

Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

**(ВЕСТНИК САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА)**

- *Математика*
- *Механика*

2017
№ 1

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, д-р тех. наук, проф.

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф.

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф.

Ответственный секретарь:

А.В. Дюжсева, канд. физ.-мат наук, доц.

Редактирование

Л.С. Пулькина

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Оформление выходных данных

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельников

Адрес редакции: 443011, Российская

Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016 г., выдано Федеральной
службой по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге

АО Агентство «Роспечать» 80307

ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

Цена свободная

Подписано в печать 23.03.2017 г.

Формат 70 × 108/16.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 9

Typeset by I^AT_EX₂ε.

Тираж 500 экз. ° "fi-É◊'œ" - 50îÿ'. Заказ №

Издательство Самарского университета,

443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.

<http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Отпечатано в типографии Самарского
университета

Редакционная коллегия:

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

В.В. Ивахник, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

И.Г. Кретьова, д-р мед. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

С.В. Курбатова, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Л.М. Кавеленова, д-р биол. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

О.Н. Макурина, д-р биол. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Л.А. Онучак, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. (Миланский университет, Милан, Италия)

П.П. Пурьгин, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

Стасис Руткаускас, д-р физ.-мат. наук, проф. (Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва)

Г.Л. Рытов, канд. пед. наук, доц. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY**
NATURAL SCIENCE SERIES

**(VESTNIK OF SAMARA
STATE UNIVERSITY)**

- *Mathematics*
- *Mechanics*

2017
No 1

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 — Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E. V. Shakhmatov, Dr. of Engineering, prof.

Deputy chief editors:

A. F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

L. S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

Executive editor:

A. V. Dyuzheva, Cand. of Phys.-Math. Sci., assistant prof.

Editing

L. S. Pulkina

Computer makeup, dummy

M. A. Likhobabenko

Making the output

T. A. Murzinova

Information in English

M. S. Strel'nikov

Address of editorial staff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

E-mail: nsvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС 77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

**Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525**

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

Price free

Passed for printing 23.03.2017.

Format 70 × 108/16.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 9.

Typeset by L^AT_EX₂ ϵ .

Circulation 500 copies. First printing - 50 copies. Order №

Publishing house of Samara University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
<http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>
Printed in the printing house of Samara
University

Editorial board:

S. V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)

V. V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

I. G. Kretova, Dr. of Medicine, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

S. V. Kurbatova, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

L. M. Kavelenova, Dr. of Biological Sciences, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

O. N. Makurina, Dr. of Biological Sciences, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

L. A. Onuchak, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Universite Paris-Sud 11, Orsay, France)

A. N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

A. V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. (Milan University, Milan, Italy)

P. P. Purygin, Dr. of Chemistry, prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

V. V. Revin, Dr. of Biological Sciences, prof. (Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation)

Stasis Rutkauskas, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Vilnius University, Vilnius, Lithuania)

G. L. Rytov, Cand. of Pedagogic Sciences, assistant prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

V. A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

V. A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara University, Samara, Russian Federation)

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Дюжева А.В. Задача с динамическими условиями для гиперболического уравнения	7
Кечина О.М. О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка	15
Киричек В.А., Пулькина Л.С. Задача с динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения	21
Цветов В.П. Альфа-матрицы и граф-порожденные грамматики	28
Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в четырехмерном пространстве	41

Механика

Степанова Л.В., Долгих В.С. Экспериментальное определение коэффициентов многопараметрического разложения поля напряжений у вершины трещины: метод фотоупругости	59
<i>Сведения об авторах</i>	69
<i>Требования к оформлению статей</i>	71

CONTENTS

Mathematics

Dyuzheva A.V. Problem with time-dependent boundary conditions for hyperbolic equation	7
Ketchina O.M. On solvability of nonlocal problem for third-order equation	15
Kirichek V.A., Pulkina L.S. Problem with dynamic boundary conditions for a hyperbolic equation	21
Tsvetov V.P. Alpha-matrix and graph-generated grammars	28
Shamolin M.V. Cases of integrability corresponding to the pendulum motion in four-dimensional space	41

Mechanics

Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Experimental differentiation of coefficients of a multiparameter decomposition of field of crack tip stresses: photoelasticity method	59
<i>Information about the authors</i>	69
<i>Requirements to the design of articles</i>	71

МАТЕМАТИКА

УДК 519.999

А.В. Дюжева¹ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассматривается начально-краевая задача с нелокальными динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения, содержащими производную по времени первого и второго порядков. Такие условия могут возникать при изучении колебаний стержня, если его концы закреплены упруго с помощью пружин и масс, а также испытывают сопротивление среды, пропорциональное скорости их движения. Данная работа является продолжением работ [4; 5]. Доказаны существование и единственность обобщенного решения поставленной задачи. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках и методе Галеркина.

Ключевые слова: нелокальная задача, динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение.

1. Предварительные сведения

В статье рассмотрена нелокальная задача для гиперболического уравнения, к которой может привести математическое моделирование процесса, связанного с колебаниями механической системы, в которой присутствуют демпфирующие устройства. Возникновение колебательных процессов в системе обусловлено многими причинами, а их наличие может привести к нарушению функционирования, а в некоторых случаях и к разрушению механической системы. Одним из способов уменьшить нежелательные эффекты колебаний является демпфирование. В случае, если размеры объекта, колебания которого исследуются, невелики, то режим на одном из его концов может оказывать существенное влияние на поведение объекта на другом конце. Этот эффект был замечен еще Стекловым В.А. в его работе [11]. Математически это выражается в том, что граничные условия становятся нелокальными. Именно этот случай рассмотрен в предлагаемой работе. Для параболического уравнения задача с подобными условиями была рассмотрена в работе [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (2.1)$$

в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$ и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (2.1) в области Q_T , удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2.2)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} a(0, t)u_x(0, t) &= (\alpha_1(t)u(0, t))_t + (\beta_1(t)u(l, t))_t + \gamma_1 u_{tt}(0, t), \\ a(l, t)u_x(l, t) &= (\alpha_2(t)u(0, t))_t + (\beta_2(t)u(l, t))_t + \gamma_2 u_{tt}(l, t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где γ_1 и γ_2 постоянные, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ - известные функции, причем будем предполагать, что выполняются следующие условия:

$$H1. \quad a \in C(\bar{Q}_T), \quad c \in C(\bar{Q}_T), \quad a(x, t) \geq a_0, \quad \forall (x, t) \in Q_T,$$

$$\varphi \in W_2^1(0, l), \quad \psi \in L_2(0, l), \quad f \in L_2(Q_T),$$

$$H2. \quad \alpha_i, \beta_i \in C^1[0, T],$$

$$H3. \quad \gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_2 \leq 0.$$

¹© Дюжева А.В., 2017

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

3. Разрешимость задачи

Обозначим

$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), u_t(0, t) \in L_2(0, T), u_t(l, t) \in L_2(0, T), \\ \hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T), v(x, T) = 0\}.$$

Введем понятие обобщенного решения, используя известную процедуру [3]: умножим (2.1) на функцию $v(x, t) \in \hat{W}(Q_T)$ и, после интегрирования по области Q_T , получаем равенство:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c u v) dx dt + \\ + \int_0^T v_t(0, t) [\alpha_1(t) u(0, t) + \beta_1(t) u(l, t) - \gamma_1 u_t(0, t)] dt - \\ - \int_0^T v_t(l, t) [\alpha_2(t) u(0, t) + \beta_2(t) u(l, t) - \gamma_2 u_t(l, t)] dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt. \quad (3.1)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ и тождеству (3.1) для любой функции $v \in \hat{W}(Q_T)$.

Теорема. Пусть выполняются условия $H1 - H3$, а также

$$\alpha_1(t) \xi_1^2 + (\beta_1(t) - \alpha_2(t)) \xi_1 \xi_2 - \beta_2(t) \xi_2^2 \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \\ \alpha_1'(t) \xi_1^2 + 2\alpha_2'(t) \xi_1 \xi_2 - \beta_2'(t) \xi_2^2 \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \\ \alpha_2' = \beta_1'.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3).

Заметим, что в силу условий теоремы найдутся числа $K > 0$, $c_0 > 0$, $a_1 > 0$ такие, что

$$\max_{[0, T]} |\alpha_i(t), \beta_i(t)| \leq K, \quad i = 1, 2, \\ \max_{Q_T} |a(x, t)| \leq a_1, \quad \max_{Q_T} |c(x, t)| \leq c_0.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. Единственность докажем от противного, предполагая, что существует два решения поставленной задачи. Для доказательства существования сначала методом Галеркина построим приближенное решение задачи, получим априорные оценки, позволяющие выделить слабо сходящуюся последовательность и покажем, что ее предел и есть обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3).

Единственность. Предположим, что существует два различных решения, $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (2.1)–(2.3). Тогда $u = u_1 - u_2$ — решение соответствующей однородной задачи. Это означает, что $u(x, 0) = 0$ и выполняется тождество (3.1) с $f(x, t) = 0$:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c u v) dx dt + \\ + \int_0^T v_t(0, t) [\alpha_1(t) u(0, t) + \beta_1(t) u(l, t) - \gamma_1 u_t(0, t)] dt - \\ - \int_0^T v_t(l, t) [\alpha_2(t) u(0, t) + \beta_2(t) u(l, t) - \gamma_2 u_t(l, t)] dt = 0. \quad (3.2)$$

Положим в тождестве (3.2)

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x, \eta) d\eta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Выбранная таким образом функция принадлежит пространству $\hat{W}(Q)$. Заметим, что $v_t(x, t) = u(x, t)$.

Сделаем некоторые преобразования, интегрируя по частям в (3.2), после чего получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0) v_x^2(x, 0)] dx = \\ = -\frac{\gamma_1}{2} u^2(0, \tau) + \frac{\gamma_2}{2} u^2(l, \tau) + \frac{1}{2} \int_0^\tau a_t v_x^2 dt - \int_0^\tau \int_0^l c u v dx dt - \\ - \int_0^\tau \alpha_1(t) u^2(0, t) dt + \int_0^\tau \beta_2(t) u^2(l, t) dt + \int_0^\tau \int_0^l (\alpha_2 - \beta_1) u(0, t) u(l, t) dx dt. \quad (3.3)$$

Сделаем некоторые оценки:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau \int_0^l c u v dx dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dx dt \right| \leq \\ & \leq \frac{c_0}{2} (1 + \tau^2) \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + \frac{a_1}{2} \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt, \end{aligned}$$

В силу условия Н4, Н3 теоремы и полученных оценок, имеем:

$$\frac{1}{2} \int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0) v_x^2(x, 0)] dx \leq c_1 \int_0^T \int_0^l u^2 dx dt + a_1 \int_0^T \int_0^l v_x^2 dx dt, \quad (3.4)$$

где $c_1 = c_0(1 + \tau^2)$. Введем теперь функцию $w(x, t) = \int_0^t u_x(x, \eta) d\eta$.

Из представления функции $v(x, t)$ получим:

$$\begin{aligned} v_x(x, t) &= w(x, t) - w(x, \tau); \\ v_x(x, 0) &= -w(x, \tau). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & m_0 \int_0^l [u^2(x, \tau) + w^2(x, \tau)] dx \leq \\ & \leq c_2 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^2(x, t) + (w(x, t) - w(x, \tau))^2) dx dt, \end{aligned}$$

где $m_0 = \min\{1, a_0\}$, $c_2 = \max\{c_1, a_1\}$. Отсюда получим, после преобразования $(w(x, t) - w(x, \tau))^2$ и оценки $2w(x, t)w(x, \tau)$ с помощью неравенства Коши:

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + w^2(x, \tau)] dx \leq \\ & \leq 2c_3 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^2(x, t) + w^2(x, t)) dx dt + 2c_3 \tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx, \end{aligned}$$

где $c_3 = \frac{c_2}{m_0}$. Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $1 - 2c_3\tau \geq \delta > 0$. Пусть $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда для всех $\tau \in [0, \frac{1}{4c_3}]$

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + w^2(x, \tau)] dx \leq \\ & \leq 2c_3 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^2(x, t) + w^2(x, t)) dx dt. \end{aligned}$$

Применив к этому неравенству лемму Гронуолла [1], приходим к утверждению: $u(x, t) \equiv 0$ для $t \in [0, \frac{1}{4c_3}]$. Повторяя рассуждения для $t \in [\frac{1}{4c_3}, \frac{1}{2c_3}]$ и продолжая этот процесс, убедимся, что $u(x, t) \equiv 0$ во всей области Q_T . Это означает, что существует не более одного решения задачи (2.1)–(2.3).

Существование Для доказательства существования обобщенного решения построим сначала последовательность приближенных решений при помощи метода Галеркина.

Будем искать приближенное решение поставленной задачи (2.1)–(2.3) в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) w_k(x), \quad (3.5)$$

где $\{w_k(x)\}_1^\infty$ — линейно независимая и полная в $W_2^1(0, l)$ система функций, в которой $w_k(x) \in C^2[0, l]$, из соотношений

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u_{tt}^m w_j(x) + a(x, t) u_x^m w_j'(x) + c(x, t) u^m w_j) dx + \\ & + w_j(0) [(\alpha_1(t) u^m(0, t))_t + (\beta_1(t) u^m(l, t))_t + \gamma_1 u_{tt}^m(0, t)] - \\ & - w_j(l) [(\alpha_2(t) u^m(0, t))_t + (\beta_2(t) u^m(l, t))_t + \gamma_2 u_{tt}^m(l, t)] dt = \\ & = \int_0^l f(x, t) w_j dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Дополнительно потребуем, чтобы $(w_k, w_l)_{L_2} = \delta_{kl}$. Это условие не ограничивает общности, но упрощает выкладки. Подставим (3.5) в (3.6) и получим

$$(1 - \gamma_1 + \gamma_2) d_j''(t) + \sum_{k=1}^m d_k(t) \int_0^l [w_k'(x) w_j'(x) + c w_k(x) w_j(x)] dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^m d_k(t)[\alpha_1(t)w_j(0)w_k(0) + \beta_1(t)w_j(0)w_k(l)] - \\
& - \sum_{k=1}^m d_k(t)[\alpha_2(t)w_j(l)w_k(0) + \beta_2(t)w_j(l)w_k(l)] + \\
& + \sum_{k=1}^m d'_k(t)[\gamma_1 w_j(l)w_k(0) - \gamma_2 w_j(0)w_k(l)] = f_j(t),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $f_j(t) = \int_0^l f(x, t)w_j(x)dx$.

Обозначим:

$$A_{kj}(t) = \int_0^l [w'_k(x)w'_j(x) + c(x, t)w_k(x)w_j(x)]dx + \alpha_1(t)w_k(0)w_j(0) + \beta_1(t)w_k(l)w_j(0) - \alpha_2(t)w_k(0)w_j(l) - \beta_2(t)w_k(l)w_j(l),$$

$$B_{kj} = \gamma_1 w_j(l)w_k(0) - \gamma_2 w_j(0)w_k(l).$$

Тогда (3.7) можно переписать так:

$$(1 - \gamma_1 + \gamma_2)d''_j + \sum_{k=1}^m B_{kj}d'_k(t) + \sum_{k=1}^m A_{kj}(t)d_k(t) = f_j(t). \tag{3.8}$$

Это соотношение представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенную относительно старших производных, так как в силу НЗ теоремы $(1 - \gamma_1 + \gamma_2) \neq 0$.

Добавив начальные условия

$$d_j(0) = \varphi_k; \quad d'_j(0) = (\psi(x), w_k(x))_{L_2(0, l)}, \tag{3.9}$$

получаем задачу Коши. В начальных условиях φ_k подбираются так, что суммы $\varphi^m(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k w_k(x)$ аппроксимируют при $m \rightarrow \infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(0, l)$. В силу условий теоремы коэффициенты системы (3.8) — ограниченные функции, а свободные члены $f_j(t) \in L_1(0, l)$. Поэтому задача Коши (3.8), (3.9) однозначно разрешима и $d''_k(t) \in L_1(0, T)$. Таким образом, последовательность приближенных решений $\{u^m(x, t)\}$ построена.

На следующем шаге доказательства покажем, что из построенной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо к некоторой функции из $W(Q_T)$. Для этого нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и переходим.

Умножим (3.6) на $d'_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ . В результате получим:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a(x, t)u_{tx}^m u_x^m + c(x, t)u^m u_t^m) dx dt + \\
& + \int_0^\tau u_t^m(0, t)[(\alpha_1(t)u^m(0, t))_t + (\beta_1(t)u^m(l, t))_t - \gamma_1 u_{tt}^m(0, t)] dt - \\
& - \int_0^\tau u_t^m(l, t)[(\alpha_2(t)u^m(0, t))_t + (\beta_2(t)u^m(l, t))_t - \gamma_2 u_{tt}^m(l, t)] dt = \\
& = \int_0^\tau \int_0^l f(x, t)u_t^m dx dt.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям: 1) $\int_0^\tau \int_0^l u_{tt}^m u_t^m dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^m(x, \tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^m(x, 0))^2 dx$. 2) $\int_0^\tau \int_0^l a u_x^m u_{xt}^m dx dt = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt +$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^l a(x, \tau)(u_x^m(x, \tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l a(x, 0)(u_x^m(x, 0))^2 dx.$$

$$\begin{aligned}
& 3) \int_0^\tau u_t^m(0, t)(\alpha_1(t)u^m(0, t))_t dt = \frac{1}{2} \alpha_1'(\tau)(u^m(0, \tau))^2 - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha_1''(t)(u^m(0, t))^2 dt + \int_0^\tau \alpha_1(t)(u_t^m(0, t))^2 dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4) \int_0^\tau u_t^m(0, t)(\beta_1(t)u^m(l, t))_t dt = \\
& = \int_0^\tau \beta_1'(t)u_t^m(0, t)u^m(l, t) dt + \int_0^\tau \beta_1(t)u_t^m(0, t)u_t^m(l, t) dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 5) - \int_0^\tau u_t^m(l, t)(\alpha_2(t)u^m(0, t))_t dt = \\
 & = - \int_0^\tau \alpha_2(t)u_t^m(l, t)u_t^m(0, t)dt - \int_0^\tau \alpha_2'(t)u^m(l, t)u_t^m(0, t)dt + \\
 & + \int_0^\tau \alpha_2''(t)u^m(l, t)u^m(0, t)dt - \alpha_2'(\tau)u_t^m(l, \tau)u^m(0, \tau). \\
 & 6) - \int_0^\tau u_t^m(l, t)(\beta_2(t)u^m(l, t))_t dt = -\frac{1}{2}\beta_2'(\tau)(u^m(l, \tau))^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^\tau (u^m(l, t))^2 \beta_2''(t)dt - \int_0^\tau \beta_2(t)(u_t^m(l, t))^2 dt. \\
 & 7) - \int_0^\tau \gamma_2 u_t^m(l, t)u_{tt}^m(l, t)dt = -\frac{\gamma_2}{2}(u_t^m(l, \tau))^2. \\
 & 8) \int_0^\tau \gamma_1 u_t^m(0, t)u_{tt}^m(0, t)dt = \frac{\gamma_1}{2}(u_t^m(0, \tau))^2.
 \end{aligned}$$

Часть слагаемых в 3), 4), 5), 6), 7) и 8) содержат значения искомого решения и его производной в различных точках границы, и мы не можем освободиться от производной путем интегрирования, как это сделано в других слагаемых 3), 4) и 6). В подобных ситуациях мы обычно применяем представление функции через интеграл от производной, чтобы оценить значение функции на границе через значение производной во внутренних точках. Однако, в нашем случае это приведет к производной второго порядка, которая отсутствует под знаком интегралов в 1) и 2). Возникнет ситуация, когда в левой части под знаком интеграла производные не выше первого порядка, а в правой — есть производные второго порядка. Неравенство, которое может получиться, бесполезно для оценки решения, а возникшую ситуацию принято называть эффектом "потери гладкости".

Для преодаления этой трудности, заметим, что слагаемые в 3), 4), 5), 6) в силу условия Н4 теоремы удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \alpha_1(t)(u_t^m(0, t))^2 - \int_0^\tau \beta_2(t)(u_t^m(l, t))^2 dt + \\
 & \int_0^\tau (\beta_1(t) - \alpha_2(t))u_t^m(l, t)u_t^m(0, t)dt \geq 0.
 \end{aligned}$$

К слагаемым 7) и 8) применим условие Н3 нашей теоремы. В силу условия Н6 сумма слагаемых в 4) и 5) равна нулю:

$$\int_0^\tau \beta_1'(t)u_t^m(0, t)u^m(l, t)dt - \int_0^\tau \alpha_2'(t)u^m(l, t)u_t^m(0, t)dt = 0.$$

Из условия Н5 теоремы следует, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\alpha_1'(\tau)(u^m(0, \tau))^2 - \alpha_2'(\tau)u_t^m(l, \tau)u^m(0, \tau) - \frac{1}{2}\beta_2'(\tau)(u^m(l, \tau))^2 \geq 0, \\
 & \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha_1''(t)(u^m(0, t))^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \beta_2''(t)(u^m(l, t))^2 dt - \\
 & - \int_0^\tau \alpha_2''(t)u^m(l, t)u^m(0, t)dt \geq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к неравенству:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + a(x, \tau)(u_x^m(x, \tau))^2] dx \leq \tag{3.10} \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x, 0))^2 + a(x, 0)(u_x^m(x, 0))^2] dx + \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt - \\
 & - \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Используя неравенства Коши и Коши-Буняковского получим:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \int_0^l |f u_t^m| dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt; \\
 & \int_0^\tau \int_0^l |c u^m u_t^m| dx dt \leq \frac{c_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2] dx dt.
 \end{aligned}$$

Применяя полученные оценки к (3.10) и учитывая начальные условия задачи, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + (u_x^m(x, \tau))^2] dx \leq \\ & \leq \bar{L} \|f\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|\phi\|_{L_2(0,l)}^2 + M \int_0^\tau \int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2) dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x, 0))^2 + a(x, 0)(u_x^m(x, 0))^2] dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Получим ещё одно неравенство. Возведем в квадрат обе части равенства

$$u^m(x, \tau) = \int_0^\tau u_\eta^m(x, \eta) d\eta + u^m(x, 0),$$

а затем применим неравенство Коши-Буняковского. Получим

$$(u^m(x, \tau))^2 \leq 2\tau \int_0^\tau (u_t^m(x, t))^2 dt + 2(u^m(x, 0))^2.$$

Интегрируя это неравенство, получим:

$$\int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx \leq 2\tau \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m(x, t))^2 dx dt + 2 \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx. \quad (**)$$

Добавим к (3.11) полученное неравенство (**). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + (u_x^m(x, \tau) + (u^m(x, \tau))^2)^2] dx \leq \\ & \leq \bar{L} (\|\phi\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|\psi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(Q_T)}^2) + \\ & + \bar{M} \int_0^\tau \int_0^l ((u^m(x, t))^2 + (u_t^m(x, t))^2 + (u_x^m(x, t))^2) dx dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Так как по условию теоремы $\varphi(x) \in W_2^1(0, l)$, $\psi(x) \in L_2(0, l)$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, то нормы этих функций в правой части (3.12) ограничены. Это означает, что из (3.12) следует:

$$\int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + (u_x^m(x, \tau))^2 + (u^m(x, \tau))^2] dx \leq M \int_0^\tau \int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2) dx dt + K. \quad (3.13)$$

К (3.13) применим лемму Гронуолла, что приводит к неравенству

$$\|u^m(x, t)\|_{W_2^1(Q_t)}^2 \leq C, \quad (3.14)$$

где C не зависит от m . Благодаря (3.14) и в силу компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве из последовательности $\{u^m(x, t)\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q_T)$ и равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(0, l)$ к некоторому элементу $u(x, t) \in W(Q_T)$. Покажем, что этот предел и есть обобщенное решение задачи (2.1), (2.2), (2.3). За выделенной последовательностью сохраним то же обозначение во избежание излишней громоздкости.

Начальное условие $u(x, 0) = \varphi(x)$ выполняется в силу сходимости подпоследовательности $u^m(x, t)$ к $u(x, t)$ в $L_2(0, l)$ и того, что $u^m(x, 0) \rightarrow \varphi(x)$ в $L_2(0, l)$.

Докажем, что предел последовательности приближенных решений удовлетворяет тождеству (3.1). Для этого умножим каждое из соотношений (3.6) на $\delta_l(t) \in W_2^1(0, t)$, $\delta_l(T) = 0$; обозначим $\eta(x, t) = \sum_{l=1}^m \delta_l(t) w_l(x)$. Полученные равенства просуммируем по l от 1 до m и проинтегрируем от 0 до T :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (u_{tt}^m \eta + u_x^m \eta_x + cu^m \eta) dx dt + \\ & + \int_0^T \eta(0, t) [(\alpha_1(t) u^m(0, t))_t + (\beta_1(t) u^m(l, t))_t - \gamma_1(t) u_{tt}^m(0, t)] dt - \\ & - \int_0^T \eta(l, t) [(\alpha_2(t) u^m(0, t))_t + (\beta_2(t) u^m(l, t))_t - \gamma_2(t) u_{tt}^m(l, t)] dt = \\ & = \int_0^T \int_0^l f(x, t) \eta(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Проинтегрируем первое слагаемое в интеграле слева, получим

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t^m \eta_t(x, t) + u_x^m \eta_x + cu^m \eta) dx dt + \int_0^l u_t^m(x, 0) \eta(x, 0) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \eta(0, t)[(\alpha_1(t)u^m(0, t))_t + (\beta_1(t)u^m(l, t))_t - \gamma_1(t)u_{tt}^m(0, t)]dt - \\
& - \int_0^T \eta(l, t)[(\alpha_2(t)u^m(0, t))_t + (\beta_2(t)u^m(l, t))_t - \gamma_2(t)u_{tt}^m(l, t)]dt = \\
& = \int_0^T \int_0^l f(x, t)\eta(x, t)dxdt.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Зафиксировав в (3.15) $\eta(x, t)$, перейдем к пределу и увидим, что тождество (3.1) выполняется для предельной функции $u(x, t)$. Однако еще нельзя утверждать, что $u(x, t)$ – искомое обобщенное решение, так как тождество (3.1) пока выполняется не для всех функций $v(x, t) \in \hat{W}(Q_T)$, а только для функций вида $\eta(x, t) = \sum_{j=1}^m \delta_j(t)w_j(x)$. Но множество всех таких функций плотно в $\hat{W}(Q_T)$ (см.[3], с. 215), поэтому утверждение о существовании решения задачи из пространства $W(Q_T)$ доказано полностью.

Литература

- [1] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. с. 120.
- [2] Кожанов А.И. Нелокальные задачи для линейных гиперболических уравнений с граничными условиями, содержащими временную производную // Доклады АМАН. 2010. Т. 12. № 1. С. 40–52
- [3] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.
- [4] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1072–1077.
- [5] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 4(86). С. 56–64.
- [11] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
- [12] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

References

- [1] Gording L. *Zadacha Koshi dlia giperbolicheskikh uravnenii* [The Cauchy problem for hyperbolic equations]. M.: Iz-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. [in Russian].
- [2] Kozhanov A.I. *Nelokal'nye zadachi dlia lineinykh giperbolicheskikh uravnenii s granichnymi usloviiami, sodержashchimi vremennuiu proizvodnuiu* [Nonlocal problems for linear hyperbolic equations with boundary conditions containing time-derivative]. In: *Doklady AMAN*, 2010, Vol. 12, no. 16, pp. 40–52 [in Russian].
- [3] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].
- [4] Lazhetych N.L. *O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka* [About the classical solvability of a mixed problem for a one-dimensional hyperbolic equation of the second order]. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 2006, Vol. 42, No. 8, pp. 1072–1077 [in Russian].
- [5] Pulkina L.S., Dyuzheva A.V. *Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal problem with Steklov's time-varying boundary conditions for a hyperbolic equation]. [Vestnik of Samara State University. Natural science series], 2010, no. 4(86), pp. 56–64 [in Russian].
- [11] Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Basic problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1983 [in Russian].
- [12] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977 [in Russian].

A. V. Dyuzheva²

PROBLEM WITH TIME-DEPENDENT BOUNDARY CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this paper, we consider a problem for hyperbolic equation with standard initial data and nonlocal dynamic conditions. Such conditions may arise when a thick short bar fixed by point forces and springs. The existence and uniqueness of the problem are proved. The proof is mainly based on a priori estimates and Galerkin procedure.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal conditions, generalized solution, dynamic conditions.

Статья поступила в редакцию 28/II/2017.

The article received 28/II/2017.

²Dyuzheva Alexandra Vladimirovna (aduzheva@rambler.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517.95

О.М. Кечина¹

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. Доказано существование единственного классического решения задачи в прямоугольной области. Доказательство проводится методом "вспомогательных задач". Сначала решается задача для уравнения первого порядка относительно вновь введенной функции. Затем доказывается однозначная разрешимость интегрального аналога задачи Гурса для гиперболического уравнения второго порядка эквивалентным сведением задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: нелокальная задача, уравнение в частных производных третьего порядка, интегральные условия.

Введение

Задачи с нелокальными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных различных порядков в настоящее время активно изучаются. Полученные результаты отражены в большом количестве статей, некоторые из которых, а именно, опубликованные в последние несколько лет, мы здесь отметим [1–11]. Одним из интересных направлений исследований уравнений в частных производных является изучение различных задач для уравнений с доминирующей смешанной производной. Таким задачам для уравнения второго порядка, например, посвящена работа Л.С. Пулькиной [1]. В последнее время появились работы В.И. Жегалова и Е.А. Уткиной [2–4], в которых рассмотрены нелокальные задачи для уравнений третьего и четвертого порядков. В статьях А.Н. Миронова [5; 6], исследуются задачи для уравнений третьего и четвертого порядков. В работах Асановой [7; 8] рассматриваются нелокальные задачи для систем гиперболических уравнений со смешанными производными, исследуются вопросы существования единственного классического решения нелокальной задачи с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в прямоугольной области и способы его построения. Нелокальная задача с интегральными условиями сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами и функциональными соотношениями. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений третьего порядка исследованы также в работах Бештокова М.Х., Лукиной Г.А., Кожанова А.И. [9–11].

1. Постановка задачи

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xy} + (A(x, y)u)_x + (B(x, y)u)_y + C(x, y)u) = f(x, y), \quad (1.1)$$

(где α и β — отличные от нуля постоянные), и поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию

$$u_x(0, y) = \nu(y), 0 \leq y \leq b \quad (1.2)$$

и интегральным условиям

$$\int_0^a u(x, y) dx = \psi(y), 0 \leq y \leq b, \quad (1.3)$$

$$\int_0^b u(x, y) dy = \varphi(x), 0 \leq x \leq a. \quad (1.4)$$

¹© Кечина О.М., 2017

Под классическим решением поставленной задачи будем понимать функцию $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям (1.2)–(1.4).

2. Разрешимость задачи

Рассмотрим сначала случай

$$A_x(0, y) + B_y(0, y) + B(0, y) = 0, \quad C(0, y) = 0,$$

Теорема. Пусть выполняются условия:

$$A(x, y), B(x, y), C(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}), f(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}),$$

$$A_y \geq 0, \quad B_x \geq 0, \quad C_{xy} \geq 0,$$

$$A_y B_x - C^2 \geq 0,$$

$$\varphi(x) \in C[0, a] \cap C^2(0, a), \psi(y) \in C[0, b] \cap C^2(0, b),$$

$$\nu(y) \in C^2[0, b].$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1.1)–(1.4).

Доказательство. Обозначим

$$w(x, y) = u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u \quad (2.1)$$

и рассмотрим вспомогательную задачу относительно новой введенной функции.

Вспомогательная задача: найти решение уравнения

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \frac{\partial w}{\partial y} = f(x, y), \quad (2.2)$$

удовлетворяющее условию

$$w(0, y) = \nu'(y) + A(0, y)\nu(y). \quad (2.3)$$

Соответствующая этому дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dw}{f(x, y)}.$$

находя первые интегралы этой системы, получим общее решение уравнения (2.2)

$$\Phi \left(y - \frac{\beta}{\alpha}x, w - \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(\xi, y) d\xi \right) = 0, \quad (2.4)$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Так как $w(x, y)$ входит только в один из первых интегралов, то, следуя [12], получим общее решение уравнения (2.2) в явном виде

$$w(x, y) = H(y - \frac{\beta}{\alpha}x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(\xi, y) d\xi, \quad (2.5)$$

где H — произвольная непрерывно дифференцируемая функция

Из (2.5) следует, что

$$w(0, y) = H(y).$$

Учитывая условие (2.3), получили, что

$$H(y) = \nu'(y) + A(0, y)\nu(y), \quad (2.6)$$

а тогда

$$w(x, y) = \nu'(y - \frac{\beta}{\alpha}x) + A(0, y - \frac{\beta}{\alpha}x)\nu(y - \frac{\beta}{\alpha}x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(\xi, y) d\xi \quad (2.7)$$

является решением вспомогательной задачи для уравнения (2.2) с условием (2.3), принадлежащим классу $C^2(\bar{\Omega})$

Таким образом, мы приходим к задаче отыскания функции $u(x, y)$ — решения уравнения

$$u_{xy} + (A(x, y)u)_x + (B(x, y)u)_y + C(x, y)u = w(x, y), \quad (2.8)$$

удовлетворяющей интегральным условиям (1.3) и (1.4), где $w(x, y)$ определяется соотношением (2.7).

Эта задача является интегральным аналогом задачи Гурса. В простейшем случае, а именно при $A = B = C = 0$, задача рассматривалась в [13]. В [14] разрешимость доказана для общего уравнения: было показано, что задача имеет единственное классическое решение из $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} A(x, y), B(x, y), C(x, y), &\in C^1(\bar{\Omega}), C_{xy}, w(x, y) \in C(\bar{\Omega}), \\ A_y \geq 0, \quad B_x \geq 0, \quad C_{xy} \geq 0, \quad A_y B_x - C^2 &\geq 0, \\ \varphi(x) \in C[0, a] \cap C^2(0, a), \quad \psi(y) \in C[0, b] \cap C^2(0, b), \\ \int_0^a \varphi(x) dx &= \int_0^b \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Для доказательства единственности решения покажем, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Пусть $\varphi(x) = 0, \psi(y) = 0$. Пусть $\varphi(x) = 0, \psi(y) = 0$. Умножим уравнение (2.8) с $w(x, y) = 0$ на функцию $\int_0^y \int_0^x u(\xi, \eta) d\xi d\eta$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω .

Проинтегрировав каждое слагаемое дважды по частям с учетом однородных условий, получим

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a u^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a C_{xy} \left(\int_0^y \int_0^x u(\xi, \eta) d\xi d\eta \right)^2 dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[A_y(x, y) \left(\int_0^y u(x, \eta) d\eta \right)^2 - \right. \\ \left. - 2C(x, y) \int_0^y u(x, \eta) d\eta \int_0^x u(\xi, y) d\xi + B_x(x, y) \left(\int_0^x u(\xi, y) d\xi \right)^2 \right] dx dy = 0 \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в левой части равенства, неотрицательно. Оно обращается в нуль только в случае равенства нулю функции $u(x, y)$.

Так как однородная задача имеет только нулевое решение, то соответствующая неоднородная задача имеет единственное решение.

Существование решения доказывается в несколько этапов. Сначала показывается, что поставленная задача эквивалентна нагруженному интегральному уравнению.

$$\begin{aligned} u(x, y) - \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^y A(x, \eta) u(x, \eta) d\eta dx - \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^x B(\xi, y) u(\xi, y) d\xi dx - \\ - \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^y A(x, \eta) u(x, \eta) d\eta dy - \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^x B(\xi, y) u(\xi, y) d\xi dy + \\ + \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \int_0^y A(x, \eta) u(x, \eta) d\eta dy dx + \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \int_0^x B(\xi, y) u(\xi, y) d\xi dy dx + \\ + \int_0^y A(x, \eta) u(x, \eta) d\eta + \int_0^x B(\xi, y) u(\xi, y) d\xi + \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dy dx - \\ - \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dx - \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dy + \\ + \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = F(x, y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F(x, y) = \frac{1}{b} \varphi(x) + \frac{1}{a} \psi(y) - \frac{1}{2ab} \int_0^a \varphi(x) dx - \frac{1}{2ab} \int_0^b \psi(y) dy - \\ - \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dx - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{b} \int_0^b \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dy + \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dy dx.$$

Затем полученное нагруженное уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным в $\bar{\Omega}$ ядром и правой частью

$$\tilde{u}(x, y) + \int_0^x B(\xi, y) \tilde{u}(x, y) d\xi = H(x, y), \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y) + \int_0^y A(x, \eta) u(x, \eta) d\eta, \quad (2.10)$$

$$H(x, y) = \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dy dx - \quad (2.11)$$

$$-\frac{1}{a} \int_0^a \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dx - \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dy + \int_0^y \int_0^x [B(\xi, y)A(x, \eta) - C(\xi, \eta)] u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Рассматривая $u(x, y)$ как решение уравнения (2.9), приходим к уравнению относительно $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x \tilde{H}(\xi, \eta, x, y) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \tilde{G}(x, y), \quad (2.12)$$

с непрерывными в $\bar{\Omega}$ ядром и правой частью, $\tilde{H}(\xi, \eta, x, y)$ выражается через коэффициенты уравнения (2.2), а функция $\tilde{G}(x, y)$ — через $w(x, y)$. [14]

$$\tilde{H}(\xi, \eta, x, y) = D(\xi, \eta, x, y) - H_1(\xi, \eta, x, y) - H_2(\xi, \eta, x, y) + H_3(\xi, \eta, x, y),$$

$$D(\xi, \eta, x, y) = B(\xi, y)A(x, \eta) - C(\xi, \eta),$$

$$H_1(\xi', \eta, x, y) = \int_{\xi'}^x R_B(\xi, y, -1) D(\xi', \eta, \xi, y) d\xi,$$

$$H_2(\xi, \eta', x, y) = \int_{\eta'}^y R_A(x, \eta, -1) D(\xi, \eta', x, \eta) d\eta,$$

$$H_3(\xi', \eta', x, y) = \int_{\xi'}^x \int_{\eta'}^y R_A(x, \eta, -1) R_B(\xi, \eta, -1) D(\xi', \eta', \xi, \eta) d\eta d\xi,$$

$R_B(\xi, y, -1)$ — резольвента ядра $B(\xi, y)$ уравнения (2.9), $R_A(x, \eta, -1)$ — резольвента ядра $A(x, \eta)$ уравнения (2.10).

$$\tilde{G}(x, y) = G(x, y) - \int_0^x R_B(\xi, y, -1) G(\xi, y) d\xi - \int_0^y R_A(x, \eta, -1) G(x, \eta) d\eta +$$

$$+ \int_0^y R_A(x, \eta, -1) \int_0^x R_B(\xi, \eta, -1) G(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$G(x, y) = \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dy dx -$$

$$-\frac{1}{a} \int_0^a \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dx - \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^y \int_0^x w(\xi, \eta) d\xi d\eta dy.$$

Уравнение (2.12) имеет единственное решение $u(x, y)$ [15]. При выполнении условий теоремы сформулированные условия существования и единственности решения задачи будут справедливы. Следовательно,

можем сделать вывод об однозначной разрешимости исходной задачи. В силу эквивалентности задачи (2.8), (1.3), (1.4) и уравнения (2.12) решение интегрального уравнения (2.12) является решением задачи (2.8), (1.3), (1.4), а так как эта задача эквивалентна исходной задаче, то и решением исходной задачи.

Так как в силу условий теоремы функции $\tilde{H}(\xi, \eta, x, y)$, $\tilde{G}(x, y)$ имеют непрерывные производные второго порядка $\tilde{H}_{xx}, \tilde{H}_{xy}, \tilde{H}_{yy}, \tilde{G}_{xx}, \tilde{G}_{xy}, \tilde{G}_{yy}$ и третьего порядка $\tilde{H}_{xyx}, \tilde{H}_{xyy}, \tilde{G}_{xyx}, \tilde{G}_{xyy}$, можно убедиться, что существуют непрерывные производные третьего порядка $u_{xyx}(x, y)$, $u_{xyy}(x, y)$ и второго: $u_{xx}(x, y)$ и $u_{yy}(x, y)$.

Литература

- [1] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. № 2. С. 279–280.
- [2] Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Известия вузов. Математика. 1999. № 10. С. 73–76.
- [3] Уткина Е.А. О единственности решения полуинтегральной задачи для одного уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 4(78). С. 98–102.
- [4] Уткина Е.А. Характеристическая граничная задача для уравнения третьего порядка с псевдопараболическим оператором и со смещением аргументов искомой функции // Известия вузов. Математика. 2014. № 2. С. 54–60.
- [5] Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными // Матем. заметки. 2016. № 99:1. С. 89–96.
- [6] Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными // Известия вузов. Математика. 2014. № 10. С. 27–34.
- [7] Асанова А.Т. Нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике // Известия вузов. Математика. 2017. № 5. С. 11–25.
- [8] Асанова А.Т. О нелокальной задаче с интегральным смещением для систем гиперболических уравнений со смешанной производной // Матем. журн. 2008. № 8:1. С. 9–16.
- [9] Бештоков М.Х. Априорные оценки решения нелокальных краевых задач для псевдопараболического уравнения // Владикавказский математический журнал. 2013. Т. 15. Вып. 3. С. 19–36.
- [10] Лукина Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями по времени для уравнений третьего порядка // Матем. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17. Вып. 2. С. 75–97.
- [11] Кожанов А.И., Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Сер.: Математика. 2010. Т. 100. Вып. 3. С. 46–62.
- [12] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник. М.: КомКнига, 2007. 240 с.
- [13] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 1986. № 1. С. 171–174.
- [14] Пулькина Л.С., Кечина О.М. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. № 2(68). С. 80–88.
- [15] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

References

- [1] Pulkina L.S. *O razreshimosti v L_2 nelokal'noi zadachi s integral'nymi usloviiami dlia giperbolicheskogo uravneniia* [On solvability of L_2 nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 2000, no. 2, pp. 279–280 [in Russian].
- [2] Zhegalov V.I., Utkina E.A. *Ob odnom psevdoparabolicheskom uravnenii tret'ego poriadka* [On one pseudoparabolic equation of the third order]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics. (Iz. VUZ)], 1999, № 10, pp. 73–76 [in Russian].
- [3] Utkina E.A. *O edinstvennosti resheniia poluintegral'noi zadachi dlia odnogo uravneniia chetvertogo poriadka* [About uniqueness of the solution of semi-integral problem for one equation of the fourth order]. *Vestnik SamGU — Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2010, № 4(78), pp. 98–102 [in Russian].
- [4] Utkina E.A. *Kharakteristicheskaia granichnaia zadacha dlia uravneniia tret'ego poriadka s psevdoparabolicheskim operatorom i so smeshcheniem argumentov iskomoi funktsii* [Characteristic boundary-value problem for a third-order equation with pseudo-parabolic operator and with shifted arguments of desired function]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics. (Iz. VUZ)], 2014, № 2, pp. 54–60 [in Russian].
- [5] Mironov A.N., Mironova L.B. *Ob invariantakh Laplasa dlia uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi tret'ego poriadka s dvumia nezavisimymi peremennymi* [On Laplace invariants for equations with dominating third-order partial derivative and two independent variables]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], (2016), no. 99:110, pp. 89–96 [in Russian].

- [6] Mironov A.N., Mironova L.B. *Ob invariantakh Laplasya dlia odnogo uravneniia chetvertogo poriadka s dvumia nezavisimymi peremennymi* [Laplace invariants for a fourth-order equation with two independent variables]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics. (Iz. VUZ)], 2014, no. 10, pp. 27–34 [in Russian].
- [7] Asanova A.T. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia sistemy giperbolicheskikh uravnenii v kharakteristicheskoi priamougol'nike* [Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics. (Iz. VUZ)], 2017, no. 5, pp. 11–25 [in Russian].
- [8] Asanova A.T. *O nelokal'noi zadache s integral'nym smeshcheniem dlia sistem giperbolicheskikh uravnenii so smeshannoi proizvodnoi* [On a nonlocal problem with integral offset for hyperbolic systems of equations with mixed derivative]. *Matem. zhurn.* [Mathematical Journal], no. 8:1(2008), pp. 9–16 [in Russian].
- [9] Beshtokov M.Kh. *Apriornye otsenki resheniia nelokal'nykh kraevykh zadach dlia psevdoparabolicheskogo uravneniia* [A priori estimates of solutions of nonlocal boundary value problems for a pseudo-parabolic equation]. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2013, Vol. 15, Issue 3, pp. 19–36 [in Russian].
- [10] Lukina G.A. *Kraevye zadachi s integral'nymi granichnymi usloviiami po vremeni dlia uravnenii tret'ego poriadka* [Boundary value problems with integral conditions for the third order equations]. *Matem. zametki IaGU* [Yakutian Mathematical Journal], 2010, Vol. 17, Issue 2, pp. 75–97 [in Russian].
- [11] Kozhanov A.I., Popov N.S. *O razreshimosti nekotorykh zadach so smeshcheniem dlia psevdoparabolicheskikh uravnenii* [On solvability of some problems with displacement for pseudoparabolic equations]. *Vestnik NGU. Seriya: Matematika* [Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika], 2010, Vol. 100, Issue 3, pp. 46–62 [in Russian].
- [12] Filippov A.F. *Vvedenie v teoriu differentsial'nykh uravnenii: Uchebnik* [Introduction to the theory of differential equations: Textbook]. M.: KomKniga, 2007, 240 p. [in Russian].
- [13] Nakhushcheva Z.A. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [On a nonlocal problem for partial differential equations]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1986, no. 1, pp. 171–174 [in Russian].
- [14] Pul'kina L.S., Ketchina O.M. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia giperbolicheskogo uravneniia v kharakteristicheskoi priamougol'nike* [Nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation in characteristic rectangular]. *Vestnik SamGU — Estestvennonauchnaia seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2009, no. 2(68), pp. 80–88 [in Russian].
- [15] Mikhlina S.G. *(Lektsii po lineinym integral'nym uravneniiam)* [Lectures on linear integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1959, 232 pp. [in Russian].

O.M. Ketchina²

ON SOLVABILITY OF NONLOCAL PROBLEM FOR THIRD-ORDER EQUATION

In this paper nonlocal problem with integral conditions for partial differential equation of the third order is considered. The existence of a unique classical solution is proved in rectangular domain. The proof is carried out by the method of auxiliary problems. At first the problem for a new function for partial differential equation of the first order is considered. Then the solvability of integral analogue of Goursat problem for hyperbolic equation of the second order is proved by equivalent reduction of the problem to the Volterra integral equation of the second kind.

Key words: nonlocal problem, partial differential equation of the third order, integral conditions.

Статья поступила в редакцию 28/II/2017.
The article received 28/II/2017.

²Ketchina Olga Mikhailovna (omka-83@mail.ru), Department of Physics, Mathematics and Teaching Methodology, Samara State University of Social Sciences and Education, 65/67, Maxim Gorky Street, Samara, 443090, Russian Federation.

УДК 517.956

В.А. Киричек, Л.С. Пулькина¹

ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается начально-краевая задача с динамическим граничным условием для гиперболического уравнения в прямоугольнике. Динамическое граничное условие представляет собой соотношение, в которое помимо значений производных искомого решения по пространственным переменным входят производные первого порядка по переменной времени. Основной результат статьи состоит в обосновании разрешимости поставленной задачи. Доказано существование единственного обобщенного решения. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках, методе Галёркина и свойствах пространств Соболева.

Ключевые слова: динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение.

Введение

Математическое моделирование колебательных процессов различной природы обычно приводит к краевым задачам для гиперболических уравнений, граничные условия в которых отражают способы закрепления. Если требуется учесть сопротивление среды, например, при наличии некоторого демпфирующего устройства, то граничные условия должны содержать производную по переменной времени. Такие условия принято называть динамическими граничными условиями. Постановка простейшей задачи с динамическим условием приведена в [1]. Эта задача состоит в нахождении решения уравнения колебаний струны, конец которой испытывает сопротивление среды, пропорциональной скорости ее движения [1]. При этом возникает динамическое граничное условие $ku_x(l, t) = -\alpha u_t(l, t)$. Задачи с динамическими граничными условиями позволяют разрешить вопросы в таких областях, как генетика, медицина, физика, особенно в задачах, связанных с акустикой [2]. Задачи с динамическими граничными условиями возникают при изучении различных процессов: процесса переноса газа сквозь мембраны с учетом физико-химических процессов на поверхности [2], распространения волн в стратифицированных и вращающихся жидкостях [3], различных колебательных процессов [4–6].

В работе рассмотрена задача для гиперболического уравнения с динамическими условиями, содержащими производную по времени первого порядка, и доказано существование единственного обобщенного решения. Ранее эта задача изучалась в [8], но в предлагаемой работе удалось существенно ослабить условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1.1)$$

где $a(x, t) > 0$ всюду в $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, и поставим задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (1.2)$$

и граничным условиям

$$u_x(0, t) = \alpha(t)u_t(0, t), \quad u_x(l, t) = \beta(t)u_t(l, t). \quad (1.3)$$

¹© Киричек В.А., Пулькина Л.С., 2017

Киричек Виталия Александровна (vitalya@gmail.com), Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Обозначим

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{(x, t) : x = 0, t \in [0, T]\}, \quad \Gamma_l = \{(x, t) : x = l, t \in [0, T]\}, \\ \Gamma &= \Gamma_0 \cup \Gamma_l, \\ W(Q_T) &= \{u : u \in W_2^1(Q_T), u_t \in L_2(\Gamma)\}, \\ \hat{W}(Q_T) &= \{v : v \in W(Q_T), v(x, T) = 0\}.\end{aligned}$$

Введем понятие обобщенного решения, для чего, следуя известной процедуре [7], сначала выведем равенство

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t - a u_x v_x + c u v) dx dt &= \int_0^l \psi(x) v(x, 0) dx + \\ + \int_0^T a(0, t) \alpha(t) u_t(0, t) v(0, t) dt &- \int_0^T a(l, t) \beta(t) u_t(l, t) v(l, t) dt + \\ + \int_0^T \int_0^l f(x, t) v dx dt, &\end{aligned} \quad (1.4)$$

которое является результатом интегрирования соотношения $vLu = fv$ по области Q_T .

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию $u(x, t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ и интегральному тождеству (1.4) для любой функции $v(x, t) \in \hat{W}(Q_T)$

2. Разрешимость задачи

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}c \in C(\bar{Q}_T), a_t \in C(\bar{Q}_T), a \in C(\bar{Q}_T), f \in L_2(Q_T), \\ \alpha, \beta \in C^2[0, T], \alpha(t) > 0, \beta(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T].\end{aligned}$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3).

Доказательство

Для доказательства единственности покажем, что функция $u(x, t)$, которая представляет собой разность двух обобщенных решений задачи $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, всюду в области Q_T равна нулю. Очевидно, что $u(x, 0) = 0$ и выполняется тождество

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t - a u_x v_x + c u v) dx dt = \\ = \int_0^T a(0, t) \alpha(t) u_t(0, t) v(0, t) dt - \int_0^T a(l, t) \beta(t) u_t(l, t) v(l, t) dt.\end{aligned}$$

Выберем в качестве $v(x, t)$ в этом тождестве функцию

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_{\tau}^t u(x, \eta) d\eta; & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0; & \tau \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\tau \in [0, T]$ и произвольно. Легко видно, что эта функция принадлежит пространству $\hat{W}_2^1(Q_T)$ и $v_t = u$.

В результате интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned}\int_0^l (v_t^2(x, \tau) + a(x, 0) v_x^2(x, 0)) dx + \\ + 2 \int_0^{\tau} a(0, t) \alpha(t) v_t^2(0, t) a(0, t) dt - 2 \int_0^{\tau} a(l, t) \beta(t) v_t^2(l, t) dt = \\ = \int_0^{\tau} (a(0, t) \alpha(t))_{tt} v^2(0, t) dt - \int_0^{\tau} (a(l, t) \beta(t))_{tt} v^2(l, t) dt -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l c v_t v dx dt + \\
 & + v^2(0,0)(a(0,t)\alpha(t))_t|_{t=0} - v^2(l,0)(a(l,t)\beta(t))_t|_{t=0}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Сделаем некоторые оценки. Заметим, что в силу условий теоремы существует такое положительное число c_0 , что $\max_{\bar{Q}_\tau} |c(x,t)| \leq c_0$. Применяя неравенство Коши, получим

$$2 \left| \int_0^\tau \int_0^l c v_t v dx dt \right| \leq c_0 \int_0^\tau \int_0^l (v^2 + v_t^2) dx dt.$$

Рассмотрим теперь два первых слагаемых правой части равенства (2.2). Для того, чтобы их оценить, воспользуемся неравенствами

$$\begin{aligned}
 v^2(0,t) & \leq 2l \int_0^l v_x^2(x,t) dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x,t) dx, \\
 v^2(l,t) & \leq 2l \int_0^l v_x^2(x,t) dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x,t) dx,
 \end{aligned}$$

которые легко следуют из представлений [6]

$$v(0,t) = \int_x^0 v_\xi(\xi,t) d\xi + v(x,t), \quad v(l,t) = \int_x^l v_\xi(\xi,t) d\xi + v(x,t).$$

С помощью этих неравенств, учитывая также условия теоремы, гарантирующие существование положительных чисел A_0, B_0 таких, что $|(a(0,t)\alpha(t))_{tt}| \leq A_0$, $|(a(l,t)\beta(t))_{tt}| \leq B_0$, получим

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^\tau v^2(0,t)(a(0,t)\alpha(t))_{tt} dt \right| & \leq A_0 \left(2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t) dx dt \right), \\
 \left| \int_0^\tau v^2(l,t)(a(l,t)\beta(t))_{tt} dt \right| & \leq B_0 \left(2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t) dx dt \right).
 \end{aligned}$$

Используя условия теоремы и неравенства [7]

$$\begin{aligned}
 v^2(0,0) & \leq \int_0^l (\varepsilon v_x^2(x,0) + c(\varepsilon) v^2(x,0)) dx, \\
 v^2(l,0) & \leq \int_0^l (\varepsilon v_x^2(x,0) + c(\varepsilon) v^2(x,0)) dx,
 \end{aligned}$$

получим оценки внеинтегральных слагаемых

$$\begin{aligned}
 |v^2(0,0)(a(0,t)\alpha(t))_t|_{t=0}| & \leq A(\varepsilon \int_0^l v_x^2(x,0) dx + c(\varepsilon) \int_0^l v^2(x,0) dx), \\
 |v^2(l,0)(a(l,t)\beta(t))_t|_{t=0}| & \leq B(\varepsilon \int_0^l v_x^2(x,0) dx + c(\varepsilon) \int_0^l v^2(x,0) dx).
 \end{aligned}$$

Благодаря полученным оценкам придем к неравенству

$$\begin{aligned}
 \int_0^l (u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)) dx & \leq c_1 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2) dx dt + \\
 & + c_2 \varepsilon \int_0^l v_x^2(x,0) dx + c_3 \int_0^l v^2(x,0) dx,
 \end{aligned}$$

где $c_1 = \max\{2l(A_0 + B_0), \frac{2(A_0+B_0)}{l}, c_0\}$, $c_2 = (A + B)$, $c_3 = c_2c(\varepsilon)$.

Будем считать, не ограничивая общности, что $a(x, t) \geq a_0 > 0$, и выберем $\varepsilon = \frac{a_0}{2c_2}$. Тогда $a_0 - c_2\varepsilon = \frac{a_0}{2} > 0$. Перенеся теперь второе слагаемое правой части в левую, получим

$$\int_0^l (u^2(x, \tau) + \frac{a_0}{2} v_x^2(x, 0)) dx \leq c_1 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2) dx dt + c_3 \int_0^l v^2(x, 0) dx.$$

В силу представления (2.1)

$$v^2(x, 0) \leq \tau \int_0^\tau u^2(x, t) dt,$$

мы приходим к неравенству

$$\int_0^l (u^2(x, \tau) + \frac{a_0}{2} v_x^2(x, 0)) dx \leq c_4 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2) dx dt, \quad (2.3)$$

где $c_4 = c_1 + c_3\tau^2$.

Введем вспомогательную функцию

$$w(x, t) = \int_0^t u_x(x, \eta) d\eta.$$

Из этого представления следует, что

$$v_x(x, t) = w(x, t) - w(x, \tau), v_x(x, 0) = -w(x, \tau).$$

Тогда

$$v_x^2(x, t) \leq 2w^2(x, t) + 2w^2(x, \tau).$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $\frac{a_0}{2} - 2c_4\tau > 0$. Пусть для определенности $\frac{a_0}{2} - 2c_4\tau \geq \frac{a_0}{4}$. Тогда для любого $\tau \in [0, \frac{a_0}{8c_4}]$

$$\int_0^l (u^2 + w^2) dx \leq c_5 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + w^2) dx dt,$$

где $c_5 = 2c_4 / \min\{1, \frac{a_0}{4}\}$. Применив лемму Гронуолла, получим, что $u(x, \tau) = 0$ для любого $\tau \in [0, \frac{a_0}{8c_4}]$. Если рассмотреть теперь задачу с начальными данными на $t = \frac{a_0}{8c_4}$, то в результате тех же рассуждений, что и выше, докажем, что $u(x, \tau) = 0$ при $\tau \in [0, \frac{a_0}{2c_4}]$. Продолжив этот процесс, за конечное число шагов получим, что $u = 0$ во всем цилиндре Q_T .

Для доказательства существования обобщенного решения применим метод компактности. Начнем с построения последовательности приближенных решений поставленной задачи методом Галеркина. Рассмотрим последовательность $\{w_n(x)\}$, где $w_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, которая является линейно независимой и образует полную систему в $W_2^1(\Omega)$. Будем искать приближенные решения задачи в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) w_k(x) \quad (2.4)$$

из соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j) dx + a(0, t) \alpha(t) u_t^m(0, t) w_j - \\ - a(l, t) \beta(t) u_t^m(l, t) w_j = \int_0^l f w_j dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

которые представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно $d_k(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m d_k''(t) A_{kj} + \sum_{k=1}^m d_k'(t) B_{kj} + \sum_{k=1}^m d_k(t) C_{kj} = \\ = f_j(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $A_{kj} = \int_0^l w_k(x) w_j(x) dx$,

$$B_{kj} = \alpha(t)a(0,t)w_k(0)w_j(0) - \beta(t)a(l,t)w_k(l)w_j(l)$$

$$C_{kj} = \int_0^l [a(x,t)w'_k(x)w'_j(x) + c(x,t)w_k(x)w_j(x)]dx,$$

$$\text{и } f_j(t) = \int_0^l f w_j(x)dx.$$

Добавим начальные условия

$$d_k(0) = \gamma_k, \quad d'_k(0) = \delta_k,$$

где γ_k и δ_k — коэффициенты сумм $\varphi^m(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k w_k(x)$, $\psi^m(x) = \sum_{k=1}^m \delta_k w_k(x)$, аппроксимирующих при $m \rightarrow \infty$ эти суммы аппроксимируют $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в нормах $W_2^1(0, l)$ и $L_2(0, l)$ соответственно: $\varphi^m(x) \rightarrow \varphi(x)$ и $\psi^m(x) \rightarrow \psi(x)$. Таким образом, мы получили задачу Коши. Так как матрица A_{kj} является обратимой в силу выбора $w_k(x)$, то, учитывая условия теоремы, гарантирующие ограниченность коэффициентов системы, задача Коши однозначно разрешима и $d''_k \in L_1(0, T)$. Следовательно, последовательность приближенных решений $\{u^m\}$ построена.

Теперь докажем ограниченность этой последовательности в $W_2^1(Q_T)$. Для этого нужно получить априорные оценки. Умножим (2.5) на $d'_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ . Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l u_{tt}^m u_t^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l a u_x^m u_{xt}^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt + \\ & + \int_0^\tau \alpha (u_t^m(0, t))^2 dt - \int_0^\tau \beta a (u_t^m(l, t))^2 dt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Проинтегрировав по частям последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l ((u_t^m(x, \tau))^2 + a(x, \tau)(u_x^m(x, \tau))^2) dx + \int_0^\tau \alpha (u_t^m(0, t))^2 dt - \\ & - \int_0^\tau \beta a (u_t^m(l, t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^m(x, 0))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l a (u_x^m(x, 0))^2 dx - \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Применяя представление

$$u^m(x, \tau) = \int_0^\tau u_t^m dt + u^m(x, 0),$$

получим

$$\int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx \leq 2\tau \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + 2 \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx.$$

Так как в силу условий теоремы

$$\int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt \leq a_1 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m)^2 dx dt,$$

то приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^l ((u^m(x, \tau))^2 + (u_t^m(x, \tau))^2 + a(x, \tau)(u_x^m(x, \tau))^2) dx + 2 \int_0^\tau a(0, t) \alpha(t) (u_t^m(0, t))^2 dt - \\ & - 2 \int_0^\tau a(l, t) \beta(t) (u_t^m(l, t))^2 dt \leq \int_0^l (u_t^m(x, 0))^2 dx + \int_0^l a (u_x^m(x, 0))^2 dx + \end{aligned}$$

$$+2 \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx + M \int_0^\tau \int_0^l [(u_x^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt.$$

Учитывая свойства норм в пространствах L_2 и W_2^1 и выбор начальных условий задачи Коши, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2) dx + 2 \int_0^\tau a\alpha(t)(u_t^m(0, t))^2 dt - \\ & - 2 \int_0^\tau a\beta(t)(u_t^m(l, t))^2 dt \leq M \int_0^\tau \int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + \\ & + (u_x^m)^2) dx dt + \|f\|_{L_2}^2 + N(\|\psi\|_{L_2}^2 + m\|\varphi\|_{W_2^1}^2). \end{aligned}$$

Так как f является ограниченной функцией в $L_2(Q_T)$, φ в $W_2^1(Q_T)$, а ψ в $L_2(Q_T)$, то $\|f\|_{L_2}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 \leq K$, где K положительная константа. Тогда последнее неравенство примет вид

$$\int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2)_{t=\tau} dx \leq M \int_0^\tau \int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2) dx dt + K.$$

К этому неравенству применима лемма Гронуола, после ее применения и интегрирования по t от 0 до T получим

$$\int_0^\tau \int_0^l ((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2)_{t=\tau} dx dt \leq \frac{1}{M} K (e^{MT} - 1).$$

Пусть $\frac{1}{M} K (e^{MT} - 1) = N$, тогда $\|u^m\|_{W_2^1}^2 \leq N$. Значит, последовательность функций ограничена в W_2^1 , следовательно, можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из этого же пространства, то есть к $u \in W_2^1(Q_T)$. Покажем, что этот предел и есть обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3).

Умножим каждое из соотношений (2.5) на свою функцию $D_j(t)$, $D_j(T) = 0$, полученные равенства просуммируем по j от 1 до m , а затем проинтегрируем от 0 до T . Обозначим $\eta(x, t) = \sum_{j=1}^m D_j(t) w_j(x)$. После интегрирования по частям получим тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (u_t^m \eta_t^m + a u_x^m \eta_x^m + c u^m \eta^m) dx dt + \\ & + \int_0^T \alpha a u_t^m(0, t) \eta^m dt - \int_0^T \beta a u_t^m(l, t) \eta^m dt = \\ & = \int_0^T \int_0^l f \eta^m dx dt, \end{aligned}$$

справедливое для любых $\eta(x, t) = \sum_{j=1}^m D_j(t) w_j(x)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим тождество (1.4).

Заметим, что это тождество выполняется пока лишь для функций $\eta(x, t)$. Однако известно [7], что множество всех функций такого вида плотно в $W(\hat{Q}_T)$, тождество для предельной функции $u(x, t)$ выполняется для любых функций $v(x, t) \in \hat{W}(Q_T)$.

Следовательно, теорема полностью доказана.

Литература

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave motion with internal and boundary damping // Journal of applied physics, 111,014702 (2012).
- [3] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010.

- [4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // *EJDE*, 28, 1–10 (1998).
- [5] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // *Вестник СамГУ*. 2014. № 3(114). С. 9–19.
- [6] Пулькина Л.С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // *Известия вузов. Математика*. 2016. № 9. С. 42–50.
- [7] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [8] Бейлин С.А. Об одной краевой задаче для волнового уравнения // *Вестник СамГУ*. 2011. № 5(86). С. 12–17.

References

- [1] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Urvneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977 [in Russian].
- [2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave motion with internal and boundary damping. *Journal of applied physics*, 111,014702 (2012) [in English].
- [3] Korpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010 [in Russian].
- [4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 28, 1–10 (1998) [in English].
- [5] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniyakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviyami* [A problem on longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].
- [6] Pulkina L.S. *Zadacha s dinamicheskim nelokal'nyim usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics. (Iz. VUZ)], 2016, no. 9, pp. 42–50 [in Russian].
- [7] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].
- [8] Beylin S.A. *Ob odnoi kraevoi zadache dlia volnovogo uravneniia* [On a certain boundary problem for a wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2011, no. 5(86), pp. 12–17 [in Russian].

V.A. Kirichek, L.S. Pulkina²

PROBLEM WITH DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS FOR A HYPERBOLIC EQUATION

We consider an initial-boundary problem with dynamic boundary condition for a hyperbolic equation in a rectangle. Dynamic boundary condition represents a relation between values of derivatives with respect of spacial variables of a required solution and first-order derivatives with respect to time variable. The main result lies in substantiation of solvability of this problem. We prove the existence and uniqueness of a generalized solution. The proof is based on the a priori estimates obtained in this paper, Galyorkin's procedure and the properties of Sobolev spaces.

Key words: dynamic boundary conditions, hyperbolic equation, generalized solution.

Статья поступила в редакцию 22/I/2017.

The article received 22/I/2017.

²Kirichek Vitaliia Alexandrovna (Vitalya29@gmail.com), Pulkina Ludmila Stepanovna (louise@samdiff.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, Samara, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

В.П. Цветов¹

АЛЬФА-МАТРИЦЫ И ГРАФ-ПОРОЖДЕННЫЕ ГРАММАТИКИ

В статье рассматривается обобщение граф-порожденных грамматик на основе их матричных представлений. Изучаются два класса граф-порожденных грамматик, связанные с вершинными и реберными разметками порождающих графов. Дается определение альфа-матрицы над полукольцом языков, заданных при помощи конечного алфавита \mathcal{A} , и определяются соответствующие матричные алгебры. Введенные понятия в дальнейшем используются для конструктивного представления граф-порожденных языков и исследования вопросов, связанных с их эквивалентностью. Дается определение матрично порожденных грамматик как естественного надкласса граф-порожденных грамматик. Доказываемые утверждения иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: полукольца языков, формальные грамматики, порождающие грамматики, теория графов, маршруты на размеченных графах, граф-порожденные грамматики, матрично порожденные грамматики.

1. Предварительные сведения

Статья развивает подход к представлению формальных грамматик предложенный в [1], который использует графы в качестве инструмента порождения языков. Любой маршрут в вершинной форме на графе является словом некоторого языка над алфавитом, который образован множеством вершин или связанных с ними метками. Задавая совокупности начальных и конечных вершин маршрутов, а также их метки и длины, можно конструктивно определять различные языки на основе имеющихся графовых алгоритмов. В [1] показано, что множество подобных языков, названных G -языками, является строгим надмножеством регулярных языков.

Аналогичный подход может быть применен к реберно размеченным графам и маршрутам в реберной форме. Возникающие при этом языки так же названы G -языками. Языки, связанные с вершинной разметкой названы языками вершинного типа, а с реберной — языками реберного типа.

Естественный класс алгоритмов нахождения маршрутов на размеченных графах образуют алгоритмы, использующие правило матричного произведения для матриц с элементами из полукольца языков, заданных над алфавитом \mathcal{A} . Таким образом, G -языки допускают реализацию посредством матричных алгебр и стандартных типов данных. Помимо этого матричные представления являются удобным инструментом для исследования свойств G -языков, в частности, позволяют установить совпадение классов языков вершинного и реберного типов, или построить расширение класса граф-порожденных языков до класса матрично порожденных языков.

Различные виды полукольца и матричных алгебр над полукольцами традиционно используются в таких областях, как компьютерная алгебра [2–3], теория автоматов [4], оптимальное управление [5], формальные языки [6–8], теория бинарных отношений [9; 10] и др. Таким образом, применение аппарата матричных алгебр является естественным для моделирования генеративных грамматик.

Замечание 1.1. В [1] обнаружены следующие опечатки:

стр. 103, 17 строка снизу: вместо $w^0 := \varepsilon$, $w^{m+1} := w^m \circ w$ следует читать $w^0 := \varepsilon$, $w^{m+1} := w^m \circ w$;

стр. 103, 12 строка снизу: вместо $(W_1, W_2) \in P$ и $W_1 \mapsto W_2$ следует читать $(w_1, w_2) \in P$ и $w_1 \mapsto w_2$, соответственно;

стр. 105, 2 строка сверху: вместо $L_{I \times J \times \mathbb{N}_0}^\eta(G_E^A)$ следует читать $L_{I \times J \times \mathbb{N}}^\eta(G_E^A)$;

стр. 105, 12 строка сверху: вместо $L_{I \times J \times \mathbb{N}_0}^\eta(G_E^A)$ следует читать $L_{I \times J \times \mathbb{N}}^\eta(G_E^A)$;

стр. 105, 20 строка сверху: вместо $L_{I \times J \times \mathbb{N}}^\eta(G_E^A)$ следует читать $L_{I \times J \times \mathbb{N}_0}^\eta(G_E^A)$;

стр. 105, 22 строка сверху: вместо $\{S_{-i}\}_{i \in I}$ следует читать $\{S_{-i} \mid i \in I\}$;

¹© Цветов В.П., 2017

Цветов Виктор Петрович (tsf-su@mail.ru), кафедра безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

стр. 105, 25 строка сверху: вместо $F := \{S_j \mid j \in J\}$ следует читать $F := \{S_j \mid j \in J\} \cup \{S_{-i} \mid i \in I\}$;
 стр. 106, 1 строка сверху: вместо $\langle L_{\mathcal{A}}, (\circ) \rangle$ следует читать $\langle L_{\mathcal{A}}^+, (\circ) \rangle$.

Далее в статье используются обозначения и определения, введенные в [1].

2. Основные результаты

Рассмотрим конечный алфавит $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\}$ и множество слов $L_{\mathcal{A}}^*$ над этим алфавитом. Пусть, как и ранее, $\langle L_{\mathcal{A}}^*, (\circ) \rangle$ —моноид слов над алфавитом \mathcal{A} с операцией сцепления (конкатенации) слов, $2^{L_{\mathcal{A}}^*}$ —булеан над $L_{\mathcal{A}}^*$, а ε —пустое слово.

Пусть $L_1, L_2 \subseteq L_{\mathcal{A}}^*$ —языки, над алфавитом \mathcal{A} . Стандартным образом определим операции *объединения* и *сцепления* языков

$$\begin{aligned} L_1 \cup L_2 &:= \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}, \\ L_1 \circ L_2 &:= \{w := w_1 \circ w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}. \end{aligned}$$

Понятно, что для любых языков $L_1, L_2, L_3 \subseteq L_{\mathcal{A}}^*$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} L_1 \cup \emptyset &= \emptyset \cup L_1 = L_1, \\ L_1 \circ \emptyset &= \emptyset \circ L_1 = \emptyset, \\ L_1 \circ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon\} \circ L_1 = L_1, \\ L_1 \circ (L_2 \cup L_3) &= (L_1 \circ L_2) \cup (L_1 \circ L_3), \\ (L_2 \cup L_3) \circ L_1 &= (L_2 \circ L_1) \cup (L_3 \circ L_1). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать некоммутативное полукольцо с единицей $\langle 2^{L_{\mathcal{A}}^*}, (\circ, \cup) \rangle$.

2.1. Альфа-матрицы

Пусть $\alpha : 1..n \times 1..m \rightarrow 2^{L_{\mathcal{A}}^*}$ —тотальная функция. Обозначим $\alpha_{ij} := \alpha(i, j)$.

Определение 2.1. В предыдущих обозначениях будем называть *альфа-матрицей* или *α -матрицей* (размерности $n \times m$ над алфавитом \mathcal{A}) матрицу (α_{ij}) .

Обозначим $M_{\mathcal{A}}^{n \times m}$ —множество α -матриц размерности $n \times m$.

Пусть $(\alpha_{ij}^1), (\alpha_{ij}^2) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times m}$. Стандартным образом определим операции их *прямого произведения*, *объединения* и *транспонирования*, полагая

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij}^1) \otimes (\alpha_{ij}^2) &:= (\alpha_{ij}^1 \circ \alpha_{ij}^2) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times m}, \\ (\alpha_{ij}^1) \uplus (\alpha_{ij}^2) &:= (\alpha_{ij}^1 \cup \alpha_{ij}^2) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times m}, \\ (\alpha_{ij}^1)^T &:= (\alpha_{ji}^1) \in M_{\mathcal{A}}^{m \times n}. \end{aligned}$$

Пусть $(\alpha_{ij}^1) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times s}$, $(\alpha_{ij}^2) \in M_{\mathcal{A}}^{s \times m}$. Стандартным образом определим операцию их *произведения* (по правилу «строка на столбец»), полагая

$$(\alpha_{ik}^1) \odot (\alpha_{kj}^2) := (\alpha_{ij}) := \left(\bigcup_{k=1}^s \alpha_{ik}^1 \circ \alpha_{kj}^2 \right) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times m}.$$

Пусть $(\alpha_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $(\alpha_{ij})^{m+1} := (\alpha_{ij})^m \odot (\alpha_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$, где $(\alpha_{ij})^1 := (\alpha_{ij})$. Определим α -матрицы $(\varepsilon_{ij}^{n \times m}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times m}$ ($\delta_{ij}^{n \times n}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$, полагая

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{n \times m} &:= \{\varepsilon\}, \text{ для всех } i, j \in 1..n; \\ \delta_{ij}^{n \times n} &:= \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \text{если } i = j \wedge i \in 1..n \\ \emptyset, & \text{если } i \neq j \wedge i, j \in 1..n \end{cases}. \end{aligned}$$

Понятно, что для любой α -матрицы $(\alpha_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times m}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij}) \otimes (\varepsilon_{ij}^{n \times m}) &= (\varepsilon_{ij}^{n \times m}) \otimes (\alpha_{ij}) = (\alpha_{ij}), \\ (\alpha_{ik}) \odot (\delta_{kj}^{m \times m}) &= (\delta_{ik}^{n \times n}) \odot (\alpha_{kj}) = (\alpha_{ij}). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать некоммутативные полукольца с единицей $\langle M_{\mathcal{A}}^{n \times m}, (\otimes, \uplus) \rangle$ и $\langle M_{\mathcal{A}}^{n \times n}, (\odot, \uplus) \rangle$.

2.2. Представление граф-порожденных грамматик альфа-матрицами

2.2.1. Граф-порожденные грамматики вершинного типа

Напомним определение граф-порожденной грамматики [1].

Рассмотрим граф G_E^n , заданный множеством вершин $V := 1..n := \{1, 2, \dots, n\}$ и бинарным граф-отношением $E \subseteq 1..n \times 1..n$. Зададим конечный алфавит $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_{n_1}\}$ мощности $n_1 \leq n$, возможно содержащий в себе пустое слово ε , и тотальную сюръекцию $\omega_n : 1..n \rightarrow \mathcal{A}$. Обозначим L_n^+ —множество непустых слов над алфавитом $1..n$.

Рассмотрим моноид $\langle L_{\mathcal{A}}^*, (\circ) \rangle$ и определим тотальную функцию $\omega : L_n^+ \rightarrow L_{\mathcal{A}}^*$ правилом

$$\omega(\langle i_0..i_m \rangle) = \omega(i_0 i_1 \dots i_m) := \omega_n(i_0) \circ \omega_n(i_1) \circ \dots \circ \omega_n(i_m) = w \in L_{\mathcal{A}}^*.$$

Обозначим $L_{i,j,m}^v(G_E^n) \subset L_n^+$ —множество маршрутов в вершинной форме длины m на графе G_E^n из вершины i в вершину j . В случае $m = 0$ для любого $j \in 1..n$ полагаем $L_{i,j,0}^v(G_E^n) := \{i\}$.

Рассмотрим функцию $\Omega : 2^{L_n^+} \rightarrow 2^{L_{\mathcal{A}}^*}$, индуцированную функцией ω :

$$\Omega(L) := \{w := \omega(i_0 i_1 \dots i_m) \mid i_0 i_1 \dots i_m \in L \subseteq L_n^+ \subseteq L_{\mathcal{A}}^*\}.$$

Определение 2.2. В предыдущих обозначениях будем называть *граф-порожденными языками* или *G-языками (над алфавитом \mathcal{A})* языки

$$L_M^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m) \in M} \Omega(L_{i,j,m}^v(G_E^n)),$$

где $\emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N}_0$. В случае одноэлементных множеств $M = \{(i_0, j_0, m_0)\}$ соответствующие G-языки будем обозначать $L_{i_0, j_0, m_0}^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n)$.

Граф-порожденными грамматиками или *G-грамматиками (над алфавитом \mathcal{A})* будем называть четверки $\langle G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n, M \rangle$.

Языки и грамматики, фигурирующие в определении 2.2. будем также называть G-языками и G-грамматиками *вершинного типа* или *v-типа*, а граф G_E^n —*порождающим графом*.

Рассмотрим граф-порожденную грамматику $\langle G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n, M \rangle$ и ее порождающий граф G_E^n .

Пусть (g_{ij}^n) —матрица смежности вершин графа G_E^n . Определим α -матрицу $(\alpha_{ij}^{g^n}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$, полагая

$$\alpha_{ij}^{g^n} := \begin{cases} \{\omega_n(i)\}, & \text{если } g_{ij}^n = 1 \wedge i, j \in 1..n \\ \emptyset, & \text{если } g_{ij}^n = 0 \wedge i, j \in 1..n \end{cases}.$$

Определим α -матрицу $(\alpha_{ij}^A) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$, полагая

$$\alpha_{ij}^A := \{\omega_n(i)\}, \text{ для всех } i, j \in 1..n.$$

Рассмотрим α -матрицу $(\alpha_{ij}^1) := (\alpha_{ij}^{g^n}) \otimes (\alpha_{ij}^A)^T$. Понятно, что

$$\alpha_{ij}^1 = \begin{cases} \{\omega(ij)\}, & \text{если } g_{ij}^n = 1 \\ \emptyset, & \text{если } g_{ij}^n = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, элемент α -матрицы α_{ij}^1 содержит слово языка $L_{i,j,1}^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n)$, соответствующее маршруту длины 1 на графе G_E^n из вершины i в вершину j , если такой маршрут существует, и пуст, в противном случае.

Рассмотрим α -матрицу $(\alpha_{ij}^2) := (\alpha_{ij}^{g^n})^2 \otimes (\alpha_{ij}^A)^T$. Понятно, что

$$\alpha_{ij}^2 = \bigcup_{g_{ik}^n=1 \wedge g_{kj}^n=1} \{\omega(ikj)\}.$$

Таким образом, элемент α -матрицы α_{ij}^2 содержит все слова языка $L_{i,j,2}^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n)$, соответствующие маршрутам длины 2 на графе G_E^n из вершины i в вершину j , если такие маршруты существуют, и пуст, в противном случае.

Аналогичным образом рассматривая α -матрицу $(\alpha_{ij}^m) := (\alpha_{ij}^{g^n})^m \otimes (\alpha_{ij}^A)^T$, получаем, что ее элемент α_{ij}^m содержит все слова языка $L_{i,j,m}^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n)$, соответствующие маршрутам длины m из на графе G_E^n вершины i в вершину j , если такие маршруты существуют, и пуст, в противном случае.

В терминах G-языков вершинного типа сказанное означает то, что справедлива следующая

Лемма 2.1. G-язык вершинного типа допускает представление

$$L_M^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m) \in M} \Omega(L_{i,j,m}^v(G_E^n)) = \bigcup_{(i,j,m) \in M} \alpha_{ij}^m,$$

где

$$(\alpha_{ij}^m) := \begin{cases} (\alpha_{ij}^{g^n})^m \otimes (\alpha_{ij}^A)^T, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ (\alpha_{ij}^A), & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases}.$$

Замечание 2.1. В определении 2.2 единственный маршрут нулевой длины из вершины i в вершину j на графе G_E^n полагается равным самой вершине i для любого значения $j \in 1..n$. В [1] показано, что определенный таким образом G-язык вершинного типа, является регулярным.

В действительности, G-язык вершинного типа остается регулярным и в том случае, если считать, что

$$L_{i,j,0}^v(G_E^n) := \begin{cases} \{i\}, & \text{если } (i,j) \in E \\ \emptyset, & \text{если } (i,j) \notin E \end{cases}.$$

Распознающий такой язык конечный автомат можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} S &:= \{S_{-i} \mid i \in I \wedge \exists j j \in J \wedge (i,j) \in E\} \cup \{S_0, S_1, \dots, S_n, S_{n+1}\}; \\ X &:= \mathcal{A}; \\ s_0 &:= S_0; \\ \delta(s_0, \omega_n(i)) &:= \begin{cases} S_{-i}, & \text{если } i \in I \wedge \exists j j \in J \wedge (i,j) \in E \\ S_{n+1}, & \text{если } i \in 1..n \wedge i \notin I \end{cases}; \\ \delta(S_i, \omega_n(j)) &:= \begin{cases} S_j, & \text{если } i, j \in 1..n \wedge (i,j) \in E \\ S_{n+1}, & \text{если } i, j \in 1..n \wedge (i,j) \notin E \end{cases}; \\ \delta(S_{-i}, \omega_n(j)) &:= \delta(S_i, \omega_n(j)), \text{ если } i \in I \wedge \exists j j \in J \wedge (i,j) \in E; \\ \delta(S_{n+1}, \omega_n(i)) &:= S_{n+1}, \text{ если } i \in 1..n; \\ F &:= \{S_j \mid j \in J\} \cup \{S_{-i} \mid i \in I \wedge \exists j j \in J \wedge (i,j) \in E\}. \end{aligned}$$

Для подобных языков справедлива

Лемма 2.2. Определенный в текущем замечании G-язык вершинного типа допускает представление

$$L_M^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m) \in M} \Omega(L_{i,j,m}^v(G_E^n)) = \bigcup_{(i,j,m) \in M} \alpha_{ij}^m,$$

где

$$(\alpha_{ij}^m) := \begin{cases} (\alpha_{ij}^{g^n})^m \otimes (\alpha_{ij}^A)^T, & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N} \\ (\alpha_{ij}^{g^n}), & \text{если } \emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \{0\} \end{cases}.$$

Пример 2.1.

Рассмотрим порождающий граф G_E^4 , заданный граф-отношением

$$E := \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4)\} \subset 1..4 \times 1..4,$$

и его матрицу смежности вершин

$$(g_{ij}^4) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим алфавит $\mathcal{A} := \{a, b\}$ и тотальную сюръекцию $\omega_3 : 1..4 \rightarrow \mathcal{A}$, полагая

$$\omega_4(1) := a, \omega_4(2) := b, \omega_4(3) := a, \omega_4(4) := a.$$

В данном случае порождающие матрицы $(\alpha_{ij}^{g^4})$, (α_{ij}^A) , фигурирующие в формулировке леммы 2.1, будут иметь вид

$$(\alpha_{ij}^{g^4}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, \quad (\alpha_{ij}^A) := \begin{pmatrix} \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \\ \{b\} & \{b\} & \{b\} & \{b\} \\ \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \\ \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \end{pmatrix}.$$

Непустые множества маршрутов в вершинной форме длины $m > 0$ на графе G_E^4 и соответствующие им

языки имеют вид

$$\begin{aligned}
L_{1,2,1}^v(G_E^3) &= \{12\}, \\
L_{1,3,1}^v(G_E^3) &= \{13\}, \\
L_{2,4,1}^v(G_E^3) &= \{24\}, \\
L_{3,4,1}^v(G_E^3) &= \{34\}, \\
L_{1,4,2}^v(G_E^3) &= \{124, 134\}, \\
L_{1,2,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) &= \{ab\} = \alpha_{12}^1, \\
L_{1,3,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) &= \{aa\} = \alpha_{13}^1, \\
L_{2,4,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) &= \{ba\} = \alpha_{24}^1, \\
L_{3,4,1}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) &= \{aa\} = \alpha_{34}^1, \\
L_{1,4,2}^v(G_E^4, \mathcal{A}, \omega_4) &= \{aaa, aba\} = \alpha_{14}^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(\alpha_{ij}^1) &:= (\alpha_{ij}^{g^4}) \otimes (\alpha_{ij}^A)^T = \begin{pmatrix} \emptyset & \{ab\} & \{aa\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{ba\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aa\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, \\
(\alpha_{ij}^2) &:= (\alpha_{ij}^{g^4})^2 \otimes (\alpha_{ij}^A)^T = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aaa, aba\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.2.2. Лемма о прямом произведении

Пусть $(\alpha_{ij}), (\beta_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$ — α -матрицы размерности $n \times n$ над алфавитом \mathcal{A} , причем $\forall i_1, i_2, j \in 1..n \beta_{i_1 j} = \beta_{i_2 j}$, то есть все элементы, находящиеся в одном столбце матрицы (β_{ij}) совпадают.

Рассмотрим α -матрицу $(\gamma_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{2n \times 2n}$, элементы которой определены правилом

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если } i, j \in 1..n \\ \beta_{ii}, & \text{если } i \in 1..n \wedge j = n + i \\ \emptyset, & \text{если } (i \in 1..n \wedge j \neq n + i) \vee (i, j \in n + 1..2n) \end{cases}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
(\alpha_{ij}^m) &:= (\alpha_{ij})^m = (\alpha_{ij})^{m-1} \odot (\alpha_{ij}) = \left(\bigcup_{k=1}^n \alpha_{ik}^{m-1} \circ \alpha_{kj} \right), \\
(\gamma_{ij}^m) &:= (\gamma_{ij})^m = (\gamma_{ij})^{m-1} \odot (\gamma_{ij}) = \left(\bigcup_{k=1}^{2n} \gamma_{ik}^{m-1} \circ \gamma_{kj} \right), \\
(\eta_{ij}^m) &:= (\alpha_{ij})^m \otimes (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij}^m \circ \beta_{ij}).
\end{aligned}$$

Понятно, что если $i, j \in 1..n$ и $m > 1$, то

$$\gamma_{ij}^m := \bigcup_{k=1}^{2n} \gamma_{ik}^{m-1} \circ \gamma_{kj} = \bigcup_{k=1}^n \gamma_{ik}^{m-1} \circ \gamma_{kj} = \bigcup_{k=1}^n \alpha_{ik}^{m-1} \circ \alpha_{kj} = \alpha_{ij}^m.$$

Если же $i \in 1..n \wedge j \in n + 1..2n$, то

$$\gamma_{ij}^m := \bigcup_{k=1}^{2n} \gamma_{ik}^{m-1} \circ \gamma_{kj} = \bigcup_{k=1}^n \gamma_{ik}^{m-1} \circ \gamma_{kj} = \gamma_{ij}^{m-1} \circ \beta_{jj} = \alpha_{ij}^{m-1} \circ \beta_{ij} = \eta_{ij}^{m-1}.$$

Положим $\tilde{\gamma}_{ij}^m := \gamma_{i(j+n)}^m$, при $i, j \in 1..n$, и рассмотрим α -матрицу $(\tilde{\gamma}_{ij}^m) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$, являющуюся подматрицей матрицы (γ_{ij}^m) .

В силу ранее сказанного справедлива

Лемма 2.3. С учетом введенных обозначений при $m \geq 1$ имеет место равенство

$$(\alpha_{ij})^m \otimes (\beta_{ij}) = (\tilde{\gamma}_{ij}^{m+1}).$$

Из лемм 2.1–2.3 вытекают

Следствие 2.1. G-язык вершинного типа допускает представление

$$L_M^v(G_E^n, \mathcal{A}, \omega_n) := \bigcup_{(i,j,m) \in M} \Omega(L_{i,j,m}^v(G_E^n)) = \bigcup_{(i,j,m) \in M} \alpha_{ij}^m = \bigcup_{(i,j,m) \in M'} \gamma_{ij}^m,$$

$$(\gamma_{ij}^3) := (\gamma_{ij})^3 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{aaa, aba\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

а матрицы (α_{ij}^1) , (α_{ij}^2) определены в примере 2.1.

2.2.3. Граф-порожденные грамматики реберного типа

Наряду с маршрутами в вершинной форме на графе G_E^n рассмотрим маршруты в реберной форме. Маршрут в реберной форме на графе G_E^n из вершины i_0 в вершину i_m будем обозначать $\langle [i_0 i_1] \dots [i_{m-1} i_m] \rangle := (i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{m-2}, i_{m-1}), (i_{m-1}, i_m) \in L_E^+$

Обозначим $L_{i,j,m}^e(G_E^n) \subset L_E^+$ – множество маршрутов в реберной форме длины m из вершины i в вершину j . В отличие от предыдущего будем рассматривать только маршруты ненулевой длины.

Как и ранее, зададим конечный алфавит $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_{n_1}\}$ мощности $n_1 \leq |E|$ возможно содержащий в себе пустое слово ε , и тотальную сюръекцию $\bar{\omega}_E : E \rightarrow \mathcal{A}$.

Определим тотальную функцию $\bar{\omega} : L_E^+ \rightarrow L_{\mathcal{A}}^*$ правилом

$$\bar{\omega}(\langle [i_0 i_1] \dots [i_{m-1} i_m] \rangle) := \bar{\omega}_E((i_0, i_1)) \circ \bar{\omega}_E((i_1, i_2)) \circ \dots \circ \bar{\omega}_E((i_{m-1}, i_m)) = w \in L_{\mathcal{A}}^*.$$

Рассмотрим функцию $\bar{\Omega} : 2^{L_E^+} \rightarrow 2^{L_{\mathcal{A}}^*}$, индуцированную функцией $\bar{\omega}$.

Определение 2.3. В предыдущих обозначениях будем называть *граф-порожденными языками реберного типа* или *G-языками e-типа (над алфавитом \mathcal{A})* языки

$$L_M^e(G_E^n, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) := \bigcup_{(i,j,m) \in M} \bar{\Omega}(L_{i,j,m}^e(G_E^n)),$$

где $\emptyset \neq M \subseteq 1..n \times 1..n \times \mathbb{N}$. В случае одноэлементных множеств $M = \{(i_0, j_0, m_0)\}$ соответствующие G-языки будем обозначать $L_{i_0, j_0, m_0}^e(G_E^n, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E)$.

Граф-порожденными грамматиками реберного типа или *G-грамматиками e-типа (над алфавитом \mathcal{A})* будем называть четверки $\langle G_E^n, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E, M \rangle$.

Определим α -матрицу $(\bar{\alpha}_{ij}^{g^n}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$, полагая

$$\bar{\alpha}_{ij}^{g^n} := \begin{cases} \{\bar{\omega}_E((i, j))\}, & \text{если } g_{ij}^n = 1 \wedge i, j \in 1..n \\ \emptyset, & \text{если } g_{ij}^n = 0 \wedge i, j \in 1..n \end{cases}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным при обосновании справедливости леммы 2.1, легко показать, что справедлива

Лемма 2.4. G-язык реберного типа допускает представление

$$L_M^e(G_E^n, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) := \bigcup_{(i,j,m) \in M} \bar{\Omega}(L_{i,j,m}^v(G_E^n)) = \bigcup_{(i,j,m) \in M} \bar{\alpha}_{ij}^m,$$

где $(\bar{\alpha}_{ij}^m) := (\bar{\alpha}_{ij}^{g^n})^m$.

Пример 2.3.

Рассмотрим порождающий граф G_E^4 , определенный в примере 2.1. Зададим алфавит $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$ и тотальную сюръекцию $\bar{\omega}_3 : E \rightarrow \mathcal{A}$, полагая

$$\bar{\omega}_E((1, 2)) := a, \bar{\omega}_E((1, 3)) := b, \bar{\omega}_E((2, 4)) := c, \bar{\omega}_E((3, 4)) := c.$$

Матрица $(\bar{\alpha}_{ij}^{g^4})$, фигурирующая в формулировке леммы 2.4, будет иметь вид

$$(\bar{\alpha}_{ij}^{g^4}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

Непустые множества маршрутов в реберной форме длины $m > 0$ на графе G_E^4 и соответствующие им языки имеют вид

$$\begin{aligned} L_{1,2,1}^e(G_E^3) &= \{(1, 2)\}, \\ L_{1,3,1}^e(G_E^3) &= \{(1, 3)\}, \\ L_{2,4,1}^e(G_E^3) &= \{(2, 4)\}, \\ L_{3,4,1}^e(G_E^3) &= \{(3, 4)\}, \\ L_{1,4,2}^e(G_E^3) &= \{(1, 2)(2, 4); (1, 3), (3, 4)\}, \\ L_{1,2,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{a\} = \bar{\alpha}_{12}, \\ L_{1,3,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{b\} = \bar{\alpha}_{13}, \\ L_{2,4,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{c\} = \bar{\alpha}_{24}, \\ L_{3,4,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{c\} = \bar{\alpha}_{34}, \\ L_{1,4,2}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{ac, bc\} = \bar{\alpha}_{14}^2, \end{aligned}$$

где

$$(\bar{\alpha}_{ij}^2) := (\bar{\alpha}_{ij})^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{ac, bc\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

2.3. Лемма о вершинном представлении

Определение 2.4. Будем называть α -матрицу $(\alpha_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times m}$ матрицей вершинного типа, если

$$\forall i \in 1..n, j_1, j_2 \in 1..m \alpha_{ij_1} = \alpha_{ij_2}.$$

Рассмотрим матрицу $(\bar{\alpha}_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}^{n \times n}$ и определим алфавит $\mathcal{A} := \bigcup_{i,j=1}^n \bar{\alpha}_{ij}$.

Непустые элементы матрицы $(\bar{\alpha}_{ij})$ будем интерпретировать как метки соответствующих ребер $(i, j) \in E := \{(i, j) \mid \bar{\alpha}_{ij} \neq \emptyset\}$ графа G_E^n .

Если определить тотальную сюръекцию $\bar{\omega}_E : E \rightarrow \mathcal{A}$ правилом $\bar{\omega}_E((i, j)) := \bar{\alpha}_{ij} \neq \emptyset$, то в силу леммы 2.3 порожденные этим графом языки реберного типа будут иметь представление

$$L_M^e(G_E^n, \mathcal{A}, \bar{\omega}_n) := \bigcup_{(i,j,m) \in M} \bar{\Omega}(L_{i,j,m}^v(G_E^n)) = \bigcup_{(i,j,m) \in M} \bar{\alpha}_{ij}^m,$$

где $(\bar{\alpha}_{ij}^m) := (\bar{\alpha}_{ij})^m$.

Обозначим d_i — количество непустых элементов в i -ой строке матрицы $(\bar{\alpha}_{ij})$. Понятно, что $|E| = \sum_{i=1}^n d_i = d$. Занумеруем ребра графа G_E^n в порядке появления соответствующих им непустых элементов в строках матрицы $(\bar{\alpha}_{ij})$, начиная с первой строки. Таким образом, первые d_1 ребер будут иметь вид $(1, j_s)$ $s \in 1..m_1$, следующие d_2 ребер будут иметь вид $(2, j_s)$ $s \in d_1 + 1..d_1 + d_2$, и т.д.

На множестве E зададим бинарное отношение $R \subseteq E \times E$, полагая, что ребра $e_s := (i_s, j_s)$, $e_k := (i_k, j_k)$ находятся в отношении R , если $j_s = i_k$, то есть, если ребро e_s входит в вершину j_s , а ребро e_k исходит из нее.

На множестве вершин $1..d$ зададим граф-отношение E_R , полагая $(s, k) \in E_R$, если $(e_s, e_k) \in R$.

Определим граф $G_{E_R}^d$. Понятно, что k -ой вершине графа $G_{E_R}^d$ соответствует k -ое ребро графа G_E^n . Зададим метки вершин графа $G_{E_R}^d$ в соответствии с метками ребер графа G_E^n , то есть определим тотальную сюръекцию $\omega_d : 1..d \rightarrow \mathcal{A}$, полагая

$$\omega_d(s) := \bar{\alpha}_{i_s j_s} \text{ для всех } s \in 1..d,$$

где $(i_s, j_s) = e_s$ — s -ое ребро графа G_E^n .

Пусть (g_{sk}^d) — матрица смежности вершин графа $G_{E_R}^d$. Как и ранее, определим α -матрицу $(\alpha_{sk}^{g^d})$, полагая

$$\alpha_{sk}^{g^d} := \begin{cases} \{\omega_d(s)\}, & \text{если } g_{sk}^d = 1 \wedge s, k \in 1..d \\ \emptyset, & \text{если } g_{sk}^d = 0 \wedge s, k \in 1..d \end{cases}.$$

Рассмотрим ребро $e_s := (i_s, j_s)$ графа G_E^n , исходящее из вершины i_s и входящее в вершину j_s . В этом случае $\bar{\alpha}_{i_s j_s} = \bar{\omega}_E((i_s, j_s)) \neq \emptyset$. Если существует ребро $e_k := (j_s, j_k)$ графа G_E^n , исходящее из вершины j_s и входящее в вершину j_k , то $\alpha_{sk}^{g^d} = \omega_d(s) = \bar{\alpha}_{i_s j_s} = \bar{\omega}_E((i_s, j_s)) \neq \emptyset$, в противном случае $\alpha_{sk}^{g^d} = \emptyset$.

Таким образом, элемент α -матрицы $\alpha_{sk}^{g^d}$ содержит слово языка $L_{i_s, j_s, 1}^e(G_E^n, \mathcal{A}, \bar{\omega}_n)$, соответствующее маршруту длины 1 в реберной форме на графе G_E^n из вершины i_s в вершину j_s , если существует маршрут длины

2 из вершины i_s через вершину j_s в некоторую вершину j_k , и пуст, в противном случае. Это слово также принадлежит языку $L_{s,k,0}^v(G_{E_R}^d, \mathcal{A}, \omega_d)$, то есть соответствует маршруту длины 0 в вершинной форме из вершины s в вершину k на графе $G_{E_R}^d$, если полагать, что этот путь равен s для любой вершины $k \in 1..d$.

Если, как и ранее при доказательстве леммы 2.1, определить α -матрицу $(\alpha_{sk}^A) \in M_{\mathcal{A}}^{d \times d}$, полагая

$$\alpha_{sk}^A := \{\omega_d(s)\}, \text{ для всех } s, k \in 1..d,$$

и рассмотреть α -матрицу $(\alpha_{sk}^1) := (\alpha_{sk}^{g^d}) \otimes (\alpha_{sk}^A)^T$, то

$$\alpha_{sk}^1 = \begin{cases} \{\omega(sk)\}, & \text{если } g_{sk}^d = 1 \\ \emptyset, & \text{если } g_{sk}^d = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, элемент α -матрицы α_{sk}^1 содержит единственное слово языка $L_{s,k,1}^v(G_{E_R}^d, \mathcal{A}, \omega_d)$, соответствующее маршруту длины 1 в вершинной форме на графе $G_{E_R}^d$ из вершины s в вершину k , если такой маршрут существует, и пуст, в противном случае. Этому маршруту соответствует маршрут длины 2 в реберной форме на графе G_E^n из вершины i_s через вершину j_s в вершину j_k , и, как следствие, слово α_{sk}^1 также принадлежит языку $L_{i_s, j_k, 2}^e(G_E^n, \mathcal{A}, \bar{\omega}_n)$.

Рассмотрим α -матрицы $(\bar{\alpha}_{ij}^m) := (\bar{\alpha}_{ij}^m)^m$, $(\alpha_{sk}^m) := (\alpha_{sk}^{g^d})^m \otimes (\alpha_{sk}^A)^T$.

Обозначим $\vec{S}(i) := \{s \mid e_s = (i, j)\}$ — множество индексов ребер графа G_E^n , исходящих из вершины i , и $\overleftarrow{K}(j) := \{k \mid e_k = (i, j)\}$ — множество индексов ребер графа G_E^n , входящих в вершину j . Понятно, что $\vec{S}(i) = \{s \mid \sum_{m=1}^{i-1} d_m < s \leq \sum_{m=1}^i d_m\}$.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно показать, что при $m > 1$

$$\bar{\alpha}_{ij}^m = \bigcup_{s \in \vec{S}(i) \wedge k \in \overleftarrow{K}(j)} \alpha_{sk}^{m-1}.$$

Из сказанного, а также из леммы 2.3 о прямом произведении и ее следствий вытекает

Лемма 2.5. С учетом введенных обозначений при $m > 1$ имеет место равенство

$$\bar{\alpha}_{ij}^m = \bigcup_{s \in \vec{S}(i) \wedge k \in \overleftarrow{K}(j)} \gamma_{s(k+d)}^m,$$

где элементы матрицы вершинного типа $(\gamma_{sk}) \in M_{\mathcal{A}}^{2d+1 \times 2d+1}$ заданы правилом

$$\gamma_{sk} := \begin{cases} \alpha_{sk}, & \text{если } s, k \in 1..d \\ \alpha_{ss}^A, & \text{если } s \in 1..d \wedge k = d + s \\ \emptyset, & \text{если } (s \in 1..d \wedge k \neq d + s) \vee (s, k \in d + 1..2d) \\ \emptyset, & \text{если } s = 2d + 1 \wedge k \in 1..2d \\ \emptyset, & \text{если } s \in 1..2d + 1 \wedge k = 2d + 1 \end{cases},$$

и $(\gamma_{sk}^m) := (\gamma_{sk})^m$.

Кроме того,

$$\bar{\alpha}_{ij} := \begin{cases} \gamma_{s(s+d)}, & \text{если } (i, j) = e_s \in E \\ \gamma_{(2d+1)(2d+1)}, & \text{если } (i, j) \notin E \end{cases}.$$

Пример 2.4.

Рассмотрим порождающий граф G_E^4 , α -матрицу и G -языки реберного типа, определенные в примере 2.3.

Примем следующую нумерацию ребер графа G_E^4 :

$$e_1 := (1, 2), e_2 := (1, 3), e_3 := (2, 4), e_4 := (3, 4).$$

Бинарные отношения $R \subset E \times E$ и $E_R \subset 1..4 \times 1..4$, фигурирующие в предыдущих рассуждениях, будут иметь вид:

$$R := \{(e_1, e_3), (e_2, e_3)\}, \\ E_R := \{(1, 3), (2, 3)\}.$$

В этом случае

$$(\alpha_{sk}^{g^4}) = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, \quad (\alpha_{sk}^A) = \begin{pmatrix} \{a\} & \{a\} & \{a\} & \{a\} \\ \{b\} & \{b\} & \{b\} & \{b\} \\ \{c\} & \{c\} & \{c\} & \{c\} \\ \{c\} & \{c\} & \{c\} & \{c\} \end{pmatrix}, \\ \vec{S}(1) = \{1, 2\}, \vec{S}(2) = \{3\}, \vec{S}(3) = \{4\}, \vec{S}(4) = \emptyset, \\ \overleftarrow{K}(1) = \emptyset, \overleftarrow{K}(2) = \{1\}, \overleftarrow{K}(3) = \{2\}, \overleftarrow{K}(4) = \{3, 4\}.$$

Соответствующая им матрица (γ_{sk}) , фигурирующая в формулировке леммы 2.5, будет иметь вид

$$(\gamma_{sk}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \{a\} & \emptyset & \{a\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{b\} & \emptyset & \{b\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

При этом выполняются легко проверяемые равенства

$$\begin{aligned} L_{1,2,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{a\} = \bar{\alpha}_{12} = \gamma_{15}, \\ L_{1,3,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{b\} = \bar{\alpha}_{13} = \gamma_{26}, \\ L_{2,4,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{c\} = \bar{\alpha}_{24} = \gamma_{37}, \\ L_{3,4,1}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{c\} = \bar{\alpha}_{34} = \gamma_{48}, \\ L_{1,4,2}^e(G_E^4, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) &= \{ac, bc\} = \bar{\alpha}_{14}^2 = \bigcup_{s \in \{1,2\} \wedge k \in \{3,4\}} \gamma_{s(k+4)}^2, \end{aligned}$$

где

$$(\gamma_{sk}^2) := (\gamma_{sk})^2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{ac\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{bc\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix},$$

а матрицы $(\bar{\alpha}_{ij}^1)$, $(\bar{\alpha}_{ij}^2)$ определены в примере 2.3.

Непосредственным следствием леммы 2.5 является

Лемма 2.6. Классы G-языков вершинного и реберного типов совпадают.

Пример 2.5.

Рассмотрим порождающий граф G_E^2 , заданный граф-отношением

$$E := \{(1, 2)\} \subset 1..2 \times 1..2,$$

с матрицей смежности вершин

$$(g_{ij}^2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим алфавит $\mathcal{A} := \{a, \varepsilon\}$ и тотальные сюръекции $\omega_2 : 1..2 \rightarrow \mathcal{A}$, $\bar{\omega}_2 : E \rightarrow \mathcal{A}$, полагая

$$\omega_2(1) := \varepsilon, \omega_2(2) := a; \bar{\omega}_E((1, 2)) := \varepsilon.$$

В данном случае матрицы $(\alpha_{ij}^{g^2})$, (α_{ij}^A) , $(\bar{\alpha}_{ij}^{g^2})$, фигурирующие в формулировках лемм 2.1 и 2.4 будут иметь вид

$$(\alpha_{ij}^{g^2}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{\varepsilon\} \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, \quad (\alpha_{ij}^A) := \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{\varepsilon\} \\ \{a\} & \{a\} \end{pmatrix}, \quad (\bar{\alpha}_{ij}^{g^2}) := \begin{pmatrix} \emptyset & \{\varepsilon\} \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Понятно, что $L_{1,1,0}^v(G_E^2, \mathcal{A}, \omega_2) = \{\varepsilon\}$ и $L_{1,1,1}^e(G_E^2, \mathcal{A}, \bar{\omega}_E) = \{\varepsilon\}$.

Пример 2.6.

Рассмотрим алфавит \mathcal{A} и непустое слово $w \in L_{\mathcal{A}}^+$ длины $|w| = n$.

Зададим вспомогательный алфавит $\mathcal{A}_1 := \{w[i] \mid i = 1..n\}$, где $w[i]$ — i -ая буква слова w .

Зададим порождающий граф G_E^n при помощи граф-отношения

$$E := \{(1, 2), (2, 3), \dots, (i-1, i), \dots, (n-1, n)\} \subset 1..n \times 1..n,$$

и определим тотальную сюръекцию $\omega_n : 1..n \rightarrow \mathcal{A}_1$, полагая

$$\omega_n(i) := w[i], \text{ для всех } i \in 1..n.$$

Понятно, что $L_{1,n,n-1}^v(G_E^n, \mathcal{A}_1, \omega_n) = \{w\}$.

Также зададим порождающий граф G_E^{n+1} при помощи граф-отношения

$$E := \{(1, 2), (2, 3), \dots, (i-1, i), \dots, (n, n+1)\} \subset 1..n+1 \times 1..n+1.$$

и определим тотальную сюръекцию $\bar{w}_{n+1} : E \rightarrow \mathcal{A}_1$, полагая

$$\bar{w}_E((i, i+1)) := w[i], \text{ для всех } i \in 1..n.$$

Понятно, что $L_{1..n+1, n}^e(G_E^{n+1}, \mathcal{A}_1, \bar{w}_E) = \{w\}$.

Непосредственно из результатов примеров 2.5, 2.6 следует

Лемма 2.7. Любой конечный язык над алфавитом \mathcal{A} является G-языком (вершинного, реберного типа).

2.4. Матрично порожденные грамматики

Способ представления G-языков при помощи элементов степеней α -матриц специального вида допускает естественное обобщение на случай произвольных языков.

С учетом предыдущих результатов, дадим следующее

Определение 2.5. Пусть $\{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^\infty$ — последовательность α -матриц согласованных размерностей над алфавитом \mathcal{A} , то есть $(\alpha_{ij})_s \in M_{\mathcal{A}}^{n_s \times m_s}$ и $n_{s+1} = m_s$. Матрично порожденными языками или M_α -языками (над алфавитом \mathcal{A}) будем называть языки

$$L_M(\{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^\infty, \mathcal{A}) := \bigcup_{(i,j,k) \in M} \alpha_{ij}^k,$$

где $M \subseteq 1..n_1 \times 1..m_k \times \mathbb{N}$ и

$$(\alpha_{ij}^k) := \bigodot_{s=1}^k (\alpha_{ij})_s := (\alpha_{i s_1})_1 \odot \dots \odot (\alpha_{s_{k-1} j})_k.$$

В случае одноэлементного множества $M = \{(i_0, j_0, k_0)\}$ соответствующие M_α -языки будем обозначать $L_{i_0, j_0, k_0}(\{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^\infty, \mathcal{A})$.

Матрично порожденными грамматиками или M_α -грамматиками (над алфавитом \mathcal{A}) будем называть тройки $\langle \{(\alpha_{ij})_s\}_{s=1}^\infty, \mathcal{A}, M \rangle$. Матрицы $(\alpha_{ij})_s$ будем называть базисными порождающими матрицами.

Пример 2.7.

При произвольном $M \subseteq 1..3 \times 1..3 \times \mathbb{N}$ определим M_α -грамматики полагая

$$(\alpha_{ij})_{2s} := \begin{pmatrix} \{aa\} & \{a, aba\} & \emptyset \\ \{bbb, aaa, ab\} & \emptyset & \{b\} \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{\varepsilon, a, b\} \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_{ij})_{2s+1} := \begin{pmatrix} \{ab, \varepsilon\} & \{b\} & \{\varepsilon\} \\ \{a, b, \varepsilon\} & \{a\} & L_{\mathcal{A}}^* \\ \{bb, aa\} & \{\varepsilon\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}.$$

При исследовании матрично порожденных грамматик естественно использовать графовые интерпретации базисных матриц $(\alpha_{ij}^{(s)}) := (\alpha_{ij})_s$, а именно, в случае $n_s = m_s$ можно трактовать их непустые элементы, как вершинные или реберные метки $G_{E(\alpha^{(s)})}^{n_s}$, заданного граф-отношением

$$E(\alpha^{(s)}) := \{(i, j) \mid \alpha_{ij}^{(s)} \neq \emptyset\} \subseteq 1..n_s \times 1..n_s.$$

В случае $n_s \neq m_s$ рассматриваются ребра соответствующих двудольных графов.

Нетрудно понять, что G-языки обоих типов являются частным случаем M_α -языков, а приведенные выше леммы при соответствующих ограничениях допускают обобщение на случай α -матриц общего вида.

Литература

- [1] Цветов В.П. Об одном надклассе A-грамматик. // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. №10(121). С. 102–108.
- [2] Golan J.S. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Pitman, 1991. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math.; Vol.54).
- [3] Hebisch U., Weinert H.J. Semirings. Algebraic Theory and Applications in Computer Science. Singapore: World Scientific, 1998.

- [4] Молчанов В.А. О матричных полугруппах над полукольцами и их приложения к теории формальных языков // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 3. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. С. 98–101.
- [5] Маслов В.П., Колокольцов В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.
- [6] Формальные языки и автоматы I: полукольца Конвея и конечные автоматы / С.И. Алешников [и др.] // Вестник Калининградского государственного университета. 2003. Вып. 3. С. 7–38.
- [7] Формальные языки и автоматы II: непрерывные полукольца и алгебраические системы / С.И. Алешников [и др.] // Вестник Калининградского государственного университета. 2005. Вып. 1–2. С. 19–45.
- [8] Исмагилов Р.С., Мастихина А.А. К вопросу частичного угадывания формальных языков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 2. С. 3–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-3-15.
- [9] Бисеров Д.С., Игудесман К.Б. Матрицы над полукольцом бинарных отношений и V-компонентные фракталы // Изв. вузов. Матем. № 5. 2011. С. 75–79.
- [10] Цветов В.П. О специальном сужении конечного рефлексивного симметричного отношения до отношения эквивалентности // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2006. № 4(44). С. 26–47.

References

- [1] Tsvetov V.P. *Ob odnom nadklasse A-grammatik* [On a superclass of A-grammars]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 10(121), pp. 102–108 [in Russian].
- [2] Golan J.S. *The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science*. Pitman, 1991. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math.; Vol. 54) [in English].
- [3] Hebisch U., Weinert H.J. *Semirings. Algebraic Theory and Applications in Computer Science*. Singapore: World Scientific, 1998 [in English].
- [4] Molchanov V.A. *O matrichnykh polugruppakh nad polukol'tsami i ikh prilozheniia k teorii formal'nykh iazykov* [On matrix semigroups over semirings and their applications to the theory of formal languages]. *Matematika. Mekhanika. Sbornik nauchnykh trudov. Vyp.* [Mathematics. Mechanics. Collection of Scientific Papers. Issue 3]. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2001, pp. 98–101 [in Russian].
- [5] Maslov V.P., Kolokoltsov V.N. *Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and its application in optimal control]. M.: Nauka, 1994 [in Russian].
- [6] Aleshnikov S.I., Boltnev Yu.F., Ezik Z. et al. *Formal'nye iazyki i avtomaty I: polukol'tsa Konveia i konechnye avtomaty* [Formal languages and automata I: Conway semirings and finite state machines]. *Vestnik Kaliningradskogo gosudarstvennogo universiteta* [IKBFU's Vestnik], 2003, Issue 3, pp. 7–38 [in Russian].
- [7] Aleshnikov S.I., Boltnev Yu.F., Ezik Z. et al. *Formal'nye iazyki i avtomaty II: nepreryvnye polukol'tsa i algebraicheskie sistemy* [Formal languages and automata II: continuous semirings and algebraic systems]. *Vestnik Kaliningradskogo gosudarstvennogo universiteta* [IKBFU's Vestnik], 2003, Issue 1–2, pp. 19–45 [in Russian].
- [8] Ismagilov R.S., Mastikhina A.A. *K voprosu chastichnogo ugadyvaniia formal'nykh iazykov* [On the problem of partial guessing of formal languages]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences], 2016, no. 2, pp. 3–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-3-15 [in Russian].
- [9] Biserov D.S., Igudesman K.B. *Matritsy nad polukol'tsom binarnykh otnoshenii i V-komponentnye fraktaly* [Matrices over the semiring of binary relations and V-component fractals]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 2011, no. 5, pp. 75–79 [in Russian].
- [10] Tsvetov V.P. *O spetsial'nom suzhenii konechnogo refleksivnogo simmetrichnogo otnosheniia do otnosheniia ekvivalentnosti* [On a special restriction of reflexive and symmetric relation to an equivalence relation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2006, no. 4(44), pp. 26–47 [in Russian].

ALPHA-MATRIX AND GRAPH-GENERATED GRAMMARS

In this paper we consider the extension of graph-generated grammars based on their matrix representations. We study two classes of graph-generated grammars associated with the vertex and edge marking of graphs. We define alpha-matrices over a semiring of languages specified by finite alphabet \mathcal{A} and then define the corresponding matrix algebras. These concepts are then used for constructive representation of graph-generated languages and research of their equivalence. We define a matrix-generated grammars as a natural superclass of graph-generated grammars. All the proofs are illustrated by examples.

Key words: semirings of languages, formal grammars, generative grammars, graph theory, paths in graphs, labeled graphs, graph-generated grammars, matrix-generated grammars.

Статья поступила в редакцию 21/1/2017.
The article received 21/1/2017.

²*Tsvetov Viktor Petrovich* (tsf-su@mail.ru), Department of Information Systems Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517+531.01

М.В. Шамолин¹

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ²

В работе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного закрепленного четырехмерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного четырехмерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи). Указаны нетривиальные механические и топологические аналогии.

Ключевые слова: четырехмерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

1. Модельные предположения

Рассмотрим однородный трехмерный круговой диск \mathcal{D}^3 с центром в точке D , гиперплоскость которого в четырехмерном евклидовом пространстве \mathbf{E}^4 перпендикулярна державке OD . Диск жестко закреплен к державке, находящейся на (обобщенном) сферическом шарнире O , и обтекается однородным потоком среды. В этом случае тело представляет собой физический (обобщенный сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает (ср. с [1; 2]).

Предположим, что суммарная сила \mathbf{S} воздействия потока среды на диск перпендикулярна диску \mathcal{D}^3 , а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α , измеряемым между вектором скорости \mathbf{v}_D точки D относительно потока и державкой OD , углами β_1, β_2 , измеряемыми в гиперплоскости диска \mathcal{D}^3 (таким образом, $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — (обобщенные) сферические координаты конца вектора \mathbf{v}_D), а также тензором приведенной угловой скорости $\tilde{\omega} \cong l\tilde{\Omega}/v_D$, $v_D = |\mathbf{v}_D|$ (l — длина державки, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости маятника). Подобные условия обобщают модель струйного обтекания пространственных тел [3; 4].

Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/l$ определяет ориентацию державки. Тогда $\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}$, где $s(\alpha) = s_1(\alpha)\text{sign}\cos\alpha$, где коэффициент сопротивления $s_1 \geq 0$ зависит лишь от угла атаки α . В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно точки D функция $s(\alpha)$ является четной.

Пусть $Dx_1x_2x_3x_4$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось Dx_1 имеет направляющий вектор \mathbf{e} , а оси Dx_2, Dx_3 и Dx_4 лежат в гиперплоскости диска \mathcal{D}^3 .

Углами (ξ, η_1, η_2) мы определим положение державки OD в четырехмерном пространстве \mathbf{E}^4 . При этом угол ξ будем измерять между державкой и направлением набегающего потока. Другими словами, вводимые углы являются (обобщенными) сферическими координатами точки D центра диска \mathcal{D}^3 на трехмерной сфере постоянного радиуса OD .

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является трехмерная сфера

$$\mathbf{S}^3\{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\}, \quad (1.1)$$

а фазовым пространством — касательное расслоение трехмерной сферы

$$T_*\mathbf{S}^3\{(\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^6 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\}. \quad (1.2)$$

¹© Шамолин М.В., 2017

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

Тензор (второго ранга) $\tilde{\Omega}$ угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ будем определять через кососимметрическую матрицу

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} \in \mathfrak{so}(4). \quad (1.3)$$

Расстояние от центра D диска \mathcal{D}^3 до центра давления (точки N) будет иметь вид $|\mathbf{r}_N| = r_N = DN(\alpha, \beta_1, \beta_2, l\Omega/v_D)$, где $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ (волну над Ω опустим).

Сразу же заметим, что, также как и в двумерном и трехмерном случаях, используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по тензору угловой скорости маятника (см. также [5; 6]). Анализ задачи об обобщенном сферическом (физическом) маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных четырехмерных тел.

2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ находится под воздействием некоторого неконсервативного поля сил (а именно, это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидова пространства \mathbf{E}^4). Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}, \quad (2.1)$$

либо вид $\text{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}$. В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, ось Dx_1 — ось динамической симметрии тела), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Конфигурационным пространством свободного n -мерного твердого тела является прямое произведение пространства \mathbf{R}^n (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\text{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс) $\mathbf{R}^n \times \text{SO}(n)$ и имеет размерность $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости четырехмерного твердого тела (а он является терзором второго ранга [7; 8; 9]), $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$, то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$* , имеет следующий вид [8; 9]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \\ \lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4}{2}, \end{aligned}$$

$M = M_F$ — момент внешних сил \mathbf{F} , действующих на тело в \mathbf{R}^4 , спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор в $\mathfrak{so}(4)$. Кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$ будем представлять в виде (1.3), где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$. При этом, очевидно, выполнены следующие равенства: $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1, \dots, 4$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathfrak{so}(4)$, переводящее пару векторов $(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ из $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$, где $\mathbf{DN} = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}$, $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на тело. При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда правая часть системы (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} M &= \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\} = \\ &= \{x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, -x_{4N}F_1, x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, x_{3N}F_1, -x_{2N}F_1\}, \end{aligned}$$

где $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ — компоненты тензора момента внешней силы в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -M_6 & M_5 & -M_3 \\ M_6 & 0 & -M_4 & M_2 \\ -M_5 & M_4 & 0 & -M_1 \\ M_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае закрепленного маятника реализуется случай (2.1). Тогда динамическая часть уравнений его движения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (I_1 + I_2)\dot{\omega}_1 &= 0, & (I_1 + I_2)\dot{\omega}_2 &= 0, \\ 2I_2\dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) &= x_{4N}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v) s(\alpha)v^2, \\ (I_1 + I_2)\dot{\omega}_4 &= 0, \\ 2I_2\dot{\omega}_5 + (I_1 - I_2)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) &= -x_{3N}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2\dot{\omega}_6 + (I_2 - I_1)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) &= x_{2N}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v) s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

поскольку момент силы воздействия среды определяется через следующую вспомогательную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\{-s(\alpha)v_D^2, 0, 0, 0\}$ — разложение силы \mathbf{S} воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

Поскольку размерность алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ равна 6, система уравнений (2.3) и составляет группу динамических уравнений на $\mathfrak{so}(4)$.

Видно, что в правую часть системы уравнений (2.3) входят, прежде всего, углы α, β_1, β_2 , поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

2.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (2.3), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \quad (2.4)$$

обладает тремя циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \quad (2.5)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (2.6)$$

При условиях (2.4)–(2.6) система (2.3) примет вид незамкнутой системы трех уравнений:

$$\begin{aligned} 2I_2\dot{\omega}_3 &= x_{4N}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v) s(\alpha)v^2, & 2I_2\dot{\omega}_5 &= -x_{3N}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2\dot{\omega}_6 &= x_{2N}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v) s(\alpha)v^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска \mathcal{D}^3) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2) = \tilde{\Omega} \mathbf{l} + (-v_\infty) \mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \eta_2), \quad \mathbf{l} = \{l, 0, 0, 0\}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Равенство (3.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

Действительно, в левой части равенства (3.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ — единичный вектор вдоль оси вектора \mathbf{v}_D . Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ имеет (обобщенные) сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1, \beta_2)$, определяющие разложение (3.2).

В правой части равенства (3.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{l} = \mathbf{OD} = \{l, 0, 0, 0\}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

На втором слагаемом правой части равенства (3.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, 0, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \eta_2)$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (3.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \quad v_D \sin \alpha \cos \beta_1 = l\omega_6 + v_\infty \sin \xi \cos \eta_1, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 &= -l\omega_5 + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1 \cos \eta_2, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 &= l\omega_3 + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1 \sin \eta_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости $\tilde{\Omega}$ и координаты $\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \xi, \eta_1, \eta_2$ фазового пространства (1.2) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2; \xi, \eta_1, \eta_2\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n, n = 4$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных $\omega_3, \omega_5, \omega_6$, через новые переменные z_1, z_2, z_3 (из набора z). Для этого производится следующая композиция поворотов на углы η_1, η_2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} &= T_{1,2}(\eta_2) \circ T_{2,3}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \\ T_{2,3}(\eta_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta_1 & -\sin \eta_1 \\ 0 & \sin \eta_1 & \cos \eta_1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2}(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \eta_2 & -\sin \eta_2 & 0 \\ \sin \eta_2 & \cos \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T_{2,3}(-\eta_1) \circ T_{1,2}(-\eta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \eta_1 + \omega_5 \sin \eta_2, \quad z_2 = -\omega_3 \cos \eta_1 \sin \eta_2 + \omega_5 \cos \eta_1 \cos \eta_2 + \omega_6 \sin \eta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \eta_1 \sin \eta_2 - \omega_5 \sin \eta_1 \cos \eta_2 + \omega_6 \cos \eta_1. \end{aligned}$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$z_3 = \dot{\xi}, \quad z_2 = -\dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi}, \quad z_1 = \dot{\eta}_2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1. \quad (4.2)$$

Таким образом, две группы уравнений (4.1) и (4.2) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \dot{\xi} \sin \eta_1 \sin \eta_2 + \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \cos \eta_1 \sin \eta_2 + \dot{\eta}_2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1 \cos \eta_2, \\ \omega_5 &= -\dot{\xi} \sin \eta_1 \cos \eta_2 - \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \cos \eta_1 \cos \eta_2 + \dot{\eta}_2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1 \sin \eta_2, \\ \omega_6 &= \dot{\xi} \cos \eta_1 - \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Видно, что три группы соотношений (2.7), (3.3), (4.3) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad s(\alpha).$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α , а функции x_{2N}, x_{3N}, x_{4N} могут зависеть, наряду с углами α, β_1, β_2 , вообще говоря, и от приведенного тензора угловой скорости $l\tilde{\Omega}/v_D$.

5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного динамически симметричного (случай (2.1)) четырехмерного твердого тела с передним торцом (круговым трехмерным диском D^3) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [10; 11] с той же моделью воздействия среды.

Если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты вектора скорости центра D диска \mathcal{D}^3 , лежащего на оси симметрии тела, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости тела (см. (1.3)) в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, I_4 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned}
& \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\
& - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2) = \frac{F_1}{m}, \\
& \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\
& + \omega_6 v \cos \alpha - \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \sigma(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) - \sigma \dot{\omega}_6 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\
& - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 v \cos \alpha + \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\
& - \sigma(-\omega_1 \omega_2 + \omega_4 \omega_6) + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\
& + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 v \cos \alpha - \omega_2 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \\
& + \sigma(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \\
& (I_1 + I_2) \dot{\omega}_1 = 0, \quad (I_1 + I_2) \dot{\omega}_2 = 0, \\
& 2I_2 \dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2)(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \\
& (I_1 + I_2) \dot{\omega}_4 = 0, \quad 2I_2 \dot{\omega}_5 + (I_1 - I_2)(\omega_4 \omega_6 - \omega_1 \omega_3) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \\
& 2I_2 \dot{\omega}_6 + (I_2 - I_1)(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где $F_1 = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma = CD$, при этом

$$\left(0, x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \right)$$

— координаты точки N приложения силы \mathbf{S} в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом.

Первые четыре уравнения системы (5.1) описывают движение центра масс в четырехмерном евклидовом пространстве \mathbf{E}^4 в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$. Вторые же шесть уравнений системы (5.1) получены из (2.2).

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (5.1) десятого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^3 \times \text{so}(4)$ четырехмерного многообразия на алгебру Ли $\text{so}(4)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (5.1) отделяется от системы кинематических уравнений и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [12, 13]).

5.1. Циклические первые интегралы

Сразу же заметим, что система (5.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \tag{5.2}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \tag{5.3}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \tag{5.4}$$

5.2. Неинтегрируемая связь

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$v \equiv \text{const}, \quad (5.5)$$

то в системе (5.1) вместо F_1 будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5.5). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (5.1), получим при $\cos \alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) &= m\sigma(\omega_3^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2) + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{2I_2 \cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \\ \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \\ &+ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5.5). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (5.1) в результате действий порождает независимую систему шестого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \omega_6 v \cos \alpha - \sigma \dot{\omega}_6 &= 0, \\ \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 v \cos \alpha + \sigma \dot{\omega}_5 &= 0, \\ \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \\ &+ \omega_3 v \cos \alpha - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \\ 2I_2 \dot{\omega}_3 &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2 \dot{\omega}_5 &= -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad 2I_2 \dot{\omega}_6 = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v .

Система (5.7) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha + v \cos \alpha [\omega_6 \cos \beta_1 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2] + \\ + \sigma [-\dot{\omega}_6 \cos \beta_1 + \dot{\omega}_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\omega}_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2] &= 0, \\ \dot{\beta}_1 v \sin \alpha - v \cos \alpha [\omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1 - \omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2] + \\ + \sigma [\dot{\omega}_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\omega}_6 \sin \beta_1 - \dot{\omega}_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2] &= 0, \\ \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 + v \cos \alpha [\omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2] + \sigma [-\dot{\omega}_3 \cos \beta_2 - \dot{\omega}_5 \sin \beta_2] &= 0, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{v^2}{2I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ \dot{\omega}_5 &= -\frac{v^2}{2I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad \dot{\omega}_6 = \frac{v^2}{2I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} &= T_{1,2}(\beta_2) \circ T_{2,3}(\beta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \\ T_{2,3}(\beta_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2}(\beta_2) = \begin{pmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T_{2,3}(-\beta_1) \circ T_{1,2}(-\beta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_1 + \omega_5 \sin \beta_2, \\ z_2 &= -\omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Как видно из (5.8), на многообразии

$$O_1 = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6) \in \mathbf{R}^6 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, \beta_1 = \pi l, k, l \in \mathbf{Z} \right\} \quad (5.13)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$. Формально, таким образом, на многообразии (5.13) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любом l неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (5.8) вырождается.

Из этого следует, что система (5.7) вне и только вне многообразия (5.13) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3 + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{z}_3 &= \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) - (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &\quad - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_2 \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_1 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{z}_2 &= -\frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \\ &\quad + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_3 \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} z_1 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{z}_1 &= \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \\ &\quad - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_3 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} z_2 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{\beta}_1 &= z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 &= -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ &\quad + x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \cos \beta_2 - x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_2 - \\ &\quad - x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_2, \end{aligned} \quad (5.16)$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ представляется в виде (5.6).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1/v, z_2/v, z_3/v)$ в силу (5.12).

Нарушение теоремы единственности для системы (5.8) на многообразии (5.13) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (5.13) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (5.8), пересекая многообразие (5.13) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы.

5.3. Постоянная скорость центра масс

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const} \quad (5.17)$$

(\mathbf{V}_C — скорость центра масс), то в системе (5.1) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (5.18)$$

Случай (5.18) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы четвертого порядка после некоторого преобразования системы (5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = \sum_{i,j=0, i \leq j}^6 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \omega_i \omega_j = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \omega_0 = v.$$

Введем для начала новые квазискорости (5.9)–(5.11).

Систему (5.1) в случаях (5.2)–(5.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha)v^2}{m} \cos \alpha, \\ \dot{\alpha}v + z_3v - \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{s(\alpha)v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \\ \dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= 0. \\ \dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= 0. \\ \dot{\omega}_3 = \frac{v^2}{2I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ \dot{\omega}_5 = -\frac{v^2}{2I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad \dot{\omega}_6 = \frac{v^2}{2I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1, 2, 3$, $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle$, $n_1 > 0$, $n_1 = \text{const}$, система (5.19) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \alpha' = -Z_3 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\ - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} Z_3' = \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \\ + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} Z_2' = -\frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_3 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\ - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} Z_1' = \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) \times \\ \times [Z_3 \sin \beta_1 - Z_2 \cos \beta_1] - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\beta_1' = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (5.25)$$

$$\beta_2' = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = & -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \\ & + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.27)$$

а функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v})$, $\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v})$, $\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v})$ представляются в виде (5.6), (5.15), (5.16), соответственно.

Видно, что в системе седьмого порядка (5.20)–(5.26) может быть выделена независимая подсистема шестого порядка (5.21)–(5.26), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем шестимерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (5.18) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы шестого порядка также возможен.

6. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

6.1. Введение зависимости от угловой скорости

Данная работа посвящена динамике четырехмерного твердого тела в четырехмерном пространстве. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на трехмерный диск \mathcal{D}^3 , $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ от тензора угловой скорости Ω лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [3, 10].

Итак, примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ — вектор-функция, содержащая тензор угловой скорости Ω . При этом зависимость функции R от тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь (h_1, h_2, h_3, h_4) — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то $x_{2N} = Q_2 - h_1 \omega_6 / v_D$, $x_{3N} = Q_3 + h_1 \omega_5 / v_D$, $x_{4N} = Q_4 - h_1 \omega_3 / v_D$.

Таким образом, функция \mathbf{r}_N выбирается в следующем виде (диск \mathcal{D}^3 задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \\ x_{4N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D} \tilde{\Omega} h, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2 \right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

(см. (1.3), (3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \sin \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Таким образом, выполнены равенства $x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1 - h_1 \omega_6 / v_D$, $x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h_1 \omega_5 / v_D$, $x_{4N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \sin \beta_2 - h_1 \omega_3 / v_D$, убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и

разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от тензора угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (6.4)$$

6.2. Приведенные системы

Теорема 6.1 Совместные уравнения (2.3), (3.3), (4.3) при выполнении условий (2.4)–(2.6), (6.1), (6.4) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (1.2) трехмерной сферы (1.1).

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad H_{1*} = \frac{h_1 B}{2I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle ' \rangle, \quad (6.5)$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + (b_* - H_{1*})\xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - [\eta_1'^2 + \eta_2'^2 \sin^2 \eta_1] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \eta_1'' + (b_* - H_{1*})\eta_1' \cos \xi + \xi' \eta_1' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \eta_2'^2 \sin \eta_1 \cos \eta_1 &= 0, \\ \eta_2'' + (b_* - H_{1*})\eta_2' \cos \xi + \xi' \eta_2' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\eta_1' \eta_2' \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} &= 0, \quad b_* > 0, \quad H_{1*} > 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (4.2)) к промежуточным безразмерным переменным $z_k = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_k$, $k = 1, 2$, $z_3 = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_3 - n_0 v_\infty b_* \sin \xi$, система (6.6) будет эквивалентна системе

$$\xi' = (1 + b_* H_{1*}) Z_3 - b_* \sin \xi, \quad (6.7)$$

$$Z_3' = -\sin \xi \cos \xi + (1 + b_* H_{1*})(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} Z_3 \cos \xi, \quad (6.8)$$

$$Z_2' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_2 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} - (1 + b_* H_{1*}) Z_1^2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} + H_{1*} Z_2 \cos \xi, \quad (6.9)$$

$$Z_1' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_1 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + (1 + b_* H_{1*}) Z_1 Z_2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} + H_{1*} Z_1 \cos \xi, \quad (6.10)$$

$$\eta_1' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (6.11)$$

$$\eta_2' = (1 + b_* H_{1*}) Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (6.12)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^3 \{ (Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^6 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi \} \quad (6.13)$$

трехмерной сферы $\mathbf{S}^3 \{ (\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi \}$.

Видно, что в системе шестого порядка (6.7)–(6.12) по причине цикличности переменной η_2 выделяется независимая подсистема пятого порядка (6.7)–(6.11), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем пятимерном многообразии.

6.3. Полный список первых интегралов

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (6.7)–(6.12) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (6.7)–(6.12) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_3 = -Z_3, \quad w_2 = \sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}, \quad w_1 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (6.14)$$

система (6.7)–(6.12) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_* H_{1*}) w_3 - b_* \sin \xi, \\ w_3' &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_* H_{1*}) w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} w_3 \cos \xi, \\ w_2' &= (1 + b_* H_{1*}) w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} w_2 \cos \xi, \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

$$w_1' = d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \eta_1}{w_1 \sin \eta_1}, \quad \eta_1' = d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \quad (6.16)$$

$$\eta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) &= -(1 + b_* H_{1*}) Z_2(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} = \mp \frac{w_1 w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) &= \\ &= (1 + b_* H_{1*}) Z_1(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1} = \pm \frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

при этом $Z_k = Z_k(w_3, w_2, w_1)$, $k = 1, 2, 3$, — функции в силу замены (6.14).

Видно, что в системе шестого порядка (6.15)–(6.17) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.15), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (6.16) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_2) уравнение (6.17) на η_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.15)–(6.17) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.15), один — для системы (6.16) и дополнительный первый интеграл, “привычающий” уравнение (6.17) (*т.е. всего четыре*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (6.15) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_3}{d\xi} &= \frac{\sin \xi \cos \xi - (1+b_* H_{1*})w_2^2 \cos \xi / \sin \xi + H_{1*} w_3 \cos \xi}{-(1+b_* H_{1*})w_3 - b_* \sin \xi}, \\ \frac{dw_2}{d\xi} &= \frac{(1+b_* H_{1*})w_2 w_3 \cos \xi / \sin \xi + H_{1*} w_2 \cos \xi}{-(1+b_* H_{1*})w_3 - b_* \sin \xi}. \end{aligned}$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем ее в алгебраическом виде

$$\frac{dw_3}{d\tau} = \frac{\tau - (1 + b_* H_{1*})w_2^2/\tau + H_{1*}w_3}{-(1 + b_* H_{1*})w_3 - b_*\tau}, \quad \frac{dw_2}{d\tau} = \frac{(1 + b_* H_{1*})w_2 w_3/\tau + H_{1*}w_2}{-(1 + b_* H_{1*})w_3 - b_*\tau}. \quad (6.19)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам $w_3 = u_2 \tau$, $w_2 = u_1 \tau$, приводим систему (6.19) к следующему виду:

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{(1+b_* H_{1*})(u_2^2 - u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{-(1+b_* H_{1*})u_2 - b_*}, \quad \tau \frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1+b_* H_{1*})u_1 u_2 + (b_* + H_{1*})u_1}{-(1+b_* H_{1*})u_2 - b_*}. \quad (6.20)$$

Сопоставим системе второго порядка (6.20) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + b_* H_{1*})(u_1^2 - u_2^2) + (b_* + H_{1*})u_2}{2(1 + b_* H_{1*})u_1 u_2 + (b_* + H_{1*})u_1}, \quad (6.21)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1} \right) = 0.$$

Итак, уравнение (6.21) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (6.22)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_3, w_2; \xi) &= \\ &= \frac{(1 + b_* H_{1*})(w_3^2 + w_2^2) + (b_* + H_{1*})w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_2 \sin \xi} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Замечание 6.1 Рассмотрим систему (6.15) с переменной диссипацией с нулевым средним, становящейся консервативной при $b_* = H_{1*}$:

$$\begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_*^2)w_3 - b_* \sin \xi, \quad w_3' = \sin \xi \cos \xi - (1 + b_*^2)w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + b_* w_3 \cos \xi, \\ w_2' &= (1 + b_*^2)w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + b_* w_2 \cos \xi. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b_*^2)(w_3^2 + w_2^2) + 2b_* w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const}, \quad (6.25)$$

$$w_2 \sin \xi = C_2^* = \text{const}. \quad (6.26)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.25), (6.26) также является первым интегралом системы (6.24). Но при $b_* \neq H_{1*}$ каждая из функций

$$(1 + b_* H_{1*})(w_3^2 + w_2^2) + (b_* + H_{1*})w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi \quad (6.27)$$

и (6.26) по отдельности не является первым интегралом системы (6.15). Однако отношение функций (6.27), (6.26) является первым интегралом системы (6.15) при любых b_* , H_{1*} .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.15). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (6.22) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_*H_{1*})}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + b_*H_{1*})}\right)^2 = \frac{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + b_*H_{1*})^2}. \quad (6.28)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (6.29)$$

и фазовое пространство системы (6.15) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.28).

Таким образом, в силу соотношения (6.22) первое уравнение системы (6.20) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_*H_{1*})u_2^2 + 2(b_* + H_{1*})u_2 + 2 - C_1U_1(C_1, u_2)}{-b_* - (1 + b_*H_{1*})u_2},$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1 + b_*H_{1*})} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\},$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_*H_{1*})u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (6.29).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.15) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - (1 + b_*H_{1*})u_2)du_2}{Q_1}, \quad (6.30)$$

$$Q_1 = 2(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_*H_{1*})u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}/(2(1 + b_*H_{1*})).$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\sin \xi|$. Если

$$u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_*H_{1*})} = r_1, \quad b_1^2 = (b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4,$$

то правая часть равенства (6.30) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}} + \\ & + (b_* - H_{1*})(1 + b_*H_{1*}) \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{-b_* + H_{1*}}{2} I_1, \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}. \quad (6.32)$$

При вычислении интеграла (6.32) возможны три случая.

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (6.33)$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.34)$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.35)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_3}{\sin \xi} + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})}, \quad (6.36)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \pm 2(1 + b_* H_{1*})r_1 \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 \pm C_1}} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \mp 2(1 + b_* H_{1*})r_1 \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 \pm C_1}} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (6.37)$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 + b_1^2}}{b_1 (\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 \pm C_1})} + \text{const.} \quad (6.38)$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + b_* H_{1*})r_1}{C_1 (\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2 \pm C_1})} + \text{const.} \quad (6.39)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.15) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 6..2 В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (6.22).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \xi) = G \left(\sin \xi, \frac{w_3}{\sin \xi}, \frac{w_2}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (6.40)$$

Итак, найдены два первых интеграла (6.23), (6.40) независимой системы третьего порядка (6.15). Осталось указать один первый интеграл — для системы (6.16) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.17).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_3(w_1; \eta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \eta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (6.41)$$

$$\Theta_4(w_1; \eta_1, \eta_2) = \eta_2 \pm \arctg \frac{\cos \eta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \eta_1 - 1}} = C_4 = \text{const}, \quad (6.42)$$

при этом в левую часть равенства (6.42) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (6.41).

Теорема 6..2 Система (6.15)–(6.17) шестого порядка обладает достаточным количеством (четырьмя) независимых первых интегралов (6.23), (6.40), (6.41), (6.42).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.15)–(6.17) имеет четыре первых интеграла, выражающихся соотношениями (6.23), (6.40), (6.41), (6.42) (при этом используются выражения (6.36)–(6.39)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6..3 Три группы соотношений (2.3), (3.3), (4.3) при условиях (2.4)–(2.6), (6.1), (6.4) обладают четырьмя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.

6.4. Топологические аналогии

Предъявим далее еще две группы аналогий, связанных с системой (5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.14).

При выполнении условий (6.1), (6.4) система (5.14) примет вид

$$\alpha' = -(1 + bH_1)Z_3 + b \sin \alpha, \quad (6.43)$$

$$Z_3' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 Z_3 \cos \alpha, \quad (6.44)$$

$$Z_2' = (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 Z_2 \cos \alpha, \quad (6.45)$$

$$Z_1' = (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 Z_1 \cos \alpha, \quad (6.46)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.47)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (6.48)$$

если ввести безразмерные параметры, переменные и дифференцирование по аналогии с (6.5):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad H_1 = \frac{h_1 B}{2I_2 n_0}, \quad z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (6.49)$$

Теорема 6..4 Система (6.43)–(6.48) (для свободного тела) эквивалентна системе (6.7)–(6.12) (для закрепленного маятника).

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad \eta_1 = \beta_1, \quad \eta_2 = \beta_2, \quad b_* = -b, \quad H_{1*} = -H_1, \quad (6.50)$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k$, $k = 1, 2, 3$.

Для полного интегрирования системы (6.43)–(6.48) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_3 = Z_3, \quad w_2 = \sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}, \quad w_1 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (6.51)$$

система (6.43)–(6.48) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -(1 + bH_1)w_3 + b \sin \alpha, \\ w_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_3 \cos \alpha, \\ w_2' &= (1 + bH_1)w_2 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_2 \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

$$w_1' = d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \quad \beta_1' = d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (6.53)$$

$$\beta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= (1 + bH_1)Z_2(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{w_1 w_2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + w_1^2} \sin \alpha}, \\ d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= \\ &= -(1 + bH_1)Z_1(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} = \mp \frac{w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

при этом $Z_k = Z_k(w_3, w_2, w_1)$, $k = 1, 2, 3$, — функции в силу замены (6.51).

Система (6.52)–(6.54) рассматривается на касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^3 \{(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^6 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\} \quad (6.56)$$

трехмерной сферы $\mathbf{S}^3 \{(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (6.52)–(6.54) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.52), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (6.53) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (6.54) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.52)–(6.54) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.52), один — для системы (6.53) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.54) (т.е. всего четыре).

Следствие 6..1 1. Угол атаки α и углы β_1, β_2 для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и η_1, η_2 закрепленного маятника.

2. Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.

3. Первые интегралы системы (6.52)–(6.54) могут быть автоматически получены через равенства (6.23), (6.40), (6.41), (6.42) после подстановок (6.50):

$$\Theta'_1(w_3, w_2; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_3^2 + w_2^2) - (b + H_1)w_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_2 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (6.57)$$

$$\Theta'_2(w_3, w_2; \alpha) = G\left(\sin \alpha, \frac{w_3}{\sin \alpha}, \frac{w_2}{\sin \alpha}\right) = C_2 = \text{const.} \quad (6.58)$$

$$\Theta'_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const.}, \quad (6.59)$$

$$\Theta'_4(w_1; \beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \text{arctg} \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \beta_1 - 1}} = C_4 = \text{const.}, \quad (6.60)$$

при этом в левую часть равенства (6.60) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (6.59).

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (5.17). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.20)–(5.26). Тогда, в силу условий (5.17), (6.1), (6.4), (6.49) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.21)–(5.26)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha, \quad (6.61)$$

$$Z'_3 = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha, \quad (6.62)$$

$$Z'_2 = (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_2 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \quad (6.63)$$

$$Z'_1 = (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \quad (6.64)$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.65)$$

$$\beta'_2 = -(1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (6.66)$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом: $n_1 = n_0$.

Для полного интегрирования системы (6.61)–(6.66) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.51) система (6.61)–(6.66) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -w_3 + b(w_2^2 + w_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 w_3 \cos^2 \alpha, \\ w'_3 &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_3(w_2^2 + w_3^2) \cos \alpha - bw_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 w_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_3 \cos \alpha, \\ w'_2 &= (1 + bH_1)w_2 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_2(w_2^2 + w_3^2) \cos \alpha - bw_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 w_2 w_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_2 \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

$$w'_1 = d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \quad \beta'_1 = d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (6.68)$$

$$\beta'_2 = d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (6.69)$$

где выполнены условия (6.55).

Система (6.67)–(6.69) рассматривается на касательном расслоении (6.56) трехмерной сферы $\mathbf{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (6.67)–(6.69) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.67), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (6.68) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (6.69) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.67)–(6.69) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.67), один — для системы (6.68) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.69) (*т.е. всего четыре*).

Если вопрос о первых интегралах системы (6.43)–(6.48) (или (6.52)–(6.54)) решается с помощью следствия 6.1, то аналогичный вопрос для системы (6.61)–(6.66) (или (6.67)–(6.69)) решает следующая теорема 6.5.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (6.67) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Theta_1''(w_3, w_2; \alpha) &= \\ &= \frac{(1 + bH_1)(w_3^2 + w_2^2) - (b + H_1)w_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_2 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.67), используя при этом первый интеграл (6.70). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_3 = u_2 \tau, \quad w_2 = u_1 \tau, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (6.71)$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad (6.72)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0. \quad (6.73)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (6.72) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (6.72), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} p = p_0(u_2) &= C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ &\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \text{const}. \end{aligned}$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2''(w_3, w_2; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{w_3}{\sin \alpha}, \frac{w_2}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (6.74)$$

используя при этом обозначения и замены (6.71).

Итак, найдены два первых интеграла (6.70), (6.74) независимой системы третьего порядка (6.67). Осталось указать один первый интеграл — для системы (6.68), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.69).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (6.59), (6.60), а именно:

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (6.75)$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \arctg \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \beta_1 - 1}} = C_4 = \text{const}, \quad (6.76)$$

при этом в левую часть равенства (6.76) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (6.75).

Теорема 6.5 *Четыре первых интеграла (6.70), (6.74), (6.75), (6.76) системы (6.67)–(6.69) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 6.6 *Четыре первых интеграла (6.70), (6.74), (6.75), (6.76) системы (6.67)–(6.69) эквивалентны четырем первым интегралам (6.57), (6.58), (6.59), (6.60) системы (6.52)–(6.54).*

Действительно, пары первых интегралов (6.70), (6.57), (6.75), (6.59) и (6.76), (6.60) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k , $k = 1, 2, 3$, для системы (6.67)–(6.69) с фазовыми переменными w_k , $k = 1, 2, 3$, для системы (6.52)–(6.54). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (6.74), (6.58), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Заключение

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии. (1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости). (2) Движение четырехмерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости). (3) Сложное движение четырехмерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [9; 10].

Литература

- [1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.
- [2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.
- [3] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 114. № 1. P. 919–975.
- [4] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. Динамические системы. 2013. С. 5–254.
- [5] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.
- [6] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.
- [7] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
- [8] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
- [9] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
- [10] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
- [11] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во "Экзамен", 2007. 352 с.
- [12] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Journal of Mathematical Sciences, 2004, 122, no. 1, P. 2841–2915.
- [13] Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. 2007. Т. 43. № 10. С. 49–67.

References

- [1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113 [in Russian].
- [2] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika v trekhmernom prostranstve* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97 [in Russian].
- [3] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 114, no. 1, pp. 919–975 [in English].
- [4] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower- and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itoги nauki i tekhniki. Ser. "Sovremennaiia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory"* [Results of science and technics. Series: "Contemporary Mathematics and its Applications. Subject reviews"], Vol. 125, "Dynamical Systems", 2013, pp. 5–254 [in Russian].

- [5] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiiakh* [Some conditions of integrability of dynamics system in transcendent functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2012, no. 9/1(110), pp. 35–41 [in Russian].
- [6] Shamolin M.V. *Mnogoobrazie tipov fazovykh portretov v dinamike tverdogo tela, vzaimodeistviushchego s soprotivliaiushcheisia sredoi* [Variety of types of phase portraits in the dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium]. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 1996, Vol. 349, no. 2, pp. 193–197 [in Russian].
- [7] Shamolin M.V. *Dinamicheskie sistemy s peremennoi dissipatsiei: podkhody, metody, prilozheniia* [Dynamical Systems With Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications] *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, Vol. 14, issue 3, pp. 3–237 [in Russian].
- [8] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspects in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].
- [9] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetric spaces of automorphisms groups]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].
- [10] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemyykh gamiltonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 3–229 [in Russian].
- [11] Shamolin M.V. *Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela* [Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. M.: Izd-vo "Ekzamen", 2007, 352 p. [in Russian].
- [12] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, Vol. 122, no. 1, pp. 2841–2915 [in English].
- [13] Shamolin M.V. *Nekotorye model'nye zadachi dinamiki tverdogo tela pri vzaimodeistvii ego so sredoi* [Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium]. *Prikl. mekhanika* [International Applied Mechanics], 2007, Vol. 43, no. 10, pp. 49–67 [in Russian].

M. V. Shamolin³

CASES OF INTEGRABILITY CORRESPONDING TO THE PENDULUM MOTION IN FOUR-DIMENSIONAL SPACE

In this article, we systemize some results on the study of the equations of motion of dynamically symmetric fixed four-dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of the motion of a free four-dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. We also show the nontrivial topological and mechanical analogies.

Key words: four-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Статья поступила в редакцию 11/II/2017.

The article received 11/II/2017.

³Shamolin Maxim Vladimirovich (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.

МЕХАНИКА

УДК 539.4

Л.В. Степанова, В.С. Долгих¹**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ
У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ: МЕТОД ФОТОУПРУГОСТИ**

Целью настоящего исследования является многопараметрический асимптотический анализ поля напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в линейно упругом материале и построение полного асимптотического разложения М. Вильямса поля напряжений в окрестности вершины трещины. Многопараметрический анализ поля напряжений основан на поляризационно-оптических методах механики деформируемого твердого тела (методе фотоупругости). Проведена цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений, выполненных на серии образцов с трещинами и надрезами. Были рассмотрены разные классы образцов из оптически чувствительных материалов, в частности образец с двумя коллинеарными трещинами в условиях нормального отрыва. Подготовлен комплекс программ, позволяющий определить масштабные (амплитудные) множители полного асимптотического разложения М. Вильямса поля напряжений у вершины трещины. С помощью основного закона фотоупругости вычислены первые пять коэффициентов полного асимптотического разложения М. Вильямса. Проведено сравнение результатов экспериментов с имеющимся аналитическим решением. Показано, что результаты обработки оптоэлектронных измерений хорошо согласуются с аналитическим решением, полученным для бесконечной пластины с двумя коллинеарными трещинами.

Ключевые слова: асимптотическое разложение М. Вильямса, поле напряжений в окрестности вершины трещины, две коллинеарные трещины, растяжение пластины, многопараметрическое описание поля напряжений, поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела.

Введение. О методе фотоупругости

Одной из наиболее важных механики разрушения была [1; 2] и остается задача аккуратного описания поля напряжений у вершины трещины, что связано с построением высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Вильямса [3]. М. Вильямсом было впервые предложено многопараметрическое описание поля напряжений в окрестности вершины трещины [4]. С этого времени решение, предложенное М. Вильямсом для задач линейной механики разрушения, стало классическим, но, как показали исследования в этой области [5–7], чаще всего в инженерных приложениях использовался только первое слагаемое полного асимптотического разложения М. Вильямса поля напряжений в окрестности вершины трещины, который получил название коэффициента интенсивности напряжений. В последние годы на основе проведенных теоретических исследований, экспериментов, а так же математического и компьютерного моделирования сложилось четкое понимание необходимости удержания в полном асимптотическом разложении слагаемых более высокого порядка [7–11]. В работе [12] приведен обзор исследований, посвященных оценке T -напряжений в полном асимптотическом разложении М. Вильямса, и их влиянию на поле напряжений в окрестности вершины трещины. В статье описаны некоторые аспекты влияния T -напряжений на область пластического течения, теоретическое реконструирование картины изохроматических полос, а так же прогнозирование траектории распространения трещины. Что же касается нахождения самих T -напряжений, то авторы статьи показывают, что особенно эффективным для определения T -напряжений является сочетание конечно-элементного, экспериментального и аналитического методов их нахождения. В статье дан обзор большого количества проведенных исследований, и показан обоснованный вывод: для точного и надежного предсказания направления роста трещины в решении М. Вильямса недостаточно не только коэффициентов интенсивности напряжений, но даже

¹© Степанова Л.В., Долгих В.С., 2017

Степанова Лариса Валентиновна (stepanova1v@samsu.ru), Долгих Вадим Сергеевич (vadek13@rambler.ru), кафедра математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

и T -напряжения. Отсюда следует, что для точного и достоверного прогноза в решении М. Вильямса необходимо удержание не только T -напряжения, но и слагаемых высших порядков. Трудность определения полей деформаций и напряжений у вершины трещины привела к необходимости разработки и применения экспериментальных методов исследования деформаций и напряжений [13]. В настоящее время достаточно хорошо разработаны и эффективно используются методы фотоупругих покрытий, сеток, муара, тензометрии, рентгеновского анализа, травления, дифракционных решеток, электронной микроскопии, фазовой интерференции, нанесения медных покрытий, голографии, позволяющие исследовать поля деформаций при статическом и циклическом нагружении [7; 14; 15]. Искусственное двойное лучепреломление используется для изучения деформаций в прозрачных телах. Такой метод исследования деформации, называемый методом фотоупругости, нашел широкое применение в различных областях науки и техники. Одним из важных применений фотоупругости является использование данного метода при исследовании распределения напряжений в оптических стеклах, возникающих при их изготовлении, а также при исследовании остаточных напряжений. Также метод фотоупругости, иначе называемый поляризационно-оптическим методом, находит широкое применение в инженерной практике и в области научных исследований [14; 15]. Следует отметить, что применение метода фотоупругости не ограничивается плоскими моделями. Известны методы исследований на объемных моделях, в том числе вращающихся. Известны также методы, используемые для исследования термонапряженных состояний. Сочетание методов фотоупругости и муара дает возможность решать весьма сложные задачи по исследованию напряжений в зонах концентрации напряжений в телах сложной формы, нагружаемых по сложным схемам. В [17] авторы показали, что большому количеству инженерных приложений требуется как можно более точный анализ полей напряжений в окрестности вершины трещины, что в свою очередь показывает, что нельзя пренебрегать слагаемыми высших порядков в решении М. Вильямса. В наше время ситуация не изменилась, и по-прежнему остается важным вопрос, сколько слагаемых известного разложения М. Вильямса [19] необходимо использовать для получения наивысшей точности расчетов. Следует отметить, что в настоящее время особое внимание уделяется цифровой обработке изображений, получаемых в рамках метода фотоупругости (например, [17; 18]). Этим обстоятельством и обусловлена мотивация настоящей работы. В статье рассматривается обработка изохроматической картины полос с целью вычисления коэффициентов высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Вильямса поля напряжений у вершины трещины.

1. Экспериментальная часть

В данной работе был проведен ряд экспериментов с помощью поляризационно-оптических методов механики деформируемого твердого тела на проекционно-поляризационной установке ППУ-7

Было проведено несколько серий экспериментов на образцах разной конфигурации при разной амплитуде нагружения. Использовались такие образцы как: плоская пластина с двумя коллинеарными трещинами (основной образец), нагружаемая силами 50 кг. и 75 кг. (рис. 1), 95 кг. и 100 кг. (рис. 2). Для определения цены изохроматической полосы (оптической постоянной материала) использовался круглый диск из того же материала, нагруженный поочередно силами 140 кг., а так же 180 кг. и 210 кг. Процесс определения цены изохроматической полосы (оптической константы материала) называют тарировкой. Одним из самых простых и точных методов определения разности главных напряжений (тарировки) является метод полос. В данном методе картину изохром наблюдают в виде темных полос. Цена полосы для одного отдельно взятого образца должна быть одинакова при разной степени нагружения. Для каждого шага нагружения фиксируется порядок полосы и приложенная нагрузка. Проводится измерение диаметра и толщины диска, а так же поиск координат точки, лежащей на выбранной изохроматической полосе. Качественная связь между порядком полос и разностью главных напряжений устанавливается по следующей формуле:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N\sigma_0^{(1,0)}}{h} \quad (1.1)$$

где N – порядок полосы, h – толщина образца. Отсюда следует, что $\sigma_0^{(1,0)}$ выражает собой значения разности главных напряжений при заданном номере изохроматической полосы и толщине образца. Это значение и называют ценой полосы материала. Определение значения $\sigma_0^{(1,0)}$ для данного материала осуществляется из экспериментов, для которых возможно теоретическое решение и напряжения могут быть вычислены. Для определения $\sigma_0^{(1,0)}$ были проведены эксперименты на сжатие кругового диска парой сосредоточенных сил, направленных строго в вертикальной плоскости (по OY), при условии, что начало координат совпадает с

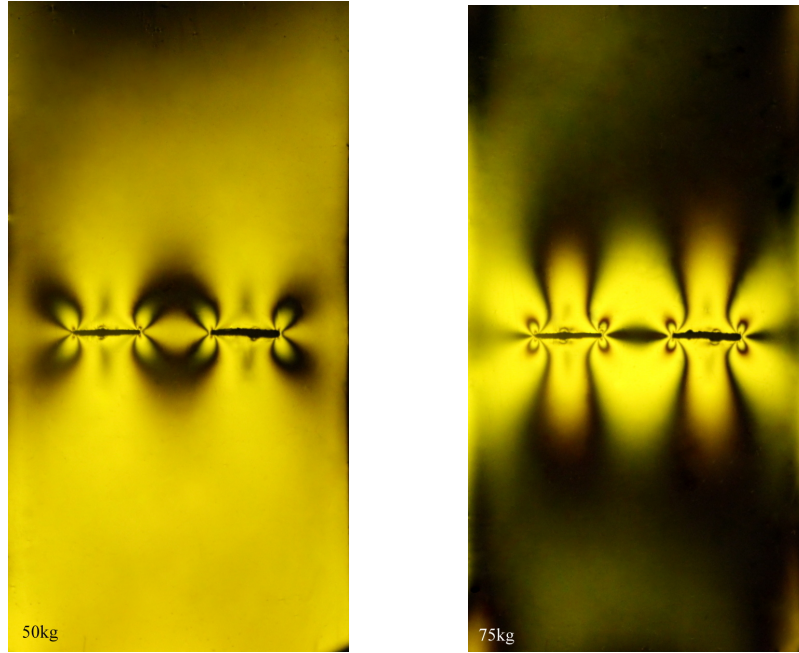


Рис. 1. Картина интерференционных полос, полученная при нагружении плоской пластины с двумя коллинеарными трещинами силой 50 кг (слева) и 75 кг (справа)

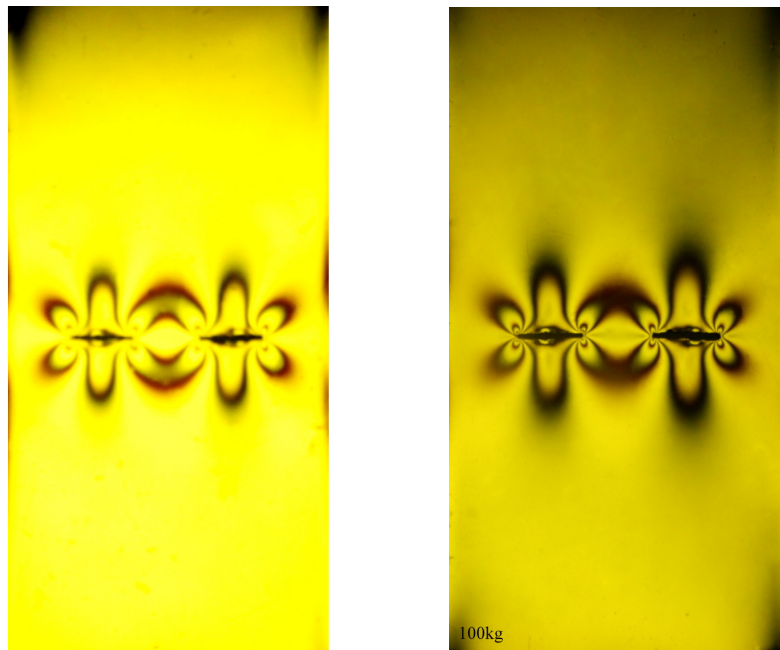


Рис. 2. Картина интерференционных полос, полученная при нагружении плоской пластины с двумя коллинеарными трещинами силой 95 кг (слева) и 100 кг (справа)

центром диска радиуса R . Напряжения в точке диска с координатами (x, y) вычисляется по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2P}{\pi h} \left\{ \frac{1}{2R} - \frac{x^2(R-y)}{[x^2 + (R-y)^2]^2} - \frac{x^2(R+y)}{[x^2 + (R+y)^2]^2} \right\}, \\ \sigma_{22} &= \frac{2P}{\pi h} \left\{ \frac{1}{2R} - \frac{(R-y)^3}{[x^2 + (R-y)^2]^2} - \frac{(R+y)^3}{[x^2 + (R+y)^2]^2} \right\}, \\ \sigma_{12} &= \frac{2P}{\pi h} \left\{ \frac{x(R-y)^2}{[x^2 + (R-y)^2]^2} - \frac{x(R+y)^2}{[x^2 + (R+y)^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для выбранной полосы порядка N , которая проходит через точку $(x, 0)$ диаметра диска, совпадающего с горизонтальном направлением оси абсцисс заданной системы координат, и для нагружения силами , при

просвечивании диска монохроматическим светом будет иметь место формула:

$$\sigma_0^{(1,0)} = \frac{|\sigma_{22} - \sigma_{11}|}{N} h, \quad (1.3)$$

так как в точках диаметра, совпадающего с осью абсцисс, напряжения σ_{22} и σ_{11} – главные.

Эксперименты по тарировке были проведены над образцом из эпоксидной смолы ЭД-20. Круговой образец был поочередно нагружен силами в 140 кг, а так же 180 кг и 210 кг. Испытуемые круговые диски показаны на рис 3 и рис 4.

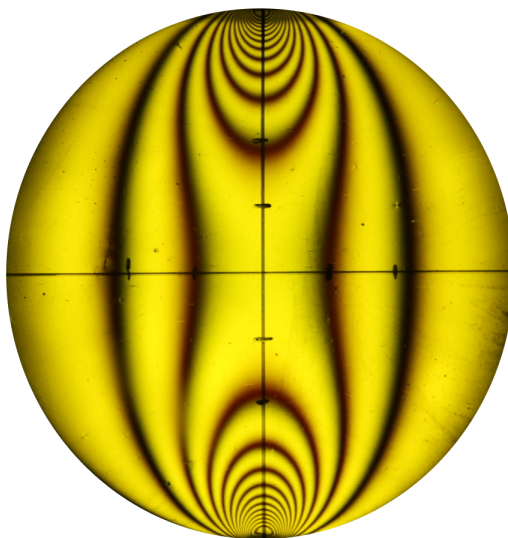


Рис. 3. Нагружение образца силами 140 кг

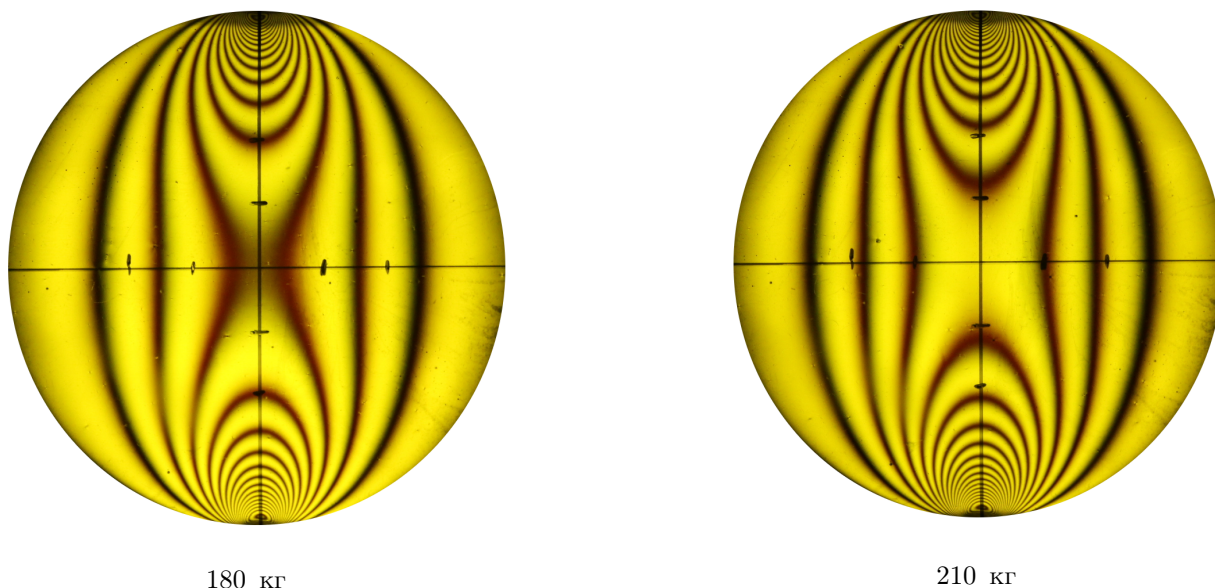


Рис. 4. Нагружение образца силами 180 кг и 210 кг

Чтобы убедиться в том, что для любой произвольно взятой точки образца значение константы материала будет приблизительно одинаковым, были взяты 8 экспериментальных точек (по одной на каждой изохроме для каждого из трех экспериментов). С использованием пакета "Waterloo Maple release 17" была написана программа для вычисления значений константы материала. После подстановки координат экспериментальных точек в формулы вычисления главных напряжений, и полученных результатов в формулу разности главных напряжений (1.1), получили следующие 8 значений оптической константы материала:

$F_\sigma = 18.286$ кг/см для точки, взятой на третьей изохроме образца, с приложенной нагрузкой 210 кг.

$F_\sigma = 17.926$ кг/см для точки, взятой на второй изохроне образца, с приложенной нагрузкой 210 кг.
 $F_\sigma = 18.079$ кг/см для точки, взятой на первой изохроне образца, с приложенной нагрузкой 210 кг.
 $F_\sigma = 18.521$ кг/см для точки, взятой на третьей изохроне образца, с приложенной нагрузкой 180 кг.
 $F_\sigma = 18.085$ кг/см для точки, взятой на второй изохроне образца, с приложенной нагрузкой 180 кг.
 $F_\sigma = 18.139$ кг/см для точки, взятой на первой изохроне образца, с приложенной нагрузкой 180 кг.
 $F_\sigma = 18.987$ кг/см для точки, взятой на второй изохроне образца, с приложенной нагрузкой 140 кг.
 $F_\sigma = 17.818$ кг/см для точки, взятой на первой изохроне образца, с приложенной нагрузкой 140 кг.
 Среднее значение цены полосы, найденное в данной работе и используемое ниже, равно $F_\sigma = 18.23$ кг/см.

2. Обработка результатов экспериментов

В ходе обработки экспериментальных данных было написано несколько комплексов программ с использованием пакета "Waterloo Maple release 17", которые позволили определить любое наперед заданное количество коэффициентов полного асимптотического разложения М. Вильямса.

Первым комплексом стали программы, позволяющие рассчитать коэффициент интенсивности напряжений. Для первой изохроматической полосы выбранного образца под действием сосредоточенной силой 95 кг. были выбраны 50 экспериментальных точек, координаты которых были сначала переведены из глобальных декартовых с началом координат в крайней левой верхней точке выбранного образца в локальные декартовы с началом координат, совпадающим с координатами правой вершины правой трещины, а затем были переведены в полярные координаты, с центром в правой вершине правой трещины.

В ходе работы была написана программа, которая подставляла координаты выбранных нами экспериментальных точек в оптико-механический закон (закон Вертгейма). Следует отметить, что в программе удалось реализовать произвольную выборку любого количества экспериментальных точек, таким образом была предпринята попытка сделать программу более универсальной, не зависящей от точек, выбираемых вручную. В программе задается количество удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении М. Вильямса, количество которых обуславливает количество неизвестных масштабных (амплитудных) множителей полного асимптотического разложения М. Вильямса. Зная количество неизвестных мы определяем необходимое количество уравнений. Программа формирует эти уравнения, и затем объединяет их в систему. Заметим, что уравнения в системе будут нелинейными, что значительно затрудняет точное определение необходимых нам коэффициентов полного асимптотического разложения М. Вильямса. Для решения этой проблемы в программе происходит процесс линеаризации системы, и последующее ее решение с помощью итерационного алгоритма [8]. Используемый алгоритм описан в следующем разделе.

3. Переопределенный метод нахождения масштабных (амплитудных) множителей

В настоящей работе для линеаризации системы нелинейных уравнений используется переопределенный метод нахождения масштабных (амплитудных) множителей.

Для плоского напряженного состояния имеют место формулы:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + (\sigma_{12})^2}. \quad (3.1)$$

Подставляя выражение главных напряжений в основной закон фотоупругости, определяем функцию $g(m)$, заданную в любой m точке рассматриваемого образца:

$$g(m) = \left\{ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right\}_m^2 + (\sigma_{12})_m^2 - \left\{ \frac{N_m F_\sigma}{h} \right\}^2. \quad (3.2)$$

Далее, если подставить полное асимптотическое разложение М. Вильямса в уравнение для функции $g(m)$, можно получить систему нелинейных уравнений от следующих неизвестных: $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l}$, где k – количество параметров первого вида нагружения (нормальный отрыв), и l – количество параметров второго вида нагружения (поперечный сдвиг). Количество уравнений данной системы полностью зависит от количества слагаемых полного асимптотического разложения, которые хотелось бы вычислить. Заметим, что каждое уравнения будет требовать экспериментальную точку, координаты которой позволят свести разложение М. Вильямса к зависимости только от масштабных (амплитудных) множителей. Рассмотрим трещину нормального отрыва, и проанализируем разложение только для первых пяти коэффициентов a_k :

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{NF_\sigma}{h}, & \sigma_1 - \sigma_2 &= \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_{ij}(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{ij}^k(\theta) r^{\frac{k}{2}-1},\end{aligned}\quad (3.3)$$

где $f_{ij}^{(k)}(\theta)$ – известные аналитические выражения для угловых функций:

$$\begin{aligned}f_{11}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2}[(2 + k/2 + (-1)^k)\cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1)\cos(k/2 - 3)\theta], \\ f_{22}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2}[(2 - k/2 - (-1)^k)\cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1)\cos(k/2 - 3)\theta], \\ f_{12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2}[(k/2 - 1)\sin(k/2 - 3)\theta - (k/2 + (-1)^k)\sin(k/2 - 1)\theta].\end{aligned}\quad (3.4)$$

Раскроем формулу, предложенную М. Вильямсом (3.3) [19]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = a_1 \frac{1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + a_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + a_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + a_{(4)} r f_{ij}^{(4)}(\theta) + a_5 r^{\frac{3}{2}} f_{ij}^{(5)}(\theta). \quad (3.5)$$

Пользуясь преобразованной формулой для разности главных напряжений:

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = \frac{NF_\sigma}{h}, \quad (3.6)$$

получаем следующее уравнение, справедливое для трещины только первой моды нагружения. Здесь приведен пример только для первого слагаемого полного асимптотического разложения М. Вильямса:

$$\left(a_1 \frac{1}{\sqrt{r}} f_{11}^{(1)}(\theta) - a_1 \frac{1}{\sqrt{r}} f_{22}^{(1)}(\theta)\right)^2 + 4 \left(a_{(1)} \frac{1}{\sqrt{r}} f_{12}^{(1)}(\theta)\right)^2 = \left(\frac{NF_\sigma}{h}\right)^2. \quad (3.7)$$

Теперь удержим несколько слагаемых полного асимптотического разложения высших порядков. Например, необходимо удержать слагаемые до пятого слагаемого включительно. В этом случае основной закон фотоупругости примет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\left(a_1 \frac{1}{\sqrt{r}} f_{11}^{(1)}(\theta) + a_2 f_{11}^{(2)}(\theta) + a_3 \sqrt{r} f_{11}^{(3)}(\theta) + a_4 r f_{11}^{(4)}(\theta) + a_5 r^{\frac{3}{2}} f_{11}^{(5)}(\theta) - \right. \\ &\left. - a_1 \frac{1}{\sqrt{r}} f_{22}^{(1)}(\theta) + a_2 f_{22}^{(2)}(\theta) + a_3 \sqrt{r} f_{22}^{(3)}(\theta) + a_4 r f_{22}^{(4)}(\theta) + a_5 r^{\frac{3}{2}} f_{22}^{(5)}(\theta)\right)^2 + \\ &+ 4 \left(a_1 \frac{1}{\sqrt{r}} f_{12}^{(1)}(\theta) + a_2 f_{12}^{(2)}(\theta) + a_3 \sqrt{r} f_{12}^{(3)}(\theta) + a_4 r f_{12}^{(4)}(\theta) + a_5 r^{\frac{3}{2}} f_{12}^{(5)}(\theta)\right)^2 = \left(\frac{NF_\sigma}{h}\right)^2.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Как можно заметить, угловые распределения зависят от координат, так что, если мы подставим какую либо экспериментальную точку, в этом квадратном уравнении будут известны все слагаемые, кроме масштабных множителей. Сам собой напрашивается вывод, что достаточно просто сделать систему из необходимого количества уравнений, зная необходимое количество экспериментальных точек. В данном конкретном примере необходимо знать пятый член полного асимптотического разложения М. Вильямса, так что достаточно любых пяти экспериментальных точек, необходимых для построения системы пяти квадратных уравнений.

Нелинейность данной системы – одно из самых сложных препятствий в решении задачи об определении коэффициентов интенсивности напряжений. В данной работе был реализован алгоритм, называемый "Метод линеаризации". Суть алгоритма заключается в том, чтобы убрать нелинейность из полученной системы уравнений для $g(m)$. Для реализации этого алгоритма в ходе работы были взяты производные первого порядка от функции $g(m)$ по переменным a_{1k} , где k – количество удерживаемых коэффициентов для нормального отрыва, и по переменным a_{1l} , где l – количество удерживаемых коэффициентов для поперечного сдвига. Разложив функцию $g(m)$ в ряд Тейлора получили:

$$(g_m)_{i+1} = (g_m)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_{11}} (\Delta a_{11})_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_{12}} (\Delta a_{12})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_{1k}} (\Delta a_{1k})_i + \quad (3.9)$$

$$+ \frac{\partial g_m}{\partial a_{21}} (\Delta a_{21})_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_{22}} (\Delta a_{22})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_{2l}} (\Delta a_{2l})_i. \quad (3.10)$$

где i – номер итерационного шага, а $\Delta a_{11}, \Delta a_{12}, \dots, \Delta a_{1k}, \Delta a_{21}, \dots, \Delta a_{2l}$ равны соответственно $(a_{1(i+1)} - a_{1(i)})$ и $(a_{2(i+1)} - a_{2(i)})$, причем количество итераций зависит от разницы предыдущего и последующего значения

коэффициентов a_{1k} и a_{2l} , то есть итерации продолжаются до тех пор, пока эта разница не достигнет достаточно малого значения 10^{-6} .

Показано, что данный алгоритм быстро сходится (достаточно 7–9 итераций). В качестве начального приближения использовалось теоретическое решение задачи о смешанном нагружении бесконечной плоскости с двумя коллинеарными трещинами [7]. В результате работы программы было получено необходимое нам количество коэффициентов полного асимптотического разложения поля напряжений в окрестности вершины трещины М. Вильямса, а так же построены теоретически реконструированные линии равных значений разности главных напряжений. Для определения размерности возьмем уже известную нам формулу полного асимптотического разложения М. Вильямса [4]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{mk} f_m^{(k)}(ij, \theta) r^{\frac{k}{2}-1}, \tag{3.11}$$

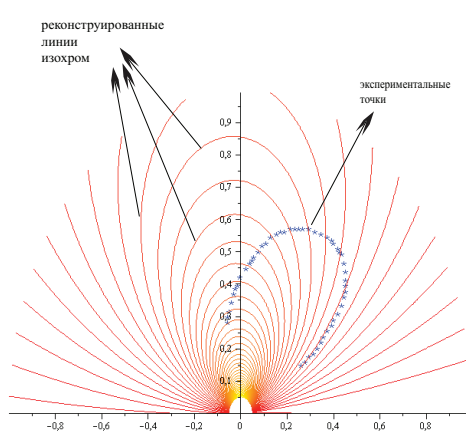
(индекс m далее опускается, поскольку рассматривается только трещина нормального отрыва) и представим это разложение в виде суммы первых пяти слагаемых (получая четырехчленное разложение, так как в начальном приближении [7] показано, что четвертый член полного асимптотического разложения М. Вильямса равен нулю):

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = a_1 \frac{1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + a_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + a_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + a_5 r^{\frac{3}{2}} f_{ij}^{(5)}(\theta) \tag{3.12}$$

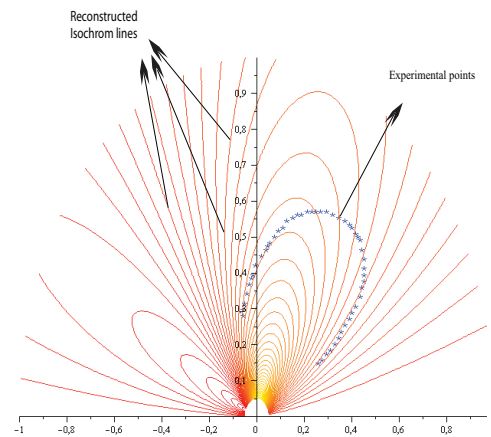
В таблице 2 представлены значения первых пяти членов полного асимптотического разложения М. Вильямса, взятых в качестве начального приближения из [7], а также значения этих коэффициентов, полученных в ходе работы программы (решение системы линейных уравнений), и значения на некоторых итерационных шагах программы.

Таблица 1. значения первых пяти коэффициентов полного асимптотического разложения М. Вильямса

Размерность	$a_{11} kg/cm^{3/2}$	$a_{12} kg/cm^2$	$a_{13} kg/cm^{5/2}$	$a_{15} kg/cm^{7/2}$
Начальные приближения	18.192	-8.636	8.475	-2.085
Решение системы	27.067	-27.580	36.448	-6.367
1 итерационный шаг	22.217	-17.126	21.440	-2.852
5 итерационный шаг	19.3610515	-14.1150358	14.3460616	-1.0191336
7 итерационный шаг	19.3610441	-14.1150387	14.3460620	-1.0191328
10 итерационный шаг	19.3610414	-14.1150396	14.3460616	-1.0191324
15 итерационный шаг	19.3610487	-14.1150367	14.3460610	-1.0191332

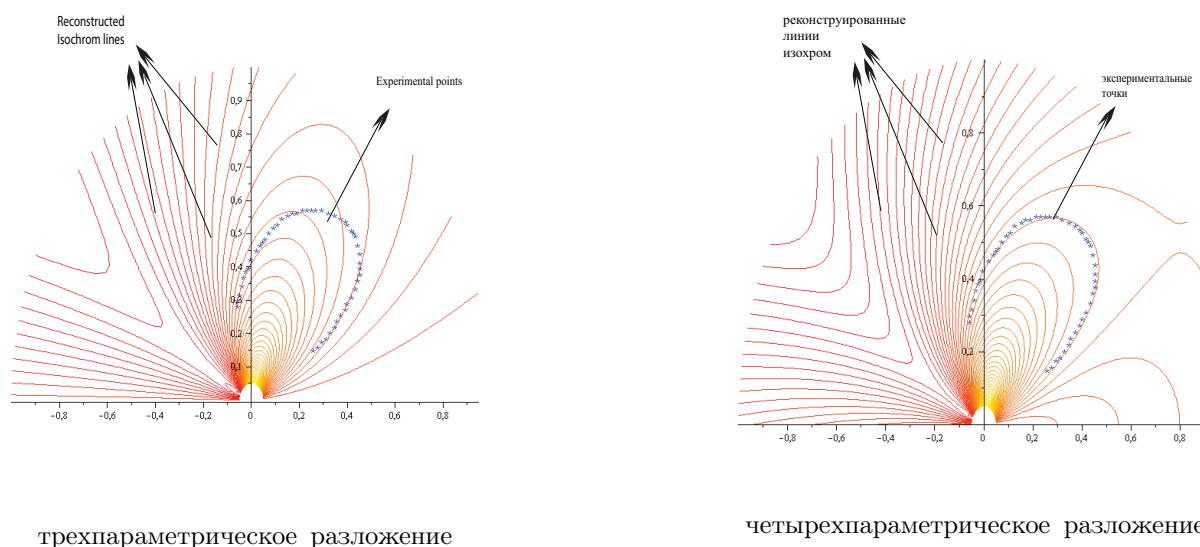


однопараметрическое разложение



двухпараметрическое разложение

Рис. 5. Теоретически реконструированные линии равных значений разности главных напряжений в случае однопараметрического и двухпараметрического разложения М. Вильямса



трехпараметрическое разложение

четырёхпараметрическое разложение

Рис. 6. Теоретически реконструированные линии равных значений разности главных напряжений в случае трехпараметрического и четырехпараметрического разложения М. Вильямса

На рис. 5 изображены однопараметрическое и двухпараметрическое разложение поля напряжений в окрестности вершины трещины. Из рис. 5 видно, что теоретически реконструированные линии равных значений разности главных напряжений не соответствуют оригинальной картине изохром (рис. 2, что является подтверждением актуальности исследования и показывает, что при повышении количества удерживаемых слагаемых можно получить более точное решение, что подтверждается рис. 6, на котором показаны трех- и пятипараметрическое разложения поля напряжений в окрестности вершины трещины. Для каждого конкретного опыта эти картины будут отличаться, но разница незначительна. В данном опыте теоретически реконструированные картины линий равных значений при пятичленном асимптотическом разложении поля напряжений в окрестности вершины трещины практически совпадают с выбранными экспериментальными точками.

Выводы

С помощью многопараметрического анализа поля напряжений, основанного на поляризационно-оптических методах механики деформируемого твердого тела (методе фотоупругости), в данной статье была проведена цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений, выполненных на серии образцов с трещинами и надрезами. Были рассмотрены разные классы образцов из оптически чувствительных материалов, в частности – образец с двумя коллинеарными трещинами в условиях нормального отрыва. Подготовлен комплекс программ, позволяющий рассчитать масштабные множители высших порядков полного асимптотического разложения М. Вильямса. С помощью основного закона фотоупругости вычислены коэффициенты полного асимптотического разложения М. Вильямса. Проведено сравнение результатов экспериментов с имеющимися аналитическими решениями, и показано, что результаты оптоэлектронных измерений и их обработки хорошо согласуются с аналитическими решениями.

Литература

- [1] Брок Д. Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.
- [2] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит, 2009. 336 с.
- [3] Voyiadjis G.Z. Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. Berlin: Springer, 2015. 1577 p.
- [4] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24. P. 109–114.
- [5] Игонин С.А., Степанова Л.В. Асимптотика полей напряжений и сплошности у вершины усталостной трещины в поврежденной среде в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 9-2(110). С. 97–108.

- [6] Кукушкин Е.В., Меновщиков В.А., Ереско Т.Т. Анализ современных представлений и подходов при исследовании усталостных разрушений игольчатых подшипников // Решетневские чтения. 2013. № 17. С. 287–288.
- [7] Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М.Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // Вестник Пермского национального технического университета. Механика. 2015. № 4. С. 188–225.
- [8] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-revisited // Engineering Fracture Mechanics. 1997. Vol. 56. 25 p.
- [9] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: analytic de-termination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2016. № 100-101. P. 11–28.
- [10] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1785. 030029. DOI: 10.1063/1.4967050.
- [11] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane // Solid State Phenomena. 2017. Vol. 258. P. 209–212.
- [12] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and it's effects in fracture // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 134. p. 218–241.
- [13] Ботвина Л.П. Разрушение. М.: Наука, 2008. 334 с.
- [14] Скалецкая И.Е., Скалецкий Е.К., Прокопенко В.Т., Никущенко Е.М. Поляризационно-оптические методы исследования: учебное пособие. СПб.: Университет ИТМО, 2015. 142 с.
- [15] Трощенко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении. Киев: Наукова думка, 1987. 256 с.
- [16] Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field // International Journal of Fracture. 2010. Vol.161. P. 221–226.
- [17] Alsiya S., Jeya Leksmi C., Jishna Priya B.P., Mehta R.C. Image Processing Algorithm for Fringe Analysis in Phototelasticity // Scholars Journa of Engineering and Technology. 2016. V. 4(7). P. 325–328.
- [18] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Digital Image Analysis around isotropic points for photoelastic pattern recognition // Optic Engineering. 2015. V. 54(8).
- [19] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension // Journal of Applied Mechanics. Vol. 19, 1952. P. 109–114.

References

- [1] Broek D. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Foundations of fracture mechanics]. М.: Vysshaia shkola, 1980, 368 p. [in Russian].
- [2] Stepanova L.V. *Matematicheskie metody mekhaniki razrusheniia* [Mathematical methods of fracture mechanics]. М.: Fizmatlit, 2009, 336 p. [in Russian].
- [3] Voyiadjis G.Z. Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. Berlin: Springer, 2015, 1577 p. [in English].
- [4] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, pp. 109–114 [in Russian].
- [5] Igonin S.A., Stepanova L.V. *Asimptotika polei napriazhenii i sploshnosti u vershiny ustalostnoi treshchiny v povrezhdennoi srede v usloviakh ploskogo napriazhennogo sostoiianiia* [Asymptotics of stress and continuity fields at the tip of a fatigue crack in a damaged medium in conditions of plane stress state]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2013, no. 9–2(110), pp. 97–108 [in Russian].
- [6] Kukushkin E.V., Menovshchikov V.A., Eresko T.T. *Analiz sovremennykh predstavlenii i podkhodov pri issledovanii ustalostnykh razrushenii igol'chatykh podshpnikov* [Analysis of modern views and approaches in the study of fatigue fractures of needle bearings]. *Reshetnevskie chteniia* [Reshetnev Readings], 2013, no. 17, pp. 287–288 [in Russian].
- [7] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. *Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie M.Uil'iamsa u vershin dvukh kollinearnykh treshchin konechnoi dliny v beskonechnoi plastine* [Complete asymptotic expansion of M. Williams at the tips of two collinear cracks of finite length in an infinite plate]. [Bulletin PNRPU. Mechanics], 2015, №4, pp. 188–225 [in Russian].
- [8] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, Vol. 56, 25 p. [in English].
- [9] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: analytic de-termination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, №100–101, pp. 11-28 [in English].

- [10] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments. *AIP Conference Proceedings*, 2016, Vol. 1785. 030029. DOI: 10.1063/1.4967050 [in English].
- [11] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane. *Solid State Phenomena*, 2017, Vol. 258, P. 209–212 [in English].
- [12] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, Vol. 134, pp. 218–241 [in English].
- [13] Botvina L.R. *Razrushenie* [Destruction]. M.: Nauka, 2008, 334 p. [in Russian].
- [14] Skaletskaya I.E., Skaletsky E.K., Prokopenko V.T., Nikushchenko E.M. *Poliarizatsionno-opticheskie metody issledovaniia. Uchebnoe posobie* [Polarization and optical methods of investigation. Tutorial]. SPb.: Universitet ITMO, 2015, 142 p. [in Russian].
- [15] Troshchenko V.T., Pokrovsky V.V., Prokopenko A.V. *Treshchinostoikost' metallov pri tsiklicheskom nagruzhении* [Crack resistance of metals at cyclic loading]. Kiev: Naukova dumka, 1987, 256 p. [in Russian]. %bibitem[16]godj Godzhaev N.M. *Optika. Uchebnoe posobie dlia vuzov* [Optics. College textbook]. M.: Vysshiaia shkola, 1977, 432 p. [in Russian].
- [17] Berto F., Lazzarin P. On higher order terms in the crack tip stress field. *International Journal of Fracture*, 2010, Vol. 161, pp. 221–226 [in English].
- [17] Alsiya S., Jeya Leksmi C., Jishna Priya B.P., Mehta R.C. Image Processing Algorithm for Fringe Analysis in Photototalasticity. *Scholars Journal of Engineering and Technology*, 2016, Vol. 4(7), pp. 325–328 [in English].
- [18] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Digital Image Analysis around isotropic points for photoelastic pattern recognition. *Optic Engineering*, 2015, Vol. 54(8) [in English].
- [19] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension. *J.Appl.Mech.*, Vol. 19, 1952, pp. 109–114 [in English].

L. V. Stepanova, V.S. Dolgikh²

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF COEFFICIENTS OF A MULTIPARAMETER DECOMPOSITION OF FIELD OF CRACK TIP STRESSES: PHOTOELASTICITY METHOD

The purpose of this study is multiparameter asymptotic analysis of the stress field in the immediate vicinity of the crack tip in a linearly elastic material and construction of complete asymptotic expansion of M. Williams stress field in the vicinity of the crack tip. Multiparametric analysis of the stress field is based on the polarization-optical methods of mechanics of a deformable solid (the method of photoelasticity). Digital processing of the results of optoelectronic measurements performed on a series of samples with cracks and notches is carried out. Different classes of samples from optically sensitive materials, in particular a sample with two collinear cracks under conditions of normal detachment, were considered. A set of programs has been prepared that makes it possible to determine the scale (amplitude) multipliers of complete asymptotic expansion of M. Williams for the stress field at the crack tip. Using the basic law of photoelasticity, first five coefficients of complete asymptotic expansion of M. Williams are calculated. The results of the experiments are compared with the available analytical solution. It is shown that the results of processing optoelectronic measurements are in good agreement with the analytical solution obtained for an infinite plate with two collinear cracks.

Key words: M. Williams asymptotic expansion, stress field in the vicinity of the crack tip, two collinear cracks, plate stretching, multiparametric description of the stress field, polarization-optical methods of mechanics of deformable solids.

Статья поступила в редакцию 28/II/2017.

The article received 28/II/2017.

²Stepanova Larisa Valentinovna (stepanova1v@samsu.ru), Dolgikh Vadim Sergeevich (vadek13@rambler.ru), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дюжева Александра Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Нелокальные задачи со смещением и интегральными условиями первого рода для гиперболических уравнений" (защ. в 2012 г.).

Область научных интересов: нелокальные задачи, динамические условия, интегральные условия, гиперболические уравнения.

Кечина Ольга Михайловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения Самарского государственного социально-педагогического университета. Тема канд. дис.: "Нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений в прямоугольных областях" (защ. в 2010 г.). Автор и соавтор 32 научных работ.

Область научных интересов: нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных.

Киричек Виталия Александровна, студентка 5 курса по специальности "Фундаментальная математика и механика" Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

Область научных интересов: дифференциальные уравнения с частными производными, краевые и нелокальные задачи для гиперболических уравнений.

Пулькина Людмила Степановна, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями сингулярности коэффициентов" (защ. в 1975 г.); Тема докт. дис.: "Нелокальные задачи для гиперболических уравнений" (защ. в 2003 г.). Автор и соавтор 100 научных работ, в том числе монографии "Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений".

Область научных интересов: краевые, нелокальные и нелинейные задачи для уравнений с частными производными.

Цветов Виктор Петрович, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. кафедры безопасности информационных систем Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

Тема канд. дис.: "Математические методы лучевой томографии" (защ. в 1989 г.). Автор и соавтор 15 научных работ, в т. ч. статьи "Об определении функции по ее интегралам вдоль семейства лучей, ассоциированным с одномерным многообразием в R^n " (1989 г.) и учебного пособия "Основы Maple" (2004 г.).

Область научных интересов: некорректные задачи, алгебраические системы, теория графов, информационная безопасность.

Шамолин Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, академик РАН. Тема докт. дис.: "Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой" (защ. в 2004 г.). Имеет более 350 печатных работ, в т. ч. 9 монографий.

Область научных интересов: прикладная математика, методы математического моделирования; классическая механика, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой; качественная теория динамических систем, типичность, абсолютная и относительная грубость; динамика многомерного твердого тела в неконсервативных силовых полях; дифференциальная и топологическая диагностика, задачи дифференциальной диагностики в диагностических пространствах; теория фракталов; математическая логика и информатика.

Степанова Лариса Валентиновна, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

Область научных интересов: механика хрупкого разрушения, нелинейная механика разрушения, теория ползучести, асимптотические методы и теория возмущений,

Долгих Вадим Сергеевич, аспирант кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

Область научных интересов: математическое моделирование в механике, асимптотические методы и теория возмущений, механика твердых тел, конечно-элементный анализ, поляризаторно-оптические методы механики деформируемого твердого тела.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dyuzheva Alexandra Vladimirovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Nonlocal problems with displacement and integral conditions of the first kind for hyperbolic equations" (2012).

Research interests: nonlocal problems, dynamic conditions, integral conditions, hyperbolic equations.

Kechina Olga Mikhailovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Physics, Mathematics and Teaching Methodology, Samara State University of Social Sciences and Education. Subject of Candidate's thesis: "Nonlocal problems with integral conditions for hyperbolic equations in rectangular domains" (2010). Author and coauthor of 32 scientific works.

Research interests: nonlocal problems with integral conditions for partial differential equations.

Kirichek Vitaliia Alexandrovna, fifth-year student of the specialty "Fundamental mathematics and mechanics", Samara National Research University.

Research interests: differential equations with partial derivatives, boundary and nonlocal problems for hyperbolic equations.

Pulkina Ludmila Stepanovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for a mixed type equation with two parallel lines of coefficient's singularity" (1975); Subject of Doctoral thesis: "Nonlocal problems for hyperbolic equations" (2003). Author and coauthor of 100 scientific works, including monograph "Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations".

Research interests: boundary-value, nonlocal and nonlinear problems for partial differential equations.

Tsvetov Viktor Petrovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, assistant professor of the Department of Security of Information Systems, Samara National Research

University. Subject of Candidate's thesis: "Mathematical Methods of Ray Tomography" (1989). Author and coauthor of 15 scientific works, including article "Determination of a function from its integrals along a family of rays associated with a one-dimensional manifold in R^n " (1989) and tutorial "Introduction to Maple" (2004).

Research interests: ill-posed problems, algebraic systems, graph theory, information security.

Shamolin Maxim Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University. Academician of Russian Academy of Natural History. Subject of Doctoral thesis: "Methods of analysis of certain classes of nonconservative systems in dynamics of a rigid body interacting with a medium" (2004). Author of more than 350 publications (including 9 monographs).

Research interests: applied mathematics, methods of mathematical modeling, classical mechanics, dynamics of a rigid body interacting with a medium, qualitative theory of dynamic systems, tipicity, absolute and relative roughness, dynamics of multi-dimensional rigid body in nonconservative fields of forces, differential and topological diagnostics, problems of differential diagnostics in diagnostical spaces, fractal theory, mathematical logic and informatics.

Stepanova Larisa Valentinovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University.

Research interests: mathematical modeling in mechanics, nonlinear fracture mechanics, creep theory, asymptotic methods and perturbation theory.

Dolgikh Vadim Sergeevich, postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics. Samara National Research university.

Research interests: mathematical modelling in mechanics, asymptotic methods and perturbation theory, solid mechanics, finite-element analysis, polarization-optical methods of mechanics of deformable solids.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским государственным университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru> <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>.

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: nsvestnik@samsu.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\text{\LaTeX}_2\epsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций \TeX 'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами \LaTeX 'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("--")¹, тройной дефис ("—")². Одинарный дефис используются в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождение рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

**Уважаемые авторы, просим предоставить сведения
для размещения в журнале
на странице "Сведения об авторах"**

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры, в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности ".....".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of, in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in ".....".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.

Редакция журнала