

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНИТИ URLICH'S Periodical Directory
Math-Net.ru zbMATH

Журнал размещен в международной базе данных zbMATH, поэтому все статьи по математическим наукам и информационно-вычислительной технике считаются включенными в Перечень ВАК РФ

Журнал издается с 1995 г.

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, д-р тех. наук, проф.

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф.

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф.

Ответственный секретарь:

А.В. Дюжеева, канд. физ.-мат. наук

Редактор, корректор *Т.И. Кузнецова*
Компьютерная верстка, макет *М.А. Лихобабенко*
Информация на английском языке
М.С. Стрельникова

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Тел.: +7 846 3345406
Факс.: +7 846 3345406, 3345417
E-mail: nvestnik@samsu.ru
www: <http://vestnik-samgu.ssu.samara.ru>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № 77-12398 от 19.04.02 г., выдано Министерством Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

**Подписной индекс в каталоге
ОАО Агентство "Роспечать" 80307
ISSN 1810-5378
ISSN 2411-6025**

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

Подписано в печать 09.07.2016 г.
Формат 70 × 108/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 9,8. Уч.-изд. л. 7.
Typeset by \LaTeX .
Тираж 500 экз. Заказ № 2742.
Издательство "Самарский университет",
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Тел.: +7 846 3345423.
E-mail: university-press@samsu.ru
Web: <http://www.publisher.samsu.ru>
Отпечатано в типографии Самарского университета

Редакционная коллегия:

С.В. Асташикин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский ГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

В.В. Ивахник, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

И.Г. Кротова, д-р мед. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

С.В. Курбатова, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Л.М. Кавеленева, д-р биол. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

О.Н. Макурина, д-р биол. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Л.А. Онучак, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. (Миланский университет, Милан, Италия)

П.П. Пурьгин, д-р хим. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф. (Национальный исследовательский Мордовский ГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Российская Федерация)

Стасис Руткаускас, д-р физ.-мат. наук, проф. (Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва)

Г.Л. Рытов, канд. пед. наук, доц. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самарский университет, Самара, Российская Федерация)

MAGAZINE FOUNDER
SAMARA UNIVERSITY

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru
zbMATH

The journal is placed in the international data base zbMATH, so all articles in mathematical sciences
and information-computer technics are considered to be included in the List of HAC of the RF

The journal is published since 1995

Chief editor:

E. V. Shakhmatov, Dr. of Engineering, prof.

Deputy chief editors:

A. F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

L. S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.

Executive editor:

A. V. Dyuzheva, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Editor, proofreader *T. I. Kuznetsova*
Computer makeup, dummy *M. A. Likhobabenko*
Information in English
M. S. Strelnikov

Adress of editorial staff: 1, Acad. Pavlov Street,
Samara, 443011, Russian
Federation.

Tel.: +7 846 3345406

Fax.: +7 846 3345406, 3345417

E-mail: nsvestnik@samsu.ru

www: <http://vestnik-samgu.ssu.samara.ru>

Certificate of registration of means of mass
media **PI № 77-12398** dated 19.04.02,
issued by the Federal Service for Supervision
of Communications, Information Technology and
Mass Media.

**Subscription Index in the Agency
"Rospechat" 80307**

ISSN 1810-5378

ISSN 2411-6025

Author's articles do not necessarily reflect the
views of the publisher.

Passed for printing 09.07.2016.

Format 70 × 108/16.

Litho paper. Instant print.

Convent. print. sheets 9,8. Publ. sheets 7.

Typeset by L^AT_EX_ε.

Circulation 500 copies. Order № 2742.

Publishing house "Samara University",

1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian
Federation.

Tel.: +7 846 3345423.

E-mail: university-press@samsu.ru

Web: <http://www.publisher.samsu.ru>

Printed in the printing house of Samara

University

Editorial board:

S. V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.
(Samara University, Samara, Russian Federation)

A. V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.
(Samara University, Samara, Russian Federation)

A. M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.
(Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian
Federation)

V. V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.
(Samara University, Samara, Russian Federation)

I. G. Kretova, Dr. of Medicine, prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

S. V. Kurbatova, Dr. of Chemistry, prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

L. M. Kavelenova, Dr. of Biological Sciences, prof.
(Samara University, Samara, Russian Federation)

O. N. Makurina, Dr. of Biological Sciences, prof.
(Samara University, Samara, Russian Federation)

L. A. Onuchak, Dr. of Chemistry, prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci.,
prof. (Universite Paris-Sud 11, Orsay, France)

A. N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

A. V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. (Milan
University, Milan, Italy)

P. P. Purygin, Dr. of Chemistry, prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

V. V. Revin, Dr. of Biological Sciences, prof.
(Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian
Federation)

Stasis Rutkauskas, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof.
(Vilnius University, Vilnius, Lithuania)

G. L. Rytov, Cand. of Pedagogic Sciences,
assistant prof. (Samara University, Samara, Russian
Federation)

V. A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

V. A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. (Samara
University, Samara, Russian Federation)

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Алдашев С.А. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений	7
Воскресенская Г.В. Параболические формы с характеристиками уровня p	18
Дюжева А.В. Обратная задача с интегральным по времени условием переопределения и нелокальными граничными условиями для гиперболического уравнения	27
Пулькина Л.С., Савенкова А.Е. Нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения	33
Рацев С.М., Рацев В.М. Построение совершенных имитостойких шифров на основе комбинаторных объектов	46

Механика

Рафикова Г.Р., Шагапов В.Ш. Нагнетание газа в водонасыщенный пористый пласт с образованием гидрата в диффузионном режиме	51
Шагапов В.Ш., Юмагулова Ю.А., Гиззатуллина А.А. Моделирование динамики давления и температуры в пласте с высоковязкой нефтью при нагревании	62

Физика

Корнилов Д.А., Косенков В.М., Силантьев П.П. Влияние исходной дислокационной структуры на кинетику точечных и макроскопических дефектов при облучении	69
--	-----------

Биология

Бисултанова З.И., Ацаева М.М., Джамбетова П.М. Роль полиморфных вариантов генов <i>SOD2</i> , <i>GSTT1</i> , <i>GSTM1</i> и <i>GSTP1</i> в развитии рака молочной железы у женщин чеченской популяции	85
Переварюха А.Ю. Нелинейная модель перелома волжских популяций на основе когнитивного графа взаимодействия экологических факторов	92

<i>Сведения об авторах</i>	107
----------------------------	------------

<i>Требования к оформлению статей</i>	111
---------------------------------------	------------

CONTENTS

Mathematics

Aldashev S.A. Correctness of the local boundary value problem in a cylindrical domain for one class of multidimensional elliptic equations	7
Voskresenskaya G.V. Cusp forms with characters of the level p	18
Duzheva A.V. Inverse problem with integral in time overdetermination and nonlocal boundary conditions for hyperbolic equation	27
Pulkina L.S., Savenkova A.E. Problem with Second Kind Integral Conditions for Hyperbolic Equation	33
Ratseev S.M., Ratseev V.M. On perfect imitation resistant ciphers based on combinatorial objects	46

Mechanics

Rafikova G.R., Shagapov V.Sh. Injecting gas into the water-filled porosity reservoirs with the formation of hydrates in the diffusion mode .	51
Shagapov V.Sh., Yumagulova Yu.A., Gizzatullina A.A. Modeling the dynamics of pressure and temperature in the reservoir with heavy oil when heated	62

Physics

Kornilov D.A., Kosenkov V.M., Silantev P.P. Influence of initial dislocation structure on point and microscopic defects kinetic under irradiation	69
--	----

Biology

Bisultanova Z.I., Atsayeva M.M., Dzhambetova P.M. Role of polymorphic gene variants <i>SOD2</i> , <i>GSTT1</i> , <i>GSTM1</i> and <i>GSTP1</i> in the development of breast cancer of women of Chechen population	85
Perevaryukha A.Yu. Nonlinear model of overfishing for the Volga sturgeon based on cognitive graph of interaction of environmental factors	92

<i>Information about the authors</i>	107
--	-----

<i>Requirements to the design of articles</i>	111
---	-----

УДК 517.956

С.А. Алдашев¹

КОРРЕКТНОСТЬ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассмотрена корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного.

Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно ранее изучены.

В работах автора найдены явные виды классических решений задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрических областях для одного класса многомерных эллиптических уравнений. В данной статье показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: многомерное эллиптическое уравнение, локальная краевая задача, цилиндрическая область, критерий единственности, функция Бесселя.

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучена в [1; 2].

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений [3].

Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно изучены в [4–6].

В работах [7; 8], используя предложенный в [9; 10] метод, найдены явные виды классических решений задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрических областях для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

В данной работе показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения.

¹© Алдашев С.А., 2016

Алдашев Серик Аймурзаевич (aldash51@mail.ru), кафедра фундаментальной и прикладной математики, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, пр. Достык, 13.

1. Постановка задачи и результат

Пусть D_α – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ соответственно.

В области D_α рассмотрим взаимно сопряженные многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0, \quad (1)$$

$$L^* v \equiv \Delta_x v + v_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0, \quad (1^*)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$, а $d(x, t) = c - \sum_{i=1}^m a_i x_i - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Рассмотрим следующую локальную краевую задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), \quad (\beta u + \gamma u_t)|_{S_0} = \varphi_2(r, \theta), \quad (2)$$

где $\beta, \gamma = \text{const}$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, которая является обобщением задач Дирихле ($\gamma = 0$) и Пуанкаре ($\beta = 0$), исследованные в [7, 8].

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место [11]

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$, $a_{in}^k(r, t)$, $\tilde{b}_n^k(r, t)$, $\tilde{c}_n^k(r, t)$, $\tilde{d}_n^k(r, t)$, ρ_n^k , $\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\tilde{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$ обозначим коэффициенты ряда (3) соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $d(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, $\varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$,

H – единичная сфера в E_m .

Пусть $a_i(r, \theta, t)$, $b(r, \theta, t)$, $c(r, \theta, t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\bar{D}_\alpha)$, $i = 1, \dots, m$, $l \geq m+1$, $c(r, \theta, t) \leq 0$, $\forall (r, \theta, t) \in D_\alpha$.

Тогда справедлива.

Теорема 1. Если $\varphi_1(r, \theta) \in W_2^l(S_\alpha)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\varphi_2(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, $l > \frac{3m}{2}$

и

$$\beta \operatorname{th} \mu_{s,n} \alpha \neq \mu_{s,n} \gamma, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

то задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Теорема 2. Если $b(r, \theta, 0) = 0$, $\forall (r, \theta) \in S_0$, то решение задачи 1 единственно тогда и только, когда выполняется условие (4).

Заметим, что если $\beta = 0$ или $\gamma = 0$, то соотношение (4) выполняется всегда, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$.

Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнения (1) имеют вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{\delta u}{r^2} + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = 0, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [11], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n + m - 2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H , для \bar{u}_n^k получим [9; 10]

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (8)$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1 , а уравнение (10) от 1 до k_n , а затем сложив полученные выражения вместе с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k + \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \quad (11)$$

где $f_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r, t) \equiv \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6) с учетом леммы 1 будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad \beta\bar{u}_n^k(r, 0) + \gamma\bar{u}_{nt}^k(r, 0) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k + \bar{v}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \varphi_{1n}^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \beta\bar{v}_n^k(r, 0) + \gamma\bar{v}_{nt}^k(r, 0) = \varphi_{2n}^k(r), \quad (14)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = f_n^k(r, t) - \psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k, \quad \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_n^k(\alpha), \quad \varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \beta\psi_n^k(0) - \gamma\psi_{nt}^k(0),$$

$$k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}v_n^k(r, t)$, задачу (13), (14) приведем к следующей задаче:

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}v_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (15)$$

$$v_n^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad \beta v_n^k(r, 0) + \gamma v_{nt}^k(r, 0) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad \bar{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r, t), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{1n}^k(r),$$

$$\tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t), \quad (17)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (18)$$

$$v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad \beta\bar{v}_{1n}^k(r, 0) + \gamma\bar{v}_{1nt}^k(r, 0) = 0, \quad (19)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (20)$$

$$v_{2n}^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad \beta\bar{v}_{2n}^k(r, 0) + \gamma\bar{v}_{2nt}^k(r, 0) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r). \quad (21)$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \quad (22)$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) R_s(t), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k R_s(r). \quad (23)$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23) получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (24)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (25)$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{s,n}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (26)$$

$$T_s(\alpha) = 0, \quad \beta T_s(0) + \gamma T_{st}(0) = 0. \quad (27)$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является [12]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (28)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (26) представимо в виде [12]

$$\begin{aligned} T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi - \\ - \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi, \end{aligned} \quad (29)$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (27), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha = \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^{\alpha} a_{s,n}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi - \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^{\alpha} a_{s,n}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi, \\ \beta c_{1s} + \gamma \mu_{s,n} c_{2s} = 0, \end{cases} \quad (30)$$

которое имеет единственное решение, если выполняется условие (4).

Подставляя (28) в (23), получим

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Ряды (31) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [13], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (32)$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad e_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (33)$$

$\mu_{s,n}, s = 1, 2, \dots$ — положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (28), (29) получим решение задачи (18), (19) в виде

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (34)$$

где $a_{s,n}^k(t)$, c_{1s} , c_{2s} определяются из (30), (32).

Далее, подставляя (28) в (20), (21), с учетом (23) будем иметь задачу

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \quad (35)$$

$$V_s(\alpha) = b_{s,n}^k, \quad \beta V_s(0) + \gamma V_{st}(0) = e_{s,n}^k. \quad (36)$$

Общее решение уравнения (35) имеет вид

$$V_{s,n}(t) = c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t, \quad (37)$$

где c'_{1s}, c'_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (36), получим

$$\begin{cases} c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha = b_{s,n}^k, \\ \beta c'_{1s} + \gamma \mu_{s,n} c'_{2s} = e_{s,n}^k. \end{cases} \quad (38)$$

Из (28), (37) будем иметь

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (39)$$

где $b_{s,n}^k, e_{s,n}^k, c'_{1s}, c'_{2s}$ находятся из (33), (38).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) ($n = 0$), а затем (9), (12) ($n = 1$), найдем последовательно все $v_n^k(r, t)$ из (17), где $v_{1n}^k(r, t), v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (34), (39), $k = \bar{1}, \bar{k}_n, \quad n = 0, 1, \dots$

Итак, в области D_{α} имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L u dH = 0. \quad (40)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r) \rho(\theta) T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0, \alpha))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(D_{\alpha})$ [14].

Отсюда и из (40) следует, что

$$\int_{D_{\alpha}} f(r, \theta, t) L u dD_{\alpha} = 0$$

и

$$L u = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in D_{\alpha}.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (41)$$

где $v_{1n}^k(r, t), v_{2n}^k(r, t)$ находятся из (34), (39).

Используя формулы (13), (15) $2J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ и

$$|J_{\nu}(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \quad (42)$$

решение (41) можно оценить как степенной ряд.

Далее, учитывая условия на заданные функции $\varphi_1(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$ и леммы, оценки [11]

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

по интегральному признаку Коши показано, что ряд (41) и продифференцированные ряды сходятся равномерно и абсолютно.

Это означает, что искомое решение в виде (41) принадлежит классу $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, если $l > \frac{3m}{2}$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлена.

2. Доказательство теоремы 2

Сначала покажем единственность решения задачи 1. Для этого построим решение краевой задачи для уравнения (1*) с данными

$$v|_{S_\alpha \cup \Gamma_\alpha} = 0, \quad (\beta v + \gamma v_t)|_{S_0} = \varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{\varphi}_{2n}^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (43)$$

где $\bar{\varphi}_{2n}^k(r) \in G$, G – множество функций $\varphi(r)$ из класса $C([0, 1]) \cap C^1((0, 1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0, 1))$ [14].

Решение задачи (1*), (43) будем искать в виде (6), где функции $\bar{v}_n^k(r, t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично п. 2 функции $\bar{v}_n^k(r, t)$ удовлетворяют системы уравнений (8)–(10), где \tilde{a}_{in}^k , a_{in}^k , \tilde{b}_n^k заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\tilde{b}_n^k$, а \tilde{c}_n^k на \tilde{d}_n^k , $i = \overline{1, \dots, m}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Далее из краевого условия (43) в силу (6) получим

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \beta \bar{v}_n^k(r, 0) + \gamma \bar{v}_{nt}^k(r, 0) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (44)$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде. В п. 2 показано, что задача (11), (44) имеет единственное решение, если выполнено соотношение (4).

Таким образом, решение задачи (1*), (43) в виде ряда (41) построено, она в силу (42) принадлежит классу $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Из определения сопряженных операторов L , L^* [16]

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i) + u_t \cos(N^\perp, t), \quad Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos(N^\perp, x_i) - b \cos(N^\perp, t),$$

а N^\perp – внутренняя нормаль к границе ∂D_α , по формуле Грина имеем

$$\int_D (vLu - uL^*v) dD_\alpha = \int_{\partial D_\alpha} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) M + uvQ \right] ds, \quad (45)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^m \cos(N^\perp, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \cos(N^\perp, t) \frac{\partial}{\partial t}, \quad M^2 = \sum_{i=1}^m \cos^2(N^\perp, x_i) + \cos^2(N^\perp, t).$$

Из (45), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (43), получим

$$\int_{S_0} \varphi_2(r, \theta) u(r, \theta, 0) ds = 0. \quad (46)$$

Поскольку $\{\bar{\varphi}_{2n}^k(r)\}$ плотна в $L_2((0, 1))$ по предположению, а $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(H)$ ([11]), то линейная оболочка системы функций $\{\bar{\varphi}_{2n}^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ будет плотна в $L_2(S_0)$ ([11]), поэтому из (46) заключаем, что $u(r, \theta, 0) = 0, \forall (r, \theta) \in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Дирихле [1–3] : $Lu = 0, u|_{S_0 \cup \Gamma_\alpha \cup S_\alpha} = 0$, будем иметь $u = 0$ в \bar{D}_α .

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение однородной задачи, соответствующей задаче 1, будем искать в виде ряда (6), то приходим к краевой задаче

$$Lv_n^k = \tilde{f}_n^k(r, t),$$

$$v_n^k(r, \alpha) = v_n^k(1, t) = 0, \beta v_n^k(r, 0) + \gamma v_{nt}^k(r, 0) = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$$

В силу (29), (30), (37), (38) ее решением является функция

$$\begin{aligned} \mu_{l,n} v_n^k(r, t) = & \sqrt{r} [\mu_{l,n} (\beta \operatorname{sh} \mu_{l,n} t - \gamma \mu_{l,n} \operatorname{ch} \mu_{l,n} t) + (\operatorname{ch} \mu_{l,n} t) \int_0^t a_{l,n}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{l,n} \xi d\xi - \\ & - (\operatorname{sh} \mu_{l,n} t) \int_0^t a_{l,n}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{l,n} \xi d\xi] J_{\frac{n+(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r). \end{aligned}$$

Следовательно, нетривиальные решения однородной задачи 1 записываются в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta).$$

Из (42) следует, что $u \in C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, если $p > \frac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

Литература

- [1] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
- [2] Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 203 с.
- [3] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [4] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О задаче косо́й производной в области с кусочно-гладкой границей // Функциональный анализ. 1971. № 5(3). С. 102–103.
- [5] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе // Труды семинара С.Л. Соболева. 1978. № 2. С. 69–102.
- [6] Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 2(30). С. 3–76.
- [7] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ. Сер.: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12. Вып. 1. С. 7–13.

- [8] Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 10(121). С. 17–25.
- [9] Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 64–68.
- [10] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 170 с.
- [11] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
- [12] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
- [13] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 295 с.
- [14] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
- [15] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
- [16] Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1981. Т. 4. Ч. 2. 550 с.

References

- [1] Bitsadze A.V. Uravneniia smeshannogo tipa [Equations of a mixed type]. М.: Izd. AN SSSR, 1959, 164 p. [in Russian].
- [2] Bitsadze A.V. Kraevye zadachi dlia ellipticheskikh uravnenii vtorogo poriadka [Boundary value problems for elliptic equations of the second order]. М.: Nauka, 1966, 203 p. [in Russian].
- [3] Bitsadze A.V. Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh [Some classes of partial differential equations]. М.: Nauka, 1981, 448 p. [in Russian].
- [4] Mazya V.G., Plamenevsky B.A. O zadache kosoi proizvodnoi v oblasti s kusochno-gladkoi granitse [On the task of directional derivative in the area with piecewise-smooth boundary]. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis], 1971, 5:3, pp. 102-103 [in Russian].
- [5] Mazya V.G., Plamenevsky B.A. Shauderovskie otsenki reshenii ellipticheskikh kraevykh zadach v oblastiakh s rebrami na granitse [Shauder decision assessment of elliptic boundary conditions in the areas key-staged on the boundaries] in *Trudy seminara S.L.Soboleva* [Proceedings of the seminar devoted to S.L. Sobolev], 1978, no. 2, pp. 69–102 [in Russian].
- [6] Kondratiev V.A., Oleynik O.A. Kraevye zadachi dlia uravnenii chastnymi proizvodnymi v negladkikh oblastiakh [Boundary value problems for equations with partial derivatives in non-smooth areas]. *Uspekhi mat. nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1983, Vol. 38, Issue 2(30), pp. 3-76 [in Russian].
- [7] Aldashev S.A. Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia odnogo klassa mnogomernykh ellipticheskikh uravnenii [Correctness of Dirichlet problem in the cylindrical domain for one class of multidimensional elliptical equations]. *Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika* [Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics]. Novosibirsk, 2012, Vol. 12, Issue 1, pp. 7–13 [in Russian].
- [8] Aldashev S.A. Korrektnost' zadachi Puankare v tsilindricheskoi oblasti dlia odnogo klassa mnogomernykh ellipticheskikh uravnenii [Correctness of Puankare problem for one

- class of multidimensional elliptical equations]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik SamGU. Natural Science Series]. Samara, 2014, Vol. 10(121), pp. 17–25 [in Russian].
- [9] Aldashev S.A. O zadachakh Darbu dlia odnogo klassa mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii [On Darboux problems for one class of multidimensional hyperbolic equations]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1998, Vol. 34, no. 1, pp. 64–68 [in Russian].
- [10] Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlia mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravnenii [Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations]. Almaty: Gylym, 1994, 170 p. [in Russian].
- [11] Mikhlin S.G. Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia [Multidimensional singular integrals and integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1962, 254 p. [in Russian].
- [12] Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam [Reference book on ordinary differential equations]. M.: Nauka, 1965, 703 p. [in Russian].
- [13] Beitmen G., Erdeyn A. Vysshie transtsendentnye funktsii [Higher transcendental functions]. Vol.2. M.: Nauka, 1974, 295 p. [in Russian].
- [14] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M.: Nauka, 1976, 543 p. [in Russian].
- [15] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966, 724 p. [in Russian].
- [16] Smirnov V.I. Kurs vysshei matematiki [Course of higher mathematics]. Vol. 4, r. 2. M.: Nauka, 1981, 550 p. [in Russian].

*S.A. Aldashev*²

CORRECTNESS OF THE LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR ONE CLASS OF MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

Correctness of boundary value problems in a plane for elliptical equations has been studied properly using the method of the theory of analytic functions. At investigation of analogous problems, when the number of independent variables is more than two, there arise principle difficulties. Quite good and convenient method of singular integral equations has to be abandoned because there is no complete theory of multidimensional singular integral equations. Boundary value problems for second-order elliptical equations in domains with edges have been studied properly earlier. Explicit classical solutions to Dirichlet and Poincare problems in cylindrical domains for one class of multidimensional elliptical equations can be found in the author's works. In this article, the author proved that the local boundary value problem, which is the generalization of Dirichlet and Poincare problem, has only solution. Besides, the criterion of uniqueness of regular solution is obtained.

Key words: multidimensional elliptical equation, local boundary value problem, cylindrical domain, criterion of uniqueness, Bessel function.

Статья поступила в редакцию 29/I/2016.
The article received 29/I/2016.

²*Aldashev Serik Aimurzaevich* (aldash51@mail.ru), Department of Fundamental and Applied Mathematics, Abai Kazakh National Pedagogical University, 13, Dostyk Ave., Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan.

Г.В. Воскресенская¹

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ФОРМЫ С ХАРАКТЕРАМИ УРОВНЯ \mathbb{P}^2

В статье доказываются структурные теоремы для пространств параболических форм с характеристиками уровня p . Пространства разлагаются в прямую сумму трех подпространств, причем первое подпространство является существенным. Важную роль в исследованиях играют эта-частные. У этих функций дивизор сосредоточен в параболических вершинах. Также доказана теорема о структуре пространств модулярных форм с характеристиками. Обсуждается вопрос о порождающей системе этих пространств и проблема К. Оно. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна-Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, дивизор функции, структурные теоремы, формула Коэна — Остерле.

Введение

Изучение структур пространств модулярных форм является интересной и актуальной темой. Классические обозначения и факты, используемые в статье, можно найти в монографиях [1–3], также доказываются структурные теоремы для пространств параболических форм с характеристиками нечетного простого уровня p . Эти исследования являются продолжением работ автора [4; 5]. Мы будем использовать свойства функций специального вида, которые называются эта-частными. Их определение и основные свойства содержатся в статьях [6–8]. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна — Остерле [9], порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли [10].

Теорема 1 в статье цитируется, теоремы 2–4 являются новыми.

1. Предварительные сведения

В этом пункте мы приведем основные формулы, на которых основаны доказательства.

2.1 Размерности.

Для доказательства нам понадобятся размерности пространств

¹© Воскресенская Г.В., 2016

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

²Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00154А.

$S_k(\Gamma_0(p), \chi)$, $S_k(\Gamma_0(p))$, $M_k(\Gamma_0(p), \chi)$, $M_k(\Gamma_0(p))$. Вычислять будем по формуле Коэна — Остерле.

Мы используем обозначения:

$$D_{1,\chi} = \sum_{x:x^2+1 \equiv 0(N)} \chi(x), \quad D_{1,\chi_0} = D_1, \quad D_{2,\chi} = \sum_{x:x^2+x+1 \equiv 0(N)} \chi(x), \quad D_{2,\chi_0} = D_2.$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod{2}, \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod{3}, \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Теорема 1.

Пусть k — натуральное число,

$\chi(d) = \left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{d} \right)$ — характер Дирихле. Тогда

$$\dim_{\mathbf{C}} S_k(\Gamma_0(p), \chi) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} - 1 + \nu_k D_{1,\chi} + \mu_k D_{2,\chi};$$

$$\dim_{\mathbf{C}} S_k(\Gamma_0(p)) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} - 1 + \nu_k D_1 + \mu_k D_2;$$

$$\dim_{\mathbf{C}} M_k(\Gamma_0(p), \chi) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} + 1 - \nu_{2-k} D_1 - \mu_{2-k} D_2;$$

$$\dim_{\mathbf{C}} M_k(\Gamma_0(p)) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} + 1 - \nu_{2-k} D_1 - \mu_{2-k} D_2;$$

$$\dim_{\mathbf{C}} S_2(\Gamma_0(p)) = \frac{(p+1)}{12} - \frac{1}{4} D_1 - \frac{1}{3} D_2.$$

Эта теорема получается из общей формулы Коэна-Остерле при $N = p$.

2.2. Порядки в параболических вершинах.

Относительно группы $\Gamma_0(p)$ существуют два класса неэквивалентных параболических вершин: 0 и ∞ .

Если

$$f(z) = \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j \in \mathbf{N}, \quad t_j \in \mathbf{Z},$$

то ее порядок в ∞ равен

$$\text{ord}_{\infty}(f) = \frac{1}{24} \sum_{j=1}^s a_j \cdot t_j.$$

Используя формулу Биаджиоли, получим

$$\text{ord}_0(f) = \frac{1}{24} \sum_{j=1}^s \frac{p \cdot t_j}{a_j}.$$

2. Рассечение функцией с характером

В этом параграфе мы докажем структурную теорему для случая, когда рас-секающая функция имеет нетривиальный характер.

Теорема 2.

Пусть k — натуральное нечетное число,
 $p = 7 + 24m$, $\chi(d) = \left(\frac{-p}{d}\right)$ — характер Дирихле. Тогда

$$S_k(\Gamma_0(p), \chi) = \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z)M_{k-\frac{p-1}{2}}(\Gamma_0(p)) \oplus \langle \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) \rangle^\perp \cdot G(z) \oplus \\ \oplus S_2(\Gamma_0(p))(\eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^{-1}(pz)\eta^p(z))H(z).$$

Функции $G(z)$ и $H(z)$ выписаны в табл. 1.

Таблица 1

k	$G(z)$	$H(z)$
$1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$3 + 6l$	E_6^{l-2m}	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$
$5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-1-2m}$	E_6^{l-2m}

Пространство $\langle \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) \rangle^\perp$ — ортогональное дополнение к функции $\eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z)$ в пространстве $S_{\frac{p-1}{2}}(\Gamma_0(p), \chi)$.

Доказательство.

В этом случае $D_1 = D_{1,\chi} = 0$.

Покажем, что в этом случае $D_2 = D_{2,\chi} = 2$.

Действительно, пусть $a^2 + a + 1 \equiv 0(p)$. Тогда $a^3 = 1$, $a \neq 1$. Если $\chi(a) = -1$, то $\chi(a^3) = -1$, но $\chi(1) = 1$. Значит, $\chi(a) = 1$ и $D_{2,\chi} = 2$.

Разберем подробно случай $k = 3 + 6l$. Два оставшихся случая доказываются аналогично.

$$\mu = \frac{1}{3}, \quad \mu_{2-k} = -\frac{1}{3}.$$

Введем обозначения:

$$W = S_k(\Gamma_0(p), \chi),$$

$$W_1 = \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) \cdot M_{k-\frac{p-1}{2}}(\Gamma_0(p)),$$

$$W_2 = \langle \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) \rangle^\perp \cdot E_6^{l-2m},$$

$$W_3 = S_2(\Gamma_0(p)) \cdot (\eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^{-1}(pz)\eta^p(z)) \cdot E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}.$$

1. Докажем сначала, что сумма размерностей пространств справа равна сумме размерностей пространств слева. Используя формулы из пункта 2, получим

$$\dim W = \frac{(k-1)(p+1)}{12} - \frac{1}{3},$$

$$\dim W_1 = \frac{(k-\frac{p+1}{2})(p+1)}{12} + \frac{5}{3},$$

$$\dim W_2 = \frac{(\frac{p-3}{2})(p+1)}{12} - \frac{4}{3},$$

$$\dim W_3 = \frac{p+1}{12} - \frac{2}{3}.$$

Вычислим сумму:

$$\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = \frac{(p+1)(k-\frac{p+1}{2} + \frac{p-3}{2} + 1)}{12} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \\ = \frac{(p+1)(k-1)}{12} - \frac{1}{3} = \dim W.$$

2. Докажем, что $W \cong W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

Пусть $f_1(z) = \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z)$. Тогда $ord_\infty(f_1) = ord_0(f_1) = \frac{p^2-1}{48}$.

Сначала покажем, что пространство W_j имеет попарные нулевые пересечения. Этот результат имеет самостоятельное значение.

Докажем, что $W_1 \cap W_2 = 0$.

Дивизор функции $f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = g(z)E_6^{l-2m}(z)$. Тогда в любой параболической вершине s $ord_s(g(z)) \geq ord_s(f_1(z))$, так как $E_6^{l-2m}(z)$ не имеет нулей в параболических вершинах. Тогда $\frac{g(z)}{f_1(z)} \in M_0(\Gamma_0(p))$, то есть $g(z) = cf_1(z)$, а это неверно.

Докажем, что $W_2 \cap W_3 = 0$.

Обозначим $f_2 = \eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^{-1}(pz)\eta^p(z)$.

Пусть $g(z) \cdot E_6^{l-2m}(z) = h(z)f_2(z) \cdot E_4(z)E_6^{l-1-2m}(z)$,

$g(z) \cdot E_6(z) = h(z)f_2(z) \cdot E_4(z)$.

Так как $E_6(i) = 0$, $E_4(i) \neq 0$, то $h(i) = 0$.

Функция $h(z)$ имеет вес 2, получаем $\frac{(h(z))^3}{E_6(z)} = Const$.

Отсюда следует, что $E_6(z)$ является параболической формой, а это неверно. Получено противоречие.

Докажем, что $W_1 \cap W_3 = 0$.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = h(z)f_2(z)E_4(z)E_6^{l-1-2m}(z)$.

Так как функция $f_2(z)E_4(z)E_6^{l-1-2m}(z)$ не имеет нулей в параболических вершинах, то в любой параболической вершине $ord_s h(z) \geq ord_s f_1(z)$. Дивизор $f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах, но $deg(div h(z)) < deg(div f_1(z))$, так как уровни у них одинаковы, а вес у функции $h(z)$ меньше. Получено противоречие.

Для корректного завершения доказательства достаточно показать,

что $W_1 \cap (W_2 \oplus W_3) = \{0\}$.

Пусть $f(z) \in W_1$, порядки $f(z)$ в параболических вершинах равны и максимальны для функций из этого пространства. Пусть $g(z) \in W_2 \oplus W_3$, тогда $g(z) = g_2(z) + g_3(z)$, $g_2(z) \in W_2$, $g_3(z) \in W_3$.

Существует параболическая вершина s такая, что $ord_s f(z) > ord_s g_2(z)$,

так как функция $G(z)$ не имеет нулей в параболических вершинах.

Так как $ord_s g(z) = \min\{ord_s g_2(z), ord_s g_3(z)\}$.

Следовательно, $ord_s f(z) > ord_s g(z)$.

Значит, равенство этих функций невозможно.

Теорема доказана.

Аналогичные теоремы можно получить для $p \equiv 11(24)$ и $p \equiv 23(24)$.

Для $p \equiv 1(4)$ нельзя выбрать эта-произведение $\eta^{l_1}(pz)\eta^{l_2}(z)$ с характером $(\frac{-p}{d})$, то есть нечетного веса. Действительно, $l_1 + l_2 = 2 + 4l$, $l_1 p + l_2 = 24m$. Получим $l_1(p-1) = 2 + 4\alpha$. Но $4|p-1$. Получено противоречие. Однако при $p \equiv 1(4)$ можно рассматривать пространства четного веса с нетривиальными характерами, что мы увидим в примере 3 и в параграфе 4.

3. Важные примеры

Мы разберем три примера: в первом обсуждается уровень 3, второй пример иллюстрирует материал этого параграфа, пример 3 содержит идеи, которые используются в следующем параграфе.

Пример 1.

Для уровня 3 имеет место точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(3), \left(\frac{-3}{p}\right)) = \eta^6(3z)\eta^6(z) \cdot M_{k-6}(\Gamma_0(3), \left(\frac{-3}{p}\right)), \quad k \geq 6.$$

Для меньших весов эти пространства нулевые. Особенно интересен случай, когда вес делится на 3, в этом случае каждая параболическая форма является однородным многочленом от функций $\eta^9(3z)\eta^{-3}(z)$, $\eta^{-3}(3z)\eta^9(z)$.

Пример 2.

Пусть $p = 7$, k — нечетное число.

В этом случае рассекающая функция $\eta^3(7z)\eta^3(z)$ является мультипликативным эта-произведением, ее порядки в ∞ и 0 равны 1. Характер $\chi(d) = \left(\frac{-7}{d}\right) = \left(\frac{d}{7}\right)$. Имеем точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(7), \chi) = \eta^3(7z)\eta^3(z)M_{k-3}(\Gamma_0(7)).$$

Обозначим:

$$f_1(z) = \eta^3(7z)\eta^3(z); \quad f_2(z) = \eta^7(7z)\eta^{-1}(z); \quad f_3(z) = \eta^{-1}(7z)\eta^7(z).$$

Эти функции образуют базис в $M_3(\Gamma_0(7), \chi(d))$. Первая функция является произведением второй и третьей.

По индукции получается, что $S_k(\Gamma_0(7), \chi(d))$ порождается функциями $f_2(z)$ и $f_3(z)$, которые являются эта-частными. Это дает пример к проблеме Кена Оно — проблеме нахождения всех пространств, порожденных эта-частными.

Пример 3.

Пусть $p = 5$, k — четное число, характер $\chi(d) = \left(\frac{5}{d}\right)$.

Рассекающая функция $\eta^4(5z)\eta^4(z)$ также является мультипликативным эта-произведением, ее порядки в каждой параболической вершине равны 1.

Имеем точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(5), \chi) = \eta^4(5z)\eta^4(z) \cdot M_{k-4}(\Gamma_0(5), \chi), \quad k \geq 6.$$

Обозначим:

$$f_1(z) = \eta^5(5z)\eta^{-1}(z); \\ f_2(z) = \eta^{-1}(5z)\eta^5(z).$$

Эти функции образуют базис пространства $M_2(\Gamma_0(5), \chi)$.

Если $k \equiv 2(4)$, $k \geq 6$, то любой элемент из $M_k(\Gamma_0(5), \chi)$ является однородным многочленом от $f_1(z)$ и $f_2(z)$, что дает пример к проблеме Кена Оно.

Базис пространства $M_k(\Gamma_0(5))$ при $k \equiv 0(4)$ уже не может быть выписан с помощью эта-частных.

4. Общие теоремы

В этом параграфе мы докажем две общие теоремы. В первой из них рассматриваются пространства четного или нечетного веса в зависимости от вычета простого числа $p > 2$ по модулю 4 : $k \equiv \frac{p-1}{2}(4)$, $k > p - 1$. Возникающие при описании структуры этих пространств функции $G(z)$ и $H(z)$ зависят от веса и уровня, возникает 18 значений, которые приведены в табл. 2.

Пусть $f_1(z) = \eta^{p-1}(pz)\eta^{p-1}(z)$, $f_2(z) = \eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^p(z)\eta^{-1}(pz)$,
 $\chi(d) = \left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}{d}\right)$.

Теорема 3.

Справедливо разложение:

$$S_k(\Gamma_0(p), \chi) = f_1(z)M_{k-p+1}(\Gamma_0(p), \chi) \oplus \langle f_1 \rangle^\perp \cdot f_2(z)G(z) \oplus \oplus S_2(\Gamma_0(p)) \cdot f_2(z) \cdot H(z).$$

Пространство $\langle f_1 \rangle^\perp$ — ортогональное дополнение к функции $f_1(z)$ в пространстве $S_{p-1}(\Gamma_0(p))$. Функции $G(z)$ и $H(z)$ выписаны в табл. 2.

Таблица 2

p	$\chi(p)$	k	$G(z)$	$H(z)$
$p = 5 + 24m$	$\left(\frac{p}{d}\right)$	$k = 2 + 4l$	E_4^{l-1-9m}	$E_4^{l-2-3m} \cdot E_6$
$p = 5 + 24m$	$\left(\frac{p}{d}\right)$	$k = 4l$	$E_4^{l-3-9m} \cdot E_6$	E_4^{l-1-3m}
$p = 13 + 24m$	$\left(\frac{p}{d}\right)$	$k = 2 + 4l$	E_4^{l-4-9m}	$E_4^{l-3-4m} \cdot E_6$
$p = 13 + 24m$	$\left(\frac{p}{d}\right)$	$k = 4l$	$E_4^{l-6-9m} \cdot E_6$	E_4^{l-2-3m}
$p = 17 + 24m$	$\left(\frac{p}{d}\right)$	$k = 2 + 4l$	$E_4^{l-7-9m} \cdot E_6$	E_4^{l-2-3m}
$p = 17 + 24m$	$\left(\frac{p}{d}\right)$	$k = 4l$	E_4^{l-6-9m}	$E_4^{l-4-3m} \cdot E_6$
$p = 7 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-2-6m}$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$p = 7 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-1-6m}	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$
$p = 7 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-2-6m}$	E_6^{l-2m}
$p = 11 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-3-6m}$	E_6^{l-1-2m}
$p = 11 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-2-6m}	$E_4 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$p = 11 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-3-6m}$	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$
$p = 19 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-5-6m}$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-3-2m}$
$p = 19 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-4-6m}	$E_4 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$p = 19 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-5-6m}$	E_6^{l-1-2m}
$p = 23 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-6-3m}$	E_6^{l-2-2m}
$p = 23 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-5-6m}	$E_4^2 \cdot E_6^{l-3-2m}$
$p = 23 + 24m$	$\left(\frac{-p}{d}\right)$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-6-6m}$	$E_4 \cdot E_6^{l-2-2m}$

Доказательство.

Обозначим:

$$W = S_k(\Gamma_0(p), \chi),$$

$$W_1 = f_1(z)M_{k-p+1}(\Gamma_0(p), \chi),$$

$$W_2 = \langle f_1 \rangle^\perp \cdot f_2(z)G(z),$$

$$W_3 = S_2(\Gamma_0(p))f_2(z)H(z).$$

1. Докажем сначала, что сумма размерностей пространств справа равна сумме размерностей пространств слева. Используем формулы из пункта 2.

Узнаем, к чему сводится равенство $\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = \dim W$.

$$\begin{aligned} & \frac{(k-p)(p+1)}{12} + 1 - \nu_{1-k+p} \cdot D_{1,\chi} - \mu_{1-k+p} \cdot D_{2,\chi} + \frac{(p-2)(p+1)}{12} - 1 + \\ & + \nu_{p-1} \cdot D_1 + \mu_{p-1} \cdot D_2 - 1 + \frac{p+1}{12} - \frac{1}{4} \cdot D_1 - \frac{1}{3} \cdot D_2 = \\ & = \frac{(k-1)(p+1)}{12} + \nu_k \cdot D_{1,\chi} + \mu_k \cdot D_{2,\chi}. \end{aligned}$$

Это эквивалентно равенству

$$(*) (\nu_k + \nu_{1-k+p})D_{1,\chi} + (\mu_k + \mu_{1-k+p})D_{2,\chi} + \left(\frac{1}{4} - \nu_{p-1}\right)D_1 + \left(\frac{1}{3} - \mu_{p-1}\right)D_2 = 0.$$

При $p \equiv 11(24)$, $p \equiv 23(24)$ значения $D_1 = D_{1,\chi} = D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

При $p \equiv 5(24)$, $p \equiv 17(24)$ значения $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

В соотношении (*) осталось проверить два равенства $\frac{1}{4} - \nu_{p-1} = 0$, $\nu_{2-k} = -\nu_k$. Эти равенства верны при данных p и любых k .

При $p \equiv 7(24)$, $p \equiv 19(24)$ значения $D_1 = D_{1,\chi} = 0$.

В соотношении (*) осталось проверить два равенства $\frac{1}{4} - \nu_{p-1} = 0$, $\mu_{2-k} = -\mu_k$. Эти равенства верны при данных p и любых k .

При $p \equiv 13(24)$ надо вычислить все выражение (*) без сокращений, но значения во всех четырех скобках равны 0.

2. Докажем, что $W \cong W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

Заметим, что $ord_\infty(f_1) = ord_0(f_1) = \frac{p^2-1}{24}$.

Доказательство в каждом из 18 возможных случаев непринципально отличается в деталях. Мы разберем случай 1, остальные случаи разбираются аналогично.

Докажем, что $W_1 \cap W_2 = 0$.

Дивизор функции $f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = g(z)E_4^{l-1-9m}(z)$. Тогда в любой параболической вершине $ord_s(g(z)) \geq ord_s(f_1(z))$, так как E_4^{l-1-9m} не имеет нулей в параболических вершинах.

Тогда $\frac{g(z)}{f_1(z)} \in M_0(\Gamma_0(p))$, то есть $g(z) = cf_1(z)$, а это неверно.

Докажем, что $W_2 \cap W_3 = 0$.

Пусть $g(z) \cdot f_2(z) \cdot E_4^{l-1-9m}(z) = h(z) \cdot E_4^{l-2-3m}(z) \cdot E_6$.

Это эквивалентно выражению

$$g(z)E_4(z) = h(z)E_6^{4m+1}.$$

Так как $E_4(\omega) = 0$, $E_6(\omega) \neq 0$, то $h(\omega) = 0$.

Функция $h(z)$ имеет вес 2, $\frac{(h(z))^2}{E_4(z)} = Const$.

Отсюда следует, что $E_4(z)$ является параболической формой, а это неверно. Получено противоречие.

Докажем, что $W_1 \cap W_3 = 0$.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = h(z)f_2(z) \cdot E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$.

Так как функция $f_2(z)E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$ не имеет нулей в параболических вершинах, то в любой параболической вершине $ord_s h(z) \geq ord_s f_1(z)$. Дивизор $f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах, но $deg(div h(z)) < deg(div f_1(z))$. Получено противоречие.

Свойство $W_1 \cap (W_2 \oplus W_3) = \{0\}$ доказывается так же, как и в пункте 3.

Теорема доказана.

В заключение докажем теорему о связи пространств модулярных и параболических форм одного уровня с одинаковыми характерами.

Теорема 4.

Пусть $k \geq p + 3$, $\chi(d) = \left(\frac{-1}{d}\right)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p$

Тогда

$$M_k(\Gamma_0(p), \chi) = S_k(\Gamma_0(p), \chi) \oplus \left\langle \frac{\eta(pz)^p}{\eta(z)} E_4^l(z) E_6^m(z) \right\rangle \oplus \left\langle \frac{\eta(z)^p}{\eta(pz)} E_4^l(z) E_6^m(z) \right\rangle,$$

$$k = p - 1 + l + m.$$

Доказательство.

Из формулы размерности получаем $dim M_k(\Gamma_0(p), \chi) = dim S_k(\Gamma_0(p), \chi) + 2$.

Обозначим:

$$g_1 = \frac{\eta(pz)^p}{\eta(z)} E_4^l(z) E_6^m(z),$$

$$g_2 = \frac{\eta(z)^p}{\eta(pz)} E_4^l(z) E_6^m(z).$$

Из условий $ord_0(g_1(z)) = 0$, $ord_0(g_2(z)) \neq 0$, $ord_\infty(g_2(z)) \neq 0$, $ord_\infty(g_1(z)) = 0$ следует, что эти функции линейно независимы, и их нетривиальная линейная комбинация не лежит в $S_k(\Gamma_0(p), \chi)$.

Литература

- [1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q -series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p.
- [2] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.
- [3] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004, 488 с.
- [4] Воскресенская Г.В. О представлении модулярных форм в виде однородных многочленов // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 6(128). С. 40–49.
- [5] Воскресенская Г.В. О пространствах модулярных форм четного веса // Вестник Самарского государственного университета, 2014. № 10(121). С. 38–47.
- [6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η -products. // L.N.M. 1987. V. 1395. P. 173–200.
- [7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.
- [8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η -functions // Contemp.Math. 1985. V. 45. P. 89–98.
- [9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // LNM. 1976. V. 627. P. 69–78.
- [10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300.

References

- [1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q -series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p. [in English].
- [2] Koblitz N. Vvedenie v ellipticheskie krivye i moduliarnye formy [Introduction in elliptic curves and modular forms]. M.: Mir, 1988, 320 p. [in Russian].
- [3] Knapp A. Ellipticheskie krivye [Elliptic curves]. M.: Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].
- [4] Voskresenskaya G.V. O predstavlenii moduliarnykh form v vide odnorodnykh mnogochlenov [On representation of modular forms as homogeneous polynomials]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 6(128), pp.40–49 [in Russian].
- [5] Voskresenskaya G.V. O prostranstvakh moduliarnykh form chetnogo vesa [On spaces of modular forms of even weight]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 10(121), pp. 38–47 [in Russian].
- [6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η -products. *L.N.M.*, 1987, V. 1395, pp. 173–200 [in Russian].
- [7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262 [in English].
- [8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η -functions. *Contemp.Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 89–98 [in English].
- [9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. *LNM*, 1976, Vol. 627, pp. 69–78 [in French].
- [10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm.*, 1990, Vol. LIV, no. 4, pp. 273–300 [in English].

*G.V. Voskresenskaya*³**CUSP FORMS WITH CHARACTERS OF THE LEVEL P^4**

In the article we prove structure theorems for spaces of cusp forms with characters of a level p . The spaces are decomposed in the direct sum of three subspaces. The first subspace is essential. The eta-quotients play an important role in the investigations. The divisor of the functions is concentrated in cusps. The theorem about the structure of spaces of modular forms with characters is proved. We discuss the question about generators of these spaces and K.Ono's problem. Dimensions of spaces are calculated by the Cohen — Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, cusps, Eisenstein series, divisor of function, structure theorems, Cohen — Oesterle formula

Статья поступила в редакцию 29/1/2016.
The article received 29/1/2016.

³*Voskresenskaya Galina Valentinovna* (galvosk@mail.ru), Department of Algebra and Geometry, Samara University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

⁴The work is carried out at the financial support of the grant of the Russian Foundation for Basic Research 16-01-00154A.

А.В. Дюжева¹

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрен вопрос о разрешимости обратной задачи восстановления правой части линейного гиперболического уравнения с условиями интегрального по времени переопределения. Граничные условия изучаемой задачи являются нелокальными и представляют собой условия смещения. Получены условия на входные данные, выполнение которых гарантирует существование единственного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, нелокальные условия, интегральное переопределение, обобщенное решение, гиперболическое уравнение.

Введение

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$, для уравнения

$$u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x, t)u = h(x)f(x, t) \quad (1)$$

поставим следующую задачу:

найти пару функций $(u(x, t), h(x))$, удовлетворяющих уравнению (1), начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t), \\ u_x(l, t) &= \alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t) \end{aligned} \quad (3)$$

и условию переопределения:

$$\int_0^T K(t)u(x, t)dt = E(x). \quad (4)$$

Функции $a(x)$, $E(x)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K(t)$ заданы в областях $[0, l]$, $\overline{Q_T}$ и $[0, T]$ соответственно, кроме того, будем считать, что $0 < a_0 \leq a(x)$ всюду в $[0, l]$.

¹© Дюжева А.В., 2016

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений изучались во многих работах. Отметим статьи [1; 4] и список литературы в них. Работ, посвященных исследованию разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения, существенно меньше. Отметим наиболее близкие к тематике данной статьи работы [3; 6; 10].

В предлагаемой статье рассматривается обратная задача с интегральным по времени условием переопределения и с нелокальными граничными условиями. Найдены условия на входные данные, обеспечивающие существование единственного решения поставленной задачи.

1. Формулировка основного результата

Введем понятие решения задачи (1)–(4).

Пусть $\int_0^T K(t)f(x,t)dt \neq 0 \forall x \in [0, l]$, $K(T) = K'(T) = 0$

Тогда функцию $h(x)$, подлежащую определению, можно выразить через $u(x, t)$ и известные функции, входящие в уравнение (1) и условия (4), если считать их достаточно гладкими. А именно справедливо следующее соотношение:

$$h(x) = G^{-1}(x) \left[\int_0^T H(x, t)u(x, t)dt - (a(x)E'(x))' \right], \quad (5)$$

где обозначено

$$G(x) = \int_0^T K(x)f(x, t)dt, \quad H(x, t) = K''(x) + c(x, t)K(x).$$

Действительно, предполагая, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (4), умножим соотношение (1) на $K(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T . Получим

$$\begin{aligned} & K(T)u_t(x, T) - K'(T)u(x, T) + \\ & + \int_0^T (K''(t) + Kc)udt - (aE')' = h(x) \int_0^T K(x)f(x, t)dt. \end{aligned}$$

Учитывая свойства функции $K(t)$, приходим к (5).

Обозначим $\dot{W}_2^1(Q_T) = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^1(Q_T), v(x, T) = 0\}$. Пусть $v(x, t) \in \dot{W}_2^1(Q_T)$. Используя известную процедуру [5], выведем равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a(x)u_x v_x + a_x u_x v + cuv) dx dt + \\ & + \int_0^T a(0)v(0, t)[\alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t)] dt - \\ & - \int_0^T a(l)v(l, t)[\alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t)] dt = \int_0^T \int_0^l h f v dx dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(4) будем называть пару функций $(u(x, t), h(x))$ таких, что $u(x, 0) = 0$, выполняется тождество (6) для всех функций $v(x, t) \in \dot{W}_2^1(Q_T)$, и справедливо (5), понимаемое как равенство в $L_2(0, l)$.

Основной результат работы состоит в доказательстве существования единственного обобщенного решения поставленной задачи.

Пусть выполняются следующие условия:

(i) $c \in C(\overline{Q_T})$, $f \in C(\overline{Q_T})$, $a \in C[0, l]$, $E \in C^2[0, l]$;

(ii) $\alpha_i, \beta_i \in C^1[0, T], a(0)\beta_1(t) + a(l)\alpha_2(t) = 0,$

$\alpha_1(t)\beta_2(t) + \alpha_2(t)\beta_1(t) \geq 0, \alpha'_1(t)\beta'_2(t) + \alpha'_2(t)\beta'_1(t) \geq 0,$

(iii) $K \in C^2[0, T], \int_0^T K(t)f(x, t)dt \neq 0 \forall x \in [0, l], K(T) = K'(T) = 0.$ Заметим, что при выполнении этих условий найдутся числа $c_0 > 0, A > 0, \gamma > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \max_{\overline{Q_T}} |c(x, t)| &\leq c_0, \quad \max_{\overline{Q_T}} |f(x, t)| \leq \gamma, \\ \max_{[0, T], i=1, 2} |\alpha_i(t), \alpha'_i(t), \beta_i(t), \beta'_i(t)| &\leq A. \end{aligned}$$

Введем еще некоторые обозначения.

$$B = \max_{\overline{Q_T}} |H(x, t)|, \quad c_1 = \max\{c_0, A\}, \quad m_0 = \min\{a_0, 1\}, \quad c = c_1/m_0.$$

Теорема. Пусть выполняются условия (i)–(iii) и справедливы следующие соотношения:

$$G^2(x) \geq G_0 > 0, \quad \gamma B \frac{e^{cT} - 1}{cG_0} < 1.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4).

2. Доказательство теоремы

Доказательство проведем по следующей схеме: сначала построим последовательность приближенных решений, затем покажем, что последовательность сходится в $W_2^1(Q_T)$. И на заключительном этапе покажем, что ее предел и есть искомое решение.

Будем искать приближенное решение задачи (1)–(4) из соотношений

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^l (-u_t^n v_t + au_x^n v_x + a_x u_x^n v + cu^n v) dx dt + \\ &+ \int_0^T a(0)v(0, t)[\alpha_1(t)u^n(0, t) + \beta_1(t)u^n(l, t)] dt - \\ &- \int_0^T a(l)v(l, t)[\alpha_2(t)u^n(0, t) + \beta_2(t)u^n(l, t)] dt = \int_0^T \int_0^l h^n f v dx dt, \end{aligned} \quad (7)$$

$$h^n = (G(x))^{-1} \left[\int_0^T H u^{n-1} dt - (aE')' \right]. \quad (8)$$

Положим $u^0(x, t) = 0$. Тогда из (8) найдем $h^1(x) = -(a(x)E'(x))'G(x)$ и подставим ее в (7) для $n = 1$.

Заметим, что полученное для $n = 1$ равенство (7) представляет собой тождество, с помощью которого определено обобщенное решение задачи (1)–(3) в случае известной правой части.

В [11] было доказано существование единственного обобщенного решения $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ этой задачи. Следовательно, найдено $u^1(x, t)$. На следующем шаге найдем $h^2(x)$ и продолжим процесс для $n = 2, \dots$

Заметим, что в силу условий теоремы каждый раз $h^n(x)f(x, t) \in L_2(Q_T)$.

В результате этих действий мы получим последовательность приближенных решений $\{u^n(x, t), h^n(x)\}$.

Покажем, что $u^n \rightarrow u, h^n \rightarrow h$ при $n \rightarrow \infty$ в $W_2^1(Q_T)$ и $L_2(0, l)$ соответственно.

Обозначим:

$$z^n = u^n - u^{n-1}, \quad r^n = h^n - h^{n-1}.$$

Тогда справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-z_t^n v_t + a z_x^n v_x + a_x z_x^n v + c z^n v) dx dt + \\ & + \int_0^T a(0) v(0, t) [\alpha_1(t) z^n(0, t) + \beta_1(t) z^n(l, t)] dt - \\ & - \int_0^T a(l) v(l, t) [\alpha_2(t) z^n(0, t) + \beta_2(t) z^n(l, t)] dt = \int_0^T \int_0^l r^n f v dx dt, \\ & r^n = G^{-1} \left[\int_0^T H z^{m-1} dt \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Равенство (9) можно трактовать как тождество, определяющее обобщенное решение задачи (1)–(3) для уравнения (1) с правой частью $r^n f$. Как было замечено, эта задача однозначно разрешима и справедлива оценка [11]:

$$\|z^n\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq \frac{e^{cT} - 1}{c} \|r^n f\|_{L_2(0,l)} \leq \gamma \frac{e^{cT} - 1}{c} \|h^n\|_{L_2(0,l)}^2. \quad (11)$$

Из (10) с учетом условий теоремы следует неравенство

$$\|r^n\|_{L_2(0,T)}^2 \leq \frac{B}{G_0} \|z^{n-1}\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{B}{G_0} \|z^{n-1}\|_{W_2^1(Q_T)}^2.$$

Тогда из (11)

$$\|z^n\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq \gamma B \frac{e^{cT} - 1}{c G_0} \|z^{n-1}\|_{W_2^1(Q_T)}. \quad (12)$$

Так как по условию $\gamma B \frac{e^{cT} - 1}{c G_0} < 1$, то в силу признака Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|z^n\|$ сходится равномерно.

Для r^n получим

$$\|r^n\|_{L_2(0,T)}^2 \leq \frac{B}{G_0} \frac{e^{cT} - 1}{c} \|r^{n-1}\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Таким образом, в силу признака Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ также сходится равномерно.

Заметим, что u^n , h^n являются частичными суммами этих рядов, и, стало быть, последовательности $\{u^n\}$, $\{h^n\}$ сходятся соответственно в $W_2^1(Q_T)$ и $L_2(0, T)$ к u , h .

Переходя к пределу в (7)–(8), убеждаемся в существовании обобщенного решения задачи. Единственность решения следует из полученных оценок и доказанной в [11] единственности решения прямой задачи.

Литература

- [1] Cannon J.R., Yanping Lin An Inverse of Finding a Parameter in a Semi-Linear Heat Equation // Journal of mathematical analysis and applicatijns.1990. № 145. P. 470–484.
- [2] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М: Из-во иностр. лит., 1961, 120 с.
- [3] Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Труды Института математики и механики УрОРАН. 2012. Т. 18. № 1.

- [4] Камынин В.Л. Об обратной задаче определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // *Мат. заметки*. 2013. Т. 94. Вып. 2.
- [5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
- [6] Павлов С.С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением // *Мат. заметки ЯГУ*. 2011. Т. 18. Вып. 2.
- [7] Павлов С.С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // *Мат. заметки ЯГУ*. 2011. Т. 18. Вып. 1.
- [8] Сафиуллова Р.Р. Обратная задача с неизвестным составным внешним воздействием при составном переопределении // *Мат. заметки ЯГУ*. 2006. Т. 13. Вып. 2.
- [9] Савенкова А.Е. Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. 2014. № 3(114). С. 83–92.
- [10] Сафиуллова Р.Р. Линейная обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестной правой частью специального вида // *Мат. заметки ЯГУ*. 2008. Т. 15. № 2, С. 48–69.
- [11] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // *Вестник СамГУ*. 2010. № 4(78). С. 56–64.

References

- [1] Cannon J.R., Yanping Lin. An Inverse of Finding a Parameter in a Semi-Linear Heat Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 145, 1990, pp. 470–484 [in English].
- [2] Gording L. Zadacha Koshi dlia giperbolicheskikh uravnenii [Cauchy problem for hyperbolic equations]. M: Iz-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. [in Russian].
- [3] Denisov A.M. Obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nym kraevym usloviiem, soderzhashchim zapazdyvaiushchii argument [Inverse problem for hyperbolic equation with non-local boundary condition, containing retarded argument]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrORAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences], 2012, Vol.18, no.1 [in Russian].
- [4] Kamynin V.L. Ob obratnoi zadache opredeleniia mladshogo koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nabliudeniia [On inverse problem of definition of lower coefficient in the parabolic equation on condition of integrated supervision]. *Mat.zametki* [Mathematical Notes], 2013, Vol. 94, Issue 2.
- [5] Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].
- [6] Pavlov S.S. Nelineinye obratnye zadachi dlia mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii s integral'nym pereopredeleniem [Nonlinear inverse problems for multidimensional hyperbolic equations with integrated overdetermination]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], 2011, Vol. 18, Issue 2 [in Russian].
- [7] Pavlov S.S. Obratnaia zadacha vosstanovleniia vneshnego vozdeistviia v mnogomernom volnovom uravnenii s integral'nym pereopredeleniem [Inverse problem of reconstruction of external action]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], 2011, Vol.18, Issue 1 [in Russian].

- [8] Safulova R.R. Obratnaia zadacha s neizvestnym sostavnym vneshnim vozdeistviem pri sostavnom pereopredelenii [Inverse problem with unknown complex external action]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], 2006, Vol. 13. Issue 2 [in Russian].
- [9] Savenkova A.E. Obratnaia zadacha s integral'nym uslovieim pereopredeleniia dlia giperbolicheskogo uravneniia [Inverse problem with integral condition of overdetermination for a hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of SamSU. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 83–92 [in Russian].
- [10] Safulova R.R. Lineinaia obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s neizvestnoi pravoï chast'iu spetsial'nogo vida [Linear inverse problem for hyperbolic equation with unknown right member of a special form]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], Vol. 15, 2008, no. 2, pp. 48–69 [in Russian].
- [11] Pulkina L.S., Duzheva A.V. Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia [Nonlocal problem for] Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ, 2010, № 4(78), С. 56–64.

A. V. Duzheva²

INVERSE PROBLEM WITH INTEGRAL IN TIME OVERDETERMINATION AND NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this article, we consider a question of solvability of an inverse problem for a linear hyperbolic equation. Properties of the solution of an associated nonlocal initial-boundary problem with displacement in boundary conditions are used to develop an existence result for the identification of the unknown source. Overdetermination is represented as integral with respect to time-variable.

Key words: inverse problem, nonlocal conditions, integral overdetermination, generalized solution, hyperbolic equation.

Статья поступила в редакцию 28/1/2016.
The article received 28/1/2016.

²*Duzheva Alexandra Vladimirovna* (aduzheva@rambler.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Л.С. Пулькина, А.Е. Савенкова¹

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрена задача с нелокальными интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения на плоскости и доказана ее однозначная разрешимость. Для доказательства этого предложен метод, основанный на преобразовании нелокальных условий к виду, позволяющему эффективно ввести понятие обобщенного решения, базирующееся на выведенном интегральном тождестве, получить априорные оценки решения и воспользоваться свойствами пространств Соболева. Предложенный метод позволил обнаружить связь нелокальных условий с динамическими условиями.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, динамические условия.

1. Постановка задачи

В статье рассматривается задача отыскания решения в ограниченной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

а также условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) + \int_0^l K_1(x)u(x, t)dx &= 0, \\ u(l, t) + \int_0^l K_2(x)u(x, t)dx &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Условия (3) содержат следы искомого решения во внеинтегральных членах, поэтому являются условиями второго рода. Для исследования разрешимости нелокальных задач с условиями такого вида можно применить как метод вспомогательных задач, так и метод сведения к задаче с классическими краевыми условиями для

¹© Пулькина Л.С., Савенкова А.Е., 2016

Пулькина Людмила Степановна (louis@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Савенкова Алеся Евгеньевна (alesya.savenkova@mail.ru), кафедра общей математики и информатики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

нагруженного уравнения [1]. Заметим, что оба эти метода предполагают выполнение таких условий на ядра интегральных членов нелокальных условий, которые обеспечивают обратимость интегрального оператора, возникающего при их реализации.

Мы предлагаем в этой статье другой подход, позволяющий воспользоваться идеей метода компактности [2], который зарекомендовал себя как эффективный метод обоснования разрешимости как начально-краевых задач [3], так и нелокальных [4]. Предложенный метод позволил снять некоторые ограничения на ядра интегральных условий.

Начнем изучение поставленной задачи с доказательства утверждения, которое обнаруживает связь условий (3) с условиями, содержащими значения производных на боковой границе области Q_T , в том числе по пространственной переменной.

Теорема 1. Если $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$, удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2),

$$K_i \in C^2(0, l) \cap C^1[0, l], \quad \Delta = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0, \\ a \in C[0, l] \cap C^1(0, l), \quad c \in C(\bar{Q}_T), \quad f \in L_2(Q_T),$$

то условия (3) эквивалентны граничным условиям

$$a(0, t)u_x(0, t) = \alpha_{11}u(0, t) + \alpha_{12}u(l, t) + \beta_{11}u_{tt}(0, t) + \beta_{12}u_{tt}(l, t) + \\ + \int_0^l H_1(x, t)u(x, t)dx + \int_0^l S_1(x)f(x, t)dx, \\ a(l, t)u_x(l, t) = \alpha_{21}u(0, t) + \alpha_{22}u(l, t) + \beta_{21}u_{tt}(0, t) + \beta_{22}u_{tt}(l, t) + \\ + \int_0^l H_2(x, t)u(x, t)dx + \int_0^l S_2(x)f(x, t)dx, \quad (4)$$

где обозначено

$$\alpha_{11}(t) = \frac{K_2(l)K_1'(0) - K_1(l)K_2'(0)}{\Delta}a(0, t), \quad \alpha_{12}(t) = \frac{K_1(l)K_2'(l) - K_2(l)K_1'(l)}{\Delta}a(l, t), \\ \alpha_{21}(t) = \frac{K_2(0)K_1'(0) - K_1(0)K_2'(0)}{\Delta}a(0, t), \quad \alpha_{22}(t) = \frac{K_1(0)K_2'(l) - K_2(0)K_1'(l)}{\Delta}a(l, t), \\ \beta_{11} = \frac{K_2(l)}{\Delta}, \quad \beta_{12} = -\frac{K_1(l)}{\Delta}, \quad \beta_{21} = \frac{K_2(0)}{\Delta}, \quad \beta_{22} = -\frac{K_1(0)}{\Delta}, \\ H_1(x, t) = \frac{[(aK_1')_x - cK_1]K_2(l) - [(aK_2')_x - cK_2]K_1(l)}{\Delta}, \\ H_2(x, t) = \frac{[(aK_1')_x - cK_1]K_2(0) - [(aK_2')_x - cK_2]K_1(0)}{\Delta}, \\ S_1(x) = \frac{K_1(x)K_2(l) - K_2(x)K_1(l)}{\Delta}, \quad S_2(x) = \frac{K_1(x)K_2(0) - K_2(x)K_1(0)}{\Delta}.$$

Доказательство этого утверждения становится почти очевидным после дифференцирования по переменной t равенств (3) в предположении о выполнении условий теоремы. Преобразования, приводящие к (4), элементарны, но громоздки, поэтому мы их здесь не приводим. Предполагая затем, что выполняются равенства (1), (2) и (4), интегрируя слагаемые в (4) $\int_0^l (aK_i')_x u dx$ дважды, после некоторых преобразований и решения возникшей при этом задачи Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений приходим к (3).

Доказанное в теореме 1 утверждение позволяет перейти от задачи (1)–(3) к задаче с нелокальными условиями (4): найти в Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (4).

Поясним смысл перехода от задачи (1)–(3 к задаче (1), (2), (4). Заметим, что условие (4) в отличие от условия (3) содержит в качестве внеинтегрального члена значения выводящей производной искомой функции на боковой границе, а именно $u_x(0, t)$, $u_x(l, t)$, что и позволит нам воспользоваться основными идеями метода компактности. Это становится видно на первом шаге доказательства разрешимости задачи в процессе вывода интегрального тождества, на котором и базируется определение решения. Действительно, применяя стандартную процедуру [3], отправной точкой которой является интегрирование по Q_T (1), умноженного на подходящую гладкую функцию $v(x, t)$, получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c u v) dx dt + \int_0^T v(0, t) [\alpha_{11} u(0, t) + \alpha_{12} u(l, t)] dt - \\ & - \int_0^T v_t(0, t) [\beta_{11} u_t(0, t) + \beta_{12} u_t(l, t)] dt + \int_0^T v(0, t) \int_0^l H_1 u dx dt - \\ & - \int_0^T v(l, t) [\alpha_{21} u(0, t) + \alpha_{22} u(l, t)] dt + \\ & + \int_0^T v_t(l, t) [\beta_{21} u_t(0, t) + \beta_{22} u_t(l, t)] dt - \int_0^T v(l, t) \int_0^l H_2 u dx dt = \\ & = \int_0^T \int_0^l f v dx dt - \int_0^T v(0, t) \int_0^l S_1 f dx dt + \int_0^T v(l, t) \int_0^l S_2 f dx dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим

$$\Gamma_0 = \{(x, t) : x = 0, t \in [0, T]\}, \quad \Gamma_l = \{(x, t) : x = l, t \in [0, T]\}, \quad \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l,$$

$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), u_x(0, t) = 0, u_t \in L_2(\Gamma)\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v(x, t) : v(x, t) \in W(Q_T), v(x, T) = 0\}.$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (2), (4) будем называть функцию $u(x, t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству (5) для любой $v \in \hat{W}(Q_T)$.

2. Разрешимость задачи

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

$$(i) \ a \in C(\bar{Q}_T), \quad a_t \in C(\bar{Q}_T), \quad a(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_T \quad c \in C(\bar{Q}_T),$$

$$(ii) \ H_i \in C(\bar{Q}_T), \quad S_i \in C[0, l], \quad f \in L_2(Q_T), \quad f_t \in L_2(Q_T),$$

$$(iii) \ \alpha_{11} \xi^2 - 2\alpha_{21} \xi \eta - \alpha_{22} \eta^2 \geq 0, \quad \beta_{11} \xi^2 + 2\beta_{21} \xi \eta - \beta_{22} \eta^2 \geq 0,$$

$$(iiii) \ \alpha_{12} + \alpha_{21} = 0, \quad \alpha'_{11}(t) < 0, \quad \alpha'_{22}(t) > 0, \quad \beta_{12} + \beta_{21} = 0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), (4).

Доказательство.

Единственность решения. Предположим, что существует два различных решения этой задачи, $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда их разность, $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c v) dx dt + \int_0^T v(0, t) [\alpha_{11} u(0, t) + \alpha_{12} u(l, t)] dt - \\ & - \int_0^T v_t(0, t) [\beta_{11} u_t(0, t) + \beta_{12} u_t(l, t)] dt + \int_0^T v(0, t) \int_0^l H_1 u dx dt - \\ & - \int_0^T v(l, t) [\alpha_{21} u(0, t) + \alpha_{22} u(l, t)] dt + \\ & + \int_0^T v_t(l, t) [\beta_{21} u_t(0, t) + \beta_{22} u_t(l, t)] dt - \int_0^T v(l, t) \int_0^l H_2 u dx dt = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Выберем в тождестве (6) функцию $v(x, t)$, положив

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_{\tau}^t u(x, \eta) d\eta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $\tau \in [0, T]$ произвольно.

Элементарные преобразования тождества (6), состоящие, как обычно, в интегрировании по частям с выбранной указанным образом функцией $v(x, t)$, приводят к равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0) v_x^2(x, 0)] dx = - \int_0^{\tau} \int_0^l a_t v_x^2 dx dt + \\ & + \int_0^{\tau} [\alpha'_{22} v^2(l, t) + 2\alpha'_{21} v(0, t) v(l, t) - \alpha'_{11} v^2(0, t)] dt + \\ & + \alpha_{22}(0) v^2(l, 0) + 2\alpha_{21} v(0, 0) v(l, 0) - \alpha_{11}(0) v^2(0, 0) + \\ & + \beta_{22} u^2(l, \tau) - 2\beta_{21} u(0, \tau) u(l, \tau) - \beta_{11} u^2(0, \tau) + \\ & + \int_0^{\tau} v(0, t) \int_0^l H_1 u dx dt - \int_0^{\tau} v(l, t) \int_0^l H_2 u dx dt + \int_0^{\tau} \int_0^l c v v_t dx dt, \end{aligned} \quad (7)$$

где уже учтено условие (iii) теоремы. Оценим правую часть последнего равенства. Заметим, что из условий теоремы следует существование чисел c_0, h_0, A, σ таких, что

$$\max_{Q_T} |c(x, t)| \leq c_0, \quad \max_{[0, T]} |\alpha_{ij}, \alpha'_{ij}| \leq A, \quad i, j = 1, 2, \quad \max_{Q_T} |a_t(x, t)| \leq a_1,$$

$$\max_{[0, T]} \int_0^l H_i^2(x, t) dx \leq h_0, \quad \max_{[0, l]} S_i(x) \leq \sigma.$$

Применяя неравенства Коши, Коши — Буняковского, неравенства

$$v^2(s_i, t) \leq 2l \int_0^l v_x^2 dx + \frac{2}{l} v^2 dx, \quad i = 0, 1, \quad s_0 = 0, s_1 = l,$$

которые легко выводятся из представления

$$v(s_i, t) = \int_x^{s_i} v_\xi(\xi, t) d\xi + v(x, t),$$

а также неравенство

$$v^2(x, t) \leq \tau \int_0^\tau u^2 dt,$$

вытекающее из представления функции $v(x, t)$, получим

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0)v_x^2(x, 0)] dx \leq A_1 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt + A_2 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt, \quad (8)$$

где $A_1 = 2l(2A + 1)$, A_2 зависит лишь от c_0, h, σ, a_1, A .

Введем функцию $w(x, t) = \int_0^t u_x(x, \eta) d\eta$. Тогда, как нетрудно заметить,

$$v_x(x, t) = w(x, t) - w(x, \tau), \quad v_x(x, 0) = -w(x, \tau), \\ v_x^2(x, t) \leq 2w^2(x, t) + 2w^2(x, \tau).$$

Учитывая эти соотношения, из (8) получим

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0)w^2(x, \tau)] dx \leq 2A_1 \tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx + \\ + 2A_1 \int_0^\tau \int_0^l w^2(x, t) dx dt + A_2 \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t) dx dt. \quad (9)$$

Пусть $a(x, t) \geq a_0 > 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_T$. Пользуясь произволом τ , выберем его так, чтобы $a_0 - 2A_1\tau > 0$. Для определенности будем считать, что $a_0 - 2A_1\tau \geq \frac{a_0}{2}$. Тогда первое слагаемое правой части (9) можно перенести в левую часть, и для всех $\tau \in [0, \frac{a_0}{4A_1}]$ будет справедливо неравенство

$$m_0 \int_0^l [u^2(x, \tau) + w^2(x, \tau)] dx \leq A_3 \int_0^\tau \int_0^l [u^2(x, t) + w^2(x, t)] dx dt,$$

где $m_0 = \min\{1, \frac{a_0}{2}\}$, $A_3 = \max\{2A_1, A_2\}$, применение к которому неравенства Гронуолла моментально влечет выполнение равенства $u(x, t) = 0, \quad t \in [0, \frac{a_0}{4A_1}]$. Повторяя рассуждения для $\tau \in [\frac{a_0}{4A_1}, \frac{a_0}{2A_1}]$ и продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов убедимся в том, что $u(x, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$, что и приводит к противоречию с предположением о существовании более одного решения.

Существование решения. Доказательство существования обобщенного решения проведем по следующей схеме: построим последовательность приближенных решений; выведем априорную оценку; покажем, что полученная оценка позволяет

выделить слабо сходящуюся подпоследовательность; убедимся в том, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое решение.

Перейдем к реализации нашего плана. Пусть функции $w_k(x) \in C^2[0, l]$ образуют линейно независимую и полную в $W_2^1(0, l)$ систему. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x) \quad (10)$$

из соотношений

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j) dx + \\ & + w_k(0) [\alpha_{11} u^m(0, t) + \alpha_{12} u^m(l, t) + \beta_{11} u_{tt}^m(0, t) + \beta_{12} u^m(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u(x, t) dx] - \\ & - w_k(l) [\alpha_{21} u^m(0, t) + \alpha_{22} u^m(l, t) + \beta_{21} u_{tt}^m(0, t) + \beta_{22} u^m(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u(x, t) dx] = \\ & = \int_0^l f(x, t) w_j(x) dx - w_j(0) \int_0^l S_1(x) f(x, t) dx + w_j(l) \int_0^l S_2(x) f(x, t) dx. \quad (11) \end{aligned}$$

Дополнив соотношения (11), которые представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(t)$, начальными условиями $c_k(0) = 0$, $c_k'(0) = 0$, приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), разрешимость которой гарантирована условиями теоремы. Прежде всего покажем, что система (11) разрешима относительно старших производных. Подставив в (11) $u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$, запишем ее в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m A_{kj} c_k''(t) + \sum_{k=1}^m B_{kj}(t) c_k(t) = f_j(t), \\ & A_{kj} = \int_0^l w_k(x) w_j(x) dx + \\ & + \beta_{11} w_k(0) w_j(0) + \beta_{12} w_k(l) w_j(0) - \beta_{21} w_k(0) w_j(l) - \beta_{22} w_k(l) w_j(l), \\ & B_{kj}(t) = \int_0^l (a(x, t) w_k'(x) w_j'(x) + c(x, t) w_k(x) w_j(x)) dx + \\ & + \alpha_{11} w_k(0) w_j(0) + \alpha_{12} w_k(l) w_j(0) - \alpha_{21} w_k(0) w_j(l) - \alpha_{22} w_k(l) w_j(0), \\ & f_j(t) = \int_0^l f(x, t) w_j(x) dx - w_j(0) \int_0^l S_1(x) f(x, t) dx + w_j(l) \int_0^l S_2(x) f(x, t) dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим квадратичную форму с коэффициентами $A_{kj} : q = \sum_{k,l=1}^m A_{kl} \xi_k \xi_l$,

где $z = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x)$. Подставив выражение коэффициентов A_{kj} , получим

$$q = \int_0^l |z(x)|^2 dx + \beta_{11}|z(0)|^2 + 2\beta_{12}|z(0)||z(l)| - \beta_{22}|z(l)|^2.$$

В силу условия (iii) теоремы 2 $q \geq 0$, причем равенство нулю возможно лишь при $z = 0$. Так как функции $w_i(x)$ линейно независимы, то $z = 0$ только в том случае, когда $\xi_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$. Стало быть, квадратичная форма q , а с ней и матрица из коэффициентов при старших производных системы (11) положительно определена, что и означает разрешимость системы относительно старших производных. В силу условий теоремы коэффициенты системы ограничены, а свободные члены $f_j \in L_1(0, T)$. Таким образом, мы приходим к выводу о существовании решения задачи Коши для системы (11), причем $c_k'' \in L_1(0, T)$. Это в свою очередь означает, что последовательность приближенных решений построена.

Для дальнейших шагов в доказательстве существования обобщенного решения поставленной задачи нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и перейдем.

Умножим каждое из равенств (11) на $c_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m , а затем проинтегрируем от 0 до τ , в результате чего придем к равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m) dx dt + \\ & + \int_0^\tau u_t^m(0, t) [\alpha_{11} u^m(0, t) + \alpha_{12} u^m(l, t) + \beta_{11} u_{tt}^m(0, t) + \beta_{12} u_{tt}^m(l, t)] dt + \\ & + \int_0^\tau u_t^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx dt - \\ & - \int_0^\tau u_t^m(l, t) [\alpha_{21} u^m(0, t) + \alpha_{22} u^m(l, t) + \beta_{21} u_{tt}^m(0, t) + \beta_{22} u_{tt}^m(l, t)] dt - \\ & - \int_0^\tau u_t^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx dt = \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) u_t^m(x, t) dx dt - \\ & - \int_0^\tau u_t^m(0, t) \int_0^l S_1(x) f(x, t) dx dt + \int_0^\tau u_t^m(l, t) \int_0^l S_2(x) f(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Интегрируя по частям, преобразуем равенство (12). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m)^2 + a (u_x^m)^2] \Big|_{t=\tau} dx + \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha'_{11} (u^m(0, t))^2 dt + \int_0^\tau \alpha_{12} u_t^m(0, t) u^m(l, t) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \alpha_{11}(\tau) (u_t^m(0, \tau))^2 + \int_0^\tau \beta_{12} u_t^m(0, t) u_{tt}^m(l, t) dt - \\
& - \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u_t^m(x, t) dx dt - \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_{1t}(x, t) u^m(x, t) dx dt + \\
& + u^m(0, \tau) \int_0^l H_1(x, \tau) u^m(x, \tau) dx + \int_0^\tau \alpha_{21} u^m(l, t) u_t^m(0, t) dt + \int_0^\tau \alpha'_{21} u^m(l, t) u^m(0, t) dt - \\
& - \alpha_{21}(\tau) u^m(l, \tau) u^m(0, \tau) + \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha'_{22} (u^m(l, t))^2 dt - \frac{1}{2} \alpha_{22}(\tau) (u^m(l, \tau))^2 + \\
& + \int_0^\tau \beta_{21} u_{tt}^m(l, t) u_t^m(0, t) dt - \beta_{21} u_t^m(l, \tau) u_t^m(0, \tau) - \frac{1}{2} \beta_{22} (u_t^m(l, \tau))^2 + \\
& + \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2 u_t^m dx dt + \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_{2t} u^m dx dt - \\
& - u^m(l, \tau) \int_0^l H_2(x, \tau) u^m(x, \tau) dx = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt + \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l S_1 f_t dx dt - \\
& - u^m(0, \tau) \int_0^l S_1 f dx - \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l S_2 f_t dx dt + u_t^m(l, \tau) \int_0^l S_2 f_t dx. \quad (13)
\end{aligned}$$

Прежде чем приступить к оценке, учтем условие (iii) теоремы и сгруппируем оставшиеся слагаемые в удобном для дальнейших рассуждений порядке.

$$\begin{aligned}
& \int_0^l [(u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2] \Big|_{t=\tau} dx - \int_0^\tau \alpha'_{11} (u^m(0, t))^2 dt + \int_0^\tau \alpha'_{22} (u^m(l, t))^2 dt + \\
& + \alpha_{11}(\tau) (u_t^m(0, \tau))^2 - 2\alpha_{21}(\tau) u^m(l, \tau) u^m(0, \tau) + \alpha_{22}(\tau) (u^m(l, \tau))^2 + \\
& + \beta_{11} (u_t^m(0, \tau))^2 + 2\beta_{21} u_t^m(l, \tau) u_t^m(0, \tau) - \beta_{22} (u_t^m(l, \tau))^2 = \\
& = -2 \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt + \\
& + 2 \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u_t^m(x, t) dx dt + 2 \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_{1t}(x, t) u^m(x, t) dx dt - \\
& - 2 u^m(0, \tau) \int_0^l H_1(x, \tau) u^m(x, \tau) dx - 2 \int_0^\tau \alpha'_{21} u^m(l, t) u^m(0, t) dt - \\
& - 2 \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2 u_t^m dx dt - 2 \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_{2t} u^m dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+u^m(0, \tau) \int_0^l H_2(x, \tau) u^m(x, \tau) dx + \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt + \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l S_1 f_t dx dt - \\
 &-u^m(0, \tau) \int_0^l S_1 f dx - \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l S_2 f_t dx dt + u_t^m(l, \tau) \int_0^l S_2 f_t dx. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Применяя условие теоремы (iiii), неравенства Коши, Коши – Буняковского, очевидное неравенство $(u^m(x, \tau))^2 \leq \tau \int_0^\tau (u_t^m(x, t))^2 dt$ и условия теоремы, с помощью той же техники, что и при доказательстве единственности решения, получим из (13) неравенство

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] \Big|_{t=\tau} dx + \int_0^\tau [(u^m(0, t))^2 + (u^m(l, t))^2] dt \leq \\
 &\leq A_4 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dx dt + A_5 \int_0^\tau \int_0^l (f^2 + f_t^2) dx dt, \quad (15)
 \end{aligned}$$

где A_i зависят лишь от постоянных $c_0, k_0, c_1, a_0, a_1, h_0$ и не зависят от m . Из этого неравенства, справедливого для любого m , в силу леммы Гронуолла вытекает *априорная оценка*

$$\|u^m\|_{W_2^1(Q_T)}^2 + \|u_t^m\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq R. \quad (16)$$

Стало быть, из построенной последовательности $\{u^m(x, t)\}$ приближенных решений можно выделить слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой во избежание громоздкой записи сохраним прежнее обозначение.

Покажем теперь, что предел выделенной подпоследовательности, $u \in W(Q_T)$, и есть искомое приближенное решение.

Умножим каждое из равенств (11) на $d_j \in C^1(0, T)$, $d_j(T) = 0$, просуммируем по l от 1 до m , а затем проинтегрируем от 0 до T . После интегрирования первого слагаемого полученного равенства по частям и обозначив $\eta(x, t) = \sum_{j=1}^m d_j(t) w_j(x)$, получим

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_0^l (-u_t \eta_t + a u_x \eta_x + c u \eta) dx dt + \int_0^T \eta(0, t) [\alpha_{11} u(0, t) + \alpha_{12} u(l, t)] dt - \\
 &- \int_0^T \eta_t(0, t) [\beta_{11} u_t(0, t) + \beta_{12} u_t(l, t)] dt + \int_0^T \eta(0, t) \int_0^l H_1 u dx dt - \\
 &- \int_0^T \eta(l, t) [\alpha_{21} u(0, t) + \alpha_{22} u(l, t)] dt + \\
 &+ \int_0^T \eta_t(l, t) [\beta_{21} u_t(0, t) + \beta_{22} u_t(l, t)] dt - \int_0^T \eta(l, t) \int_0^l H_2 u dx dt = \\
 &= \int_0^T \int_0^l f \eta dx dt - \int_0^T \eta(0, t) \int_0^l S_1 f dx dt + \int_0^T \eta(l, t) \int_0^l S_2 f dx dt. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Совокупность функций вида $\sum_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$ обозначим \mathcal{N}_m . Зафиксируем произвольно функцию $\eta(x, t)$ из какого-либо множества \mathcal{N}_{m_i} . В (16) можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$ в силу обоснованной выше слабой сходимости выделенной подпоследовательности. В результате мы приходим к тождеству (5) для предельной функции $u \in W(Q_T)$, справедливому для произвольной функции $\eta \in \mathcal{N}_{m_i}$. Так как $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m$ плотно в \hat{W} , полученное в результате предельного перехода тождество выполняется для любой функции из $\hat{W}(Q_T)$, что и завершает доказательство существования обобщенного решения и, следовательно, теоремы.

Замечание 1. Однородность начальных условий (2) не ограничивает общность. Действительно, если $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, то, введя новую неизвестную функцию $v(x, t) = u(x, t) - \varphi(x) - t\psi(x)$, получим для нее уравнение, отличающееся от (1) лишь правой частью, тогда как начальные условия для $v(x, t)$ однородны.

Замечание 2. Новые интегральные условия (4) интересны еще и тем, что являются динамическими. Некоторые задачи с динамическими граничными условиями рассмотрены в [5–8], с динамическими нелокальными — в [9].

Замечание 3. Отметим некоторые статьи, в которых авторы обращают внимание на особенности нелокальных задач, не позволяющие применять для обоснования их разрешимости методы доказательства разрешимости классических начально-краевых задач: [10–17].

Литература

- [1] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.
- [2] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
- [3] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.
- [4] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. 2006. № 2(42). С. 15–27.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.
- [6] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // ДАН. 2007. Т. 417. № 1.
- [7] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. № 28. P. 1–10.
- [8] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010. 237 с.
- [9] Pulkina L. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // EJDE. 2014. № 116. P. 1–9.
- [10] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
- [11] Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0, 1)$ // ДАН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.

- [12] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
- [13] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. № 42(8). С. 1072–1077
- [14] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. 2008. № 3(62). С. 165–174.
- [15] Стригун М.В. Об одной нелокальной задаче с интегральными граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2009. № 8(74). С. 78–87.
- [16] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. Vol. 5. № 1. P. 31–37.
- [17] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия вузов. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74–83.
- [18] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во "Самарский университет". 2012.

References

- [1] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym uslovиеm integral'nogo vida dlia mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii [On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimensional Hyperbolic Equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, no.9, pp. 1233–1246 [in Russian].
- [2] Lions J.L. Nekotorye metody resheniia nelineinykh kraevykh zadach [Quelques methods de resolution des problems aux limites non lineares]. M.: Mir, 1972 [in Russian].
- [3] Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary-value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].
- [4] Dmitriev V.B. Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia volnovogo uravneniia [Nonlocal problem with integral conditions for wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2006, no. 2(42), pp. 15–27 [in Russian].
- [5] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 2004, 798 p. [in Russian].
- [6] Fedotov I.A., Polyinin A.D., Shatalov M.Yu. Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebaniitverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia [Theory of free vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *DAN* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 2007, Vol. 417, no. 1, pp. 56–61 [in Russian].
- [7] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 1998, no. 28, pp. 1–10 [in English].
- [8] Korpusov M.O. Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010, 237 p. [in Russian].
- [9] Pulkina L. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations. *EJDE*, 2014, no. 116, pp. 1–9 [in English].
- [10] Ionkin N.I. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym uslovиеm [Solution of a certain boundary value problem in heat conduction with nonclassical boundary condition]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 1977, Vol. 13, no. 2, pp. 294–304 [in Russian].

- [11] Skubachevskii A.L., Steblov G.M. O spektre differentsial'nykh operatorov s oblast'iu opredeleniia, ne plotnoi v $L_2(0,1)$ [On spectrum of differential operators with nondense in L_2 domain]. *DAN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1991, Vol. 321, no. 6, pp. 1158–1163 [in Russian].
- [12] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. [Solutions of Nonlocal Problems for One-dimensional Oscillations of the Medium]. *Matem. modelir.* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2000, Vol. 12, no.1, pp. 94–103 [in Russian].
- [13] Lazhetich N.L. O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka [On classical solvability of a mixed problem for one-dimensional hyperbolic equation of the second order]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, 42(8), pp. 1072–1077 [in Russian].
- [14] Kozhanov A.I. O razreshimosti nekotorykh prostranstvenno nelokal'nykh kraevykh zadach dlia lineinykh parabolicheskikh uravnenii [On solvability of some spacial nonlocal boundary problems for linear parabolic equations]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2008. no. 3(62), pp. 165–174 [in Russian].
- [15] Strigun M.V. Ob odnoi nelokal'noi zadache s integral'nymi granichnym usloviem dlia giperbolicheskogo uravneniia [On a certain nonlocal problem with integral boundary condition for a hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2009, no. 8(74), pp. 78–87 [in Russian].
- [16] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, Vol. 5, no. 1, pp. 31–37 [in Russian].
- [17] Pulkina L.S. Kraevye zadachi dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nymi usloviiami I i II roda [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2012, no. 4, pp. 74–83 [in Russian].
- [17] Pulkina L.S. Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii [Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations]. Samara: Izd-vo "Samarskii universitet", 2012.

*L.S. Pulkina, A.E. Savenkova*²

A PROBLEM WITH SECOND KIND INTEGRAL CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this paper, we consider a problem for one-dimensional hyperbolic equation with second kind integral conditions and prove unique solvability. To prove this statement we suggest a new approach. The main idea of it is that given nonlocal integral condition is equivalent with a different condition, nonlocal as well but this new condition enables us to introduce a definition of a generalized solution based on an integral identity and derive a priori estimates of a required solution in Sobolev space. This approach shows that integral conditions are closely connected with dynamical conditions.

Key words: nonlocal problem, integral conditions, hyperbolic equation, generalized solution, dynamical conditions.

Статья поступила в редакцию 28/III/2016.
The article received 28/III/2016.

²*Pulkina Ludmila Stepanovna* (louise@samdiff.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Savenkova Alesya Evgen'evna (alesya.savenkova@mail.ru), Department of General Mathematics and Informatics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

УДК 519.7

С.М. Рацеев, В.М. Рацеев¹

ПОСТРОЕНИЕ СОВЕРШЕННЫХ ИМИТОСТОЙКИХ ШИФРОВ НА ОСНОВЕ КОМБИНАТОРНЫХ ОБЪЕКТОВ

В статье исследуются совершенные шифры, стойкие к имитации и подмене зашифрованных сообщений. Особо выделен случай, когда вероятности имитации и подмены достигают нижних границ. На основе математической модели шифра замены с неограниченным ключом, предложенной А.Ю. Зубовым, в статье приводится конструкция совершенного шифра на основе комбинаторных объектов, стойкого к имитации и подмене.

Ключевые слова: шифр, совершенный шифр, имитация сообщения.

Все необъяснимые понятия можно найти в [1]. Пусть $\Sigma_B = (X, K, Y, E, D, P_X, P_K)$ — вероятностная модель шифра. Напомним, что шифр Σ_B называется совершенным (по Шеннону), если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполнено равенство $P_{X|Y}(x|y) = P_X(x)$. Другими словами, перехваченное зашифрованное сообщение y не дает никакой дополнительной информации об открытом тексте x . В работе [2] приводится критерий совершенных шифров с фиксированным набором параметров. Пусть $x \in X$, $y \in Y$. Обозначим $K(x, y) = \{k \in K \mid E_k(x) = y\}$.

Нам понадобится следующий критерий совершенных шифров в классе шифров с равномерным распределением вероятностей на множестве K .

Теорема 1 [3]. Шифр Σ_B с равномерным распределением вероятностей P_K является совершенным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (i) для любых $x \in X$, $y \in Y$ найдется такой ключ $k \in K$, что $E_k(x) = y$;
- (ii) для любых $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ выполнено равенство $|K(x_1, y)| = |K(x_2, y)|$.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega = K, F_K, P_K)$. Зафиксируем $y \in Y$. Обозначим $K(y) = \{k \in K \mid y \in E_k(X)\}$. Под обозначением $K(y)$ будем также понимать событие $(K(y) \in F_K)$, заключающееся в том, что при случайном выборе ключа $k \in K$ зашифрованный текст y можно расшифровать на ключе k , то есть $y \in E_k(X)$. Тогда событию $K(y)$ будут благоприятствовать все элементы из

¹© Рацеев С.М., Рацеев В.М., 2016

Рацеев Сергей Михайлович (RatseevSM@mail.ru), кафедра информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Рацеев Владимир Михайлович, кафедра телекоммуникационных технологий и сетей, Ульяновский государственный университет, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

множества $K(y)$, и только они. Поэтому

$$P(K(y)) = \sum_{k \in K(y)} P_K(k).$$

Если канал связи готов к работе и на приеме установлены действующие ключи, но в данный момент времени никакого сообщения не передается, то в этом случае противником может быть предпринята попытка имитации сообщения. Тогда вероятность успеха имитации определяется следующим образом:

$$P_{im} = \max_{y \in Y} P(K(y)).$$

Если же в данный момент передается некоторое сообщение $y \in Y$ (которое получено из открытого текста $x \in X$ на ключе $k \in K$), то противник может заменить его на $\tilde{y} \in Y$, отличный от y . При этом он будет рассчитывать на то, что на действующем ключе k криптограмма \tilde{y} будет воспринята как некий осмысленный открытый текст \tilde{x} , отличный от x . Пусть " $K(\tilde{y}) | K(y)$ " — событие, заключающееся в попытке подмены сообщения y сообщением \tilde{y} . Применяя теорему о произведении вероятностей, получаем, что

$$P(K(\tilde{y}) | K(y)) = \frac{P(K(y) \cap K(\tilde{y}))}{P(K(y))} = \frac{\sum_{k \in K(y, \tilde{y})} P_K(k)}{\sum_{k \in K(y)} P_K(k)},$$

где $K(y, \tilde{y}) = K(y) \cap K(\tilde{y})$. Тогда вероятность успеха подмены сообщения будет вычисляться по следующей формуле:

$$P_{podm} = \max_{\substack{y, \tilde{y} \in Y \\ y \neq \tilde{y}}} P(K(\tilde{y}) | K(y)).$$

Теорема 2 [1]. Для любого шифра Σ_B , $|X| = m$, $|Y| = n$, справедливы неравенства

$$P_{im} \geq \frac{m}{n}, \quad P_{podm} \geq \frac{m-1}{n-1}.$$

При этом $P_{im} = m/n$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$ выполнено равенство $P(K(y)) = m/n$. Также $P_{podm} = (m-1)/(n-1)$ тогда и только тогда, когда для любых $y, \tilde{y} \in Y$, $y \neq \tilde{y}$, выполнено равенство $P(K(\tilde{y}) | K(y)) = (m-1)/(n-1)$.

Будем говорить, что шифр Σ_B является имитостойким, если для него достигаются нижние границы для вероятностей успехов имитации и подмены шифрованных сообщений. В следующем утверждении приводится конструкция имитостойких шифров на основе сочетаний.

Утверждение 1. Пусть для шифра Σ_B выполнены следующие условия:

(i) $|X| = m$, $|Y| = n$, $1 < m < n$, $|K| = C_n^m$, C_n^m — число сочетаний из n по m , и все строки матрицы зашифрования являются сочетаниями из n элементов множества Y по m ;

(ii) распределение вероятностей P_K равномерно.

Тогда $P_{im} = m/n$, $P_{podm} = (m-1)/(n-1)$.

Доказательство. Пусть $y, \tilde{y} \in Y$, $y \neq \tilde{y}$. Тогда

$$P(K(y)) = \frac{|K(y)|}{|K|} = \frac{C_{n-1}^{m-1}}{C_n^m} = \frac{m}{n}.$$

$$P(K(\tilde{y}) \mid K(y)) = \frac{|K(\tilde{y}, y)|}{|K(y)|} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_{n-1}^{m-1}} = \frac{m-1}{n-1}.$$

Поэтому из теоремы 2 следует, что

$$P_{im} = \frac{m}{n}, \quad P_{podm} = \frac{m-1}{n-1}.$$

□

В следующей теореме приводится конструкция совершенных имитостойких шифров на основе размещений.

Теорема 3. Пусть для шифра Σ_B выполнены следующие условия:

(i) $|X| = m$, $|Y| = n$, $1 < m < n$, $|K| = A_n^m$, A_n^m — число размещений из n по m , и все строки матрицы зашифрования являются размещениями из n элементов множества Y по m ;

(ii) распределение вероятностей P_K равномерно.

Тогда шифр Σ_B является совершенным, причем $P_{im} = m/n$, $P_{podm} = (m-1)/(n-1)$.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y \in Y$. Так как $|K(x, y)| = A_{n-1}^{m-1}$, то из теоремы 1 следует, что шифр Σ_B является совершенным.

Пусть $y, \tilde{y} \in Y$, $y \neq \tilde{y}$. Тогда

$$P(K(y)) = \frac{|K(y)|}{|K|} = \frac{mA_{n-1}^{m-1}}{A_n^m} = \frac{m}{n}.$$

$$P(K(\tilde{y}) \mid K(y)) = \frac{|K(\tilde{y}, y)|}{|K(y)|} = \frac{A_m^2 A_{n-2}^{m-2}}{mA_{n-1}^{m-1}} = \frac{m-1}{n-1}.$$

Поэтому из теоремы 2 следует, что

$$P_{im} = \frac{m}{n}, \quad P_{podm} = \frac{m-1}{n-1}.$$

□

Определенная вероятностная модель шифра Σ_B позволяет рассматривать лишь конечные множества открытых текстов X . В работе [1] приводятся модели шифров замены с ограниченным и неограниченным ключом, для которых, в частности, на множество X такое ограничение не накладывается. Пусть

$$\Sigma^l = (U^l, \mathbb{N}_r^l, V^l, E^{(l)}, D^{(l)}), \quad \Sigma_H = (\Sigma_H^l, l \in \mathbb{N}; \psi_c)$$

— шифр замены с неограниченным ключом (подробнее см. [3]). В работе [4] приводятся различные конструкции совершенных имитостойких шифров Σ_H . Обозначим $\mathbb{N}_r^l(\bar{u}, \bar{v}) = \{\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l \mid E_{\bar{j}}(\bar{u}) = \bar{v}\}$.

Говорят, что шифр Σ_H является совершенным тогда и только тогда, когда для любого натурального l шифр Σ_H^l является совершенным.

Теорема 4 [3]. Шифр Σ_H с равномерным распределением вероятностей $P_{\mathbb{N}_r}$ является совершенным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (i) для любых $u \in U$ и $v \in V$ найдется такое $j \in \mathbb{N}_r$, что $E_j(u) = v$;
- (ii) для любых $u_1, u_2 \in U$, $v \in V$ выполнено равенство $|\mathbb{N}_r(u_1, v)| = |\mathbb{N}_r(u_2, v)|$.

Для шифра замены с неограниченным ключом Σ_H обозначим через P_{im}^l вероятность успеха имитации сообщения для шифра Σ_H^l , а через $P_{podm}^l(s)$ — вероятность успеха подмены в сообщении длины l ровно s символов для шифра Σ_H^l , где $s \leq l$.

Утверждение 2. Пусть для шифра Σ_H выполнены следующие условия:

- (i) $|U| = m$, $|V| = n$, $1 < m < n$, $r = C_n^m$, и все строки матрицы зашифрования опорного шифра Σ являются сочетаниями из n элементов множества V по m ;
- (ii) распределение вероятностей $P_{\mathbb{N}_r}$ равномерно.

Тогда

$$P_{im}^l = \left(\frac{m}{n}\right)^l, \quad P_{podm}^l(s) = \left(\frac{m-1}{n-1}\right)^s.$$

Доказательство следует из утверждения 1 и теоремы 4. □

Теорема 5. Пусть для шифра Σ_H выполнены следующие условия:

- (i) $|U| = m$, $|V| = n$, $1 < m < n$, $r = A_n^m$ и все строки матрицы зашифрования опорного шифра Σ являются размещениями из n элементов множества V по m ;
- (ii) распределение вероятностей $P_{\mathbb{N}_r}$ равномерно.

Тогда шифр Σ_H является совершенным, причем

$$P_{im}^l = \left(\frac{m}{n}\right)^l, \quad P_{podm}^l(s) = \left(\frac{m-1}{n-1}\right)^s.$$

Доказательство следует из теорем 3 и 4. □

Заметим, что для шифров Σ_H из утверждения 2 и теоремы 5 выполнено условие $P_{im}^l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, $P_{podm}^l(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Литература

- [1] Зубов А.Ю. Криптографические методы защиты информации. Совершенные шифры. М.: Гелиос АРВ, 2005.
- [2] Рацеев С.М. О построении совершенных шифров // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2014. № 1 (34). С. 192–199.
- [3] Рацеев С.М. О совершенных имитостойких шифрах замены с неограниченным ключом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1 (110). С. 42–48.
- [4] Рацеев С.М. Некоторые обобщения теории Шеннона о совершенных шифрах // Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Матем. моделирование и программирование. 2015. № 1 (8). С. 111–127.

References

- [1] Zubov A.Yu. Kriptograficheskie metody zashchity informatsii. Sovershennyye shifry [Cryptographic Methods of Information Security. Perfect ciphers]. M.: Gelios ARV, 2005 [in Russian].
- [2] Ratseev S.M. O postroenii sovershennykh shifrov [On Construction of Perfect Ciphers]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2014, no. 1(34), pp. 192–199 [in Russian].
- [3] Ratseev S.M. O sovershennykh imitostoikikh shifrah zameny s neogranichennym kliuchom [On Perfect Imitation Resistant Ciphers with Unbounded Key]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2013, no. 9/1 (110), pp. 42–48 [in Russian].

- [4] Ratseev S.M. Nekotorye obobshcheniia teorii Shennona o sovershennykh shifrah [Some generalizations of Shannon's theory of perfect ciphers]. *Vestn. IuUrGU. Ser. Matem. modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of the South Ural State University. Series: "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"], 2015, no. 1(8), pp. 111–127 [in Russian].

*S.M. Ratseev, V.M. Ratseev*²

ON PERFECT IMITATION RESISTANT CIPHERS BASED ON COMBINATORIAL OBJECTS

We study perfect imitation resistant ciphers, highlighting particularly the case in which the probabilities of successful imitation and substitution attain their lower limits. On the basis of A.Yu. Zubov's mathematical model of substitution cipher with unbounded key model of perfect and imitation resistant cipher based on combinatorial objects is constructed.

Key words: cipher, perfect cipher, imitation resistant ciphers.

Статья поступила в редакцию 28/I/2016.
The article received 28/I/2016.

²*Ratseev Sergey Mihaylovich* (RatseevSM@mail.ru), Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University, 42, Lev Tolstoy Street, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

Ratseev Vladimir Mihaylovich, Department of Telecommunication Technologies and Networks, Ulyanovsk State University, 42, Lev Tolstoy Street, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

УДК 532.546:536.421

Г.Р. Рафикова, В.Ш. Шагапов¹

НАГНЕТАНИЕ ГАЗА В ВОДОНАСЫЩЕННЫЙ ПОРИСТЫЙ ПЛАСТ С ОБРАЗОВАНИЕМ ГИДРАТА В ДИФФУЗИОННОМ РЕЖИМЕ²

В работе рассмотрена задача о нагнетании газа в пористый пласт, изначально насыщенный газом и водой, сопровождающемся образованием гидрата. Рассмотрен случай, когда интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией воды через гидратный слой, образовавшийся между водой и газом в ядре порового канала. В рамках такой схемы кинетика гидратообразования определяется одним эмпирическим параметром D , имеющим размерность коэффициента диффузии ($\text{м}^2/\text{с}$). Изучено влияние величины этого параметра на особенности процесса гидратообразования в зависимости от параметров, определяющих исходное состояние пористого резервуара и его коллекторских характеристик.

Ключевые слова: пористая среда, фильтрация, газовый гидрат, диффузия, образование гидрата.

Введение

Гидратное состояние является выгодным для консервации и хранения углеводородных газов. В 1 м^3 газогидрата метана при $T=0^\circ\text{C}$ и $p=3 \text{ МПа}$ содержится около 160 м^3 метана. Для того чтобы такую массу газа хранить в свободном состоянии в одном кубическом метре, давление необходимо повышать более чем до 16 МПа . Поэтому представляется привлекательным создавать такие условия хранения газов в подземных резервуарах, чтобы значительная его часть находилась в составе газогидрата.

Исследования процессов образования и разложения газовых гидратов в пористых средах проводились такими авторами, как Г.Г. Цыпкин, Э.А. Бондарев, И.К. Гималтдинов, М.К. Хасанов, О.Р. Нурисламов и др. [1–5]. В работах получены автомоделные и численные решения, позволяющие изучать процессы образования и разложения газогидратов в пористых пластах с движущейся фрон-

¹© Рафикова Г.Р., Шагапов В.Ш., 2016

Рафикова Гузаль Ринатовна (rafikova_guzal@mail.ru), кафедра высшей и прикладной математики, Бирский филиал Башкирского государственного университета, 452453, г. Бирск, Интернациональная, 10.

Шагапов Владислав Шайхулагзамович (shagapov@rambler.ru), лаборатория «Механика сплошной среды», Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111, г. Казань, Лобачевского, 2/31.

²Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20022).

тальной границей фазовых переходов при равновесных условиях. Однако остается открытым вопрос об основных механизмах, лимитирующих процессы образования газогидратов. В данной работе представлена математическая модель процесса образования гидрата в пористой среде, насыщенной жидкостью, вследствие диффузионного переноса воды через гидратную корку.

1. Основные уравнения

Рассмотрим процесс фильтрации метана в пористой среде, частично насыщенной водой при термобарических условиях стабильности газогидрата (давление и температура удовлетворяют условию $p > p_s(T)$, где $p_s(T)$ – равновесное давление фазовых переходов при температуре T). Скелет пористой среды, воду и газогидрат будем полагать несжимаемыми, а также неподвижными. Следовательно, для истинных плотностей и скоростей этих фаз имеет место:

$$\rho_{sk}^0 = \rho_w^0 = \rho_h^0 = const, \quad v_{sk} = v_w = v_h = 0. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем нижние индексы sk , wh , h и g соответствуют параметрам, относящимся к скелету, воде, газогидрату и газу.

Пусть m и S_i – пористость скелета и относительная объемная насыщенность пор водой, гидратом и газом ($i = w, h, g$). В рамках вышеперечисленных допущений уравнения сохранения масс для плоскоодномерного течения запишем в виде:

$$\frac{\partial (mS_w\rho_w^0)}{\partial t} = -J_w, \quad \frac{\partial (mS_h\rho_h^0)}{\partial t} = J_h, \quad \frac{\partial (mS_g\rho_g^0)}{\partial t} + \frac{\partial (mS_g v_g \rho_g^0)}{\partial x} = -J_g. \quad (2)$$

Здесь v_g – скорость газа, J_w и J_g – интенсивности потребления воды и газа на образование гидрата с интенсивностью J_h в единице объема пористой среды. Газогидрат является клатратным соединением [6], для которого на одну молекулу метана приходится шесть молекул воды. Поэтому массовое содержание метана G в составе гидрата постоянное число ($G \approx 0.12$). В этой связи для J_w , J_g и J_h должны выполняться следующие кинематические соотношения:

$$J_w = (1 - G) J_h, \quad J_g = G J_h. \quad (3)$$

С учетом этих соотношений из первого и второго уравнений (2) получим

$$mS_w\rho_w^0 + (1 - G) mS_h\rho_h^0 = const. \quad (4)$$

Полагая, что для исходного состояния ($t=0$) $S_h=0$ и $S_w=S_{w0}$, то из (4) следует

$$\rho_w^0 (S_w - S_{w0}) + (1 - G) \rho_h^0 S_h = 0. \quad (5)$$

На основе кинематического условия

$$S_w + S_h + S_g = 1 \quad (6)$$

с учетом (5) можем получить

$$S_h = \frac{(1 - S_{w0} - S_g)}{(1 - \rho_h(1 - G)/\rho_w)}, \quad S_w = S_{w0} - \frac{\rho_h}{\rho_w} (1 - G) S_h. \quad (7)$$

Следовательно, текущие величины гидратонасыщенности S_h и водонасыщенности S_w однозначно определяются значением газонасыщенности S_g .

Полагая, что температура для скелета пористой среды и всех ее составляющих совпадает ($T_{sk}=T_w=T_h=T_g=T$), и пренебрегая баротермическим эффектом по

сравнению с тепловыми эффектами за счет гидратообразования, запишем уравнение притока тепла:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g^0 c_g m S_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + J_h l, \quad (8)$$

$$\rho c = (1 - m) \rho_{sk}^0 c_{sk} + m \sum_{j=w,g,h} \rho_j^0 S_j c_j, \quad \lambda = (1 - m) \lambda_{sk} + m \sum_{j=w,g,h} S_j \lambda_j.$$

Здесь c_j , λ_j – удельная теплоемкость и теплопроводность фаз ($j = w, g, h$) и ρc и λ – удельная объемная теплоемкость и теплопроводность системы. Второе слагаемое в правой части (8) выражает тепловой эффект гидратообразования, где l – удельная теплота, отнесенная на единицу массы гидрата, которая выделяется при его образовании.

Для газовой фазы примем уравнение Клайперона – Менделеева

$$p = \rho_g^0 R_g T. \quad (9)$$

Для процесса фильтрации примем обобщенный закон Дарси

$$m S_g v_g = - \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10)$$

где μ_g – динамическая вязкость газа, m – ”живая” проницаемость, зависящая от ”живой” пористости $m S_g$ и характерных ”живых” радиусов пор.

Пусть пласт протяженностью x_0 ($0 \leq x \leq x_0$) в исходном состоянии насыщен водой и газом (метаном), начальное давление p_0 и T_0 температура удовлетворяют условиям фазового равновесия

$$T = T_0, \quad p = p_s(T), \quad S_w = S_{w0}, \quad S_g = 1 - S_{w0} \quad (0 < x < x_0, \quad t = 0). \quad (11)$$

При $t \geq 0$ через левую границу пласта ($x=0$) происходит нагнетание газа при давлении p_e с температурой газа T_e , соответствующим термобарическим условиям образования гидрата.

$$T = T_e, \quad p = p_e, \quad (x = 0, \quad t > 0). \quad (12)$$

Будем полагать, что потоки массы и тепла через правую границу ($x = x_0$) отсутствуют

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (x = x_0, \quad t > 0). \quad (13)$$

2. Кинетика образования гидрата

Будем полагать, что интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией воды через твердую гидратную корку, образующуюся между газом и жидкостью при их контакте. Для построения аналитических выражений для кинетики гидратообразования в рамках вышеотмеченной гипотезы рассмотрим следующую предельную схему. Примем, что вода полностью покрывает стенки пористых каналов.

Пористую среду (скелет) схематично представим как систему осесимметричных каналов средним радиусом $r = a$. Тогда, согласно рассматриваемой схеме, вода будет находиться в кольцевом слое между $r = a$ и $r = a_{wh}$, гидрат в слое между $r = a_{wh}$ и $r = a_g$, а газ будет течь в канале радиуса $r = a_g$. В рамках такой схемы введенные линейные размеры и относительные фазовые насыщенности будут связаны следующими соотношениями:

$$S_w = 1 - \left(\frac{a_{wh}}{a} \right)^2, \quad S_h = \left(\frac{a_{wh}}{a} \right)^2 - \left(\frac{a_g}{a} \right)^2, \quad S_g = \left(\frac{a_g}{a} \right)^2. \quad (14)$$

Таким образом, в соответствии с вышепринятым допущением, скорость образования гидрата лимитируется диффузией воды через образовавшийся гидратный слой между газом и водой. Такую воду со средней плотностью ρ_w^0 , в гидрате будем называть диффундирующей (или подвижной). Воду, находящуюся в составе гидрата с массовой концентрацией $(1 - G)$, будем называть неподвижной. Для процесса переноса подвижной воды через гидратный слой в масштабе поровых микроканалов запишем уравнение диффузии

$$\frac{\partial \rho_w^0}{\partial t} = \frac{D_w}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_w^0}{\partial r} \right), \quad a_{(wh)} < r < a_g. \quad (15)$$

Далее будем использовать квазистационарное решение, полагая $\partial \rho_w^0 / \partial t = 0$ и применяя следующие граничные условия:

$$\rho_w^0 = \rho_{w(s)}^0, \quad r = a_{(wh)}, \quad \rho_w^0 = 0, \quad r = a_g, \quad (16)$$

получаем решение уравнения (15) в виде:

$$\rho_w^0 = \rho_{w(s)}^0 \frac{\ln(r/a_g)}{\ln(a_{(wh)}/a_g)}, \quad (a_{(wh)} < r < a_g), \quad (17)$$

здесь $\rho_{w(s)}^0$ – средняя плотность подвижной жидкости в составе гидрата.

Отметим, что второе условие из (16) означает мгновенный переход подвижной воды в состав гидрата при достижении границы контакта с газом.

Выражение для потока массы подвижной воды к поверхности контакта между газом и гидратом, отнесенного к единице ее площади, запишем в виде:

$$j_w = D_w \left(\frac{\partial \rho_w^0}{\partial r} \right)_{a_g}. \quad (18)$$

Подставляя сюда решение (17), получим

$$j_w = \frac{\rho_{w(s)}^0 D_w}{a_g \ln(a_{(wh)}/a_g)} \quad (19)$$

Чтобы связать поток массы подвижной жидкости j_w с интенсивностью потребления воды на гидратообразование в единице объема пористой среды J_w , необходимо определить полную площадь поверхности контакта (удельная поверхность контакта) между гидратом и газом. В рамках принятой схемы для этой площади можем записать:

$$s_g = 2\pi a_g n_g, \quad n_g = \frac{m S_g}{\pi a_g^2}, \quad (20)$$

где n_g – число каналов радиусом a_g в единице объема пористой среды. Тогда из выражений (20) для величины удельной поверхности контакта имеем

$$s_g = \frac{2m S_g}{a_g}. \quad (21)$$

Для интенсивности J_w потребления воды на образование гидрата в единице объема газа, связанной с j_w как $J_w = s_g j_w$, с учетом (19) и (21) получим:

$$J_w = 2m S_g \frac{\rho_{w(s)}^0 D_w}{a_{(wh)}^2 \ln(a_{(wh)}/a_g)}. \quad (22)$$

Здесь отметим, что $\rho_{w(s)}^0$ и D_w являются неизвестными эмпирическими параметрами, которые в полученные решения для интенсивности потребления воды входят в виде произведения.

Поэтому для дальнейших вычислений введем один эмпирический параметр — приведенный коэффициент диффузии, отвечающий за кинетику образования газогидрата

$$D = \frac{D_w \rho_{w(s)}^0}{\rho_w^0}. \quad (23)$$

Выражение (22) с учетом (23) примет вид:

$$J_w = 2mS_g \frac{\rho_w^0 D}{a_g^2 \ln(a_{(wh)}/a_g)}. \quad (24)$$

Как показывают многочисленные опытные данные [7–9], интенсивность гидратообразования при контакте воды и метана сильно зависит от состояния воды и газа, в частности, от их чистоты. Например, для талой воды, водопроводной воды и воды, полученной при разложении гидрата, темпы гидратообразования будут совершенно разные [10]. Кроме того, содержание небольшой доли примесей других газов в составе метана также влияет на процесс гидратообразования при контакте метана и воды [8; 9]. На интенсивность гидратообразования можно также повлиять с помощью внедрения в состав воды различных полимерных добавок [11]. Очевидно, что для рассматриваемых в работе процессов эмпирический параметр D будет зависеть также от особенностей скелета пористой среды.

Таким образом, принятая схема фазовых переходов (гидратообразования) обуславливается еще одним модельным эмпирическим параметром D , имеющим размерность коэффициента диффузии.

В соответствии с вышепринятыми допущениями ”живая” проницаемость для газа будет задаваться как

$$k_g = k(a_g/a)^2, \quad (25)$$

где k – коэффициент абсолютной проницаемости скелета.

3. Результаты исследования

Для параметров, характеризующих систему ”пористая среда – газогидрат – газ – вода” здесь и в дальнейшем приняты следующие значения $m = 0.1$, $k = 10^{-9} \text{ м}^2$, $\mu_g = 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\rho_c = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, $\lambda = 2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $l = 5 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$, $\rho_h^0 = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$, $G = 0.12$, $\rho_w^0 = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, $R_g = 520 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, $c_g = 1560 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, $D = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$. Протяженность пористого пласта берем равной $x_0 = 100 \text{ м}$. Отметим, что принятые значения для приведенного коэффициента D по порядку величин близки к опытным данным [8, 12] по интенсивности роста гидратной корки при миграции метанового пузырька в морской воде, в термобарических условиях образования гидрата.

Для исходных и граничных температур и давлений принято $T_0 = 273 \text{ К}$, $T_e = 273 \text{ К}$ и $p_0 = p_s(T_0)$, $p_e = 10 \text{ МПа}$, начальная водонасыщенность полагалась равной $S_{w0} = 0.3$.

На рис. 1 линиями 1, 2 и 3 представлены распределения давления (a), температуры (b) и гидратонасыщенности (ϵ) в моменты времени $t = 0.5, 1$ и 3 с соответственно. Здесь и в дальнейшем штриховая линия соответствует равновесной температуре для текущих значений давлений пласта.

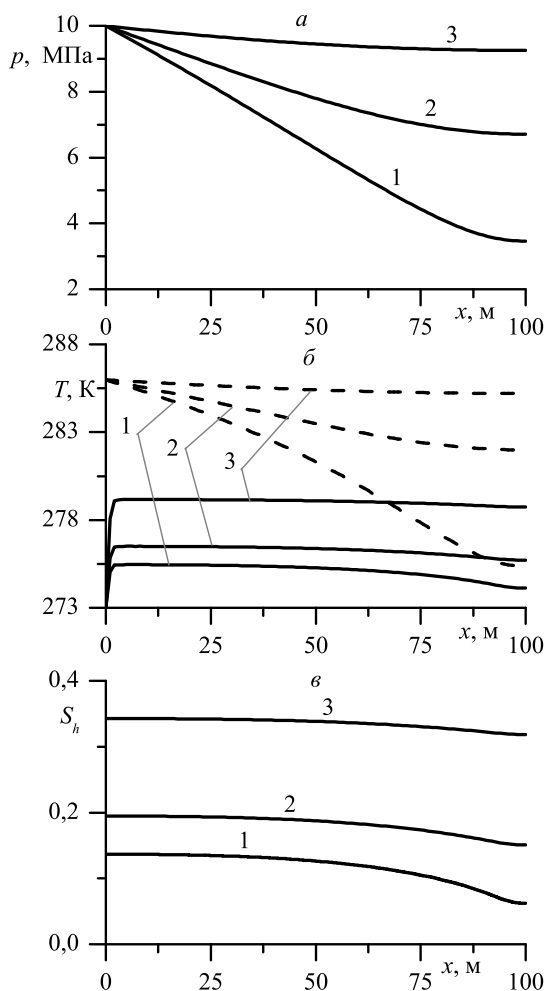


Рис. 1. Распределения давления p (а), температуры T (б) и гидратонасыщенности S_h (в) (1 – $t=0.5$ с, 2 – $t=1$ с, 3 – $t=3$ с)

Видно, что при данном режиме в пористой среде наблюдается достижение однородного давления $p = p_e$ (за секунды), то есть за достаточно короткий период устанавливается гомобарический режим [13]. Текущая температура при этом не успевает проследить за равновесным значением температуры для текущего давления. Затем в остальное время после достижения давления в пористом пласте граничного значения $p = p_e$ накопление гидратной массы происходит в гомобарическом режиме.

На рис. 2 представлены осциллограммы давления (а), температуры (б) и гидрато- и водонасыщенности (в) в точке с координатой $x=50$ м при различных значениях водонасыщенности $S_{w0}=0.3$ и 0.5 (линия 1 и 2 соответственно). Точечные линии иллюстрируют эволюцию водонасыщенности.

При начальной водонасыщенности $S_{w0}=0.3$ гидратообразование проходит интенсивнее (примерно в полтора раза) по сравнению со значением большей водо-

насыщенности $S_{w0} = 0.5$, что объясняется более высокой удельной площадью контакта между гидратом и газом.

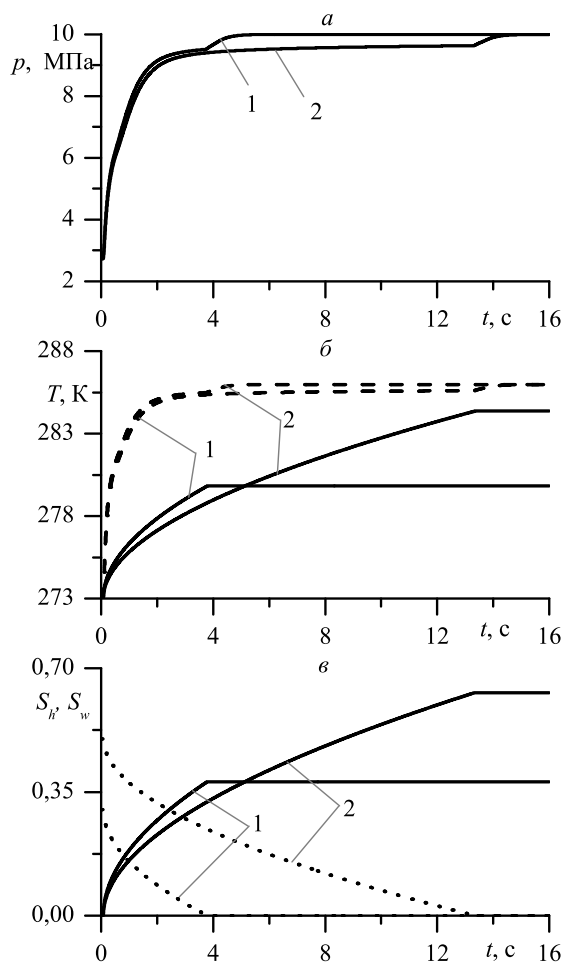


Рис. 2. Динамика давления p (а), температуры T (б) и гидратонасыщенности S_h (в) в точке $x = 50$ м для различных значений начальной водонасыщенности S_{w0} (1 – $S_{w0} = 0.3$, 2 – $S_{w0} = 0.5$)

На рис. 3 линиями 1, 2, 3 представлена динамика давления, температуры, гидратонасыщенности в точке с координатой $x = 50$ м при начальном значении водонасыщенности $S_{w0} = 0.3$ при следующих значениях приведенного коэффициента диффузии $D = 5 \cdot 10^{-10}$, $5 \cdot 10^{-11}$ и $5 \cdot 10^{-12}$ м²/с соответственно. Правая часть рис. 3 представляет собой увеличенные фрагменты для начального этапа.

Определяющими параметрами характерных времен фильтрации $t^{(p)}$ (время выравнивания давления в пласте до граничного значения) и диффузии воды $t^{(D)}$ (накопление гидрата) являются коэффициент пьезопроводности $\chi^{(p)}$ ($t^{(p)} \approx x_0^2 / \chi^{(p)}$) и диффузии D ($t^{(D)} \approx a^2 / D$). Из рис. 3 следует, что если для коэффициента диффузии принять $D = 5 \cdot 10^{-10}$ м²/с за время полного перехода воды в состав гидрата, давление в резервуаре не успевает достичь значения $p = p_e$. При дальнейшем

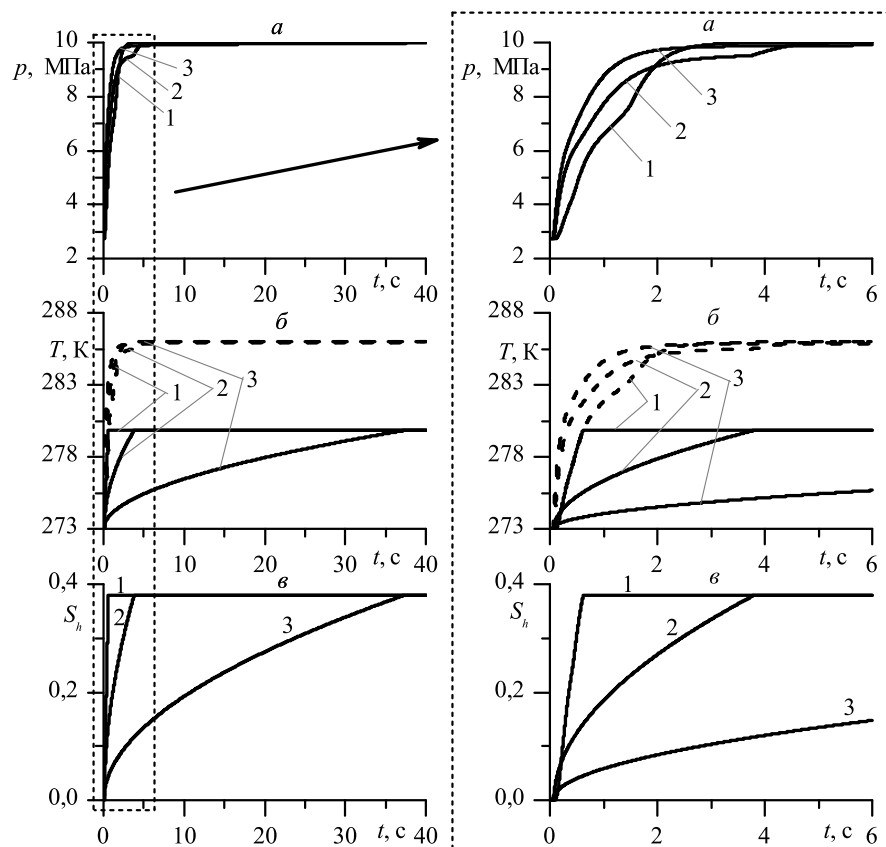


Рис. 3. Осцилограммы давления p (а), температуры T (б) и гидратонасыщенности S_h (в) в точке $x = 50$ м для различных приведенных коэффициентов диффузии (1 – $D = 5 \cdot 10^{-10}$ м²/с, 2 – $D = 5 \cdot 10^{-11}$ м²/с, 3 – $D = 5 \cdot 10^{-12}$ м²/с)

уменьшении коэффициента диффузии ($D \sim 5 \cdot 10^{-11}$ м²/с) наблюдается примерно одинаковое значение характерных времен $t^{(D)} \approx t^{(p)}$. При малых значениях коэффициента диффузии процесс установления однородного давления ($p \approx p_e$) будет происходить гораздо быстрее процесса полного перехода воды в пористой среде в состав гидрата $t^{(D)} < t^{(p)}$.

Заключение

В работе численно исследован процесс образования газогидрата метана в частично водонасыщенном пористом пласте при нагнетании газа. Выявлено, что основной период гидратообразования в рассмотренном случае происходит в гомобарическом режиме. Установлено, что при снижении начальной водонасыщенности растет интенсивность накопления гидрата. При больших значениях коэффициента диффузии процесс гидратообразования происходит быстрее, чем процесс установления однородного давления ($p \approx p_e$). Интенсивность гидратообразования в пори-

стом резервуаре, частично насыщенном водой, характеризуемая величиной эмпирического параметра D , имеющего размерность коэффициента диффузии, можно усилить за счет изменения качества воды. В частности, повышение эмпирического коэффициента диффузии D , в свою очередь, можно произвести соответствующей обработкой воды, добавкой полимерных примесей, поверхностно-активных веществ.

Литература

- [1] Нурисламов О.Р., Шагапов В.Ш. Нагнетание газа во влажную пористую среду с образованием газогидрата // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. № 5. С. 809–823.
- [2] Особенности разложения газовых гидратов в пористых средах при нагнетании теплого газа / В.Ш. Шагапов [и др.] // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 3. С. 347–354.
- [3] Численное моделирование образования газогидрата в пористом пласте конечной протяженности при продувке его газом / В.Ш. Шагапов [и др.] // Прикладная математика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 4. С. 116–126.
- [4] Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 232 с.
- [5] Бондарев Э.А., Максимов А.М., Цыпкин Г.Г. К математическому моделированию диссоциации газовых гидратов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 3. С. 575–578.
- [6] Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992. 236 с.
- [7] Макогон Ю.Ф. Гидраты природных газов. М.: Недра, 1974. 208 с.
- [8] Ehnaced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean / G. Rehder [et al.] // Geophysical research letters. 2002. № 29. P. 21.
- [9] Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? / D.F. McGinnis [et al.] // Journal of geophysical research. 2006. V. 111. P. 382.
- [10] Булейко В.М., Вовчук Г.А., Григорьев Б.А. Экспериментальное исследование термодинамических свойств гидратов углеводородов алканового ряда // Вести газовой науки. 2012. № 3(11). С. 282.
- [11] Нестеров А.Н. Применение поверхностно-активных веществ для интенсификации процессов образования гидратов в технологиях транспорта и хранения газа // Современное состояние газогидратных исследований в мире и практические результаты для газовой промышленности. М: ООО ИРЦ Газпром, 2004. С. 66.
- [12] Тазетдинов Б.И. Особенности образования и разложения газогидратов в водных и газовых средах: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа: БашГУ, 2014. 113 с.
- [13] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 359 с.;

References

- [1] Nurislamov O.R., Shagapov V.Sh. Nagnetanie gaza vo vlazhnuiu poristuiu sredu s obrazovaniem gazogidrata [Gas injection into a moist porous medium with the formation of a gas hydrate]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2009, V. 73, no. 5, pp. 809–823 [in Russian].

- [2] Shagapov V.Sh., Hasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Stolpovskii M.V. Osobennosti razlozheniia gazovykh gidratov v poristyx sredakh pri nagnetanii teplogo gaza [The features of gas hydrate dissociation in porous media at warm gas injection]. *Teplofizika i aeromekhanika* [Thermophysics and Aeromechanics], 2013, V. 20, no. 3, pp. 347–354 [in Russian].
- [3] Shagapov V.Sh., Hasanov M.K., Gimaltdinov I.K., Stolpovskii M.V. Chislennoe modelirovanie obrazovaniia gazogidrata v poristom plaste konechnoi protiazhenosti pri produvke ego gazom [Numerical modeling of formation of a gas hydrate in a finite-length porous bed purged by a gas]. *Prikladnaia matematika i tekhnicheskaiia fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics], 2011, V. 52, no. 4, pp. 116–126 [in Russian].
- [4] Chypkin G.G. Teheniiia s fazovymi perekhodami v poristyx sredakh [Flows with phase transitions in porous media]. M.: Fizmatlit, 2009, 232 p. [in Russian].
- [5] Bondarev E.A., Maksimov A.M., Tsyppkin G.G. K matematicheskomu modelirovaniuu dissotsiatsii gazovykh gidratov [On the mathematical modeling of dissociation of gas hydrates]. *Dokl. AN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1989, V. 308, no. 3, pp. 575–578 [in Russian].
- [6] Istomin V.A., Yakushev V.S. Gazovye gidraty v prirodnykh usloviakh [Gas hydrates in nature]. M.: Nedra, 1992, 236 p. [in Russian].
- [7] Makogon Yu.F. Gidraty prirodnykh gazov [Hydrates of natural gases]. M.: Nedra, 1974, 208 p. [in Russian].
- [8] Rehder G, Brewer P.W., Peltzer E.T., Friederich G. Ehnaced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean. *Geophysical research letters*, 2002, no. 29, pp. 21 [in English].
- [9] MgGinnis D.F., Greinert J., Artemov Y., Beaubien S.E., Wuest A. Fate of rising methane bubbles in stratified waters: How much methane reaches the atmosphere? *Journal of geophysical research*, 2006, V. 111, pp. 382 [in English].
- [10] Buleiko V.M., Vovchuk G.A., Grigoriev B.A. Eksperimental'noe issledovanie termodinamicheskikh svoistv gidratov uglevodorodov alkanovogo riada [Experimental study of thermodynamic properties of hydrocarbons alkane series]. *Vesti gazovoi nauki* [Gas Science News], 2012, no. 3(11), pp. 282 [in Russian].
- [11] Nesterov A.N. Primenenie poverkhnostno-aktivnykh veshchestv dlia intensivatsii protsessov obrazovaniia gidratov v tekhnologiiakh transporta i khraneniia gaza [Use of surfactants for the intensification of the processes of formation of hydrates in the technologies of transportation and storage of gas] in *Sovremennoe sostoianie gazogidratnykh issledovaniy v mire i prakticheskie rezul'taty dlia gazovoi promyshlennosti* [Modern state of gas hydrates researches in the world and practical results for gas industry]. M.: OOO IRTs Gazprom, 2004, pp. 66 [in Russian].
- [12] Tazetdinov B.I. *Osobennosti obrazovaniia i razlozheniia gazogidratov v vodnykh i gazovykh sredakh: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Features of formation and decomposition of gas hydrates in aqueous and gaseous environments: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis]. U.: BashGU, 2014, 113 p. [in Russian].
- [13] Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred. V 2 ch. [Dynamics of multiphase medium. In 2 parts]. M.: Nauka, 1987. Part 1, 464 p. Part 2, 359 p. [in Russian].

*G.R. Rafikova, V.Sh. Shagapov*³

INJECTING GAS INTO THE WATER-FILLED POROSITY RESERVOIRS WITH THE FORMATION OF HYDRATES IN THE DIFFUSION MODE⁴

The paper considers the problem of injecting gas into the porous layer initially saturated with gas and water, accompanied by formation of hydrate. We have investigated case where the intensity of hydrate is limited by diffusion of water through the hydrate layer formed between water and gas in the core of the pore of the channel. As part of this scheme kinetics of hydrate is determined one empirical parameter D having the dimension of the diffusion coefficient (m^2/s). We have analyzed effect of the value of this parameter on the features of the process of hydrate formation, depending on the parameters that define the initial state of porous reservoir and reservoir characteristics.

Key words: porous media, filtration, gas hydrate, diffusion, formation of hydrate.

Статья поступила в редакцию 3/II/2016.
The article received 3/II/2016.

³*Rafikova Guzal Rinatovna* (rafikova_guzal@mail.ru), Department of Higher and Applied Mathematics, Birk branch of the Bashkir State University, 10, Internatsionalnaia Street, Birk, 452453, Russian Federation.

Shagapov Vladislav Shayhulagzamovich (shagapov@rambler.ru), laboratory "Continuum mechanics", Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, 2/31, Lobachevskiy Street, Kazan, Russian Federation.

⁴The study was performed by a grant from the Russian Science Foundation (project No.15-11-20022).

*В.Ш. Шагапов, Ю.А. Юмагулова, А.А. Гиззатуллина*¹
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДАВЛЕНИЯ
И ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛАСТЕ С ВЫСОКОВЯЗКОЙ
НЕФТЬЮ ПРИ НАГРЕВАНИИ**²

В радиально-симметричной постановке построена и исследована математическая модель задачи о нагревании пласта с высоковязкой нефтью через горизонтальную скважину и показаны возможности дальнейшей эксплуатации скважины для отбора нефти со сниженной вязкостью. Полученная система уравнений позволяет выявить динамику процесса, оценить характерные расстояния проникновения фильтрационных и температурных волн за рассматриваемые периоды времени.

Ключевые слова: высоковязкая нефть, нагревание нефтяного пласта, фильтрация нефти, снижение вязкости, давление пласта, горизонтальная скважина, температура пласта, отбор нефти из пласта.

Введение

В настоящее время перспективами развития нефтяной отрасли является разработка месторождений тяжелых нефтей и природных битумов. Интерес к таким месторождениям связан с постоянным ростом цен на углеводородное сырье, постепенным истощением запасов традиционной легкой нефти, а также развитием технологий разработки нетрадиционных источников углеводородного сырья. Будущее в разработке месторождений высоковязкой нефти неразрывно связано с применением тепловых методов воздействия, в основе которых лежит уменьшение вязкости нефти, улучшающее ее подвижность и скорость продвижения к скважине. Процесс теплового воздействия начинается со стадии предпрогрева, в течение которой за счет кондуктивного переноса тепла происходит разогрев зоны пласта вблизи добывающей скважины и снижается вязкость нефти. Затем проводится эксплуатация той же скважины для отбора из пласта нефти с пониженной вязкостью. Экономическая эффективность применения теплового воздействия в каждом конкретном случае во многом зависит от свойств пластовой нефти, глубины залегания пласта и геолого-физических особенностей пласта [1–7].

¹© Шагапов В.Ш., Юмагулова Ю.А., Гиззатуллина А.А., 2016

Шагапов Владислав Шайхулаязамович (shagapov@rambler.ru), Юмагулова Юлия Александровна (ym_julia@mail.ru), Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111, Российская Федерация, г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31.

Гиззатуллина Алина Азатовна (ezhiha27@mail.ru), кафедра высшей и прикладной математики, Бирский филиал Башкирского государственного университета, 452453, г. Бирск, Интернациональная, 10.

²Исследование выполнено с использованием гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10016).

В настоящей работе представлено теоретическое и численное исследование возможности нагрева нефтяного пласта с помощью горизонтального обогреваемого канала (в котором в качестве теплоносителя течет горячий пар, например), используемого впоследствии как добывающая скважина.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим процесс нагревания нефтяного пласта через горизонтальную скважину. Запишем уравнения неразрывности и притока тепла для нефтяного пласта ($r_s < r < \infty$) в виде

$$\frac{\partial m \rho_l}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r m \rho_l v)}{\partial r} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_l m c_l v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (1.2)$$

где r – радиальная координата, отсчитываемая от центра скважины, r_s – радиус скважины, λ – теплопроводность, ρc – удельная теплоемкость пласта, m – пористость, T – температура пласта, v – скорость фильтрации нефти, ρ_l и c_l – плотность и теплоемкость нефти.

Для определения скорости фильтрации нефти запишем закон Дарси [8]

$$m v = - \frac{k}{\mu(T)} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.3)$$

Здесь k – проницаемость пористой среды, p – давление, $\mu(T)$ – вязкость нефти, зависимость которой от температуры можно принять в виде [1]

$$\mu(T) = \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)},$$

где γ – температурный коэффициент, μ_0 – вязкость нефти при температуре T_0 .

Уравнение состояния для нефти примем в линейном приближении [1; 9]

$$\rho_l = \rho_{l0} (1 - \alpha^{(T)}(T - T_0) + \alpha^{(p)}(p - p_0)). \quad (1.4)$$

Здесь нижний индекс 0 соответствует начальным значениям параметров нефти, $\alpha^{(T)}$ и $\alpha^{(p)}$ – коэффициенты термического расширения и сжимаемости нефти.

2. Нагревание нефтяного пласта

Рассмотрим первый этап, а именно процесс нагревания нефтяного пласта ($t < t_*$) через горизонтальную закрытую скважину при отсутствии фильтрации. В этом случае, пренебрегая конвективным переносом тепла, уравнение (1.2) будет иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\aleph}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (2.1)$$

Здесь $\aleph = \lambda/(\rho c)$ – температуропроводность пласта.

Пусть на границе скважины $r = r_s$ поддерживается постоянная температура T_e , а вдали от скважины ($r \rightarrow \infty$) температура пласта равна T_0 . Данное условие

означает, что за представляющее интерес в данной задаче время область, в которой реализуются температурные перепады, значительно меньше толщины нефтяного пласта. В начальный момент времени ($t = 0$) температура равна T_0 .

Уравнение (2.1) решено методом конечных разностей с использованием явной схемы. Условие устойчивости разностной схемы определялось из условия Куранта [10]. При выполнении численных расчетов приняты следующие значения параметров: $T_e = 200$ °С, $T_0 = 15$ °С, $\mu_0 = 0.2$ Па·с, $\gamma = 0.028$ К⁻¹, $r_s = 0.1$ м, $\kappa = 10^{-6}$ м²/с.

На рис. 1 представлена зависимость вязкости нефти от температуры.

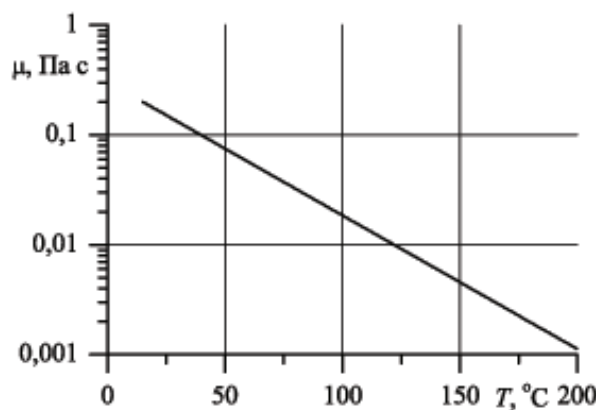


Рис. 1. Зависимость вязкости нефти μ от температуры T

Видно, что наиболее высокая скорость снижения вязкости наблюдается при начальном увеличении температуры, с достижением определенного значения температуры (приблизительно до 100 °С) снижение вязкости замедляется. Следует отметить, что уменьшение очень вязкой нефти хотя и может дать положительные результаты, но не всегда приводит к достаточному возрастанию ее текучести, так как с повышением температуры в зоне нагрева нефть может быть продвинута к скважине, но увеличивается риск закупорки пор при контакте нагретой нефти с более холодной.

На рис. 2 представлены поля температуры (а) и вязкости (б) нефтяного пласта в различные моменты времени $t_* = 10, 20, 30$ суток.

Показано, что на этом этапе появляется прогретая область порядка нескольких метров вблизи границы нагревания. По мере нагревания пласта происходит снижение вязкости нефти вблизи границы скважины. Выбор времени прогрева пласта t_* может быть определен в зависимости от толщины нефтенасыщенного слоя.

3. Фильтрация нефти

Рассмотрим второй этап работы скважины ($t > t_*$), при котором вблизи границы ($r = r_s$) находится разогретая нефть со сниженной вязкостью, т. е. в начальный момент времени ($t = t_*$) распределение температуры $T = T(r)$ определяется из предыдущего решения по уравнению (2.1). Из уравнений (1.1), (1.2) с учетом (1.3) и (1.4) получим уравнения для давления и температуры в виде

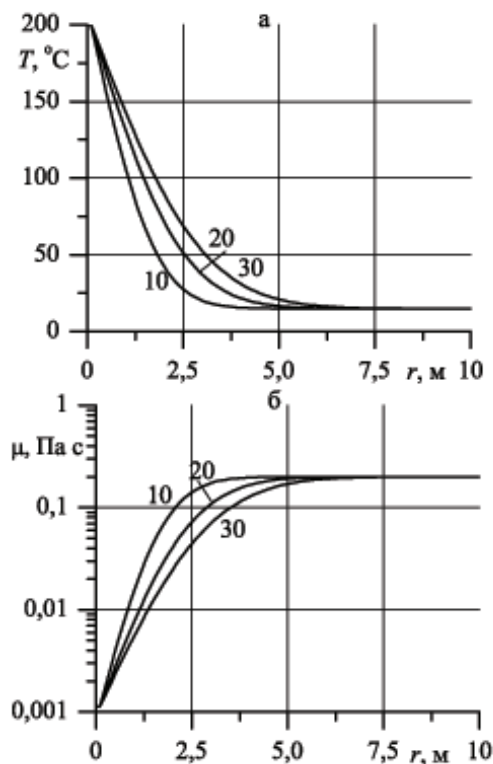


Рис. 2. Распределение температуры (а) и вязкости (б) по координате r в различные моменты времени прогревания $t_*=10, 20$ и 30 суток

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\alpha^{(T)}}{\alpha^{(p)}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{k}{m\alpha^{(p)}r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\mu(T)} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\mu(t)} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\aleph}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.2)$$

Систему уравнений (3.1)–(3.2) необходимо дополнить граничными условиями. Пусть на границе $r = r_s$ поддерживается постоянное давление p_s ($p_s < p_0$) и отсутствует тепловой поток $\partial T/\partial r = 0$, а вдали от скважины ($r \rightarrow \infty$) заданы начальные значения давления и температуры p_0, T_0 .

Система уравнений (3.1)–(3.2) при заданных граничных условиях решена методом конечных разностей с применением явной схемы [10]. При выполнении численных расчетов для теплофизических параметров нефтяного пласта приняты величины $\alpha^{(T)} = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $\alpha^{(p)} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, $k = 10^{-12} \text{ м}^2$, $m = 0.3$, давление скважины равно $p_s = 0.3 \text{ МПа}$, начальное давление $p_0 = 0.5 \text{ МПа}$, время прогрева пласта $t_* = 30 \text{ сут}$.

На рис. 3 представлены поля давления (а), температуры (б) и вязкости (в) в различные моменты времени 1, 2 и 5 суток.

Видно, что фильтрационная волна проникает в нефтяной пласт значительно дальше области температурных перепадов. С течением времени происходят сни-

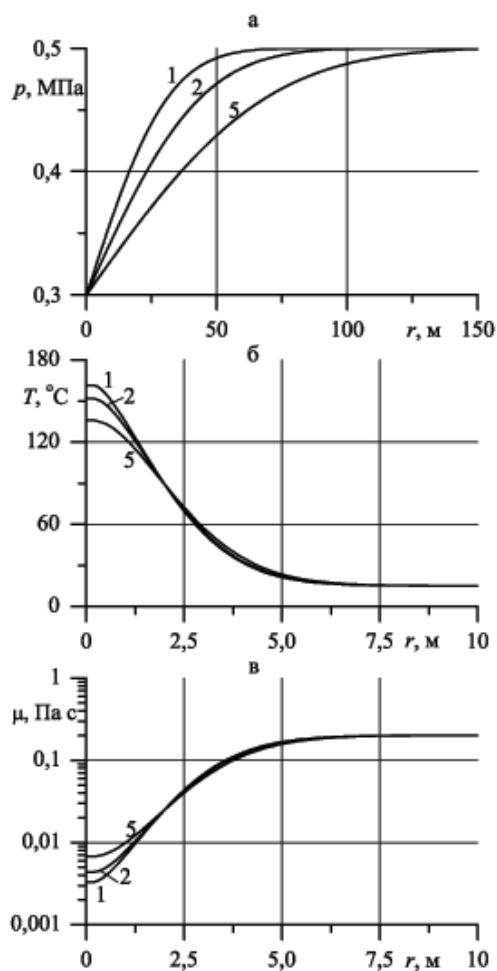


Рис. 3. Распределение давления (а), температуры (б) и вязкости (в) по координате в различные моменты времени фильтрации 1, 2 и 5 суток

жение температуры пласта вблизи скважины и соответствующее увеличение вязкости, что будет приводить к замедлению процесса фильтрации нефти в пласте.

Заключение

Получены численные решения задачи о возможности добычи высоковязкой нефти из пласта с применением теплового воздействия. На первом этапе происходит нагревание нефтяного пласта через горизонтальную скважину. Время прогрева определяется толщиной нефтенасыщенного слоя. На втором этапе происходит фильтрация нефти со сниженной вязкостью через имеющуюся горизонтальную скважину. Полученная система уравнений позволяет моделировать динамику давления и температуры в нефтяном пласте и тем самым описать процесс добычи высоковязкой нефти.

Литература

- [1] Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. М.: Недра, 1988. 422 с.
- [2] Байбаков Н.К., Гарушев А.Р. Тепловые методы разработки нефтяных месторождений. М.: Недра, 1988. 344 с.
- [3] Кравчун С.Н., Липаев А.А. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. 208 с.
- [4] Шейнман А.Б., Малофеев Г.Е., Сергеев А.И. Воздействие на пласт теплом при добыче нефти. М.: Недра, 1969. 256 с.
- [5] Мирзаджанзаде А.Х., Ковалев А.Г., Зайцев Ю.В. Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. М.: Недра, 1972. 200 с.
- [6] Butler R.M. Thermal recovery of oil and bitumen. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs., 1991. 292 p.
- [7] Butler R.M., Jiang Q. Improved recovery of heavy oil by vapex with widely spaced horizontal injectors and producers // *Journal of Canadian Petroleum Technology*. 2000. V. 39, № 1. P. 48–56.
- [8] Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975. 216 с.
- [9] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
- [10] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

References

- [1] Bourget J., Souriau P., Kombarnu M. Termicheskie metody povysheniia nefteotdachi plastov [Thermal enhanced oil recovery methods]. M.: Nedra, 1988, 422 p. [in Russian].
- [2] Baybakov N.K., Garush A.R. Teplovye metody razrabotki nefதியnykh mestorozhdenii [Thermal methods of oil field development]. M.: Nedra, 1988, 344 p. [in Russian].
- [3] Kravchun S.N., Lipaev A.A. Metod periodicheskogo nagreva v eksperimental'noi teplofizike [Periodic heating method in the experimental thermal physics]. Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 2006, 208 p. [in Russian].
- [4] Scheinman A.B., Malofeev G.E., Sergeev A.I. Vozdeistvie na plast tepлом pri dobyche nefதிய [The impact of heat in the process of oil extraction]. M.: Nedra, 1969, 256 p. [in Russian].
- [5] Mirzadzhanzade A.H., Kovalev A.G., Zaitsev Yu.V. Osobennosti ekspluatatsii mestorozhdenii anomal'nykh nefதிய [Features of operation of abnormal deposits of oils]. M.: Nedra, 1972, 200 p. [in Russian].
- [6] Butler R.M. Thermal recovery of oil and bitumen. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1991, 292 p. [in English].
- [7] Butler R.M., Jiang Q. Improved recovery of heavy oil by vapex with widely spaced horizontal injectors and producers. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 2000, Vol. 39, no. 1, pp. 48-56 [in English].
- [8] Zheltov Yu.P. Mekhanika nefதியgazonosnogo plasta [Mechanics of oil and gas reservoir]. M.: Nedra, 1975, 216 p. [in Russian].
- [9] Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. M.: Nauka, 1987. Part 1, 464 p. Part 2, 360 p. [in Russian].
- [10] Samarskii A.A. Teoriia raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. M.: Nauka, 1977, 656 p. [in Russian].

*V.Sh. Shagapov, Y.A. Yumagulova, A.A. Gizzatullina*³

MODELING THE DYNAMICS OF PRESSURE AND TEMPERATURE IN THE RESERVOIR WITH HEAVY OIL WHEN HEATED

In radially symmetric formulation is built and investigated mathematical model of the problem of heated heavy oil reservoir by horizontal well and the possibility of further operation of the well for the selection of oil with reduced viscosity. The resulting system of equations reveals the dynamics of the process, to evaluate the characteristics of the distance of penetration of filtration and thermal waves over the period.

Key words: heavy oil, heating oil reservoir, oil filtration, reduction in viscosity, pressure reservoir, horizontal well, reservoir temperature, the selection of oil from the reservoir.

Статья поступила в редакцию 18/II/2016.

The article received 18/II/2016.

³*Shagapov Vladislav Shayhulagzamovich* (shagapov@rambler.ru), *Yumagulova Yulia Aleksandrovna* (ym_julia@mail.ru), Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2/31, Lobachevskiy Street, Kazan, 420111, Russian Federation.

Gizzatullina Alina Azatovna (ezhiha27@mail.ru), Department of Higher and Applied Mathematics, Birk branch of the Bashkir State University, 10, Internatsionalnaya Street, Birk, 452453, Russian Federation.

УДК 621.039.531

*Д.А. Корнилов, В.М. Косенков, П.П. Силантьев*¹

ВЛИЯНИЕ ИСХОДНОЙ ДИСЛОКАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ НА КИНЕТИКУ ТОЧЕЧНЫХ И МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ДЕФЕКТОВ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ

Работа направлена на обоснование количественного эффекта уменьшения концентрации радиационных дефектов в материалах в зависимости от плотности краевых дислокаций, являющихся их стоками. Получены результаты моделирования кинетики накопления дефектов, учитывающие их рекомбинацию на дислокационных петлях, краевых дислокациях и порах. Выводы работы полезны в рамках решения проблемы уменьшения радиационного распухания и деградации свойств материалов в процессе нейтронного облучения.

Ключевые слова: реакторное материаловедение, атомный реактор, конструкционные материалы, микроструктура, нейтронное облучение, отражатель нейтронов, радиационные дефекты, рентгенография, радиационная повреждаемость, бериллий.

Введение

Существующие экспериментальные данные показывают [1; 2] существенное влияние исходной концентрации стоков радиационных дефектов в материалах на изменение их макроскопических характеристик, обусловленное диффузией и накоплением радиационных дефектов, образующихся при нейтронном облучении. Одной из таких характеристик является радиационное распухание — явление, которое сопровождается поведением кристаллических тел под облучением. Во многих случаях оно становится основным препятствием увеличения ресурса материалов, работающих в активной зоне атомного реактора. Величина вакансионного или "рентгеновского" (из-за увеличений среднего размера элементарной ячейки) распухания различных материалов определяется главным образом количеством соответствующих точечных дефектов, объединившихся в устойчивые скопления. Борьба с этим явлением успешно проводится путем создания материалов с высокой плотностью стоков как в металлах (например, в результате пластической деформации [3] и

¹© Корнилов Д.А., Косенков В.М., Силантьев П.П., 2016

Корнилов Дмитрий Александрович (kornilovda@niiar.ru), Косенков Владимир Михайлович (kosenkovv1938@mail.ru), Силантьев Павел Петрович (silantievpp@mail.ru), АО "ТНЦ НИИАР", 433510, Российская Федерация, Ульяновская обл., г. Димитровград, 10

изменения микроструктуры материала [4; 5]), так и в неметаллических кристаллах (воздействием взрывной волной [6]). В настоящее время появляются другие схемы получения исходных состояний материалов, содержащих различные особенности структуры, являющиеся стоками первичных радиационных дефектов — пар Френкеля. При этом необходимо учитывать, что характер эволюции радиационных дефектов зависит как от исходной концентрации этих стоков [7–9], так и от концентрации стоков, образующихся в процессе облучения. При этом существенно усложняется задача математического моделирования эволюции радиационных дефектов, т. к., во-первых, увеличивается размерность системы кинетических уравнений, учитывающей в том числе и процессы зарождения стоков под облучением, а во-вторых, существенно затруднен процесс калибровки математической модели, т. к. трудно получить состояние материала, содержащее лишь один тип стоков.

В настоящей статье изучаются вопросы, описывающие эволюцию как точечных, так и макроскопических радиационных дефектов, образующихся в процессе нейтронного облучения в атомных реакторах, а также влияние исходного микроскопического состояния материала на эту эволюцию.

1. Кинетика вакансий и междоузельных атомов под облучением

Основу теоретических моделей радиационного распухания составляют кинетические уравнения концентрации точечных дефектов среды, содержащих стоки. При этом предполагается, что концентрация радиационных точечных дефектов при характерных температурах распухания $(0, 2-0, 6)T_{n,l}$ превосходит концентрацию термически равновесных дефектов. Вакансии и междоузельные атомы, мигрируя по решетке, могут: во-первых, рекомбинировать; во-вторых, образовывать скопления одноименных дефектов и, в-третьих, уходить на стоки, в качестве которых могут служить сетки дислокаций, дислокационные петли, поры и другие протяженные дефекты. Следовательно, скорость изменения концентрации междоузельных атомов и вакансий равна разности скоростей их образования и гибели, что может быть описано кинетическими уравнениями [7]:

$$\begin{aligned} \frac{dC_v}{dt} &= G - RC_iC_v - C_v \sum_j K_v^j, \\ \frac{dC_i}{dt} &= G - RC_iC_v - C_i \sum_j K_i^j, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где C_v , C_i — усредненные концентрации вакансий и междоузельных атомов; $G = \sigma_f \varphi$ — скорость введения свободно мигрирующих дефектов (σ_f — сечение их образования, φ — интенсивность облучения); $R = 4\pi r_{vi}(D_i + D_v)$ — константа рекомбинации точечных дефектов, где r_{vi} — радиус взаимной рекомбинации, $D_{i,v} = D_{i,v}^0 \exp(-E_{i,v}^m/kT)$ — коэффициенты диффузии междоузельных атомов и вакансий, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $E_{i,v}^m$ — энергия миграции междоузельного атома и вакансии; $K_{i,v}^j = S_{i,v}^j D_{i,v}$ — коэффициент поглощения точечных дефектов стоками типа j , где $S_{i,v}^j$ — величины, характеризующие мощность стоков типа j для междоузельных атомов и вакансий.

В качестве основных источников стоков точечных дефектов, образующихся в результате нейтронного облучения, в данной статье будут рассматриваться краевые дислокации, дислокационные петли и поры. В большинстве работ, посвящен-

ных моделированию эволюции микроструктуры материалов под облучением, рассматриваются либо квазистационарные состояния, когда сформированы и слабо изменяются с течением времени дислокационная подсистема и количество пор [8], либо рассматриваются только отдельные типы стоков [10; 11].

2. Расчет коэффициентов поглощения точечных дефектов различными стоками

Для формулировки системы уравнений, описывающих эволюцию микроструктуры материала под облучением, необходимо получить потоки точечных дефектов на дислокации и поры, также зарождающихся в процессе облучения. Энергия взаимодействия между дислокацией и точечным дефектом имеет упругую природу и фактически является взаимодействием дальнедействующего поля напряжения дислокации с полем атомных смещений вокруг точечного дефекта [12]. Для краевой прямолинейной дислокации, направленной вдоль оси z [13; 14]:

$$E_{int}^j(r, \theta) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\mu b \sin \theta}{3\pi r} \Delta V_j \quad (2.1)$$

где r – расстояние дефекта от дислокации; ΔV_j – релаксационный объем (разница между объемом дефекта и атомным объемом); ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, b – величина вектора Бюргерса, θ – угол между направлением вектора Бюргерса и радиус-вектором \mathbf{r} , индекс j означает или междоузельные атомы i , или вакансии v .

Поток точечных дефектов

$$\vec{J}_j = -D_j \vec{\nabla} C_j - \frac{D_j C_j}{kT} \vec{\nabla} E_{int}^j \quad (2.2)$$

на дислокацию определяется суммой градиента их концентрации j в пространстве между дислокациями и на границах стоков и дрейфовым потоком, вызванной силовым полем с энергией взаимодействия (2.1). В установившемся режиме, характеризуемом стационарными потоками точечных дефектов, получаем следующее уравнение для концентрации точечных дефектов:

$$\nabla^2 C_j + \frac{1}{kT} \vec{\nabla} C_j \vec{\nabla} E_{int}^j = 0.$$

Решение уравнения (2.2) дает следующие выражения для потоков вакансий и междоузельных атомов [9]:

- на единицу длины дислокационной линии прямолинейной дислокации:

$$j_j^D = -\frac{2\pi D_k (C_k - C_k^0)}{\ln L/r_k},$$

- на единицу длины круговой дислокации:

$$j_j^L = -\frac{2\pi D_k (C_k - C_k^0)}{\ln 8R_L/r_k}.$$

Отсюда можно получить выражение для константы поглощения точечных дефектов дислокационными петлями в системе уравнений (1.1):

$$K_j^l = \frac{4\pi^2 r_l D_j \rho_l}{\ln \frac{2r_l}{L_j}} \quad (2.3)$$

Учитывая связь между константой поглощения точечных дефектов с параметром эффективности поглощения точечных дефектов $K_j^l = Z_j^l \rho_l$, получим выражение для параметра эффективности поглощения дислокационными петлями точечного дефекта j :

$$Z_j^l = \frac{4\pi^2 r_l}{\ln \frac{2r_l}{L_j}}. \quad (2.4)$$

Учитывая (2.3)–(2.4) можно получить следующее выражение для изменения радиуса дислокационных петель:

$$\frac{dr_l}{dt} = \frac{\Omega}{b} \{Z_i D_i C_i - Z_v D_v (C_v - C_v^0)\},$$

где r_l – радиус дислокационных петель, C_v^0 – термически равновесная концентрация вакансий.

Поток точечных дефектов на пору рассчитывается таким же способом, как и на дислокацию. В простейшем случае, если объем облучаемого образца равномерно заполнен порами среднего радиуса r_v и плотностью ρ_v , на каждую пору приходится часть объема образца:

$$\frac{4}{3}\pi R_v^3 = \rho_v^{-1}.$$

Предполагается, что в сферической области радиуса R_v других стоков, кроме поры, нет, и поэтому все точечные радиационные дефекты поглощаются порой. Стационарное уравнение диффузии (2.2) для случая поры выглядит проще, чем для дислокации, так как не содержит дрейфового члена $\nabla^2 C_j = 0$. По аналогии с (2.3) получается, что $Z_j^v = 4\pi r_v$ – эффективность поглощения междоузельных атомов и вакансий отдельной сферической порой радиуса r_v . Таким образом, видно, что поры являются нейтральными стоками, т. е. поглощают за единицу времени одинаковое число междоузельных атомов и вакансий, а изменение радиуса поры будет описываться уравнением [6]

$$\frac{dr_v}{dt} = \frac{\Omega}{r_v} \{D_v (C_v^{irr} - C_v^{tv}) - D_i C_i^{irr}\}, \quad (2.5)$$

где $\Omega \sim a^3$ – атомный объем, a – параметр решетки.

Первое слагаемое в правой части (2.5) характеризует скорость присоединения вакансий и их термического испарения из поры, второе – скорость присоединения междоузельных атомов. При выводе (2.5) термически равновесную концентрацию междоузельных атомов считали равной нулю. Из (2.5) следует, что рост вакансионной поры может происходить лишь тогда, когда правая часть положительна, т. е. при некотором критическом размере поры.

3. Учет зарождения и роста дислокационных петель и пор под облучением

Изменение плотности дислокационных петель в материалах под облучением сильно меняется для разных типов веществ и зависит от многих факторов: уровня деформации, химического состава, технологии деформации, формы изделия и др. Начальный уровень плотности дислокаций не оказывает большого влияния на его дальнейшее поведение, т. к. через некоторое время после начала облучения материалы с разными уровнями плотности дислокаций выходят на примерно одинаковый уровень, и он почти не зависит от дальнейшего облучения [15].

Так как дислокационные петли являются линейными дефектами, то для нахождения плотности петель ρ_l используется следующая зависимость [10]:

$$\rho_l = 2\pi N_l r_l,$$

где N_l – число петель в единице объема, r_l – радиус петли.

Для описания моделей зарождения и роста петель используются модели кластеризации междоузельных атомов, которые заключаются в следующем: под действием облучения в материале образуются каскады атомных смещений, которые вызывают рост концентрации междоузельных атомов. Междоузельные атомы образуют скопления в виде кластеров, которые в дальнейшем могут служить зародышами для дислокационных петель. В работе [16] показано, что выражение для скорости зарождения дислокационных петель имеет вид:

$$J_l = \frac{dN_l}{dt} = \frac{\varepsilon_{i0} G P_i}{n_i}, \quad (3.1)$$

где ε_{i0} определяет долю междоузельных атомов, образующихся в каскаде в виде неподвижных кластеров; G – скорость генерации дефектов; P_i – вероятность достижения кластером некоторых критических размеров, при которых он становится устойчивым (P_i зависит от концентрации примесей, энергии нейтронов, температуры облучения и т. д.); n_i – число междоузельных атомов в устойчивом кластере.

В выражении (3.1) необходимо учесть зависимость величины ε_{i0} от числа петель N_l , так как с ростом N_l количество междоузельных атомов, образующих в результате каскада неподвижный кластер, будет уменьшаться, поскольку будет увеличиваться число междоузельных атомов, уходящих на уже имеющиеся стоки (петли и поры). Это подтверждается и результатами экспериментальных исследований [17–19], показывающих, что в процессе облучения плотность дислокационных петель $N_l(t)$ начинает возрастать спустя некоторое время после начала процесса облучения и со временем достигает насыщения. Такое поведение достаточно хорошо может быть аппроксимировано зависимостью:

$$N_l(t) = N_{l0} + \tilde{N}_l \operatorname{th} \left(\frac{t - \tau}{\delta} \right), \quad (3.2)$$

где N_{l0} – исходное число дислокационных петель (до облучения); τ – время зарождения дислокационных петель; δ – параметр, определяющий скорость протекания процессов зарождения и роста петель; \tilde{N}_l – нормировочная постоянная, определяемая исходя из условий облучения. Сравнивая уравнение (3.2) с (3.1), получаем следующие выражения для постоянных величин, входящих в уравнение (3.2):

$$\delta = \frac{n_i}{\varepsilon_{i0} G P_i}, \quad \varepsilon_{i0} = \tilde{\varepsilon}_{i0} \left[1 - \left(\frac{N_l}{\tilde{N}_l} \right)^2 \right],$$

где $\tilde{\varepsilon}_{i0}$ – доля междоузельных атомов, образующих неподвижные кластеры в чистом материале [16; 20].

Таким образом, для скорости образования петель получается выражение:

$$\frac{dN_l}{dt} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{i0} \left[1 - \left(\frac{N_l}{\tilde{N}_l} \right)^2 \right] G P_i}{n_i},$$

а кинетическое уравнение, описывающее изменение плотности дислокационных петель, будет иметь вид:

$$\frac{d\rho_l}{dt} = 2\pi N_l \frac{dr_l}{dt} + 2\pi r_l \frac{dN_l}{dt}.$$

Проведя аналогичные рассуждения для процессов образования вакансионных пор в облучаемом материале и с учетом того, что они являются объемными дефектами, для плотности пор имеем [16]

$$\rho_v = N_v.$$

Выражение для скорости зарождения пор будет иметь вид [6]:

$$J_v = \frac{dN_v}{dt} = \frac{\varepsilon_{v0}GP_v}{n_v},$$

где ε_{v0} определяет долю вакансий, образующихся в каскаде в виде неподвижных кластеров; G – скорость генерации дефектов; P_v – вероятность достижения кластером некоторых критических размеров, при которых он становится устойчивым (P_v зависит от концентрации примесей, энергии нейтронов, температуры облучения и т. д.); n_v – число вакансий в устойчивом кластере.

По аналогии со случаем дислокационных петель получаем

$$\varepsilon_{v0} = \tilde{\varepsilon}_{v0} \left[1 - \left(\frac{N_v}{\tilde{N}_v} \right)^2 \right],$$

где $\tilde{\varepsilon}_{v0}$ – доля вакансий, образующих неподвижные кластеры в чистом материале, \tilde{N}_v – нормировочная постоянная.

Тогда скорость зарождения пор:

$$\frac{dN_v}{dt} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{v0} \left[1 - \left(\frac{N_v}{\tilde{N}_v} \right)^2 \right] GP_v}{n_v},$$

а кинетическое уравнение, описывающее изменение плотности пор, будет иметь вид:

$$\frac{d\rho_v}{dt} = \frac{dN_v}{dt}.$$

4. Полная система уравнений, описывающая кинетику накопления точечных и макроскопических дефектов под облучением

Учитывая приведенные выше рассуждения, а также выражения для скорости изменения радиусов дислокационных петель и пор, запишем систему уравнений, описывающую кинетику радиационных дефектов с учетом их взаимной аннигиляции и рекомбинации на краевых дислокациях, дислокационных петлях и порах:

$$\begin{aligned} \frac{dC_v}{dt} &= G - (Z_v^l \rho_l + Z_v^d \rho_d + Z_v^v \rho_v) D_v C_v - RC_v C_i, \\ \frac{dC_i}{dt} &= G - (Z_i^l \rho_l + Z_i^d \rho_d + Z_i^v \rho_v) D_i C_i - RC_i C_v, \\ \frac{dr_l}{dt} &= \frac{\Omega}{b} (Z_i^l D_i C_i - Z_v^l D_v C_v), \\ \frac{dr_v}{dt} &= \frac{\Omega}{r_v} (D_v C_v - D_i C_i), \\ \frac{d\rho_l}{dt} &= 2\pi (N_l + N_{l0}) \frac{dr_l}{dt} + 2\pi r_l \frac{dN_l}{dt}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\frac{dN_l}{dt} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{i0} \left[1 - \left(\frac{N_l}{\bar{N}_l} \right)^2 \right] GP_i}{n_i},$$

$$\frac{d\rho_v}{dt} = \frac{dN_v}{dt} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{v0} \left[1 - \left(\frac{N_v}{\bar{N}_v} \right)^2 \right] GP_v}{n_v}.$$

Все используемые обозначения расписаны выше при выводе соответствующих формул.

В данной статье эффективность поглощения дефекта краевой дислокацией $Z_{i,v}^d$ принимается равной $Z_{i,v}^l$.

Исследование системы уравнений (4.1) проводилось для нитрида бора BN и никеля Ni . Значения параметров системы приведены в таблице [7; 21].

5. Результаты моделирования эволюции точечных и макроскопических дефектов для никеля

Моделирование кинетики точечных и макроскопических дефектов осуществлялось в предположении, что исходный материал близок по своим характеристикам к идеальному монокристаллу, и использовались следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} C_v(0) &= 1 \text{ м}^{-3}, & N_l(0) &= 0 \text{ м}^{-3}, \\ C_i(0) &= 1 \text{ м}^{-3}, & \rho_v(0) &= 1 \text{ м}^{-3}, \\ \rho_l(0) &= 1 \text{ м}^{-2}, & r_v(0) &= 10^{-9} \text{ м}, \\ r_l(0) &= 10^{-9} \text{ м}, & N_v(0) &= 0 \text{ м}^{-3}. \end{aligned}$$

Результаты моделирования кинетики дефектов представлены на рис. 1–4.

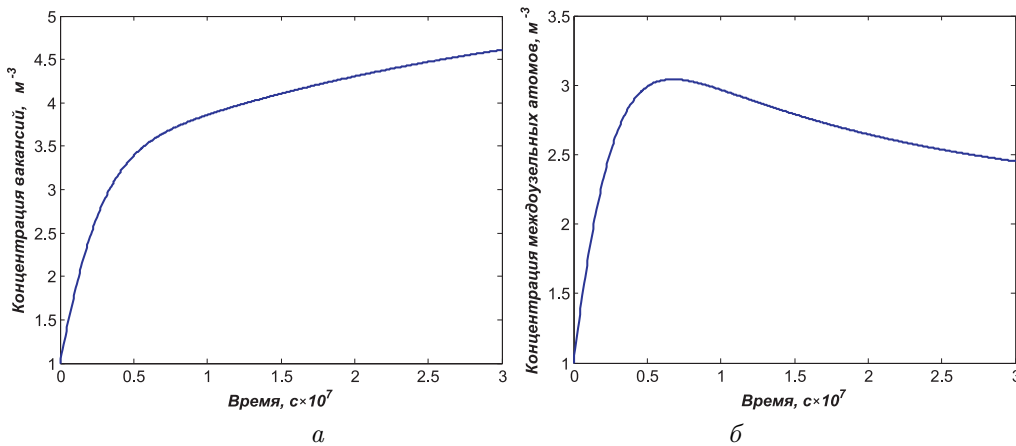


Рис. 1. Зависимость концентрации вакансий (а) и междоузельных атомов (б) от времени облучения

Как видно из рис. 1, зависимость концентрации междоузельных атомов отличается от зависимости вакансий. Поясним, с чем это связано. В начале облучения происходит почти линейный рост концентраций вакансий и междоузельных атомов. Когда образуется достаточное количество дефектов, они начинают рекомбинировать друг с другом и аннигилировать. На графиках этот момент характе-

Таблица

Значения физических постоянных для никеля и нитрида бора

Физическая постоянная	Значение	
	Никель	Нитрид бора
T , температура	573 К	
G , скорость введения свободно мигрирующих дефектов	10^{-6} , $\text{м}^{-3}\text{с}^{-1}$	
E_i^m , энергия миграции междоузельного атома	0,15 эВ	0,1 эВ
E_v^m , энергия миграции вакансии	0,38 эВ	1 эВ
D_{v0} , предэкспоненциальный коэффициент для вакансии	$6 \cdot 10^{-6}$ $\text{м}^2\text{с}^{-1}$	10^{-4} $\text{м}^2\text{с}^{-1}$
D_{i0} , предэкспоненциальный коэффициент для междоузельного атома	$1,2 \cdot 10^{-5}$, $\text{м}^2\text{с}^{-1}$	10^{-4} , $\text{м}^2\text{с}^{-1}$
a , параметр решетки	$3 \cdot 10^{-10}$ м	
b , модуль вектора Бюргерса	$3 \cdot 10^{-8}$ м	
ρ_d , плотность краевых дислокаций	10^8 м^{-2}	
$\tilde{\varepsilon}_{i0}$, доля междоузельных атомов, ушедших на образование кластеров в чистом материале	10^{-4}	
$\tilde{\varepsilon}_{v0}$, доля вакансий, ушедших на образование кластеров в чистом материале	10^{-3}	
\tilde{N}_l , величина, на которую может вырасти число дислокационных петель	$5 \cdot 10^{12}$	
\tilde{N}_p , величина, на которую может вырасти число пор	$5 \cdot 10^{14}$	
n_i , число междоузельных атомов, образующих устойчивый кластер	5	
n_v , число вакансий, образующих устойчивый кластер	10	
P_i , вероятность кластера междоузельных атомов стать устойчивым	10^{-6}	
P_v , вероятность вакансионного кластера стать устойчивым	$2 \cdot 10^{-5}$	
N_{i0} , начальное число дислокационных петель	10^6	10^2
N_{v0} , начальное число пор	10^6	10^7
ν , коэффициент Пуассона	0,3	0,186
μ , модуль сдвига	$7,7 \cdot 10^{10}$	389

ризуется наличием максимума у междоузельных атомов и изгибом у вакансий. В дальнейшем, так как междоузельные атомы более подвижны и, соответственно, быстрее уходят на стоки, на графике наблюдается уменьшение концентрации междоузельных атомов, которая с течением времени, как и концентрация вакансий, выходит на насыщение.

На рис. 2 представлены зависимости плотности дислокационных петель и пор. Как и следовало ожидать, данные кривые выходят на насыщение.

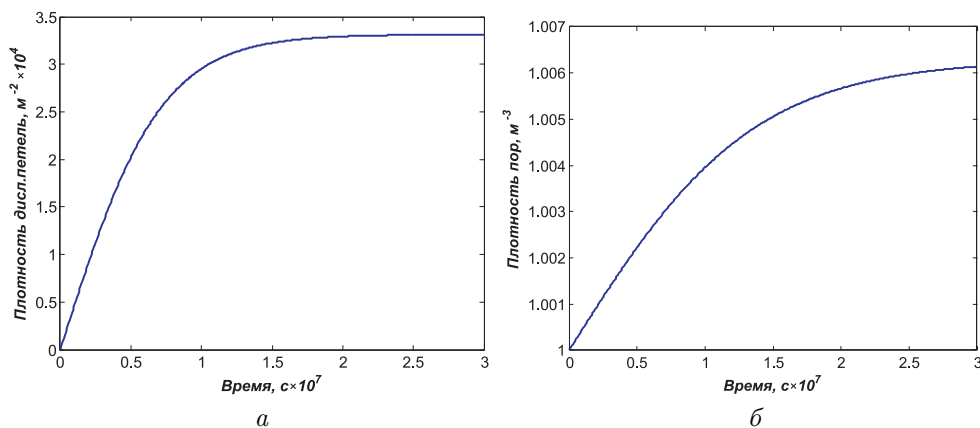


Рис. 2. Зависимости плотности дислокационных петель (а) и пор (б) от времени облучения

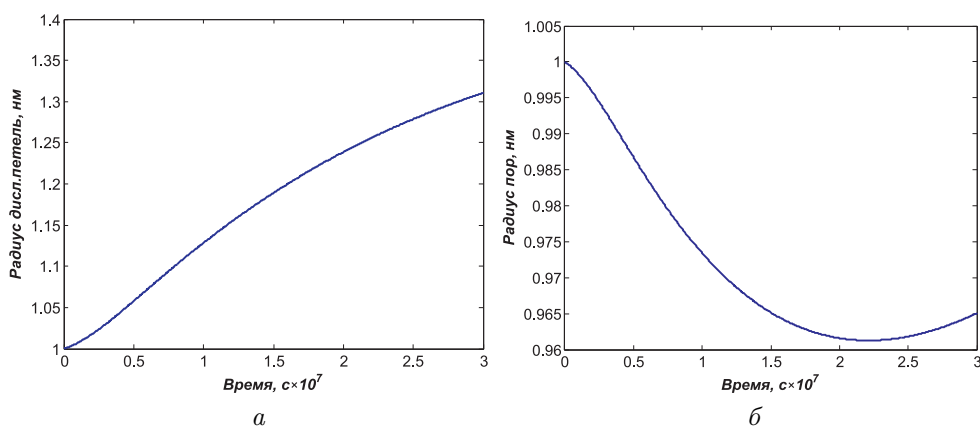


Рис. 3. Зависимости радиуса дислокационных петель (а) и пор (б) от времени облучения

На рис. 3–4 представлены зависимости радиуса и числа дислокационных петель и пор. Практически все они имеют одинаковый характер: в начале облучения происходит быстрый рост стоков за счет увеличения генерируемых дефектов, который затем выходит на насыщение. Иной характер имеет зависимость радиуса пор от времени облучения. Видно, что радиус пор сначала уменьшается, затем начинает увеличиваться. Это обусловлено тем, что в начальные моменты облучения концентрация междоузельных атомов увеличивается, они активнее начинают рекомбинировать на порах, что приводит к уменьшению их радиуса. В дальнейшем концентрация междоузельных атомов снижается, в результате чего радиус пор начинает увеличиваться.

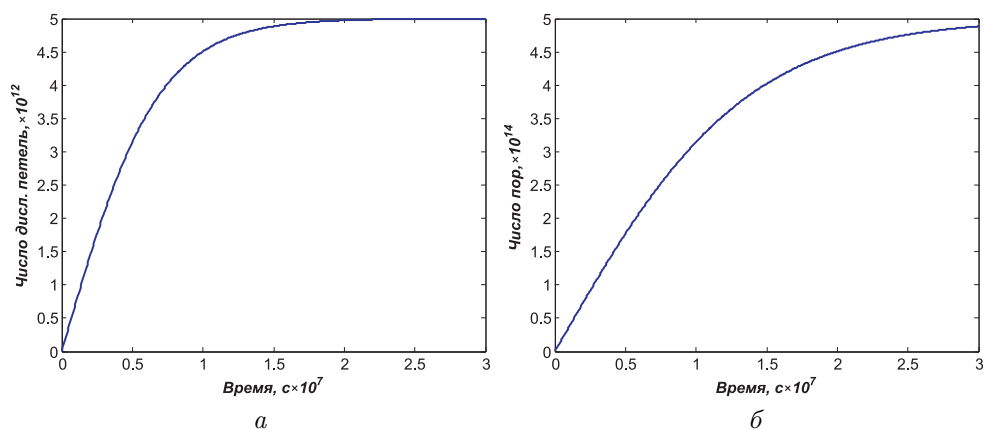


Рис. 4. Зависимости числа дислокационных петель (а) и пор (б) от времени облучения

6. Результаты моделирования эволюции точечных и макроскопических дефектов для нитрида бора

Для моделирования кинетики дефектов нитрида бора BN использовались те же начальные условия, что и для никеля Ni .

Полученные зависимости представлены на рис. 5–8.

Представленные на рис. 5 зависимости концентрации междоузельных атомов и вакансий имеют несколько иной характер, чем наблюдалось у никеля. Это связано в первую очередь с тем, что пористость нитрида бора гораздо больше, чем у никеля, соответственно, изначально имеется большее число стоков — пор. А так как эффективность поглощения дефектов порой одинакова для междоузельных атомов и вакансий, то и кривые имеют практически одинаковый вид.

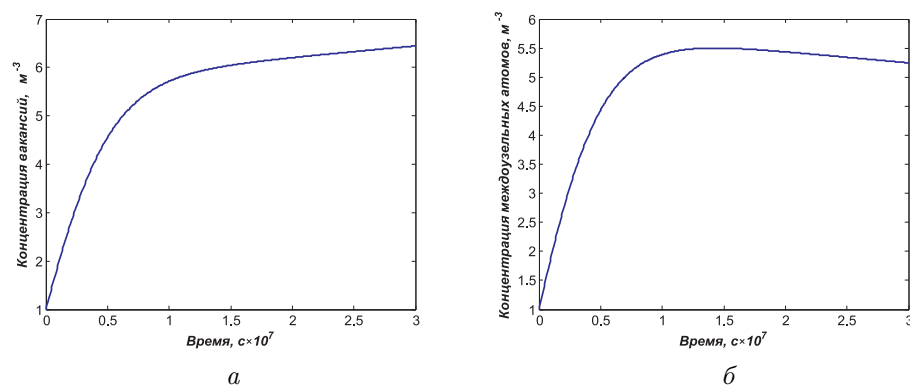


Рис. 5. Зависимость концентрации вакансий (а) и междоузельных атомов (б) от времени облучения

При этом необходимо отметить, что поскольку концентрация вакансий немного превышает концентрацию междоузельных атомов, то для радиуса пор и радиуса дислокационных петель наблюдается линейный рост.

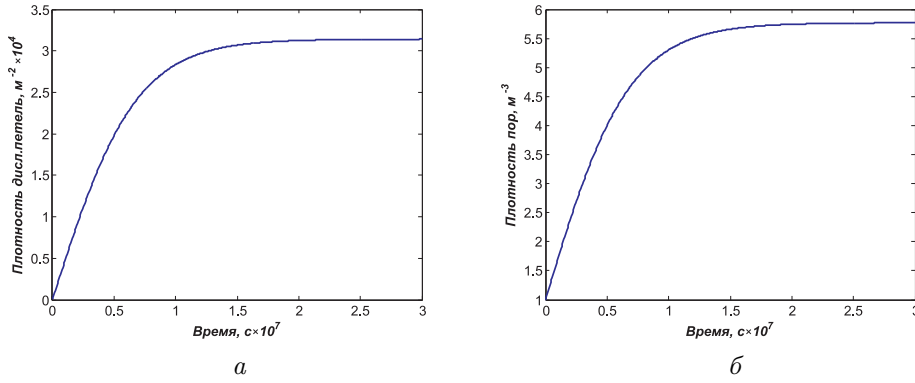


Рис. 6. Зависимости плотности дислокационных петель (а) и пор (б) от времени облучения

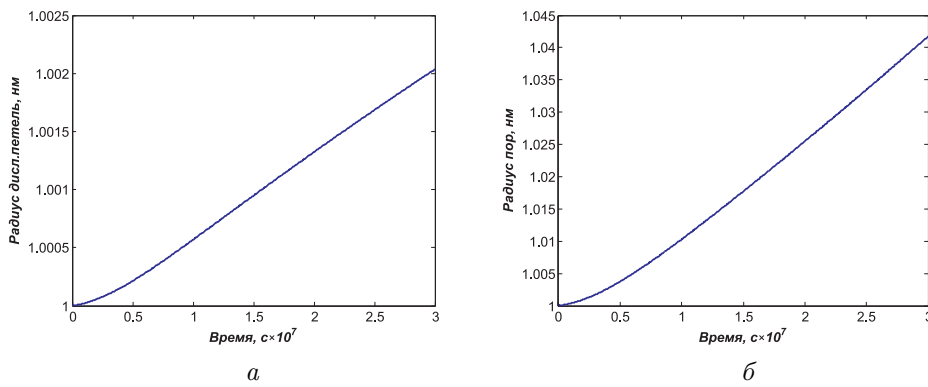


Рис. 7. Зависимости радиуса дислокационных петель (а) и пор (б) от времени облучения

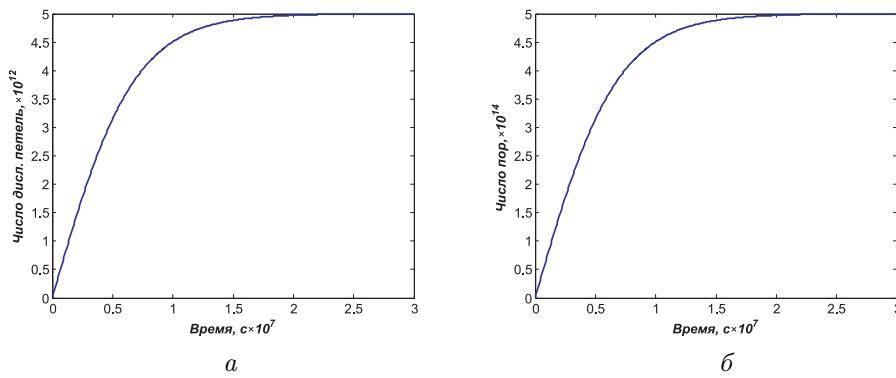


Рис. 8. Зависимости числа дислокационных петель (а) и пор (б) от времени облучения

7. Влияние исходной дислокационной структуры на кинетику точечных дефектов при облучении

Помимо этого были построены зависимости, которые показывают влияние начальной плотности краевых дислокаций в материале на эволюцию точечных дефектов под облучением (рис. 9–10).

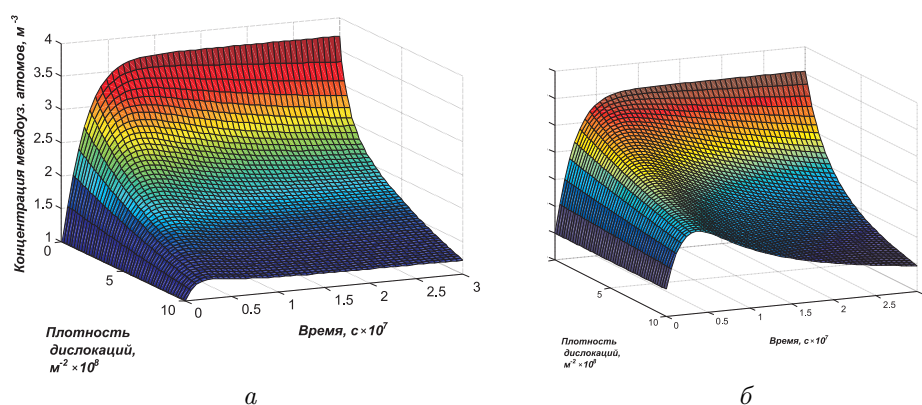


Рис. 9. Эволюция концентрации междуузельных атомов в зависимости от плотности краевых дислокаций для никеля (*a*) и нитрида бора (*б*)

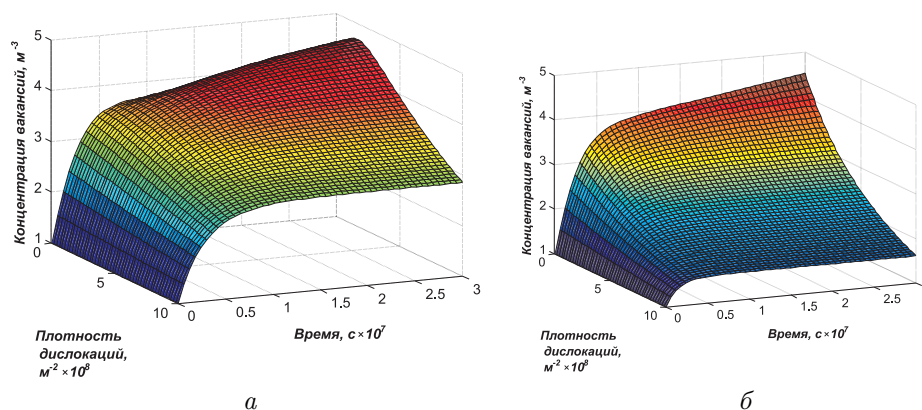


Рис. 10. Эволюция концентрации вакансий в зависимости от плотности краевых дислокаций для никеля (*a*) и нитрида бора (*б*)

При получении на рис. 9 и 10 зависимости изменения концентрации элементов пар Френкеля от флюенса и плотности стоков (краевых дислокаций) исходили из численных значений энергетических параметров их взаимодействия, известных для конкретных материалов. Это дает теоретическую основу для разработки способов обработки реакторных материалов с повышенной устойчивостью в изменении свойств, влияющих на продолжительность эксплуатации материалов активной зоны атомных реакторов [22]. Это существенный момент в увеличении экономических показателей атомной промышленности (увеличение флюенса, набираемого в реакторе без остановки на замену деталей, уменьшение количества облученных материалов, требующих захоронения или дорогостоящей очистки). Легко допустить,

что наличие других типов искусственно созданных стоков (например, границы областей когерентного рассеяния) также приводит к уменьшению в структуре количества точечных дефектов в разы для флюенса нейтронов.

Выводы

1. Построена модель кинетики накопления радиационных дефектов под облучением, учитывающая их рекомбинацию на дислокационных петлях, краевых дислокациях и порах.
2. Проведено математическое моделирование кинетики дефектов до повреждающих доз 30 сна для никеля и нитрида бора. Полученные зависимости согласуются с теоретическими представлениями о характере зависимостей.
3. Проведено исследование кинетики дефектов в зависимости от плотности краевых дислокаций. Показано, что увеличение данного параметра приводит к уменьшению концентрации дефектов, что говорит об уменьшении радиационного распухания.

Литература

- [1] Косенков В.М., Воробьев С.А., Колесников А.В. Способ подготовки материалов, преимущественно неметаллических, к использованию в нейтронных полях. Патент RU 2105362 С1 1998.
- [2] Косенков В.М., Корнилов Д.А., Кобылянский Г.П., Силантьев П.П. Способ подготовки материалов к использованию в нейтронных полях. Патент РФ RU 2410775С1 2011.
- [3] Зеленский В.Ф., Некрасов И.М., Черняева Т.П. Радиационные дефекты и распухание металлов. Киев: Наукова думка, 1988, 296 с.
- [4] Р.А. Андриевский. Радиационная стойкость наноматериалов // Российские нанотехнологии. 2011. Т. 6. № 5–6. С. 34–42.
- [5] Андриевский Р.А. Влияние облучения на свойства наноматериалов // Физика металлов и металловедение. 2010. Т. 110. № 3. С. 243–254.
- [6] Kosenkov V.M., Vorobjev S.A., Kolesnikov A.V. Radiation swelling decrease by means of explosive wave // J. of Nucl. Mater. 1998. Vol. 258–263. P. 1809–1811.
- [7] Иванов Л.И., Платов Ю.М. Радиационная физика металлов и ее приложения. М.: Интерконтакт Наука, 2002. 300 с.
- [8] Слезов В.В., Субботин А.В., Осмаев О.А. Влияние облучения на временную эволюцию микроструктуры в сплавах. // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение. 2005. № 5. С. 10–15.
- [9] Слезов В.В. Диффузионная скорость роста макродефектов в ансамблях // ФТТ. 1989. Т. 31. Вып. 8. С. 20–30.
- [10] Borodin V.A., Ryazanov A.I., Sherstennikov D.G. Low-temperature swelling of metals and ceramics // Journal of Nuclear Materials. 1993. № 202. P. 169–179.
- [11] Черняева Т.П., Красноруцкий В.С., Грицина В.М. Цирконий и циркониевые сплавы. Атлас структур (Поры в цирконии и циркониевых сплавах) // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение. 2005. № 3. С. 78–86.

- [12] Фридель Ж. Дислокации. М.: Мир. 1967. 643 с.
- [13] Углов В.В. Радиационные эффекты в твердых телах. Минск: БГУ, 2011, 207 с.
- [14] Воеводин В.Н., Неклюдов И.М. Проблемы радиационной стойкости конструкционных материалов ядерной энергетики // Вестник Харьковского университета. Сер.: Физическая. 2006. № 4(32). С. 3–22.
- [15] Гуляев А.П. Металловедение. М.: Металлургия, 1986. 544 с.
- [16] Gary S. Was. Fundamentals of Radiation Materials Science. Metals and Alloys. Springer, 2007. 827 p.
- [17] Norris D.I. Evolution of dislocation in irradiated austenitic alloys // Radiat. Effects. 1972. Vol. 14. P. 1–12.
- [18] Norris D.I. Dislocation in irradiated austenitic Steels // Radiat. Effects. 1972. Vol. 15. P. 1–8.
- [19] Неустроев В.С. Экспериментальное исследование упрочнения и его корреляции с микротвердостью в облученных аустенитных нержавеющей сталях. В кн.: Моделирование поведения реакторных материалов под облучением. Ульяновск: УЛГУ, 2006, С. 35–42.
- [20] Агранович В.М., Кирсанов В.В. Проблемы моделирования радиационных повреждений в кристаллах // УФН. 1976. Т. 118. Вып. 1. 51 с.
- [21] Твердость и прочность высокочистых поликристаллических материалов кубического нитрида бора / И.А. Петруша [и др.] // Актуальные проблемы физики твердого тела: сборник докладов международной научной конференции. Минск: Национальная академия Беларуси, 2005. С. 484–486.
- [22] Уменьшение радиационного распухания графита, обработанного взрывом / В.М. Косенков [и др.] // Атомная энергия. 2005. Т. 99. № 1. С. 43–47.

References

- [1] Kosenkov V.M., Vorobiev S.A., Kolesnikov A.V. Sposob podgotovki materialov, preimushchestvenno nemetallicheskih, k ispol'zovaniuu v neitronnykh poliakh [Method of preparing materials, mainly non-metallic, to use in neutron fields]. Patent RU 2105362, published 20.02.1998 [in Russian].
- [2] Kosenkov V.M., Kornilov D.A., Kobyluyansky G.P., Silantiev P.P. Sposob podgotovki materialov k ispol'zovaniuu v neitronnykh poliakh [Method of preparing materials and articles for use in neutron fields]. Patent RU 2410775, published 10.03.2007 [in Russian].
- [3] Zelinsky V.F., Nekrasov I.M., Chernyaeva T.P. Radiatsionnye defekty i raspukhanie metallov [Radiation defects and swelling of metals]. Kiev: Naukovadumka, 1988, 296 p. [in Russian].
- [4] Andrievskii R.A. Radiatsionnaia stoikost' nanomaterialov [Radiation stability of nanomaterials]. *Rossiiskie nanotekhnologii* [Nanotechnologies in Russia], 2011, Vol. 6, No. 5–6, pp. 34–42 [in Russian].
- [5] Andrievskii R.A. Vliianie oblucheniia na svoistva nanomaterialov [Effect of Irradiation on the Properties of Nanomaterials]. *Fizika metallov i metallovedenie* [Physics of Metals and Metallography], 2010, Vol. 110, no. 3, pp. 243–254 [in Russian].
- [6] Kosenkov V.M., Vorobjev S.A., Kolesnikov A.V. Radiation swelling decrease by means of explosive wave. *J. of Nucl. Mater*, 1998, Vols. 258–263, pp. 1809–1811.
- [7] Ivanov L.I., Platov Yu.M. Radiatsionnaia fizika metallov i ee prilozheniia [Radiation physics of metals and its applications]. Moscow: Interkontakt, Nauka, 2002, 300 p. [in Russian].

- [8] Slezov V.V., Subotin A.V., Osmayev O.A. Vliianie oblucheniia na vremennuiu evoliutsiiu mikrostruktury v splavakh [Irradiation influence on alloys microstructure time evolution]. *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Fizika radiatsionnykh povrezhdenii i radiatsionnoe materialovedenie* [Problems of Atomic Science and Technology. Topics: Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science], 2005, no. 5, pp. 10–15 [in Russian].
- [9] Slezov V.V. Diffuzionnaia skorost' rosta makrodefektov v ansamblakh [Diffusion growth rate of macro-defects in ensembles]. *FTT* [Solid State Physics], 1989, Vol. 31, no. 8, pp. 20–30 [in Russian].
- [10] Borodin V.A., Ryazanov A.I., Sherstennikov D.G. Low-temperature swelling of metals and ceramics. *Journal of Nuclear Materials*, 202, 1993, pp. 169–179 [in Russian].
- [11] Chernyayeva T.P., Krasnorutsky V.S., Grytsyna V.M. Tsirkonii i tsirkonievye splavy. Atlas struktur (Pory v tsirkonii i tsirkonievnykh splavakh) [Zirconium and zirconium alloys. Structure atlas (voids in zirconium and zirconium alloys)]. *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Fizika radiatsionnykh povrezhdenii i radiatsionnoe materialovedenie* [Problems of Atomic Science and Technology. Topics: Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science], 2005, no. 3, pp. 78–86 [in Russian].
- [12] Friedel J. Dislokatsii [Dislocations]. M.: Mir, 1967, 643 p. [in Russian].
- [13] Uglov V.V. Radiatsionnye efekty v tverdykh telakh [Radiation Effects in Solids]. Minsk: BGU, 2011, 207 p. [in Russian]
- [14] Voyevodin V.N., Neklyudov I.M. Problemy radiatsionnoi stoikosti konstruktsionnykh materialov iadernoi energetiki [Problems of radiation stability of structural materials in nuclear power]. *Vestnik khar'kovskogo universiteta. Seriya fizicheskaya*. [Bulletin KhNU. Physical series], 2006, Vol. 4(32), pp. 3–22 [in Russian]
- [15] Gulyaev A.P. Metallovedenie [Metallurgical science]. M.: Metallurgiya, 1986, 544 p. [in Russian].
- [16] Gary S. Was. Fundamentals of Radiation Materials Science. Metals and Alloys. Springer, 2007, 827 p. [in English].
- [17] Norris D.I. Evolution of dislocation in irradiated austenitic alloys. *Radiat. Effects*, 1972, Vol. 14, pp. 1–12 [in English].
- [18] Norris D.I. Dislocation in irradiated austenitic Steels. *Radiat. Effects*, 1972, Vol. 15, pp. 1–8 [in English].
- [19] Neustroev V.S. Eksperimental'noe issledovanie uprochneniia i ego korreliatsii s mikrotverdost'iu v obluchennykh austenitnykh nerzhavieushchikh staliakh [Experimental study of hardening and its correlation with a microhardness in the irradiated austenitic stainless steels] in Modelirovanie povedeniia reaktornykh materialov pod oblucheniem [Modelling of behaviour of reactor materials under irradiation]. Ulyanovsk: UIGU, 2006, pp. 35–42 [in Russian].
- [20] Agranovich V.M., Kirsanov V.V. Problemy modelirovaniia radiatsionnykh povrezhdenii v kristallakh [Problems of modeling radiation damage in crystals]. (UFN) [Advances in Physical Sciences], 1976, Vol. 118, Issue 1, 51 p. [in Russian].
- [21] Petrusha I.A., Smirnova T.I., Osipov A.S., Stratiychuk D.A., Shishonok N.A. Tverdost' i prochnost' vysokochistyykh polikristallicheskiykh materialov kubicheskogo nitrída bora. Sbornik dokladov mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Aktual'nye problemy fiziki tverdogo tela" [The hardness and strength of high-purity polycrystalline materials of cubic boron nitride. Collection of materials of International scientific conference "Topical issues of solid state physics"]. Minsk, Natsional'naya akademiia Belorusi, pp. 484–486 [in Russian].

- [22] Kosenkov V.M., Vorob'ev S.A., Kolesnikov A.V., Subbotin A.V. Umen'shenie radiatsionnogo raspukhaniia grafita, obrabotannogo vzryvom [Decrease of Radiation Swelling of Explosion-Worked Graphite]. *Atomnaia energiya* [Atomic Energy], 2005, Vol. 99, Issue 1, pp. 43–47 [in Russian].

*D.A. Kornilov, V.M. Kosenkov, P.P. Silantev*²

INFLUENCE OF INITIAL DISLOCATION STRUCTURE ON POINT AND MICROSCOPIC DEFECTS KINETIC UNDER IRRADIATION

This work is aimed for justification of quantitative effect of radiation defect concentration decreasing in materials depending on density of edge dislocation which are their outlet. The results of defect kinetics modeling with taking into account their recombination on dislocation loops, edge dislocations and pores are given. The summary of this work is useful in the frame of solving problem of decreasing radiation swelling and material properties degradation during neutron irradiation.

Key words: reactor materials science, nuclear reactor, constructional materials, mechanical properties, microstructure, neutron radiation, reflector of neutrons, radiation defects, X-ray analysis, radiation damageability, beryllium.

Статья поступила в редакцию 10/II/2016.
The article received 10/II/2016.

²*Kornilov Dmitri Alexandrovich* (kornilovda@niiar.ru), *Kosenkov Vladimir Mikhailovich* (kosenkovv1938@mail.ru), *Silantev Pavel Petrovich* (silantievp@mail.ru), JSC "SSC RIAR", 9, Zapadnoye Shosse, Dimitrovgrad, Ulyanovsk region, 433510, Russian Federation.

УДК 575.1

*З.И. Бисултанова, М.М. Ацаева, П.М. Джамбетова*¹**РОЛЬ ПОЛИМОРФНЫХ ВАРИАНТОВ ГЕНОВ *SOD2*,
GSTT1, *GSTM1* И *GSTP1* В РАЗВИТИИ РАКА
МОЛОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ У ЖЕНЩИН ЧЕЧЕНСКОЙ
ПОПУЛЯЦИИ**

В работе изучена роль полиморфных вариантов генов антиоксидантной защиты *SOD2* T/C (Ala16Val), *GSTP1* A/G (Ile105Val), *GSTM1* и *GSTT1* Ins/Del в развитии злокачественных новообразований (ЗНО) груди у 564 женщин (208 женщин с диагнозом рак молочной железы (РМЖ), 356 контрольная группа) чеченской популяции. Для изученной популяции отмечается повышенная частота полиморфизма Ala16Val, ассоциированного с формированием злокачественных опухолей, в том числе с ЗНО молочных желез, однако различия носят статистически недостоверный характер. Результаты свидетельствуют об отсутствии ассоциации между наличием полиморфных вариантов *SOD2* Ala16Val (T/C), *GSTP1* (A/G), а также делеций генов *GSTM1* и *GSTT1* и развитием рака молочной железы у женщин чеченской популяции.

Ключевые слова: гены антиоксидантной системы, рак молочной железы, чеченская популяция, полиморфные варианты.

Активные формы кислорода (АФК) образуются в норме в ходе реакций окислительного фосфорилирования, являющихся частью клеточного метаболизма. В норме самопроизвольное аутоокисление клетки нейтрализуется сложной системой антиоксидантной защиты, главными компонентами которой являются ферменты каталаза (CAT), супероксиддисмутазы (SOD), параоксаназа (PON), глутатионпероксидаза (GPx) и многочисленные неферментативные антиоксиданты [2]. Дисбаланс в образовании и нейтрализации продуктов клеточного дыхания, срыв антиоксидантной защиты или комбинация обоих факторов сопровождается возникновением в клетках оксидативного стресса, что характеризуется развитием повреждений избытком свободных радикалов клеточных элементов и тканей, составляющих синдром пероксидации и включающий следующие изменения: повреждение мембран; инактивацию или трансформацию ферментов; торможение репродуктивных процессов; накопление в клетке инертных продуктов полимеризации [11]. Выраженный оксидативный стресс утяжеляет течение многих наиболее распространенных болезней и состояний или даже участвует в их патогенезе [2]. Эффектив-

¹© Бисултанова З.И., Ацаева М.М., Джамбетова П.М., 2016

Бисултанова Зура Исановна (mail@chesu.ru), Ацаева Марет Махмудовна (mail@chesu.ru), Джамбетова Петимат Махмудовна (petimat-1g@rambler.ru), кафедра клеточной биологии, морфологии и микробиологии, Чеченский государственный университет, 364907, г. Грозный, ул. А. Шерипова, 32

ность работы защитных систем организма определяется индивидуальными генетическими особенностями организма. Известно несколько потенциально значимых генетических вариантов, связанных с окислительным стрессом [14]. Большинство из генетических вариантов сопровождаются изменениями в уровнях экспрессии кодируемых ими ферментов или в их функциях, в целом приводящее к снижению защиты от окислительного стресса, что, в свою очередь, провоцирует развитие различных патологических процессов в организме. К настоящему времени накоплено множество данных, указывающих на роль полиморфизма генов антиоксидантной защиты в злокачественном перерождении тканей [7–9]. Анализ литературных данных указывает на наличие этнической дифференциации в характере получаемых результатов, что подчеркивает важность проводимых популяционных исследований в этой области.

В настоящей статье исследована роль полиморфных вариантов генов антиоксидантной защиты: *SOD2* T/C (Ala16Val), *GSTP1* A/G (Ile105Val), *GSTM1* и *GSTT1* Ins/Del в развитии злокачественных новообразований груди у женщин чеченской популяции [3; 6; 9; 12].

Материал и методы исследования

В исследовании приняли участие 208 женщин (от 19 до 76 лет) с диагнозом "рак молочной железы" (РМЖ), контрольную группу составили 356 здоровых лиц женского пола, у которых на момент забора крови не было выявлено подобной патологии. Все относятся к одной этнической группе. Участвовавшие в исследовании женщины были проинформированы о цели исследования. Для анализа полиморфных вариантов генов оксидативного стресса взято 2–5 мл периферической крови с использованием вакуумных пробирок с ЭДТА в качестве антикоагулянта. Для выделения ДНК использовались стандартные наборы Diatom DNA Prep 100 (ООО "Изоген"). Определение генотипов проводилось тетрапраймерной аллель-специфической полимеразной цепной реакцией (ПЦР). Детекцию полученных продуктов амплификации осуществляли методом гелеэлектрофореза в 2 % агарозном геле, приготовленном на 1-кратном ТВЕ-буфере.

Статистическая обработка результатов проведена с помощью пакета прикладных программ "Statistica 6".

Результаты исследования

Данные генотипирования полиморфных вариантов генов *SOD2* Ala16Val (47T>C), *GSTP1* Ile105Val (313A>G), делеционного полиморфизма генов *GSTM1* и *GSTT1* представлены в табл. 1 и 2. Полученные частоты генотипов для полиморфных вариантов изученных генов в настоящей работе близки к значениям в других европеоидных популяциях.

Анализ частоты генотипов в группе женщин с диагнозом РМЖ и контрольной группы по изучаемому полиморфизму гена *SOD2* T47C показал, что гетерозиготных носителей мутантного аллеля С-генотип T/C больше в группе больных (54,37 %), чем в контроле (49,58 %), в то время как гомозиготный генотип T/T (дикий тип) чаще встречается у здоровых женщин (32,49 %), чем у больных (28,64 %), OR = 1,21. Однако данные различия носят статистически недостоверный характер (P = 0,294). Частота гомозигот по аллельному варианту С у жен-

щин с диагнозом РМЖ и здоровых женщин отличаются незначительно (17,23 % и 16,99 % соответственно) (табл. 1).

Таблица 1

Частота генотипов полиморфных вариантов генов *SOD2* Ala16Val (47T>C) и *GSTP1* (313 A>G)

SOD2			GSTP1		
Control -0	n = 357		n = 358		
0	abc	%	0	abc	в %
C/C	64	17,93	A/A	160	44,69
T/C	177	49,58	A/G	163	45,53
T/T	116	32,49	G/G	35	9,78
Case - 1			n = 206		
1	abc	%	1	abc	в %
C/C	35	16,99	A/A	78	37,86
T/C	112	54,37	A/G	104	50,49
T/T	59	28,64	G/G	24	11,65

Изучение результатов генотипирования наиболее распространенного полиморфного варианта гена *GSTP1* G, приводящего к замене изолейцина на валин в положении 105, обнаружило высокий уровень гетерозигот (генотип AG) у женщин с раком груди по сравнению с гомозиготами дикого типа AA: 50,49 % против 37,86. В контрольной группе наблюдается незначительное отклонение значений гомозиготного по мажорному аллелю A и гетерозиготного генотипов: 44,69 и 45,53 % соответственно.

Ассоциативный анализ полиморфного варианта G гена *GSTP1* с риском развития рака молочной железы у женщин чеченской популяции не выявил достоверных различий ($p=0,132$) ($R = 1,33$ 95 % C.I. = 0,93 to 1.88)

Полиморфные варианты по делециям генов *GSTT1* и *GSTM1* были проверены посредством мультиплексного ПЦР (табл. 2). Используемая методика постановки ПЦР не позволяет различать гетерозиготные по делециям генотипы в генах *GSTM1* и *GSTT1*, поэтому гомозиготы по инсерции и гетерозиготы были рассмотрены вместе как ненулевой генотип по отношению к нулевому генотипу — гомозигот по делеции. По результатам генотипирования, представленным в табл. 2, можно отметить, что частота нулевых и ненулевых генотипов по обоим локусам у больных женщин не отличаются от таковой у женщин контрольной группы.

Таблица 2

Распределение нулевых генотипов генов *GSTM1* и *GSTT1* в группе больных и здоровых женщин

	<i>GSTT1</i>		<i>GSTM1</i>	
Control -0, Case - 1				
0	n = 358			
Del/Del	49	13,69 %	188	52,51 %
Ins/Del	309	86,31 %	170	47,49 %
1	n = 206			
Del/Del	28	13,59 %	105	50,97 %
Ins/Del	178	86,41 %	101	49,03 %

Обсуждение результатов исследования

Клетка строит защиту от свободных радикалов с помощью ферментов тремя путями с помощью супероксиддисмутазы, каталазы и глутатионпероксидазы; глутатионпероксидазы и глутатионтрансферазы. Системе глутатиона отводится одна из ключевых ролей в защите клетки от оксидативного стресса [4; 10]. Глутатион-S-трансферазы (GSTs), участвующие в нейтрализации АФК и в детоксикации ксенобиотиков, образуют целое семейство ферментов, относящихся к 4-м классам: мю, тета, пи и альфа. Глутатион-S-трансферазы класса мю кодируется геном *GSTM1*. Образование ферментов класса тета детерминируют гены *GSTT1* и *GSTT2*. *GSTP1* отвечает за синтез глутатион-S-трансферазы класса пи. У носителей нулевых генотипов генов *GSTM1* и *GSTT1* кодирующие последовательности генов нарушены из-за протяженных делеций, и синтез глутатион-S трансфераз класса мю и тета отсутствует. Основным полиморфизмом гена *GSTP1* — является транзиция в экзоне 5 (A313G). Полиморфный вариант Ile105Val гена *GSTP1* определяет пониженную концентрацию соответствующего фермента в клетках. Следствием указанных мутаций является повышенная концентрация токсичных метаболитов в клетках, что провоцирует развитие патологических сценариев [2]. В ряде популяций показано, что полиморфные маркеры генов *GSTM1*, *GSTT1*, *GSTP1* ассоциированы с риском развития РМЖ [1; 7; 9; 13]. В настоящем исследовании не выявлены достоверные отличия в распределении генотипов в группе больных женщин и здоровых, что указывает на отсутствие эффекта со стороны ферментов глутатион-трансфераз, кодируемых генами *GSTT1* и *GSTM1* в эпигенезе РМЖ в чеченской популяции. Сравнительный анализ частоты полиморфизма гена *GSTP1* показывает превышение частоты встречаемости полиморфного аллеля G у онкобольных в чеченской популяции, и что носительство полиморфного аллеля может быть связано с риском развития РМЖ. Однако полученные результаты статистически незначимы.

Другим ключевым ферментов антиоксидантной системы является фермент супероксиддисмутаза. Известно три типа супероксиддисмутаз: цитозольная, марганецзависимая и внеклеточная. Марганецзависимая супероксиддисмутаза (Mn-SOD2) локализуется в митохондриях и кодируется геном *SOD2*. Наиболее широко изучен полиморфизм 47T/C гена *SOD2*, приводящий к замене аланина на валин. Ассоциативные исследования полиморфизма гена *SOD2* с онкопатологией выявили связь полиморфных вариантов этого гена с формированием злокачественных опухолей, в том числе с ЗНО молочных желез [3; 6; 9; 12]. Повышенная частота полиморфизма Ala16Val зарегистрирована и в данной работе. Однако различия носят статистически недостоверный характер.

Таким образом, несмотря на то что изученный полиморфизм генов антиоксидантной защиты организма приводит к различным по степени изменениям функциональной активности ферментов и способствует снижению работы защитных механизмов, определяющих широкий спектр патологических процессов, результаты настоящего исследования свидетельствуют об отсутствии выраженной связи изученного полиморфизма генов с развитием рака молочной железы у женщин чеченской популяции.

Литература

- [1] Ассоциация полиморфных маркеров генов биотрансформации ксенобиотиков с риском молочной железы у женщин московского региона / А.М. Бурденный [и др.] //

Молекулярная медицина: кварталный научно-практический журнал, 2012. № 5. С. 30–34.

- [2] Активные формы кислорода как система: значение в физиологии, патологии и естественном старении / В.И. Донцов [и др.] // Труды ИСА РАН. 2006. Т. 19. С. 50–69.
- [3] Колесникова Л.И., Баирова Т.А., Первушина О.А. Этногеографические маркеры антиоксидантной системы (обзор литературы) // Бюллетень ВШЦ СО РАМН. 2013. № 4(92). С. 166–170.
- [4] Polymorphisms at GSTM1, GSTP1, GSTT1 Detoxification Genes Loci and Risk of Breast Cancer in Kazakhstan Population / T.S. Balmukhanov [et al.] // Advances in Breast Cancer Research. 2013. № 27. С. 114–118.
- [5] Genotype-activity relationship for Mn-superoxide dismutase, glutathione peroxidase 1 and catalase in humans / M. Bastaki [et al.] // Pharmacogenetics Genom. 2006. № 16. P. 279–286.
- [6] Manganese superoxide dismutase in breast cancer: From molecular mechanisms of gene regulation to biological and clinical significance / P. Becuwe [et al.] // Free Radic Biol Med. 2014. V. 77. P. 139–151.
- [7] Franco R., Schoneveld O. Georgakilas AG and Panayiotidis MI. Oxidative stress, DNA methylation and carcinogenesis // Cancer Lett. 2008. № 266. P. 6–11.
- [8] Hayes J.D., Strange R.C. Glutathione S-transferase polymorphisms and their biological consequences // Pharmacology. 2000. V. 61. № 3. P. 154–166.
- [9] Hermes-Lima M. In: In Functional Metabolism: Regulation and Adaptation // New Jersey: Hoboken, 2004. P. 319–368.
- [10] Janicka A., Szymańska-Pasternak J., Bober J. Polymorphisms in the oxidative stress-related genes and cancer risk // Ann Acad Med Stetin. 2013. № 59(2). P. 18–28.
- [11] Genetic polymorphism at the glutathione S-transferase (GST) P1 locus is a breast cancer risk modifier / Christine M. Maugard [et al.] // International Journal of Cancer. 2001. V. 91. Is. 3. P. 334–339
- [12] Association between polymorphisms in glutathione peroxidase and selenoprotein P genes, glutathione peroxidase activity, HRT use and breast cancer risk / C. Méplan [et al.] // PLoS One. 2013. V. 10. № 8(9). P. 1–9.
- [13] Morgenstern R. Oxidative Stress and Human Genetic Variation // J. Nutr. 2004. V. 134. P. 3173–3174.
- [14] SOD2 to SOD1 Switch in Breast Cancer / L. Papa [et al.] // Journal of biological chemistr. 2014. № 9. P. 5412–5416.
- [15] Urso M.L., Clarkson P.M. Oxidative stress, exercise, and antioxidant supplementation // Toxicology. 2003. № 189. P. 41–54.

References

- [1] Bourdenay A.M., Kazubskaya T.P., Braga E.A., Nosikov V.V., Loginov V.I. Assotsiatsiia polimorfnykh markerov genov biotransformatsii ksenobiotikov s rakom molochnoi zhelezy u zhenshchin moskovskogo regiona [Association of polymorphic markers of genes of biotransformation of xenobiotics with breast cancer in women in the Moscow Region]. *Molekuliarnaiia meditsina: kvartal'nyi nauchno-prakticheskii zhurnal* [Molecular Medicine: quarterly scientific journal], 2012, no. 5, pp. 30–34 [in Russian].
- [2] Dontsov V.I., Krut'ko V.N., Mrikaev B.M., Ukhanov S.V. Aktivnye formy kisloroda kak sistema: znachenie v fiziologii, patologii i estestvennom starenii [Reactive oxygen species as a system: the value in the physiology, pathology and natural aging]. *Aktivnye formy kisloroda kak sistema: znachenie v fiziologii, patologii i estestvennom starenii* [Proceedings of ISA RAS], 2006, Vol. 19, pp. 50–69 [in Russian].

- [3] Kolesnikova L.I., Bairova T.A., Pervushina O.A. Etnogeograficheskie markery antioksidantnoi sistemy (obzor literatury) [Ethnogeographical markers of antioxidant system (review)]. *Biulleten' VSNTs SO RAMN* [Bulletin of East Siberian Scientific Center SB RAMS], 2013, no. 4(92), pp. 166–170 [in Russian].
- [4] Balmukhanov T.S., Khanseitova A.K., Nigmatova V.G., Ashirbekov E.E., Talaeva Sh.Zh., Aitkhozhina N.A. Polymorphisms at GSTM1, GSTP1, GSTT1 Detoxification Genes Loci and Risk of Breast Cancer in Kazakhstan Population. *Advances in Breast Cancer Research*, 2013, no. 27, pp. 114–118 [in English].
- [5] Bastaki M, Huen K, Manzanillo P, Chande N, Chen C, Balmes JR, Tager IB, Holland N. Genotype-activity relationship for Mn-superoxide dismutase, glutathione peroxidase 1 and catalase in humans. *Pharmacogenetics Genom.*, 2006, no. 16, pp. 279–286 [in English].
- [6] Becuwe P., Ennen M., Klotz R., Barbieux C., Grandemange S. Manganese superoxide dismutase in breast cancer: From molecular mechanisms of gene regulation to biological and clinical significance. *Free Radic Biol Med.*, 2014, Vol. 77, pp. 139–151 [in English].
- [7] Franco R., Schoneveld O., Georgakilas A.G., Panayiotidis M.I. Oxidative stress, DNA methylation and carcinogenesis. *Cancer Lett.*, 2008, no. 266, pp. 6–11 [in English].
- [8] Hayes J.D., Strange R.C. Glutathione S-transferase polymorphisms and their biological consequences. *Pharmacology*, 2000, Vol. 61, no. 3, pp. 154–166 [in English].
- [9] Hermes-Lima M. In: *In Functional Metabolism: Regulation and Adaptation*. New Jersey: Hoboken, 2004, pp. 319–368 [in English].
- [10] Janicka A, Szymanska-Pasternak, Bober J. Polymorphisms in the oxidative stress-related genes and cancer risk. *Ann Acad Med Stetin*, 2013, no. 59(2), pp. 18–28 [in English].
- [11] Maugard C.M., Josiane Charrier, Armelle Pitard, Loic Champion, Olanike Akande, Lisa Pleasants. Genetic polymorphism at the glutathione S-transferase (GST) P1 locus is a breast cancer risk modifier. *International Journal of Cancer*, 2001, Vol. 91, Issue 3, pp. 334–339 [in English].
- [12] Méplan C, Dragsted LO, Ravn-Haren G, Tjønneland A, Vogel U, Hesketh J. Association between polymorphisms in glutathione peroxidase and selenoprotein P genes, glutathione peroxidase activity, HRT use and breast cancer risk. *PLoS One*, 2013, Vol. 10, no. 8(9), pp. 1–9 [in English].
- [13] Morgenstern R. Oxidative Stress and Human Genetic Variation. *J. Nutr.*, 2004, Vol. 134, pp. 3173–3174 [in English].
- [14] Papa L., Hahn M., Ellen L.Marsh, Evans B.S., Germain D. SOD2 to SOD1 Switch in Breast Cancer. *Journal of biological chemistry*, 2014, no. 9, pp. 5412–5416 [in English].
- [15] Urso M.L., Clarkson P.M. Oxidative stress, exercise, and antioxidant supplementation. *Toxicology*, 2003, no. 189, pp. 41–54 [in English].

*Z.I. Bisultanova, M.M. Atsayeva, P.M. Dzhambetova*²

ROLE OF POLYMORPHIC GENE VARIANTS *SOD2*, *GSTT1*, *GSTM1* AND *GSTP1* IN THE DEVELOPMENT OF BREAST CANCER OF WOMEN OF CHECHEN POPULATION

In the study, we investigated the role of polymorphic variants of genes of antioxidant protection *SOD2* T / C (Ala16Val), *GSTP1* A / G (Ile105Val), *GSTM1* and *GSTT1* Ins / Del in the development of malignancies (External testing) chest 564 women (208 women diagnosed with breast cancer (BC), 356 control group) of the Chechen population. For the studied populations have an increased frequency of polymorphisms Ala16Val, associated with the formation of malignant tumors, including breast External testing, but the differences are statistically insignificant character. The results showed no association between the presence of polymorphic variants *SOD2* Ala16Val (T / C), *GSTP1* (A / G), as well as deletions of genes *GSTM1* and *GSTT1* and the development of breast cancer in women of Chechen populations of cancer.

Key words: genes of antioxidant system, breast cancer, Chechen population, polymorphic variants.

Статья поступила в редакцию 14/I/2016.
The article received 14/I/2016.

²*Bisultanova Zura Isanovna* (mail@chesu.ru), *Atsayeva Maret Machmudovna* (mail@chesu.ru), *Dzhambetova Petimat Mahmudovna* (petimat-1g@rambler.ru), Department of Cell Biology, Microbiology and Morphology, Chechen State University, 32, Sheripova Street, Grozny, 364907, Chechen Republic.

УДК 519.171, 573.22

А.Ю. Переварюха¹

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕЛОВА ВОЛЖСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ НА ОСНОВЕ КОГНИТИВНОГО ГРАФА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ²

Обсуждается разработка модели динамики формирования запасов смолтифицированной молодью от естественного нереста волжского осетра по ретроспективным данным на основе графовой концептуальной схемы направленной цепи связей. Структуризация многовариантных аналитических заключений о качестве взаимодействия 12 природных и антропогенных факторов в экосистеме Каспийского моря позволили нам от общих идей теории пополнения перейти к описанию специфической ситуации последствий перелова анадромных рыб с продолжительным жизненным циклом. Сокращение вылова произошло достаточно стремительно и не согласовывалось с ожиданиями от восполнения запасов путем искусственного воспроизводства. Выделенный контур распространения импульса когнитивного орграфа, где дугам указывался знак влияния, говорил об опосредованном усилении действия зависящей от плотности смертности. Интересно, зависимость не имела постоянного независимого знака «+» или «-», проявлялась резко на обеих границах диапазона оптимальной численности нерестующих производителей. Вероятно, спад эффективности воспроизводства справа от равновесия ассоциируется с перекрытием миграционных путей и интенсивным изъятием рыб более плодовитой озимой расы. Модель учитывает дополнительное влияние нарастающего отклонения в темпах размерного развития на выживаемость мигрирующей заводской молоди. Система дифференциальных уравнений исследована в итерационной гибридной форме с альтернативными положениями равновесиями траектории, одно из которых служит точкой отсчета для деградации репродуктивной активности. Предложенная дискретно-непрерывная модель воспроизводства при закритическом уровне изъятия показывает тонкий переход грани от затухающих флуктуаций к безвозвратному в исторической перспективе истощению запасов — "путь в Красную книгу".

Ключевые слова: графовые модели в экологии, динамика выживаемости в раннем онтогенезе, влияние скорости роста рыб, нестабильные равновесия и циклы, математическая интерпретация перелова запасов, гибридные системы.

¹© Переварюха А.Ю., 2016

Переварюха Андрей Юрьевич (madelf@pisem.net), лаборатория "Прикладной информатики", Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, 199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, 14-линия Васильевского остр., 39.

²Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-07-01230 рук. проф. В. Михайлов.

1. Предварительные сведения

В рамках плана междисциплинарного проекта нами проводятся исследования по анализу эффективности мер искусственного восстановления подвергавшихся чрезмерному промысловому изъятию популяций. Далеко не всегда организация интродукции позволяет качественно улучшить благополучие запасов и часто сопровождается завышенными ожиданиями по промысловому возврату при определении уровня эксплуатации. Ситуации, когда повышение смертности на незначительные доли приводит к стремительным последствиям, оказываются сейчас не редкими. На этапе системного анализа был сформирован методом когнитивной структуризации оргграф $G(Y, E, V)$ с множеством параметров вершин V . Каждой вершине y_i ставился в соответствие безразмерный параметр-концепт $v_i \in V$ и функционал преобразования дуг $F(V \times V, E)$ для определения соответствующего дуге знакового веса [1]. Проведен анализ распространения импульсов в вычислительной среде из управляющих вершин (в сценарии рис. 1 из свободного концепта v_6 – масштабы искусственного выпуска) в контексте исследуемой ситуации, приведшей к деградации запасов осетровых Каспийского моря.

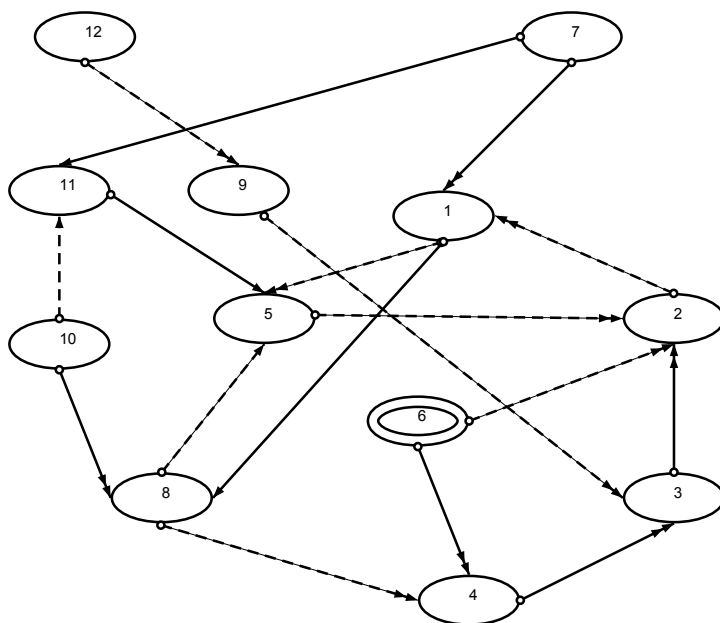


Рис. 1. Оргграф направления влияния «+»/«-» факторов

Интересными для гипотез оказались контуры оргграфа, имеющие общую зависимую вершину, которые мы назвали конкурирующими. Выявлены несинхронности пульсаций значений v_4 (фактор обилия скатывающейся в руслах молоди) и v_2 (состояние половозрелой части), входящих в конкурирующие контуры оргграфа. Ситуация с осетровыми рыбами особенна тем, что их "нерестовый запас"³ S составляет сравнительно небольшую долю от общей численности \bar{N} [2]. Сформирована гипотеза, что присутствует завуалированный фактор, который должен влиять

³Составляют особи с гонадами III, IV стадий зрелости.

на скорость убыли численности поколения — нелинейный характер темпа роста молодежи, обостряющийся при массовом выпуске партий заводской молодежи.

Сопоставление конкурирующих цепочек влияния бывает полезно на заключительном этапе экологического осмысления результатов многих вычислительных экспериментов. Организация передачи импульсов между вершинами по дугам оргграфа $G(Y, E, V)$ не предполагалась нами как исчерпывающе достаточный аппарат моделирования природных процессов. Перейдем к обоснованной разработке модели формирования поколений анадромных рыб с непосредственными популяционными характеристиками в нелинейных дифференциальных уравнениях. Для анализа стратегии эксплуатации рассмотрим динамику полученной дискретно-непрерывной функциональной итерации под антропогенным воздействием на основе формализации эффективности воспроизводства в различных состояниях нерестового запаса осетровых рыб.

2. Анализ ретроспективных колебаний уловов

В первые годы XX века уловы осетровых Каспийского моря достигли своего исторического максимума. Тот этап интенсификации морского промысла можно считать первым переломом, так как к 1915 г. уловы пошли в фазу снижения [3] с 40 тыс. т. до 27 тыс. т. Для восстановления бывшего рыбного обилия, столь восхитавшего Александра Дюма в 1858 г., не хватило того отрезка времени, на который пришлось вынужденное ослабление промыслового изъятия вследствие разрухи двух больших войн. Первой необратимое истощение испытала южная севрюга реки Кура. Далее динамика промышленного вылова всех трех видов развивалась следующим образом до принятия решения о его прекращении прикаспийскими странами (рис. 2.)

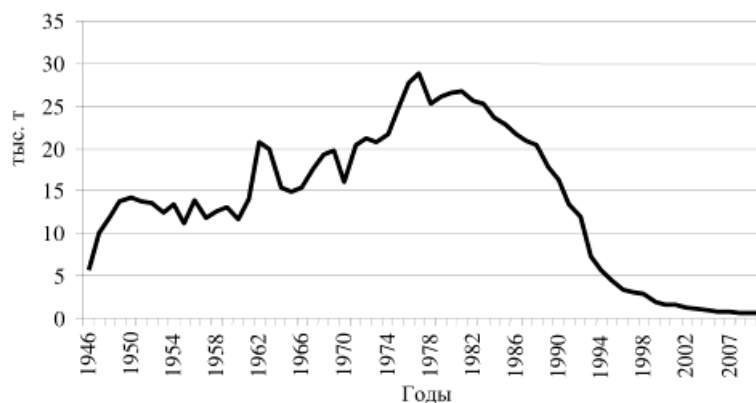


Рис. 2. Динамика суммарных уловов осетровых Каспия

В 1977–1978 гг. (18 лет после сооружения Волжской ГЭС) промыслу удалось достичь локального максимума, когда маловодье облегчало работу невода. Далее объемы уловов медленно снижались, что не вызывало опасений у определяющих уровень изъятия специалистов. Преобладал оптимизм промысловых прогнозов на фоне многоводных лет, трансгрессии уровня моря, и в середине 1980 гг. были достигнуты значительные показатели по выпуску заводской молодежи рыб. Изначально заложенный в планах 1970-х гг. коэффициент промыслового возврата за-

водской молодежи в размере 3 % оказался завышенным ожиданием. В 1989 г. определялись для осетра 1,2 %, севрюги 1 %, белуги 0,1 %. В 1998 г. для осетра 0,7 % , севрюги 0,83 %, белуги 0,07 % [4]. Декады обмеления, засухи и неурожая случались на Волге ранее регулярно, о чем свидетельствуют речные пейзажи Михаила Клодта 1879–1981 гг., но промысел они не подрывали. Некоторые заявления о том, что нелегальный вылов превосходил на порядок официальные уловы и уничтожил запасы, относятся к сценарию "теории заговора". При таких объемах вылова нелегалам необходимо осуществлять рыбоперерабатывающие работы в промышленных масштабах, заготовку и специальную транспортировку многих тонн уловов под боком у всех надзорных ведомств.

С 1989–1990 г. произошел резкий и очевидный спад промысла, что не привело к пересмотру применявшихся методик расчета общей численности и определения допустимого уровня изъятия. В расчетах не заложены представления о минимально необходимом репродуктивном резерве. Допустимые уловы определяются и на 2016 г. даже для критически истощенной белуги⁴, не встречавшейся в 2014 г. в неводных уловах. Общая численность подсчитывалась путем экстраполяции результатов траловых обловов с отдельных квадратов, и на эти данные опираться трудно [5], они не объясняют причины внезапного сокращения захода рыб на нерест. После стремительного падения последовала декада монотонного истощения, что объясняется сложной структурой разнообразия осетровых. У этих архаичных рыб подкласса *Chondrostei* выделяют репродуктивные сезонные расы и локальные обособленные группы, которые не просто быстро выловить, не меняя сроков путины. Фактором репродуктивной изоляции, по-видимому, служит оптимальная температура нереста.

Динамика суммарных уловов отлична в нескольких моментах от данных, разделенных по отдельным видам, наиболее сходна с доминировавшим по объемам запасов волжским осетром. Персидский *Acipenser persicus* статистикой отдельно не выделялся. Уловы белуги *Huso huso* монотонно убывали на всем протяжении имеющихся сведений без резких перепадов, что говорит о близости к дробно-линейному характеру у кривой воспроизводства ее запасов после перелова рубежа XX века. Запасы других видов приближались к деградации осциллирующей траекторией. Явный пороговый характер процесса подразумевает нелинейность в действии факторов, определяющих эффективность воспроизводства осетровых, которые, вероятно, появились вследствие отсечения верхних нерестилищ и не были эволюционно predetermined. Осетр нерестился от Самарской Луки, но белуга поднималась до Камы и Оки. Эволюционно сложившаяся репродуктивная стратегия осетровых рыб позволяла поддерживать высокую биомассу рыб при относительно небольшой кормовой биомассе донной фауны Северного Каспия [6].

3. Трехфакторная модель воспроизводства

Связь состояния группы половозрелых особей с эффективностью размножения — одна из важных составляющих при комплексном исследовании различных биосистем [7]. Смертность в раннем онтогенезе у рыб очень велика. Даже небольшие колебания относительной убыли влияют на темпы восполнения промысловой убыли осетровых, которые в возрасте начала созревания уже не имеют естественных врагов.

⁴Биологически допустимый лимит вылова белуги указан 7 т при оценке запаса 65 т, ОДУ 4,41 т.

В предшествующей работе нами обсуждались особенности аппарата функциональных итераций, часто применяемых для описания динамики развития популяционного процесса с нелинейной функцией эффективности воспроизводства $R = f(S)$. Обосновано, почему желательно избегать перехода к хаотическому режиму через бесконечный каскад бифуркаций периодов 2^i , и какие критерии необходимы для такой функции [8]. Показано, что дискретные итерации с управляющим \mathbf{a} параметром $R_{n+1} = f(R_n; \mathbf{a})$ моделей Шепарда и/или Рикера обладают противоречивым качественным поведением траектории с точки зрения биологической интерпретации происходящих бифуркаций. Предлагается использовать дискретно-непрерывную вычислительную структуру для описания изменений режимов развития моделируемого процесса, к которым перспективно отнести существенные колебания скорости роста в раннем онтогенезе рыб. В дальнейшем возможно в сценарном анализе реализовать предикативно переопределяемую событийную структуру модели на основе карты поведений. Неожидан вывод о том, что расширение популяционной модели по перечню включаемых факторов вовсе не обязательно влечет усложнение в поведении траектории полученной динамической системы.

Согласно полученным из графовой структуры выводам, в новой модели выполнения запасов целесообразно учесть взаимодействие трех факторов:

- I. Регуляцию квадратично зависимой от плотности убыли текущей численности $N(T)$ на ранних стадиях развития рыб как фактора лимитированных ресурсов.
- II. Описание влияния на выживаемость скорости размерного развития как фактора нестабильности действия ювенальной смертности на интервале уязвимости $< 0t < T$, зависящей от квадрата численности.
- III. Резкое усиление действия линейной смертности в ограниченных интервалах состояния нерестового запаса, атрибутированное к нулевой стадии оплодотворения икры.

4. Модель с замедлением размерного развития

Как подчеркивалось в [1], специалистами продолжает дискутироваться вопрос стандартной навески выпускаемой молоди. В реальности выпускаемая из прудов молодь характеризовалась значительной вариабельностью. Необходимость учета размерного развития при формировании пополнения диктуется результатами исследований выживаемости опытных партий заводской молоди, выпускаемой в створ реки [9]. Материалы контрольных тралений на расположенных ниже по течению участках створа показали лучший процент выживания молоди из большей размерной группы. В нижней части нерестовой трассы всегда преобладают мальки массой больше средней из партии выпуска. Эти аспекты служат аргументом для увеличения стандарта навески до 6 г.

Моделей роста организмов известно несколько, однако они не специфичны для условий раннего онтогенеза рыб. Нам более необходимо, чем непосредственно весовые характеристики, описание в уравнении убыли поколений взаимовлияния: условная скорость прироста $w'(t) \iff \hat{N}(t)$, средняя плотность скопления особей, в локальном случае соотнесенная с численностью. Вопрос о влиянии кучности посадки на прирост молоди оказался не однозначен по имеющимся литературным

данным. В первом приближении давление оценивалось нами как обратная дробно-степенная связь: $w(t) \sim N^{-k}(t)$, $0.5 < k < 1$. Различные эксперименты говорят о непропорциональной и более того о немонотонной связи распределения навески с плотностью посадки молоди. Результаты Г. Рябовой о сдвиге влево максимума весового распределения молоди при разреженной плотности казались нелогичны, но могут объясняться из коллективных поведенческих реакций. Мы можем математически согласовать их с альтернативными данными, например в [11], показавшими, что при снижении плотности посадки при высоком уровне выживаемости молодь осетровых имеет минимальные коэффициенты вариации массы. Для нарушения симметрии плотностно-размерного взаимодействия воспользуемся сложной зависимостью с двумя экстремумами $v(N)$ для давления численности молоди в водоеме на темпы ее развития (рис. 3), $v(0) = 0$. Минимум будет соответствовать оптимальным значениям скопления молоди.

$$v(N) = \frac{N}{z \exp(-bN(Pe^{-\rho N} + 1))}. \quad (4.1)$$

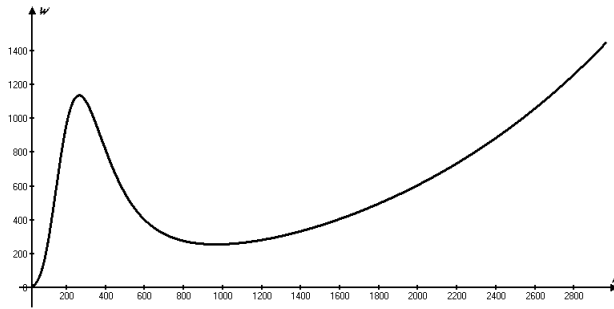


Рис. 3. Функция плотностного давления на скорость роста $v(N)$, $P > z$, $\rho > b$

Упрощенно можно принять $w(t) \sim G/v(N)$, и давление фактора плотности на темпы роста будет усиливаться ограниченно слева и неограниченно справа от пологого минимума $v(N_{min})$, который в реальности будет варьироваться от других условий выращивания. Известно, «прореживания» популяций не приносят желаемого результата увеличения биомассы за счет высвобождения кормовой базы. Увеличение рациона молоди сверх достаточного объема не влияет на скорость роста [15], потому использование константы ресурсов G не является желательным способом, и мы предложим другой подход.

Описание с представлением об оптимуме развития представляется наилучшим решением. Константный оптимум w_o достаточно условен ввиду выше отмеченных споров специалистов о стандарте навески заводской молоди [14] и относительно, так, при совместном выращивании молодь исходно тугорослого сибирского осетра *Acipenser baerii* растет быстрее волжского. Известная зависимость связи роста от времени в форме, которая обычно используется в ихтиологии: $W_t = W_\infty (1 - \exp(-kt - x))^3$, где указывается предельный вес организма W_∞ , не подходит нашим задачам. Исходное феноменологическое уравнение фон Бергаланфи [12], результирующее действие анаболизма и катаболизма:

$$\frac{dW}{dt} = \eta \sqrt[3]{W(t)\zeta} - kW(t)^\sigma, W(0) = W_0. \quad (4.2)$$

Решение (4.2) для частного случая, если вклад катаболизма линеен $\sigma = 1$, а анаболизма для рыб, как считают многие авторы [13], соответствует показателю степени $\zeta = 2$, записывается:

$$W_t = \left(\eta/k \vee (\eta/k - W_0^{1/3}) \exp(-kt/3) \right)^3.$$

Ряд исследователей полагали, что описание роста на протяжении всего жизненного цикла рыб одной зависимостью не всегда возможно [15]. Потому мы можем принять, что для мальковой стадии активного питания показатель σ отличается от единичного уровня до $5/4$ при $\zeta = 2\frac{1}{4}$. Развитие в раннем онтогенезе осетровых носит стадийный характер, и стадии сменяются быстро. Задержка в прохождении формирования организма влечет ухудшение его конкурентоспособности, что могло сказываться при массовом одномоментном выпуске. Положим, действие на жизнестойкость поколения оказывает отклонение, которое получается в результате включения масштабированного давления плотности (4.1) в расширенное уравнение:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\eta}{\xi v(N(t))} \sqrt[3]{w(t)\zeta} - kw(t)^\sigma, w(0) = w_0 \quad (4.3)$$

и расчета из традиционного уравнения фон Бергаланфи (4.2), не включающего внешние факторы. Модель (4.3) при $v(0)$ неопределенна. Опишем убыль численности поколения $N(t)$ от исходной $N(0)$ до итогового промыслового пополнения $R = N(T)$ на интервале модельного времени $t \in [0, T]$ уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha \Delta N(t) + \Psi(S)\beta) N(t), \quad (4.4)$$

где α — коэффициент компенсационной смертности, связанный со скученностью; β — коэффициент, не связанный с плотностью смертности; Начальные условия: $N(0) = \lambda S, w(0) = W(0) = w_0$, λ — усредненная плодовитость нерестового запаса S ; $t \in [0, T], R = N(T)$ — интервал уязвимости действия квадратичного типа $\alpha N^2(t)$ типа убыли. В уравнение убыли численности (4.4) включен показатель масштабированного относительного отклонения $\Delta_t = 10^{-2} * W_t/w_t$ размерного развития. Объединенные в систему дифференциальные уравнения (4.2)–(4.4) опишут в вычислительной среде динамику убыли при ограниченном влиянии функционала Ψ . В физике нередко дополняют уравнения подобными членами, когда необходимо подобрать модель под специальные условия, как например, функционал «сомбреро» в модели поля Хиггса, создающий окружность необходимых минимальных ненулевых потенциалов.

5. Эффект минимума репродуктивной активности

После предложенного вычислительного расчета действия факторов в темпах убыли поколения необходимо учесть эффект резкого сжатия масштабов воспроизводства по отношению к запасу. Эффект часто следует для популяций крупных рыб вслед за систематическим их переловом и не поддается заблаговременному прогнозированию. Бывает так, что численность пропущенных на нерест производителей сокращается в два раза, но интенсивность ската молоди падает уже в 2,5–3 раза [16]. Можно было бы переопределить модельную зависимость как кусочно-гладкую функцию на отдельных двух (или трех) интервалах, предикативно указав критические значения устраняемого разрыва. Искусственное квантование репродуктивного потенциала вряд ли получит экологическую интерпретацию, более того, не соответствует нашей концепции развития модели из анализа

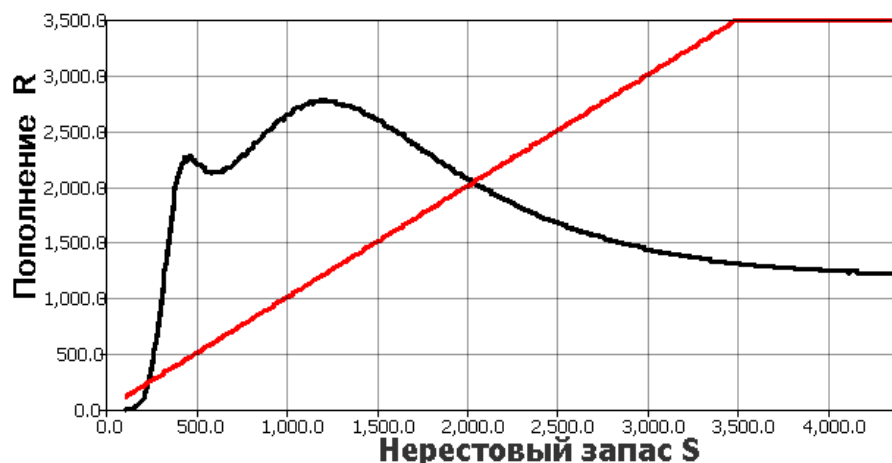


Рис. 4. Модельная зависимость с пороговым эффектом

экологических взаимосвязей. Наше объяснение эффекта лежит в тактике группы мигрирующих особей, когда для успешного размножения поддерживается некоторая необременяющая плотность рыб, не влияющая на пищевую конкуренцию, так как рыбы находятся на эндогенном питании. При недостаточной плотности снижается вероятность своевременного образования нерестовых пар. Происходит элиминация неоплодотворенной икры, которая ухудшает условия на нерестилищах, являясь питательной средой размножения вредных микроорганизмов.

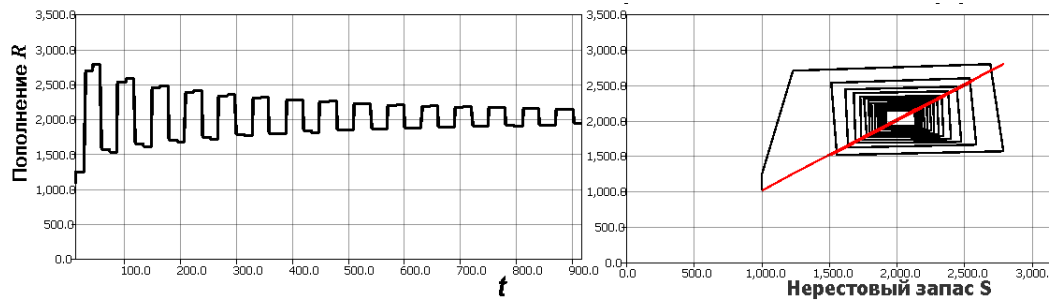
Воспользуемся техникой реализации триггерного функционала в вычислительной модели. В нашей задаче функционал будет регулировать действие линейной составляющей β в скорости убыли поколения от исходного объема накопленной икры. Правую часть уравнения (4.4) дополним функцией $\Psi(S)$, непосредственно зависящей от состояния запаса. В итерационной форме она становится функционалом зависимости текущих расчетов $N(T_{n+1})$ от предшествующего состояния $\Psi[N(T_n)]$. Ограниченная Ψ с областью значений $E(\Psi(S)) = [2, 1]$ быстро стремится к единице:

$$\Psi(S) = 1 + \exp(-\kappa S^2), \lim_{S \rightarrow \infty} \Psi(S) = 1, \quad (5.5)$$

где параметр κ определяет выраженность эффекта сплоченной группы. Чем больше κ , тем уже диапазон проявления эффекта, используется $\kappa < 1$. Если действие эффекта протяженное, то имеет смысл использовать вогнутую форму замедленного убывания эффекта агрегированной группы: $\Psi(S) = 1 + \exp(-\kappa\sqrt{S}), \kappa \leq 0.5$. Возможен неограниченный сверху вариант функционала: $\Theta(S) = 1/(1 - \exp(-\kappa S))$, но для других экологических ситуаций. В рассматриваемой ситуации описываемый функционалом (5.5) эффект не должен проявляться при исторически оптимальной для промысловой популяции численности запаса.

В вычислительной среде получим при численном решении задачи Коши для (4.4) с учетом всех вспомогательных уравнений трехфакторную результирующую зависимость пополнения R запаса S (рис. 4). Она определит форму кривой воспроизводства с незначительным локальным минимумом, сглаженным куполом и уменьшающимся наклоном ниспадающей правой ветви.

Полученная зависимость с ненулевой горизонтальной асимптотой имеет две нетривиальные точки пересечения с биссектрисой координатного угла $R^* = f(R^*)$

Рис. 5. Затухающие осцилляции итераций $R_{n+1} = f(R_n)$

(геометрическим местом стационарных точек), удаленные от экстремумов. Незначительный минимум позволяет уйти от критериев теоремы Синжера реализации бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода цикла. Знакопостоянство и условие $H_\psi < 0$ для дифференциального инварианта Шварца:

$$H_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2$$

нарушается при наличии нескольких экстремумов. Вместо аттрактора в виде канторовского множества и сопутствующего ему хаотического движения траектории в итерациях неунимодальных функций могут возникать одновременно сосуществующие притягивающие циклы. В работах по дискретному моделированию популяционной динамики использовалось свойство хаотизации по Фейгенбауму [18]. Однако интерпретировать нужно не просто переход к аperiodическому режиму при некоторой вариации параметров, но появление нерегулярных всплесков хаотического движения при наличии несчетного числа периодических окон.

Мы можем анализировать последовательность непрерывных систем, связанных в момент переопределения начальных условий $N_{n+1}(0) = N_n(n)$ на множестве пронумерованных временных отрезков $\tau \in \{[0, T]_n\}$. Фазовое пространство дискретно-непрерывной итерации разделяется на две области притяжения: Ξ_1 меньшая и Ξ_2 большая. Границей между ними является неустойчивая «репеллерная» точка R_1^* первого пересечения кривой с биссектрисой координатного угла. Эта особая точка отражает предельную допустимую для выживания популяции L численность нерестового стада. В экологическом смысле у Ξ_1 аттрактора не существует и в начале координат модельная зависимость неопределенна, и при $R_i \dots R_{i+n} \ll R_1^*$ расчет траектории инструментальной средой прекращается.

Для дискретной составляющей траектории гибридной системы в области $R_0 \in \Xi_2$ мы наблюдаем медленно релаксирующие осцилляции (рис. 5, временная диаграмма, справа диаграмма Ламерея), что говорит об околочитическом значении критерия устойчивости стационарной точки R_2^* и возможности для возмущенной системы переходить в режим циклических флуктуаций. Анализ устойчивости неподвижных точек динамической системы в вычислительной среде можно проводить при определении свойств графика функциональной композиции $\psi(\psi(x))$. Условием устойчивости неподвижной точки x^* отображения прямой в себя является выполнение неравенств для дважды вычисленной $\psi(\psi(x)) > x$ при $x < x^*$ и $\psi(\psi(x)) < x$ при $x > x^*$. Возможность хаотизации можно проверить путем поиска цикла $p = 3$. Согласно теореме Ли-Йорка, период 3 подтверждает существование континуума непериодических траекторий.

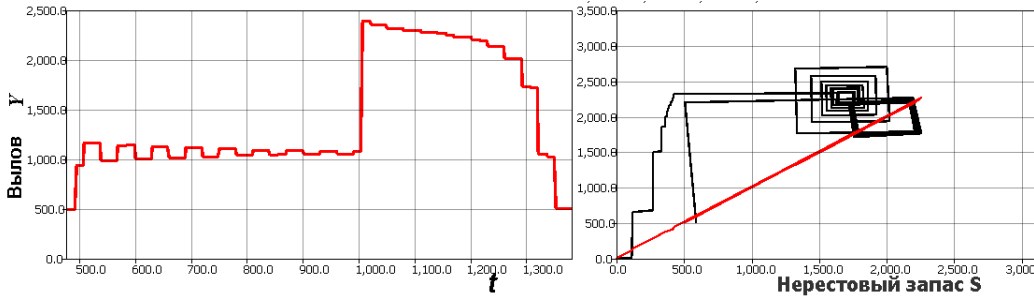


Рис. 6. Сценарий перелова при $H = 0.82$

6. Сценарий критического перелова

Рассмотрим динамическую систему с учетом воздействия промысла. Изъятие сместит колеблющееся состояние влево по кривой. Рассмотрим сценарий, когда после длительного периода получения стабильных уловов возникает предложение, что учетный запас популяции S_{st} недоиспользуется промыслом. По такому мотивам было принято решение перенести давление на озимые расы осетровых. Пусть разрешенная ранее доля изъятия H_0 в момент \bar{t} увеличивается $H = H_0 + \delta H$. В дискретно-непрерывной управляемой системе начальные условия на концах непрерывных интервалов будут сопрягаться:

$$N_{n+1} |_{t=0} = (1 - H)\lambda N_n |_{t=T} \tag{6.6}$$

Закритическим промысловым изъятием будем считать такое, которое за конечное число итераций j с учетом (6.6) приводит состояние запаса к порогу $f(N_j(T)) < (L - \epsilon)$ в область $N_{j+1}(T) \in \Xi_1$. Особенность популяции с полученной кривой воспроизводства — способность выдерживать значительный процент изъятия, даже продолжительное время выдерживать уже закритическое промысловое давление. Но при существующих методиках регулирования промысла такие жизнестойкие свойства оказываются губительными. Для промысловой популяции $H_0 = 0.3$ на диаграмме Ламерея образуется второй прямоугольник сходящегося целиком выше биссектрисы цикла $\hat{p} = 2$. В сценарии рис. 6 (временная диаграмма $Y = HR_n$, справа «лестница Ламерея») уловы после максимизации, которая для наглядности показана моментальной, убывают незначительными темпами.

У определяющих режим промысла не возникает поводов для опасений до тех пор, пока уловы в один сезон не сократятся резко на треть. Оказывается, что популяция, выдерживавшая долю изъятия 0.81 при $H = 0.82$, вдруг испытывает резкое сокращение эффективности воспроизводства. Если не будет на следующий сезон предусмотрено $H = 0$, то перелов переходит в необратимое истощение. Подобное явление из применяющихся обычно в ихтиологии корреляционных и регрессионных зависимостей предсказать невозможно. Для волжской севрюги в отдельные маловодные годы реальное изъятие оценивалось до 0.89, что устанавливалось уже постфактум (методика его определения не публиковалась).

Выводы

В ходе последовательной разработки новой модели репродуктивной активности на основе предварительной графовой структуризации нами решены следующие задачи:

- I. Преодолены два недостатка, присущих итерациям универсальной модели пополнения Шепарда $R_{n+1} = aR_n / (1 + (R_n/K)^\beta)$ [19]. Получены уравнения для куполообразной зависимости кривой воспроизводства $f(S)$ с ненулевой асимптотой, которая не приводит к образованию бесконечного количества неустойчивых периодических траекторий.
- II. Расширен набор биологических концепций, формализуемых классом моделей теории формирования пополнения за счет зависимо от плотности отклонения размерного развития.
- III. Реализована в вычислительной среде и исследована нелинейная динамика дискретно-непрерывных итераций $\{\psi^n(R_0; H)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $R_n = N(T_n)$, $t \in \{[0, T]\}_n$ под воздействием изъятия H .
- IV. Рассмотрен сценарий перелова запасов осетровых с качественно новыми свойствами фазового пространства $\Xi_1 \cup \Xi_2$, включающими минимально допустимую величину нерестовой части для самовосстановления популяции.

Интересно, что негладкие особенности кривых воспроизводства у некоторых морфологически близких видов рыб, очевидно, различаются, потому мы рассматриваем наиболее общую форму зависимости пополнения R от состояния запаса S с одним выраженным экстремумом как базовую и пригодную для модификаций. Для задачи формализации стадийного развития организмов необходим особый подход к расчетам с предикативно переопределяемой структурой уравнений. Подобное развитие можно считать переходом от непрерывно-дискретной к непрерывно-событийной модели с таймированными и условными переходами, где предикаты определены на множестве вспомогательных переменных системы уравнений.

Методы дискретной математики и алгоритмы комбинаторики в популяционной проблематике несколько недооценивались. Структурирование информации в виде знакового орграфа с набором вершин, соответствующих перечню влияющих на продуктивность Каспийского моря факторов, ограничивает перечень значимых для моделирования гипотез. Так, мы не нашли аргументов в пользу высказывавшейся гипотезы о последствиях перепроизводства заводской молоди, которое, возможно, привело к истощению ее кормовой базы [20]. Более обоснованно предположение, что существует предел процентного приращения численности нерестового запаса, который можно получить из гипотезы о неограниченном возрастании объемов выпуска. Описаны особенности режима перелова для популяции, которая в историческом времени может выдерживать значительную долю изъятия $H > 0.8$, но деградация развивается неожиданно. Для предосторожного ведения промысла как минимум необходимо рассчитывать будущие уловы по доле изъятия не от общего учетного запаса, а от превышающего необходимый репродуктивный резерв: $Y = H \times (S_{st} - L)$. В практике известны примеры, когда за счет гибкой системы регулирования промысла в Канаде удавалось предотвращать неблагоприятные события до грани необратимого истощения. Сохранение осетровых видов в новых

условиях будет связано с формированием локальных группировок, исключаящих из эволюционного тренда присущие им ранее длительные миграции.

Литература

- [1] Переварюха А.Ю. Графовая модель взаимодействия антропогенных и биотических факторов в продуктивности Каспийского моря // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 10. С. 181–198.
- [2] Коноплева И.В., Иванова Л.А. Современное состояние запасов и структура популяции русского осетра *Acipenser guldenstadtii* Brandt, 1833 в Волго-Каспийском районе // Вестник Астраханского государственного технического университета. Сер.: Рыбное хозяйство. 2013. № 3. С. 31–38.
- [3] Лепилина И.Н., Васильева Т.В., Абдусаматов А.С. Состояние запасов каспийских осетровых в многолетнем аспекте // Юг России: экология, развитие. 2010. № 3. С. 57–65.
- [4] Ходоревская Р.П., Рубан Г.И., Павлов Д.С. Поведение, миграции, распределение и запасы осетровых рыб Волго-Каспийского бассейна. М: Тов-во науч. изд. КМК, 2007. 242 с.
- [5] Носков А.С. О методике оценки абсолютного запаса рыб по данным траловой съемки: тезисы докладов Всесоюзной научной конференции по проблемам промыслового прогнозирования. Мурманск, 1986. С. 76–77.
- [6] Карпинский М.Г. Экология бентоса Среднего и Южного Каспия. М.: Изд-во ВНИРО, 2002. 283 с.
- [7] Takahashi F. Reproduction curve with two equilibrium points: A consideration on the fluctuation of insect population // Researches on Population Ecology. 1964. V. 6. Iss. 1. P. 28–36.
- [8] Perevaryukha A.Yu. Cyclic and unstable chaotic dynamics in models of two populations of sturgeon fish // Numerical Analysis and Applications. 2012. V. 5. № 3. P. 254–264.
- [9] Левин А.В. Экология и поведение молоди осетровых рыб в Волго-Каспийском регионе. Астрахань: КаспНИРХ, 2006. 228 с.
- [10] Variation in morphometric and genetic characteristics of stellate sturgeon juveniles raised at different densities / G.D. Ryabova [et al.] // Russian Journal Genetics. 2006. № 2. P. 182–191.
- [11] Некрасова С.О., Яковлева А.П., Львов Л.Ф. Повышение рыбоводно-биологических показателей выращивания молоди севрюги // Вестник Астраханского государственного технического университета. 2006. № 6. С. 245–253.
- [12] Bertalanffy L. von Quantitative laws in metabolism and growth // The Quarterly Review Of Biology. 1957. V. 32. № 3. P. 217–231.
- [13] Shi P.-J. On the 3/4-exponent von Bertalanffy equation for ontogenetic growth // Ecological Modelling. 2014. V. 76. P. 23–28
- [14] Козоза А.А., Дубов В.Е. О стандарте заводской молоди и путях повышения эффективности искусственного воспроизводства осетровых рыб // Вопросы рыболовства. 2011. Т. 12. № 1. С. 121–126.
- [15] Гершанович А.Д. Экология и физиология молоди осетровых. М.: Агропромиздат, 1987. 215 с.
- [16] Veshchev P.V., Guteneva G.I., Mukhanova R.S. Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the Lower Volga under current conditions // Russian Journal of Ecology. 2012. № 2. P. 142–147.

- [17] Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM journal of applied math. 1978. V. 35. P. 260–268.
- [18] Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. V. 7. № 1–3. P. 16–39.
- [19] Shepherd J.G. A versatile new stock–recruitment relationship for fisheries and construction of sustainable yield curves // ICES Journal of Marine Science. 1982. V. 40. № 1. P. 67–75.
- [20] Алтухов Ю.П., Евсюков А.В. Перепроизводство молоди рыболовными заводами как причина деградации волжского стада русского осетра // Доклады РАН. 2001. Т. 380. С. 273–275.

References

- [1] Perevaryukha A.Yu. Grafovaia model' vzaimodeistviia antropogennykh i bioticheskikh faktorov v produktivnosti Kaspiiskogo moria [Graph model of interaction of anthropogenic and biotic factors for the productivity of the Caspian sea]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 10, pp. 181–198 [in Russian].
- [2] Konopleva I.V., Ivanova L.A. Sovremennoe sostoianie zapasov i struktura populiatsii russkogo osetra *Acipenser guldenstadtii* Brandt, 1833 v Volgo–Kaspiiskom raione [The current state of stocks and the structure of the population of Russian sturgeon *Acipenser guldenstadtii* Brandt, 1833 in the Volga-Caspian Region]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Rybnoe khoziaistvo* [Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Fishing Industry], 2013, no. 3, pp. 31–38 [in Russian].
- [3] Lepilina I.N., Vasilyev T.V., Abdusamadov A.S. Sostoianie zapasov kaspiiskikh osetrovnykh v mnogoletnem aspekte [State of Caspian sturgeon stocks in the long-term aspect]. *Iug Rossii: ekologiya, razvitie* [South of Russia: ecology, development], 2010, no. 3, pp. 57–65 [in Russian].
- [4] Khodorevskaya R.P., Ruban G.I., Pavlov D.S. Povedenie, migratsii, raspredelenie i zapasy osetrovnykh ryb Volgo–Kaspiiskogo basseina [Behavior, migration, distribution and stocks of sturgeon of the Volga-Caspian Basin]. M., Tov-vo nauch. izd. KMK, 2007, 242 p. [in Russian].
- [5] Noskov A.S. O metodike otsenki absoliutnogo zapasa ryb po dannym tralovoi s"emki [On the method of evaluation of the absolute stock of fish according to the trawl survey]. *Tezisy dokladov Vsesoiuznoi nauchnoi konferentsii po problemam promyslovogo prognozirovaniia* [Abstracts of All-Union Scientific Conference on Fishery Forecasting]. Murmansk, 1986, pp. 76–77 [in Russian].
- [6] Karpinski M.G. Ekologiya bentosa Srednego i Iuzhnogo Kaspiia [Benthos ecology of the Middle and South Caspian]. M., Izd-vo VNIRO, 2002, 283 p. [in Russian].
- [7] Takahashi F. Reproduction curve with two equilibrium points: A consideration on the fluctuation of insect population. *Researches on Population Ecology*, 1964, Vol. 6, Iss. 1, pp. 28–36 [in English].
- [8] Perevaryukha A.Yu. Cyclic and unstable chaotic dynamics in models of two populations of sturgeon fish. *Numerical Analysis and Applications*, 2012, Vol. 5, no. 3, pp. 254–264 [in English].
- [9] Levin A.V. Ekologiya i povedenie molodi osetrovnykh ryb v Volgo-Kaspiiskom regione [Ecology and behavior of juvenile sturgeon in the Volga-Caspian Region]. Astrakhan: KaspNIRKh, 2006, 228 p. [in Russian].

- [10] Ryabova G.D., Afanas'ev K.I., Moskaleichik F.F., Rubtsova G.A., Klimonov V.O., Vyshkvartsev D.I. Variation in morphometric and genetic characteristics of stellate sturgeon juveniles raised at different densities. *Russian Journal Genetics*, 2006, Vol. 42, no. 2, pp. 182–191 [in English].
- [11] Nekrasova S.O., Jakovleva A.P., L'vov L.F. Povyshenie rybovodno-biologicheskikh pokazatelei vyrashchivaniia molodi sevriugi [Increasing fish breeding and biological indicators of growing stellate sturgeon juveniles]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Rybnoe khoziaistvo* [Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Fishing Industry], 2006, no 6, pp. 245–253 [in Russian].
- [12] von Bertalanffy L. Quantitative laws in metabolism and growth. *The Quarterly Review Of Biology*, 1957, Vol. 32, no. 3, pp. 217–231 [in English].
- [13] Shi P.-J. On the 3/4-exponent von Bertalanffy equation for ontogenetic growth. *Ecological Modelling*, 2014, Vol. 76, pp. 23–28 [in English].
- [14] Kokoza A.A. Ryabov V.E. O standarte zavodskoi molodi i putiakh povysheniia effektivnosti iskusstvennogo vosproizvodstva osetrovyykh ryb [On the standard of hatchery fish and ways to improve the efficiency of artificial reproduction of sturgeon]. *Voprosy ribolovstva* [Problems of Fisheries], 2011, Vol. 12, no. 1, pp. 121–126 [in Russian].
- [15] Hershmanowitsch A.D. Ekologiya i fiziologiya molodi osetrovyykh [Ecology and physiology of young sturgeon]. M., Agropromizdat, 1987, 215 p. [in Russian].
- [16] Veshchev P.V., Guteneva G.I., Mukhanova R.S. Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the Lower Volga under current conditions. *Russian Journal of Ecology*, 2012, no. 2, pp. 142–147 [in English].
- [17] Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval. *SIAM journal of applied math*, 1978, Vol. 35, pp. 260–268 [in English].
- [18] Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D.*, 1983, Vol. 7, no. 1–3, pp. 16–39 [in English].
- [19] Shepherd J.G. A versatile new stock–recruitment relationship for fisheries and construction of sustainable yield curves. *ICES Journal of Marine Science*, 1982, Vol. 40, no. 1, pp. 67–75 [in English].
- [20] Altukhov Y.P., Evsyukov A.V. Pereproizvodstvo molodi rybovodnymi zavodami kak prichina degradatsii volzhskogo stada russkogo osetra [Overproduction of juveniles from hatcheries as a cause of degradation of the Volga stock of Russian sturgeon]. *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 2001, Vol. 380, pp. 273–275 [in Russian].

A.Yu. Perevaryukha⁵

NONLINEAR MODEL OF OVERFISHING FOR THE VOLGA STURGEON BASED ON COGNITIVE GRAPH OF INTERACTION OF ENVIRONMENTAL FACTORS⁶

We have discussed the development of models of dynamics of formation of reserves juveniles from natural spawning sturgeon *Acipenser gueldenstaedtii* of the Caspian Sea on historical data. Working hypotheses are based on the graph conceptual scheme aimed chain links. Structuring multivariate analytical conclusions about the quality of the interaction of 12 natural and anthropogenic factors in the ecosystem of the Caspian Sea have allowed us to recharge from the general ideas of the theory on to describe the specific situation of the tragic consequences of overfishing of anadromous fish with a long lifecycle. Reducing the word was swiftly enough and not consistent with the expectations of the replenishment of stocks by artificial reproduction. Dedicated contact circuit pulse propagation cognitive digraph where arcs contains the power of influence, says an indirect strengthening of action depends on the density of mortality. Interestingly, the relationship did not have a permanent independent sign «+» or «-». Recessions manifested dramatically on both boundaries of the range of optimum number of spawning manufacturers. Perhaps the decline in the efficiency of the reproduction right of the balance associated with the migration routes overlap. It is more intense withdrawal of fish more prolific race hibernating until spring in the river. The model takes into account the additional effect of increasing variations in the pace of development of the size on the survival of migrating hatchery. The system of differential equations is investigated in an iterative discrete continuous hybrid form with alternative position of equilibrium trajectory. One of the equilibrium is unstable, and is the starting point for the degradation of reproductive activity. The proposed model of reproduction under supercritical level seizures shows subtle transition from the brink of fading fluctuation to the permanent historical perspective depletion, the way into the Red Book.

Key words: graph models in ecology, cognitive structuring of factors, unstable population processes, interpretation of nonlinear effects, effect of fish growth rate, unstable equilibrium and cycles, interpretation of overfishing of stocks, hybrid systems.

Статья поступила в редакцию 3/III/2016.
The article received 3/III/2016.

⁵Perevaryukha Andrey Yurevich (madelf@pisem.net), Laboratory of Applied Computer Science, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, 39, 14 Line, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation.

⁶The work is performed with the support of Russian Foundation for Basic Research, grant №15-07-01230 leader prof. V. Mikhailov.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алдашев Серик Аймурзаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики Казахского национального педагогического университета им. Абая, академик АЕН РК. Тема докт. дис.: "Краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа" (защ. в 1990 г.). Автор и соавтор более 200 научных работ, в т. ч. монографий "Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений" (1994 г.), "Вырожденные многомерные гиперболические уравнения" (2007 г.).

Область научных интересов: краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.

Воскресенская Галина Валентиновна, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры алгебры и геометрии, Самарский университет. Тема канд. дис.: "Модулярные формы с дивизором в параболических вершинах" (защ. в 1993 году); тема докт. дис.: "Конечные группы и модулярные формы" (защ. в 2010 году); автор 29 научных работ.

Область научных интересов: теория модулярных групп, представления групп, теория чисел.

Дюжева Александра Владимировна, кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский университет.

Область научных интересов: математика, бизнес-информатика, математическое моделирование.

Пулькина Людмила Степановна, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры уравнений математической физики, Самарский университет. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями сингулярности коэффициентов" (защ. в 1975 г.); тема докт. дис.: "Нелокальные задачи для гиперболических уравнений" (защ. в 2003 г.). Автор и соавтор 100 научных работ, в том числе монографии "Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений".

Область научных интересов: краевые, нелокальные и нелинейные задачи для уравнений с частными производными.

Савенкова Алеся Евгеньевна, аспирант кафедры уравнений математической физики, Самарского университета с 2010 г., в 2010 г. окончила Самарский государственный университет по специальности "Математика".

Область научных интересов: неклассические задачи для уравнений в частных производных.

Рацев Сергей Михайлович, кафедра информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет.

Область научных интересов: математика, информационная безопасность

Рацев Владимир Михайлович, кафедра телекоммуникационных технологий и сетей, Ульяновский государственный университет.

Область научных интересов: математика, телекоммуникационные технологии

Рафикова Гузаль Ринатовна, аспирант Бирского филиала Башкирского университета, кафедра высшей и прикладной математики, в 2013 г. окончила Бирский филиал Башкирского государственного университета по специальности "Прикладная математика". В 2013 году поступила в аспирантуру по специальности 01.02.05. "Механика жидкости газа и плазмы". Автор и соавтор 10 научных работ.

Область научных интересов: образование и разложение газогидратов в пористых средах.

Шагапов Владислав Шайхулагузамович, академик Академии наук Республики Башкортостан, д-р физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник Института механики и машиностроения КазНЦ РАН, главный научный сотрудник Института механики УНЦ РАН, проф. кафедры высшей и прикладной математики Бирского филиала Башкирского государственного университета. Тема канд. дис.: "Волны в двухфазной среде". Тема докт. дис.: "Динамика гетерогенных сред при наличии физико-химических превращений". Автор и соавтор более 100 научных работ, в т. ч. монографий: "Обратная задача определения коллекторских характеристик открытых прискважинных зон с помощью акустического зондирования. Обратные задачи в приложениях" (2006 г.), "К теории вскипания. Математическое моделирование процессов и систем" (2012 г.).

Область научных интересов: волновая динамика газожидкостных систем, акустика насыщенных пористых сред, фильтрационные течения с фазовыми превращениями, гидродинамика двухфазных потоков со склеротическими осложнениями, математическое моделирование химических реакторов, динамика атмосферных выбросов.

Юмагулова Юлия Александровна, научный сотрудник Института механики и машиностроения КазНЦ РАН. Тема канд. дис.: "Динамика давления в замкнутых объемах вследствие фазовых переходов при тепловых нагрузках". Автор и соавтор более 20 научных работ.

Область научных интересов: фильтрация высоковязкой нефти в пласте при тепловом воздействии, образование газовых гидратов.

Гиззатуллина Алина Азатовна, аспирант Бирского филиала Башкирского университета, кафедра высшей и прикладной математики, в 2012 г. окончила Бирскую государственную социально-педагогическую академию по специальности "Математика". В 2014 году поступила в аспирантуру по специальности 01.02.05. "Механика жидкости газа и плазмы". Автор и соавтор 5 научных работ.

Область научных интересов: фильтрация высоковязкой нефти в пласте при тепловом воздействии.

Корнилов Дмитрий Александрович, канд. физ.-мат. наук, начальник отдела АО "ГНЦ НИИАР". Тема канд. дис.: "Математическое моделирование процессов, описываемых уравнениями типа Лиувилля, применительно к теории гравитации и космологии" (защ. в 2003 г.). Автор и соавтор 49 научных работ.

Область научных интересов: математическое моделирование, нейтронное облучение, радиационная повреждаемость, радиационные дефекты, микроструктура.

Косенков Владимир Михайлович, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник АО "ГНЦ НИИАР". Тема канд. дис.: "Рентгенографическое изучение радиационных нарушений в окиси бериллия и некоторых других веществ с решеткой вюрцита", г. Мелекес 1968 г. Тема докт. дис.: "Разработка аппаратуры и методов рентгеноструктурного анализа высокорadioактивных веществ и использование этих методов для обоснования радиационной стойкости материалов атомной техники". С 1961 года руководит методикой рентгеноструктурного анализа На-

учно-исследовательского института атомных реакторов. Разработал несколько поколений дистанционных дифрактометров, что позволило проводить исследования структурных изменений, происходящих под облучением в топливных и конструкционных материалах атомных реакторов. Автор и соавтор 150 научных работ, в т.ч. монографии "Рентгенография в реакторном материаловедении". Ульяновск: УлГУ, 2006. 168 с.

Область научных интересов: рентгенография облученных материалов; физические проблемы реакторного материаловедения.

Силантьев Павел Петрович, научный сотрудник АО "ГНЦ НИИАР", в 2004 г. окончил Ульяновский государственный университет по специальности "Физика". Автор и соавтор 21 научной работы.

Область научных интересов: рентгеноструктурный анализ; проблемы реакторного материаловедения; физика твердого тела.

Бисултанова Зура Исановна, преподаватель кафедры клеточной биологии, морфологии и микробиологии, Чеченский государственный университет. Автор и соавтор более 10 научных работ.

Область научных интересов: молекулярная генетика, генетика мультифакторных заболеваний, этногенетика.

Ацаева Марет Махмудовна, канд. биол. наук, доц. кафедры клеточной биологии, морфологии и микробиологии, Чеченский государственный университет. Тема канд. дис.: "Оценка генотоксических эффектов лекарственных препаратов на модели синаптонемных комплексов в сперматоцитах мыши" (защ. в 2013). Автор и соавтор более 15 научных работ.

Область научных интересов: молекулярная генетика, генотоксикология.

Джамбетова Петимат Махмудовна, д-р биол. наук, проф. кафедры клеточной биологии, морфологии и микробиологии, Чеченский государственный университет. Тема канд. дис.: "Исследование эколого-генетического влияния загрязнения почв нефтепродуктами на природные популяции растений? и тест-системы" (защ. в 2005 г.). Тема докт. дис.: "Генетические последствия загрязнения почвы нефтепродуктами в Чеченской республике" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор более 60 научных работ, в т.ч. монографий: "Эколого-генетический мониторинг окружающей среды" (2012 г.), "Генотоксические последствия нефтяного загрязнения окружающей среды (2014 г.), "Генетический мониторинг детского населения в условиях нефтезагрязнения (монография)" (2014 г.), "Растительные тест-системы в эколого-генетическом мониторинге" (2015 г.).

Область научных интересов: генотоксикология, экологическая генетика, этногенетика.

Переварюха Андрей Юрьевич, кандидат техн. наук, ст. науч. сотрудник лаборатории прикладной информатики и проблем информатизации общества Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук. Тема канд. дис.: "Анализ динамики возобновляемых биоресурсов с использованием комплекса гибридных моделей" (защ. в 2010 г.). Автор 47 научных работ.

Область научных интересов: моделирование экологических систем, исследование нестационарных и переходных режимов биологических процессов, нелинейные эффекты в динамике популяций, прогнозирование состояния фауны Каспийского моря, гибридные динамические системы, вспышки численности насекомых, классификация инвазий чужеродных видов, бифуркации неунимодальных отображений.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aldashev Serik Aimurzaevich, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, prof., head of the Dept. of Fundamental and Applied Mathematics, Abay Kazakh National Pedagogical University, Academician of AEN RK. Subject of Doctoral thesis "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type" (1990). Author and coauthor of 200 scientific works, including monographs "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type" (1994), "Degenerate multidimensional hyperbolic equations" (2007).

Research interests: boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations and equations of the mixed type.

Voskresenskaya Galina Valentinovna, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, prof. of the Department of Algebra and Geometry, Samara University. Subject of Candidate's thesis "Modular forms with divisor in cusps" (1993); subject of Doctoral thesis "Finite groups and modular forms" (2010). Author of 29 scientific works.

Research interests: theory of modular forms, representations of groups, theory of numbers.

Dyuzheva Alexandra Vladimirovna, Department of Mathematics and Business Informatics, Samara University.

Research interests: mathematics and business informatics, mathematical modelling.

Pulkina Ludmila Stepanovna, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Dept. of Equations of Mathematical Physics, Samara University. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for a mixed type equation with two parallel lines of coefficient's singularity" (1975); Subject of Doctoral thesis: "Nonlocal problems for hyperbolic equations" (2003). Author and coauthor of 100 scientific works, including monograph "Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations".

Research interests: boundary-value, nonlocal and nonlinear problems for partial differential equations.

Savenkova Alesya Evgen'evna, postgraduate student of Samara University, Department of Mathematics, in 2010 graduated from Samara State Technical University with a degree in "Mathematics".

Research interests: nonclassical problems for partial differential equations.

Ratseev Sergey Mihayilovich, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University.

Research interests: mathematics, information security.

Ratseev Vladimir Mihayilovich, Department of Telecommunication Technologies and Networks, Ulyanovsk State University.

Research interests: mathematics, telecommunication technologies.

Rafikova Guzal Rinatovna, postgraduate student of Bashkir State University, Department of Higher and Applied Mathematics, in 2013 graduated from Birsik Branch of Bashkir State University with a degree in "Applied mathematics". In 2013 entered a PhD program in 01.02.05. "Mechanics of liquid, gas and plasma". Author and co-author of 10 scientific papers.

Research interests: formation and dissociation hydrates in porous media.

Shagapov Vladislav Shayhulagzamovich, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan, Dr of Phys.-Math. Sci., prof., Researcher, Institute of Mechanics and Engineering of Kazan Scientific Center of the RAS, Researcher, Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center of the RAS, professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Birsik branch of Bashkir State University. Subject of Candidate's thesis: "Waves in a two-phase medium". Subject of Doctoral thesis: "Dynamics of heterogeneous media in the presence of physico-chemical transformations". Author of more than 100 scientific papers, including monographs: "Inverse problem of determining the characteristics of the near-wellbore reservoir zones using acoustic sensing. Inverse problems in applications" (2006), "On the Theory of Effervescence. Mathematical modeling of processes and systems" (2012).

Research interests: wave dynamics of gas-liquid systems, acoustics of saturated porous media, filtration flows with phase changes, hydrodynamics of two-phase flows with sclerotic complications, mathematical modeling of chemical reactors, dynamics of atmospheric emissions.

Yumagulova Yulia Aleksandrovna, Researcher, Institute of Mechanics and Engineering of Kazan Scientific Center of the RAS. Subject of Candidate's thesis: "Dynamics of pressure in closed volumes as a result of phase transitions in thermal loads". Author of more than 20 scientific papers.

Research interests: filtering high-viscosity oil in the reservoir during thermal exposure, formation of gas hydrates.

Gizattullina Alina Azatovna, postgraduate student of Bashkir State University, Department of Higher and Applied Mathematics, in 2012 graduated from Birsik State Socio-Pedagogical Academy with a degree in "Mathematician". In 2014 entered a PhD program in 01.02.05. "Mechanics of liquid, gas and plasma". Author and coauthor of 5 scientific papers.

Research interests: filtering high-viscosity oil in the reservoir during thermal exposure.

Kornilov Dmitri Aleksandrovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Intellectual Property of JSC "SSC RIAR". Subject of Candidate's thesis "Mathematical simulation of processes described by Liouville equations, applied to gravitation theory and cosmology". Author and coauthor of 47 scientific works.

Research interests: simulation; neutron radiation, radiation damageability, radiation defects, microstructure.

Kosenkov Vladimir Mikhailovich, Dr. of Technical Science, prof. Since 1961 headed method of X-ray analysis in Research Institute of Atomic Reactors. He developed several generations of remote diffractometers, which allowed to carry out research of structural changes under irradiation in fuel and structural materials of nuclear reactors. Author and coauthor of 150 scientific works, including monographs "X-ray analysis in reactor materials science", Ulyanovsk: UISU, 2006, 168 p.

Research interests: X-rays analysis of irradiated materials; physical problems of reactor material science.

Silantiev Pavel Petrovich, research associate of JSC "SSC RIAR". In 2004 he graduated from

Ulyanovsk State University with a degree in "Physics". Author and coauthor of 21 scientific works.

Research interests: X-rays analysis; problems of reactor material science; solid state physics.

Bisultanova Zura Isanovna, lecturer of the Department of Cell Biology, Microbiology and Morphology, Chechen State University. Author and coauthor of 5 scientific papers.

Research interests: molecular genetics, genetics of multifactor diseases, ethnogenetics.

Atsayeva Maret Makhmudovna, PhD, associate professor of the Department of Cell Biology, Microbiology and Morphology, Chechen State University. Subject of Candidate's thesis: "Assessment of genotoxic effects of drugs on the model of synaptonemal complexes in spermatocytes of mouse" (2013). Author and coauthor of over 15 scientific papers.

Research interests: molecular genetics, genotoxicology.

Dzhambetova Petimat Makhmudovna, Dr. of Biological Science, prof. of the Department of Cell Biology, Morphology and Microbiology, Chechen State University. Subject of Candidate's thesis: "Investigation of ecological and genetic influence of soil contamination by oil products to natural populations of plants and test

systems" (2005). Subject of Doctoral thesis: "Genetic effects of soil contamination by oil products in Chechnya" (2014). Author and coauthor of over 60 scientific works, including monographs: "Environmental and genetic monitoring of environment (monograph)" (2012), "Genotoxic effects of oil pollution (monograph)" (2014), "Genetic monitoring of child population in the conditions of oil pollution (monograph)" (2014), "Plant test systems in ecological and genetic monitoring" (2015).

Research interests: genotoxicology, environmental genetics, ethnogenetics.

Perevaryukha Andrey Yurevich, Ph.D., senior research fellow of the Laboratory of Applied Informatics and Problems of Information Society, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences. Subject of Candidate's thesis: "Analysis of dynamics of renewable bio-resources using complex hybrid models" (2010). The author of 47 scientific papers.

Research interests: modeling of ecological systems, study of non-stationary and transient regimes of biological processes, nonlinear effects in the dynamics of populations, forecasting of a condition of fauna of the Caspian Sea, hybrid dynamic systems

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским государственным университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru>.

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: nvestnik@samsu.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы \LaTeX с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций \TeX крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами \LaTeX . Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF

с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("–"), двойной дефис ("—")¹, тройной дефис ("⋯")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождение рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--~`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`