n-1]Z_0^n + \frac{\alpha}{2}A^*[n-1]Z_0^{-n}, \tag{2.1}$$

Нелинейную функцию

$$F\Big(y[n], y[n-1]\Big) = \Big(1 - y^2[n]\Big)\Big(\cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]\Big) \tag{2.2}$$

в правой части отображения (1.9) в рамках метода ММА заменим первой гармоникой ряда Фурье:

$$F\Big(y[n], y[n-1]\Big) \approx \frac{1}{2}F_1\Big(A[n]\Big)Z_0^n + \frac{1}{2}F_1^*\Big(A[n]\Big)Z_0^{-n}$$

с комплексной амплитудой

$$F_1\Big(A[n]\Big) = j\sin(2\pi\Omega_0)\left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right)A[n-1].$$

Отметим также, что в рамках используемой здесь методики ММА в нелинейности (2.2) считаем $A[n-2] = A[n-1]$ и $\alpha = 1$.

Используя в (1.9) представленные разложения и проведя очевидные математические преобразования, получим

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \pi\Omega_0\gamma\left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right)A[n-1] + \pi\Omega_0\gamma\left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right)A^*[n-1]Z_0^{-2n}.$$

Последнее слагаемое здесь описывает высокочастотное воздействие (с периодом $T_0 = 1/\pi\Omega_0$) на медленный процесс изменения (с характерным временем релаксации $T_r = Q/\pi\Omega_0$) комплексной амплитуды $A[n]$. Пренебрегая этим воздействием, приходим к укороченному уравнению для комплексной амплитуды ДВ-автоколебаний

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \pi\Omega_0\gamma\left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right)A[n-1]. \tag{2.3}$$

Полученное разностное уравнение (2.3) сопоставим с укороченным уравнением для комплексной амплитуды автоколебаний в исходной аналоговой модели АКС (1.1). Нетрудно показать, что для автоколебаний вида

$$y(t) = \frac{1}{2}A(t)\exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{2}A^*(t)\exp(-j\omega_0 t)$$

уравнение движения (1.1) методом ММА сводится к дифференциальному укороченному уравнению

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}A(t) + \frac{\omega_0}{2}\gamma\left(1 - \frac{1}{4}a^2(t)\right)A(t).$$

При переходе к безразмерному времени $\tau = t\Delta^{-1}$ это уравнение принимает вид

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = -\pi\frac{\Omega_0}{Q}A(\tau) + \pi\Omega_0\gamma\left(1 - \frac{1}{4}a^2(\tau)\right)A(\tau). \tag{2.4}$$

Учитывая разложение параметра диссипации высокодобротного контура в ряд по обратным степеням добротности

$$\alpha = \exp\left(-\pi\frac{\Omega_0}{Q}\right) \approx 1 - \pi\frac{\Omega_0}{Q},$$

приходим к выводу о том, что разностное укороченное уравнение ДВ-генератора ван дер Поля (2.3) реализует алгоритм Эйлера для укороченного уравнения (2.4) аналоговой АКС. Так подтверждается сделанное нами ранее утверждение о том, что отображения (1.9) и (1.12) воспроизводят в дискретном времени основные динамические характеристики томсоновской АКС (1.1).

Для полного ДВ-генератора ван дер Поля – Дюффинга аналогичным образом удается получить укороченное уравнение вида

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \pi\Omega_0\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{4}a^2[n-1]\right) - j\frac{3}{4}\mu a^2[n-1]\right]A[n-1]. \tag{2.5}$$

3. Некоторые результаты анализа динамики отображений

Приведем ряд результатов, полученных для дискретного отображения генератора ван дер Поля – Дюффинга.

На рис. 1 точками приведены отсчеты ДВ-автоколебаний $y[n]$, генерируемых отображением (1.9) со значениями $\Omega_0 = 0.2$, $Q = 13$ и $\mu = -0.057$. Обратная связь с параметром $\gamma = 0.2$ включается на интервале времени $11 \leqslant n \leqslant 200$. Пунктирной линией на рисунке показан график временной зависимости амплитуды автоколебаний, рассчитанный по укороченному уравнению (2.5). Как видно из графиков, зависимость $a[n] = |A[n]|$ с хорошим приближением воспроизводит амплитуду автоколебаний.

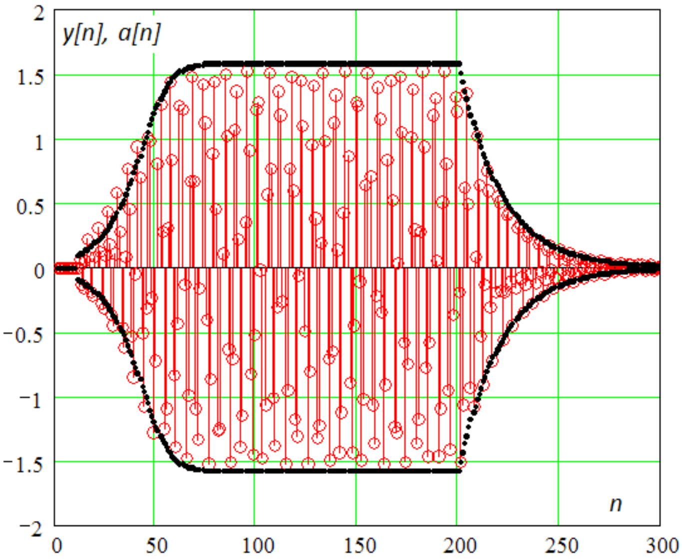

Рис. 1. Дискретные отсчеты мгновенных значений автоколебаний и амплитуды их первой гармоники

На рис. 2 показан амплитудный спектр сигнала $y[n]$, рассчитанный по отрезку реализации установившихся автоколебаний в 512 отсчетов. Отображение имеет те же параметры, что и для предыдущего рисунка, за исключением того, что $\gamma = 0.2$ для всех $n \geqslant 11$. Символами gk на рисунке обозначены спектральные линии k-ых гармоник. Таким образом, спектр демонстрирует неустранимый эффект подмены частот в нелинейных ДВ-системах. В работе [10] показано, что при определенных условиях эффект приводит к существенным особенностям в динамике ДВ–АКС.

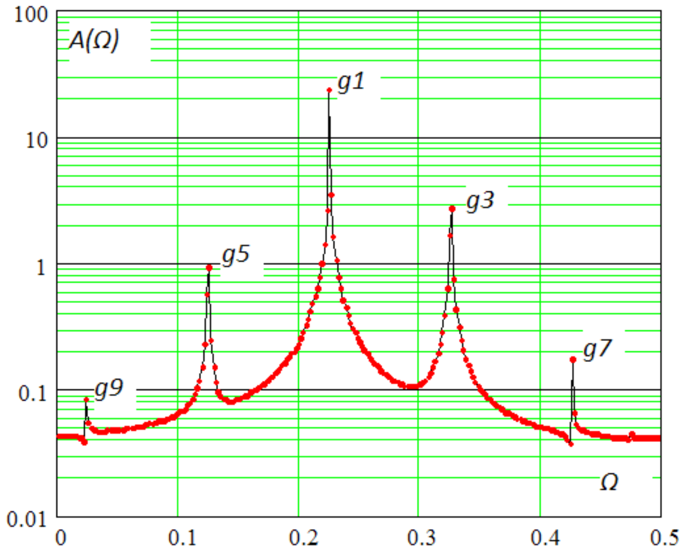

Рис. 2. Амплитудный спектр автоколебаний

При высоких уровнях возбуждения отображение генератора ван дер Поля – Дюффинга (1.13), в отличие от аналогового прототипа, демонстрирует режимы генерации динамического хаоса. Хаотизация автоколебаний возникает из-за подмены частот гармоник и неизохронности автоколебательной системы. На рис. 3 и рис. 4 показаны отрезок реализации и фазовый портрет (в координатах $\big(y[n], \nu[n] = \dot{y}[n]\big)$) хаотических автоколебаний, генерируемых отображением (1.13) с параметрами $\Omega_0 = 0.205$, $\gamma_e = 0.25$, $Q = 15$ и $\mu_e = -0.09$. Фазовый портрет имеет ярко выраженную фрактальную структуру со значением корреляционного показателя 1.29 ± 0.04, что является одним из эвристических признаков хаоса [11].

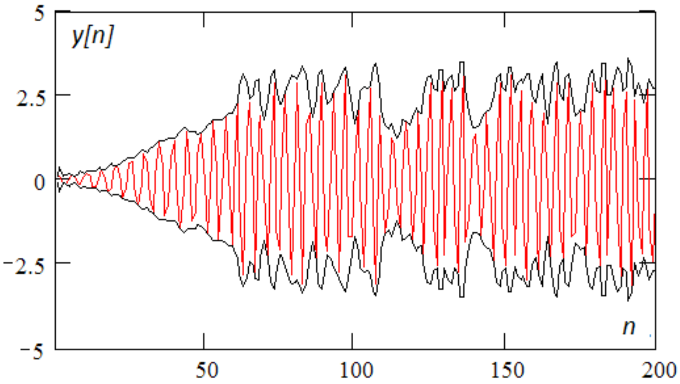

Рис. 3. Реализация хаотических автоколебаний

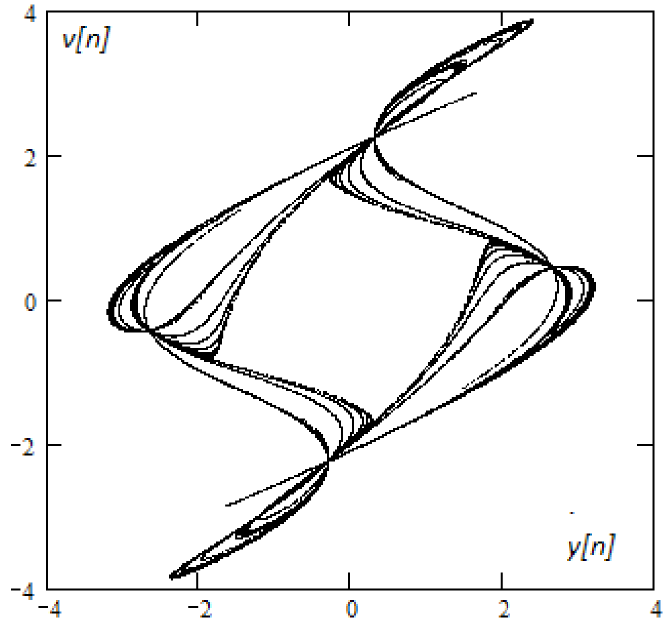

Рис. 4. Фазовый портрет хаотических автоколебаний

На генерацию динамического хаоса указывает также широкий амплитудный спектр автоколебаний, представленный на рис. 5. Оценка спектра проведена с использованием периодограмм Бартлетта с 512-точечным дискретным преобразованием Фурье по реализации в 65536 отсчетов.

Детальный анализ временных зависимостей огибающей и фазы автоколебаний $y[n]$ указывает на причину уширения центральной части спектральной линии — хаотическую диффузию фазы, что полностью соответствует общим положениям теории формы спектра автоколебаний [12]. Асимметрия линии обусловлена корреляцией фазового и амплитудного хаоса. Последний формирует также пьедестал спектральной линии.

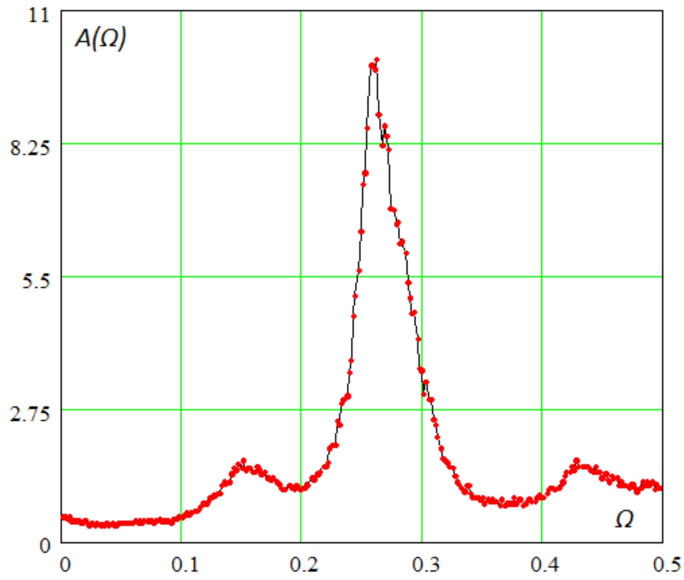

Рис. 5. Усредненный амплитудный спектр хаотических автоколебаний

Заключение

Представленные здесь дискретные отображения нелинейных осцилляторов (1.9), (1.12) расширяют круг объектов нелинейной динамики в дискретном времени со свойствами аналоговых автоколебательных систем. В то же время они могут демонстрировать и аномальное поведение, отличающее их от аналоговых систем-прототипов.

Практические применения предложенных отображений весьма разнообразны. В режимах регулярных автоколебаний предложенные отображения могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов, таких, например, как синхронное и частотное детектирование [13]. Сообщается также о применении осцилляторов подобного типа в моделях колебательно-волновых процессов в пространственно распределенных системах [14]. Хаотические автоколебания ДВ-осциллятора ван дер Поля – Дюффинга можно использовать в качестве несущего модулируемого сигнала в системах скрытной передачи информации [15].

Литература

[1] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 292 с.

[2] Феномен уравнения ван дер Поля / А.П. Кузнецов [и др.] // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22. № 4. С. 3–42.

[3] Кальянов Э.В., Кислов В.Я. Автоколебательные системы с хаотической динамикой на основе уравнений ван дер Поля — Дюффинга // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. № 1. С. 65–73.

[4] Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля – Дюффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 1. № 4. С. 101–136.

[5] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.

[6] Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ РХД; Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.

[7] Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В. Бифуркация Богданова — Такенса: от непрерывной к дискретной модели // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17. № 6. С. 139–158.

[8] Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М. – Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.

[9] Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.

[10] Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // Известия вузов — ПНД. 2015. Т. 23. № 6. С. 40–44.

[11] Многоликий хаос / Е.Ф. Мищенко [и др.]. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 432 с.

[12] Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968. 660 с.

[13] Зайцев В.В., Карлов А.В. Дискретное отображение осциллятора с нелинейной диссипацией и частотное детектирование ДВ-сигналов // Радиотехника. 2014. № 4. С. 50–54.

[14] Корниенко В.Н., Привезенцев А.П. Особенности многоволновой самосогласованной динамики ансамбля автогенераторов и поля в прямоугольной области // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 7. С. 691–698.

[15] Жалнин А.Ю. Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22. № 5. С. 3–12.

References

[1] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. *Nelineinye kolebaniia* [Nonlinear oscillations]. M.: FIZMATLIT, 2005, 292 p. [in Russian].

[2] Kuznetsov A.P., Seliverstova E.S., Trubetskov D.I., Turukina L.V. *Fenomen uravneniia van der Polia* [Phenomenon of van der Pol equation]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2014, Vol. 22, no. 4, pp. 3–42 [in Russian].

[3] Kalyanov E.V., Kislov V.Ya. *Avtokolebatel'nye sistemy s khaoticheskoi dinamikoi na osnove uravnenii van der Polia — Diuffinga* [Self-oscillatory systems with chaotic dynamics on the basis of van der Pol — Dyuffing equations]. *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics], 2006, Vol. 51, no. 1, pp. 65–73 [in Russian].

[4] Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. *Sviazannye ostsilliatory van der Polia i van der Polia – Diuffinga: Fazovaia dinamika i komp'iuternoe modelirovanie* [Coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators: dynamics of phase and computer simulation]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2008, Vol. 1, no. 4, pp. 101–136 [in Russian].

[5] Oppenheim A., Schafer R. *Tsifrovaia obrabotka signalov* [Digital signal processing]. M.: Tekhnosfera, 2006, 856 p. [in Russian].

[6] Zaslavsky G.M. *Gamil'tonov khaos i fraktal'naia dinamika* [Hamiltonian chaos and fractional dynamics]. M.; Izhevsk: NITs RKhD; Izhevskii institut komp'iuternykh issledovanii, 2010, 472 p. [in Russian].

[7] Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Yu.V. *Bifurkatsiia Bogdanova — Takensa: ot nepreryvnoi k diskretnoi modeli* [Bogdanov–Takens bifurcation: from flows to discrete systems]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2009, Vol. 17, no. 6, pp. 139–158 [in Russian].

[8] Morozov A.D. *Rezonansy, tsikly i khaos v kvazikonservativnykh sistemakh* [Resonances, cycles and chaos in quasiconservative systems]. M.–Izhevsk: NITs RKhD; Izhevskii institut komp'iuternykh issledovanii, 2005, 424 p. [in Russian].

[9] Kapranov M.V., Kuleschov V.N., Utkin G.M. *Teoriia kolebanii v radiotekhnike* [The theory of oscillations in radio engineering]. M.: Nauka, 1984, 320 p. [in Russian].

[10] Zaitsev V.V., Stulov I.V. *O vliianii podmenennykh garmonik na dinamiku avtokolebanii v diskretnom vremeni* [About influence of the changed harmonics on dynamics of self-oscillations in discrete time]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2015, Vol. 23, no. 6, pp. 40–44 [in Russian].

[11] Mishchenko E.F., Sadovnichii V.A., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. *(*Mnogolikii khaos) [Many-sided chaos]. M.: FIZMATLIT, 2013, 432 p. [in Russian].

[12] Malakhov A.N. *Fluktuatsii v avtokolebatel'nykh sistemakh* [Fluctuations in self-oscillations systems]. M.: Nauka, 1968, 660 p. [in Russian].

[13] Zaitsev V.V., Karlov Ar.V. *Diskretnoe otobrazhenie ostsilliatora s nelineinoi dissipatsiei i chastotnoe detektirovanie DV-signalov* [Discrete mapping of the oscillator with nonlinear disspation and frequency detecting]. *Radiotekhnika* [Radioengineering], 2014, no. 4, pp. 50–54 [in Russian].

[14] Kornienko V.N., Privezentsev A.P. *Osobennosti mnogovolnovoi samosoglasovannoi dinamiki ansamblia avtogeneratorov i polia v priamougol'noi oblasti* [Features of the multimode self-consistent dynamics of an ensemble of self-oscillators and the field in a rectangular domain]. *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics], 2013, Vol. 58, no. 7, pp. 691–698 [in Russian].

[15] Jalnine A.Yu. *Novaia skhema peredachi informatsii na osnove fazovoi moduliatsii nesushchego khaoticheskogo signala* [A new information transfer scheme based on phase modulation of a carrier chaotic signal]. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2014, Vol. 22, no. 5, pp. 3–12 [in Russian].

V.V. Zaitsev, A.N. Shilin[2]

THE MAPPINGS OF VAN DER POL — DYUFFING GENERATOR IN DISCRETE TIME

In the work transition to discrete time in the equation of movement of van der Pol – Dyuffing generator is described. The transition purpose — to create mappings of the generator as subjects of the theory of nonlinear oscillations (nonlinear dynamics) in discrete time. The method of sampling is based on the use of counting of the pulse characteristic of an oscillatory contour as the sampling series for a signal in a self-oscillating ring "active nonlinearity – the resonator – feedback". The choice of the consecutive scheme of excitement of a contour allows to receive the iterated displays in the form of recurrent formulas. Two equivalent forms of discrete displays of the generator of van der Pol – Dyuffing — complex and valid are presented. In approximation of method of slow-changing amplitudes it is confirmed that the created discrete mappings have dynamic properties of an analog prototype. Also within the numerical experiment it is shown that in case of the high power of generation the effect of changing of frequencies of harmonicas of the generated discrete signal significantly influence dynamics of the self-oscillators. In particular, in the discrete generator of van der Pol – Dyuffing the chaotic self-oscillations are observed.

Key words: self-oscillatory system, pulse characteristic, discrete mapping, method of slow-changing amplitudes, chaotic self-oscillations.

Статья поступила в редакцию 12/ V/2017.
The article received 12/ V/2017.

[2] *Zaitsev Valeriy Vassilievich* (zaitsev@samsu.ru), *Shilin Aleksandr Nikolaevich* (shilax@mail.ru), Department of Radiophysics, Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Бейлин Александр Борисович, канд. техн. наук, доц. кафедры "Автоматизированные станочные и инструментальные системы" Самарского государственного технического университета. Тема канд. дис.: "Обеспечение точности монтажа пространственно расположенных трубопроводов ГТД" (защ. в 1988 г.). Автор и соавтор 40 научных работ.

Область научных интересов: диагностика состояния станочного оборудования, виброакустическая диагностика, размерный анализ машин и механизмов.

Пулькина Людмила Степановна, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями сингулярности коэффициентов" (защ. в 1975 г.); Тема докт. дис.: "Нелокальные задачи для гиперболических уравнений" (защ. в 2003 г.). Автор и соавтор 100 научных работ, в том числе монографии "Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений".

Область научных интересов: краевые, нелокальные и нелинейные задачи для уравнений с частными производными.

Воскресенская Галина Валентиновна, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры алгебры и геометрии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Модулярные формы с дивизором в параболических вершинах" (защ. в 1993 году); тема докт. дис.: "Конечные группы и модулярные формы" (защ. в 2010 году). Автор 44 научных работ.

Область научных интересов: теория модулярных групп, представления групп,теория чисел.

Кириченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и информационных систем Самарского государственного университета путей сообщения. Тема канд. дис.: "Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического, псевдогиперболического и смешанного типов" (защ. в 2015 г.). Автор и соавтор 20 научных работ.

Область научных интересов: задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных.

Кукушкин Максим Владимирович, канд. физ.-мат. наук. Тема канд. дис.: "Применение методов функционального анализа в теории дифференциальных уравнений дробного порядка " (защ. в 2015 г.). Автор 20 научных работ.

Область научных интересов: дробное исчисление, энергетические пространства порожденные операторами дробного дифференцирования, спектральные свойства опреаторов дробного дифференцирования.

Степанова Лариса Валентиновна, д-р физ.-мат. наук, доц. кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Область научных интересов: механика хрупкого разрушения, нелинейная механика разрушения, теория ползучести, асимптотические методы и теория возмущений, методы вычислений.

Жаббаров Рамиль Миритович, магистрант кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Область научных интересов: математическое моделирование в механике, асимптотические методы и теория возмущений, механика твердых тел, конечно-элементный анализ.

Зайцев Валерий Васильевич, канд. физ.-мат. наук, проф. кафедры радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский университет.

Область научных интересов: теория колебательно-волновых процессов, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование в радиофизике.

Шилин Александр Николаевич, аспирант кафедры радиофизики, полупроводниковой микро- и наноэлектроники, Самарский университет.

Область научных интересов: компьютерное моделирование в радиофизике, нелинейная динамика.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Beylin Alexander Borisovich, Candidate of Technical Sciences, assisstant professor of the Department of Automated Machine-tool and Instrumental Systems, Samara State Technical University. Subject of Candidate's thesis "Control of accuracy of assembly of spatial pipelines GTE". Author and coauthor of 40 scientific works.

Research interests: diagnostics of state of machine's equipment, vibro-aucoustic diagnostics, dimensional analysis of machines and tools.

Pulkina Ludmila Stepanovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for a mixed type equation with two parallel lines of coefficient's singularity" (1975); Subject of Doctoral thesis: "Nonlocal problems for hyperbolic equations" (2003). Author and coauthor of 100 scientific works, including monograph "Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations".

Research interests: boundary-value, nonlocal and nonlinear problems for partial differential equations.

Voskresenskaya Galina Valentinovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis "Modular forms with divisor in cusps" (1993); subject of Doctoral thesis "Finite groups and modular forms" (2010). Author of 44 scientific works.

Research interests: theory of modular forms, representations of groups, theory of numbers.

Kirichenko Svetlana Viktorovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics, Informatics and Informatization Systems, Samara State University of Railway Transport. Subject of Candidate's thesis: "Nonlocal tasks with integral conditions for the equations of hyperbolic, pseudo-hyperbolic and mixed types" (2015). Author of 20 scientific works.

Research interests:tasks with integralny conditions for partial equations.

Kukushkin Maksim Vladimirovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Subject of Candidate's thesis: "Application of the methods of functional analysis in the theory of differential equations of a fractional order" (2015). Author of 20 scientific works.

Research interests: fractional calculus, energetic spaces generated by the fractional differentiation operators, spectral properties of operators of fractional differentiation.

Stepanova Larisa Valentinovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University.

Research interests: mathematical modeling in mechanics, nonlinear fracture mechanics, creep theory, asymptotic methods and perturbation theory, numerical methods.

Zhabbarov Ramil Muritovich, post-graduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University.

Research interests: mathematical modeling in mechanics, asymptotic methods and perturbation theory, solid mechanics, finite element analysis.

Zaitsev Valeriy Vassilievich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Radiophysics, Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara National Research University.

Research interests: theory of wave-based processes, statistical physics, computer modeling in radio physics.

Shilin Aleksandr Nikolaevich, postgraduate student of the Department of Radiophysics, Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara National Research University.

Research interests: computer modeling in radio physics, nonlinear dynamics.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским государственным университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу *http://vestnik.samsu.ruhttp://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est.*

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегий журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: nsvestnik@samsu.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы LaTeX2$_\varepsilon$ с использованием стиля `samgu.cls.` Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций TeX'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами LaTeX'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("-"), двойной дефис ("–")[1], тройной дефис ("—")[2]. Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных"фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

[1]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--~`

[2]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

Уважаемые авторы, просим предоставить сведения для размещения в журнале на странице "Сведения об авторах"

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры ...., в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности "..........".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of ...., in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in "...........".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.