УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНИТИ URLICH‘S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Редактирование *Л.С. Пулькина*
Компьютерная верстка, макет *М.А. Лихобабенко*
Оформление выходных данных *Т.А. Мурзинова*

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://vestnik.samsu.ru*

Свидетельство о регистрации средства массовой информации **ПИ № ФС 77-67328** от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге ОАО Агентство «Роспечать» 80307
ISSN 2541-7525

Подписано в печать 23.12.2016 г.
Формат $70 \times 108/16$.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 9,1. Уч.-изд. л. 6,5.
Typeset by $\LaTeX 2_\varepsilon$.
Тираж 500 экз. Заказ №
Издательство Самарского университета,
443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Отпечатано в типографии Самарского университета

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara national research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is piblished since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 - Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Adress of editorial stuff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://vestnik.samsu.ru*

Certificate of registration of means of mass media **ПИ № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

Price free

Passed for printing 23.12.2016.
Format $70 \times 108/16$.
Litho paper. Instant print.
Convent. print. sheets 9,1. Publ. sheets 6,5.
Typeset by $\LaTeX 2_\varepsilon$.
Circulation 500 copies. Order №
Publishing house of Samara University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Printed in the printing house of Samara University

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Механика

CONTENTS

Mathematics

Mechanics

МАТЕМАТИКА

УДК 512.761.5

Е.А. Асташов[1]

О КЛАССИФИКАЦИИ РОСТКОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЭКВИВАРИАНТНО ПРОСТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ПОРЯДКА ТРИ[2]

Рассматривается задача классификации ростков функций $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно нетривиальных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на пространствах $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$, с точностью до эквивариантных ростков автоморфизмов $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Получена полная классификация таких ростков в случае, когда действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ нетривиально по обеим переменным и нескалярно. Именно, росток является эквивариантно простым относительно такой пары действий тогда и только тогда, когда он эквивалентен одному из следующих ростков:

$$(x, y) \mapsto x^{3k+1} + y^2,\ \ k \geqslant 1;$$
$$(x, y) \mapsto x^2 y + y^{3k-1},\ k \geqslant 2;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + xy^3;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + y^5.$$

Ключевые слова: классификация особенностей, простые особенности, действие группы, эквивариантные функции.

1. Основные определения и обозначения

Пусть заданы представления произвольной группы G на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. Функция $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется *инвариантной* относительно первого из этих представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $f(\lambda \cdot \mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$. Функция $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется *эквивариантной* относительно пары заданных представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $g(\lambda \cdot \mathbf{z}) = \lambda \cdot g(\mathbf{z})$. (Символом «$\cdot$» обозначаются соответствующие действия элемента группы на элемент пространства $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}$.) Эти понятия естественным образом переносятся на ростки функций, а также на ростки диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$.

Обозначим через $\mathcal{O}_n^G$ кольцо инвариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, через $\mathcal{O}_n^{GG}$ — множество эквивариантных ростков голоморфных

Асташов Евгений Александрович (ast-ea@yandex.ru), механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, 119991, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 1.
[2]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 16-11-10018.

функций $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$, а через $\mathcal{D}_n^{GG}$ — кольцо эквивариантых ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$. Множество $\mathcal{O}_n^{GG}$ имеет структуру модуля над кольцом $\mathcal{O}_n^{G}$. Кольцо $\mathcal{D}_n^{GG}$ действует на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$. Эквивариантный росток функции $f\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ с критической точкой $0\in\mathbb{C}^n$ назовем *эквивариантно простым* относительно заданных представлений группы G, если при всех достаточно больших $r\in\mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой (а значит, и любой) точки его орбиты в пространстве r-струй эквивариантных ростков функций $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ пересекается лишь с конечным числом других орбит (такие орбиты называются *примыкающими* к орбите ростка g), и это число остается ограниченным при $r\to\infty$.

Два эквивариантных ростка $f,g\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ с критической точкой $0\in\mathbb{C}^n$ назовем $\mathcal{R}^{GG}$*-эквивалентными,* если существует эквивариантный росток диффеоморфизма $\Phi\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$, для которого $g=f\circ\Phi$ (обозначение: $f\sim_{\mathcal{R}^{GG}}g$). Через $\mathcal{D}_n^{GG}g$ будем обозначать орбиту элемента g при действии группы эквивариантных диффеоморфизмов $\mathcal{D}_n^{GG}$ на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$.

Все вышеупомянутые понятия, очевидно, зависят не только от самой группы G, но и от ее действий на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, хотя обозначения никакой информации о действиях группы в себе не содержат; о каких действиях идет речь, будет в каждом случае ясно из контекста.

2. Постановка задачи и обзор существующих результатов

Существует общая задача классификации с точностью до вышеописанного отношения эквивалентности особых ростков функций $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$, эквивариантно простых относительно каких-либо представлений конечной абелевой группы G на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$.

Перечислим некоторые работы, в которых рассматривались частные случаи этой задачи.

В работе [1] получена хорошо известная классификация простых особенностей в неэквивариантном случае (то есть в случае, когда оба действия группы G тривиальны).

В работе [2] получена классификация простых особенностей на многообразии с краем. Эта классификация эквивалентна классификации простых особенностей, инвариантных относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ по первой координате:

$$(-1)\cdot(z_1,z_2,\ldots,z_n)=(-z_1,z_2,\ldots,z_n).$$

В работе [3, раздел 3] получена классификация простых нечетных особенностей, то есть особенностей, эквивариантно простых относительно нетривиальных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. В частности, доказано, что при $n\geqslant 3$ таких особенностей не существует вовсе.

В работе [4] рассматриваются действия групп $\mathbb{Z}_m\,(m\geqslant 3)$ на $\mathbb{C}^n\,(n\geqslant 2)$ и $\mathbb{C}$ специального вида, а именно такие, для которых действие по нескольким переменным в $\mathbb{C}^n$ совпадает с действием на $\mathbb{C}$. Доказано (см. [4, теоремы 1 и 2]), что в случае таких действий циклических групп эквивариантно простых ростков $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ не существует. В этой же работе рассматривается случае несогласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$; доказано (см. [4, теорема 3]), что в случае таких действий всякий эквивариантно простой росток эквивалентен одному из ростков $A_{3k+1},k\geqslant 0$. В частности, результаты работы [4] позволяют классифицировать эквивариантно простые ростки функций двух переменных во всех случаях, когда действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ скалярно, а действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}$ при этом нетривиально.

3. Основной результат

В настоящей работе рассматривается случай, когда действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ нескалярно и нетривиально по обеим переменным. Именно, пусть группа $\mathbb{Z}_3$ действует на $\mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$\sigma \cdot (x, y) = (\tau x,\ \tau^2 y); \qquad \sigma \cdot z = \tau z, \tag{3.1}$$

где $\tau = \exp(2\pi i/3)$ — кубический корень из единицы. В этом случае классификация эквивариантно простых особенностей дается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции с критической точкой в начале координат, эквивариантный относительно представлений (3.1). Росток g является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$-эквивалентен одному из следующих ростков:

$$(x, y) \mapsto x^{3k+1} + y^2,\ \ k \in \mathbb{N}; \tag{3.2}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 y + y^{3k-1},\ k \geqslant 2; \tag{3.3}$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + xy^3; \tag{3.4}$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + y^5. \tag{3.5}$$

Доказательство теоремы 1 приводится в разделе 5. Раздел 4 посвящен методу полных трансверсалей, на котором основывается это доказательство.

4. Метод полных трансверсалей и теорема о конечной определенности

Метод полных трансверсалей — достаточно общий метод классификации ростков аналитических функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с точностью до различных отношений эквивалентности. Подробное изложение этого метода можно найти в работе [5, раздел 2]. Мы дадим здесь описание этого метода для классификации квазиоднородных ростков с точностью до $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m\mathbb{Z}_m}$-эквивалентности.

Пусть $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — упорядоченный набор натуральных чисел (*весов*). Росток $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется *$\underline{\alpha}$-квазиоднородным степени* r, если для всех $t \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$g(t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_n} x_n) = t^r g(x_1, \ldots, x_n).$$

Число r называют также *$\underline{\alpha}$-квазистепенью* ростка g и обозначают $\deg_{\underline{\alpha}} g$.

Пусть $\mathcal{M}_n$ — максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, а $\mathcal{D}_n^{GG}$ — кольцо ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. Обозначим через $F^k_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$ идеал в $\mathcal{M}_n$, порожденный мономами $\underline{\alpha}$-квазистепеней k и выше, а через $F^k_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}_n^{GG}$ — множество таких $\phi \in \mathcal{D}_n^{GG}$, что для всех $t \geqslant 0$ и всех $g \in F^t_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$ выполнено $g \circ \phi - g \in F^{k+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$. Наконец, через $LF^k_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}_n^{GG} \cdot g$ будем обозначать касательное пространство к $F^k_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}_n^{GG}$-орбите ростка g в точке g. В этих обозначениях частным случаем [5, теорема 2.28] является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть росток $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ имеет $\underline{\alpha}$-квазистепень r, и $s > r$. Пусть T — такое подпространство в $F^{r+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$, что

$$F^{r+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n \subset T + LF^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n \cdot g + F^{s+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n.$$

Тогда любой росток h, для которого $g - h \in F^{r+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$, будет $F^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n$-эквивалентен ростку вида $g + t + f$, где $t \in T$ и $f \in F^{s+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$.
Подпространство T из теоремы 2 называется *полной трансверсалью* к орбите $F^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n \cdot g$.

Теорема 2 позволяет классифицировать струи (в смысле $\underline{\alpha}$-квазистепеней) ростков заданного порядка с точностью до $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентности. Однако остается еще вопрос о достаточности струи ростка (k-струя ростка $g \in \mathcal{O}_n$ называется *достаточной*, если росток $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентен этой струе). Если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что k-струя ростка g достаточна, то g называют *конечно определенным* (а если k выбрано наименьшим возможным, то говорят, что g k-определен). Достаточность струи ростка проверяется с помощью теоремы о конечной определенности (частный случай [5, следствие 2.27]):

Теорема 3. В условиях теоремы 2 росток $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ k-определен тогда и только тогда, когда

$$F^{k+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n \subset LF^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n \cdot g.$$

5. Доказательство теоремы 1

Перейдем к доказательству теоремы 1. Основная идея состоит в том, чтобы последовательно строить r-струи эквивариантно простых ростков с помощью метода полных трансверсалей, а затем доказывать достаточность струй с помощью теоремы о конечной определенности.

Мономы, эквивариантные относительно представлений (3.1) — это в точности мономы $(1, 2)$-квазистепеней вида $3s + 1$ ($s \geqslant 0$). Таким образом, эквивариантный росток может задаваться рядом с ненулевыми членами только $(1, 2)$-квазистепеней 1, 4, 7, 10 и так далее.

Единственный моном $(1, 2)$-квазистепени 1 — это моном x, который не может входить в разложение в ряд ростка с особенностью в начале координат. Таким образом, 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) ростка, эквивариантного относительно действий (3.1), имеет вид $ay^2 + bx^2y + cx^4$. Нетрудно убедиться, что с помощью эквивариантных замен переменных эту струю можно привести к одной из следующих форм:

$$y^2 + x^4; \tag{5.6}$$
$$y^2; \tag{5.7}$$
$$x^2y; \tag{5.8}$$
$$x^4; \tag{5.9}$$
$$0 \tag{5.10}$$

(доказательство проводится с помощью выделения полного квадрата). Рассмотрим далее каждый из этих случаев по отдельности.

Лемма 1. Если 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид (5.6), то росток эквивалентен своей 4–струе.

Доказательство леммы 1. В этом случае росток g имеет вид $g(x, y) = y^2 \cdot \cdot (1 + g_1(x, y)) + x^4 \cdot (1 + g_2(x, y))$, где g_1, g_2 — инвариантные ростки, $g_{1,2}(0, 0) = 0$.

Росток приводится к виду (5.6) с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = x \cdot \sqrt[4]{1 + g_2(x, y)}$, $\tilde{y} = y \cdot \sqrt{1 + g_1(x, y)}$.

Лемма 2. Если 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид (5.7), то росток эквивалентен одному из ростков (5.), $k \geqslant 2$.

Доказательство леммы 2. Положим k равным наименьшему из таких $s \in \mathbb{N}$, что росток g содержит (с ненулевым коэффициентом) хотя бы один из мономов вида x^{3s+1} и $x^{(3s+1)/2}y$ (второй случай сводится к первому с помощью выделения полного квадрата). Если $k < \infty$, то росток приводится к виду (5.) с тем же k (замена переменных производится аналогично тому, как это делалось при доказательстве предыдущей леммы). Если же $k = \infty$, то есть росток не содержит ни одного из мономов указанного вида, то он имеет вид $g(x, y) = y^2 \cdot (1 + g_1(x, y))$, где g_1 — инвариантный росток, и тогда g эквивалентен своей 4-струе (в смысле $(1, 2)$-квазистепени). Но тогда росток не будет простым: к его орбите в пространстве r-струй эквивариантных ростков примыкают орбиты всех ростков вида (5.), где $3k + 1 \leqslant r$, и число таких орбит неограниченно возрастает при $r \to \infty$.

Лемма 3. Если 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид (5.8), то росток эквивалентен одному из ростков (3.3).

Доказательство леммы 3 проводится с помощью теоремы 3 аналогично [1, §5].

Лемма 4. Если 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид (5.9), то росток эквивалентен одному из ростков $x^4 + xy^3$ и $x^4 + y^5$.

Доказательство леммы 4. Воспользуемся методом полных трансверсалей. Полная трансверсаль в нашем случае будет равна $T = \mathbb{C}\langle xy^3 \rangle$, и 7-струя ростка g эквивалентна $x^4 + axy^3$. При $a \neq 0$ она эквивалентна $x^4 + xy^3$. В этом случае полная трансверсаль будет нулевой, а росток g конечно определен и $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентен ростку $x^4 + xy^3$.

При $a = 0$ полная трансверсаль будет равна $T = \mathbb{C}\langle x^2y^4, y^5 \rangle$, и 10-струя ростка g будет иметь вид $j^{10}(g) = x^4 + bx^2y^4 + cy^5$. Рассмотрим далее два случая.

Если $c \neq 0$, то 10-струя ростка с помощью эквивариантной замены $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = cy + bx^2$ приводится к виду $\tilde{x}^4 + \tilde{y}^5$. С помощью теоремы о конечной определенности нетрудно проверить, что эта струя достаточна.

Если же $c = 0$, то росток не является эквивариантно простым. В самом деле, в этом случае к орбите ростка примыкают орбиты ростков вида $x^4 + a_3x^3y^2 + a_2x^2y^4 + a_1xy^6 + a_0y^8$. Множество нулей ростка такого вида состоит из четырех касающихся в нуле парабол вида $x = t_iy^2$, где t_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — корни уравнения $t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 = 0$. Двойное отношение коэффициентов t_i инвариантно относительно действия группы $\mathcal{D}_2^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$, а значит, существует непрерывное семейство орбит, отличающихся значениями этого инварианта, что противоречит простоте ростка g.

Лемма 5. Если 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид (5.10), то росток — не эквивариантно простой.

Доказательство леммы 5. В этом случае 7-струя ростка (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) представляет собой линейную комбинацию мономов x^7, x^5y, x^3y^2, xy^3, то есть размерность пространства таких струй равна 4. Заметим, что в случае действий (3.1) все ростки эквивариантных диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ имеют вид:

$$x = \alpha\tilde{x} + \ldots, \quad y = \beta\tilde{x}^2 + \gamma\tilde{y} + \ldots, \tag{5.11}$$

где $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$. При этом на вид 4-струи ростка (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) после замены координат влияют только те слагаемые, которые выписаны в формулах (5.11) явно. Таким образом, действие группы $\mathcal{D}_2^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$ на $\mathbb{C}^2$ задает действие трёхпараметрической группы линейных операторов на пространстве этих 7-струй. По соображениям размерности получаем, что эквивариантный росток с нулевой 4-струей (в смысле $(1,2)$-квазистепени) не будет эквивариантно простым.

Из лемм 1–5 следует, что любой эквивариантный относительно действий (3.1) росток $(\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ приводится к одной из нормальных форм – либо не является простым. Для завершения доказательства теоремы нужно доказать, что сами ростки – просты. Простота ростков A_{3k} и D_{3k} проверяется так же, как в неэквивариантном случае (см. [1, §8]) с очевидными изменениями, происходящими из требования эквивариантности. Простота ростков $x^4 + xy^3$ и $x^4 + y^5$ доказывается с помощью построения трансверсалей к их орбитам в пространстве r-струй эквивариантных ростков $(\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ с особенностью в нуле. Эти трансверсали можно взять в виде

$$x^4 + xy^3 + \epsilon_1 y^2 + \epsilon_2 x^2 y$$

и

$$x^4 + y^5 + \epsilon_1 y^2 + \epsilon_2 x^2 y + \epsilon_3 xy^3$$

соответственно. Нетрудно видеть, что при всех ϵ эти ростки могут принадлежать только орбитам некоторых из ростков, указанных в формулировке настоящей теоремы, причем число этих орбит конечно. Теорема доказана.

Литература

[1] Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 4. С. 3–25.

[2] Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 91–107.

[3] Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M.. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // J. of Geometry and Physics. 2013. Vol. 71. P. 58–72.

[4] Асташов Е.А. О классификации особенностей, эквивариантно простых относительно представлений циклических групп // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. т. 26. № 2. С. 155–159.

[5] Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A.. Complete transversals and the classification of singularities // Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 253–275.

[6] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009. 672 с.

References

[1] Arnold V.I. Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. Functional Anal. Appl., 1972, vol. 6, no. 4, pp. 254–272.

[2] Arnold V.I. Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. Russian Math. Surveys, 1979, vol. 34, no. 1, pp. 1–42.

[3] Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions. J. of Geometry and Physics, 2013, vol. 71, pp. 58–72.

[4] Astashov E.A. On the classification of singularities that are equivariant simple with respect to representations of cyclic groups (in Russian). Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 155-159.

[5] Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A. Complete transversals and the classification of singularities. Nonlinearity, 1997, vol. 10, pp. 253–275.

[6] Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. Singularities of differentiable maps, Volumes 1 and 2, Boston: Birkhauser, Monographs Math., 1985-1988, vol. 82–83, 845 p.

E.A.Astashov[3]

ON THE CLASSIFICATION OF FUNCTION GERMS OF TWO VARIABLES THAT ARE EQUIVARIANT SIMPLE WITH RESPECT TO AN ACTION OF THE CYCLIC GROUP OF ORDER THREE

We consider the problem to classify function germs $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ that are equivariant simple with respect to nontrivial actions of the group $\mathbb{Z}_3$ on $\mathbb{C}^2$ and on $\mathbb{C}$ up to equivariant automorphism germs $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. The complete classification of such germs is obtained in the case of nonscalar action of $\mathbb{Z}_3$ on $\mathbb{C}^2$ that is nontrivial in both coordinates. Namely, a germ is equivariant simple with respect to such a pair of actions if and only if it is equivalent to ine of the following germs:

$$(x, y) \mapsto x^{3k+1} + y^2, \quad k \geqslant 1;$$
$$(x, y) \mapsto x^2y + y^{3k-1}, \ k \geqslant 2;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + xy^3;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + y^5.$$

Key words: classification of singularities, simple singularities, group action, equivariant functions.

Статья поступила в редакцию 15/ *VI*/2016;

The article received 15/ *VI*/2016.

[3] *Astashov Evgeny Aleksandrovich* (`ast-ea@yandex.ru`), post-graduate student, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory 1, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.

УДК 517.977.56

И.В. Асташова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский[1]

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ ТЕПЛИЦЫ

При выращивании растений в промышленных теплицах требуется поддерживать температуру в точке роста растений, находящейся на фиксированной высоте, в соответствии с заданным суточным графиком температур, допуская малые отклонения. При этом можно увеличивать температуру, увеличивая подогрев пола теплицы и уменьшать температуру, открывая форточки на ее потолке. Далее поставим задачу поддержания на некоторой заданной высоте c температуры $z(t)$ в течение промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Для решения задачи предлагается и анализируется математическая модель, использующая уравнение теплопроводности. Физический смысл данной задачи заключается в том, что на одном конце бесконечно тонкого стержня длины l (высота теплицы) в течение времени T поддерживают температуру $\phi(t)$ (управляющая функция), а на другом конце задан тепловой поток $\psi(t)$. Требуется найти такую управляющую функцию $\phi_0(t)$, при которой температура в определенной точке c была бы максимально близка к заданной температуре $z(t)$. Оценка качества управления осуществляется с помощью квадратичного интегрального функционала.

Ключевые слова: оптимальное управление, температурный режим, теплица, уравнение теплопроводности, квадратичный интегральный функционал.

Введение

Для решения задачи поддержания оптимальной температуры в точке роста растения в промышленной теплице предлагается математическая модель, основанная на уравнении теплопроводности с переменным коэффициентом, не зависящим от времени. Первые результаты, полученные на базе аналогичной модели, где использовалось уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом, были

Асташова Ирина Викторовна (ast@diffiety.ac.ru), кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1; кафедра высшей математики, факультет МЭСИ, Российский экономический университет им.Г.В.Плеханова, 117997, Россия, Москва, Стремянный переулок, 36.

Лашин Дмитрий Александрович (dalasin@gmail.com), ООО НПФ ФИТО, 142784, Российская Федерация, г. Москва, Московский, 35-12.

Филиновский Алексей Владиславович (flnv@yandex.ru), кафедра высшей математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5; кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

получены в работах [1] – [3]. Некоторые методы доказательства основных результатов содержатся в [4] и [5]. Подобные экстремальные задачи с интегральными функционалами рассматривались различными авторами ([6] – [9]). Обзор ранее полученных результатов можно найти в работе [10], библиография последних работ содержится в [11]. Задача минимизации функционала с финальным наблюдением и задача минимизации времени управления рассматривались в работах [7] – [11]. См. также [12], [13].

1. Основные обозначения и постановка задачи

1. Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = (a(x)u_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

с достаточно гладким коэффициентом $a(x)$, удовлетворяющим условию

$$0 < a_0 \leqslant a(x), \ \ x \in [0,l],$$

включающую краевые условия

$$\begin{array}{l} u(0,t) = \phi(t), \\ u_x(l,t) = \psi(t), \end{array} \quad t > 0, \tag{1.2}$$

и начальные условия

$$u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < l, \tag{1.3}$$

где $\phi \in W_2^1(0,T)$, $\psi \in W_2^1(0,T)$ для любого $T > 0$.

В этой работе мы будем предполагать, что $\psi(t)$ — заданная функция, а $\phi(t)$ — искомая управляющая функция.

Пусть $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, а $V_2^{1,0}(Q_T)$ (см. [14], ч. 1, §1(**2**)) — банахово пространство, состоящее из элементов $W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$|u|_{Q_T} = \sup_{0<t<T} \left(\int_0^l u(x,t)^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{Q_T} u_x(x,t)^2 dxdt \right)^{1/2}, \tag{1.4}$$

имеющих непрерывно меняющиеся по $t \in [0,T]$ следы из $L_2(0,l)$ на сечениях $(0,l)$.

Обозначим через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ пространство, состоящее из таких элементов $\eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, что $\eta(\cdot,T) = 0$, $\eta(0,\cdot) = 0$.

Будем рассматривать обобщенное (слабое) решение задачи (1.1)–(1.3) из энергетического класса, то есть такую функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, что $u(0,t) \equiv \phi(t)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left(a(x)u_x(x,t)\eta_x(x,t) - u(x,t)\eta_t(x,t) \right) dxdt = a(l) \int_0^T \psi(t)\eta(l,t)dt \tag{1.5}$$

для любой функции $\eta(x,t) \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$.

Имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 2.1. *Обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) из класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$|u|_{Q_T} \leqslant C\big(\|\phi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)}\big), \tag{1.6}$$

где постоянная C не зависит от ϕ и ψ.

Отметим, что доказательство существования решения проводится методом Галеркина, а доказательство единственности и оценка нормы решения получены с использованием энергетического неравенства.

Обозначим это единственное решение u_ϕ.

2. Далее поставим задачу поддержания на некоторой заданной высоте c температуры $z(t)$ в течение всего промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3). Пусть $z \in L_2(0,T)$. Обозначим через Φ_M, где $M > 0$, множество функций

$$\Phi_M = \{\phi \in W_2^1(0,T),\ \ \|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M\}.$$

Для произвольного $c \in (0,l]$ определим функционал

$$J[\phi] = \int_0^T (u_\phi(c,t) - z(t))^2 dt \tag{1.7}$$

Рассмотрим задачу минимизации данного функционала. Обозначим

$$\inf_{\phi \in \Phi_M} J[\phi] = m. \tag{1.8}$$

Физический смысл данной задачи заключается в том, что на одном конце бесконечно тонкого стержня длины l в течение времени T поддерживают температуру $\phi(t)$ (управляющая функция), а на другом конце задан тепловой поток $\psi(t)$. Требуется найти такую управляющую функцию $\phi_0(t)$, при которой температура в фиксированной точке $x = c$ была бы максимально близка к заданной температуре $z(t)$. Оценка качества управления осуществляется с помощью функционала $J[\phi]$.

2. Существование и единственность оптимальной управляющей функции

Теорема 3.1. *Существует единственная функция $\phi_0(t) \in \Phi_M$, для которой $m = J[\phi_0]$.*

Доказательство теоремы.

В доказательстве существования и единственности минимизирующей функции функционала J используется следующая лемма.

Лемма 3.1 *Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства H. Тогда для любого $x \in H$ существует единственный элемент $y \in A$, для которого*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in A} \|x - z\|. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$B_M = \{u_\phi(c,\cdot),\ \phi \in \Phi_M\} \subset L_2(0,T)$$

и докажем, что B_M — выпуклое замкнутое подмножество в $L_2(0,T)$. Для любых $y_j = u_{\phi_j}(c,\cdot) \in B_M$, $j = 1,2$, имеем $\|\phi_j\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M$, $j = 1,2$. Следовательно, для всех $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\|\alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_2\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \alpha\|\phi_1\|_{W_2^1(0,T)} + (1-\alpha)\|\phi_2\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M,$$

так что $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in B_M$ и множество B_M выпукло.

Теперь докажем, что B_M замкнуто в $L_2(0,T)$.

Пусть функции $y_k = u_{\phi_k}(c,\cdot) \in B_M$ образуют фундаментальную последовательность в $L_2(0,T)$, стремящуюся к $y \in L_2(0,T)$. Соответствующие функции $\{\phi_k\} \in \Phi_M$ образуют слабо предкомпактное множество в $W_2^1(0,T)$. Таким образом, для некоторой подпоследовательности ϕ_{k_j} существует слабый предел $\phi \in W_2^1(0,T)$ при $j \to \infty$. Из свойств слабо сходящихся последовательностей в гильбертовом пространстве (см. [15], Гл. 1, §1, Т. 1.1) следует

$$\|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \limsup_{j\to\infty} \|\phi_{k_j}\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \tag{2.2}$$

так что $\phi \in \Phi_M$. Теперь, по теореме Банаха–Сакса (см. [16], Ch. 2, Sec. 3) существует такая подпоследовательность k_{j_n}, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\phi}_n - \phi\|_{W_2^1(0,T)} = 0, \tag{2.3}$$

где $\tilde{\phi}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n} \phi_{k_{j_l}}$. Следовательно,

$$\|\tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \|\phi_{k_{j_l}}\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \tag{2.4}$$

и, используя (2.2), мы получим

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} y_{k_{j_l}} \in B_M.$$

Таким образом, для соответствующей последовательности решений

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\phi_{k_{j_l}}}$$

из оценки (1.6) мы получим неравенства

$$|\tilde{u}_m - \tilde{u}_n|_{Q_T} \leqslant C\|\tilde{\phi}_m - \tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)} \to 0, \quad m,n \to \infty. \tag{2.5}$$

Функция $\tilde{u}_n$ является слабым решением задачи

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}_n)_t = (a(x)(\tilde{u}_n)_x)_x, &\qquad 0<x<l, \qquad T>t>0,\\
\tilde{u}_n(0,t) = \tilde{\phi}_n(t), &\qquad\qquad\qquad\qquad T>t>0,\\
(\tilde{u}_n)_x(l,t) = \psi(t), &\qquad\qquad\qquad\qquad T>t>0,\\
\tilde{u}_n(x,0) = 0, &\qquad 0<x<l.
\end{aligned}$$

Это означает, что $\tilde{u}_n(0,t) = \tilde{\phi}_n(t)$ и интегральное тождество

$$\int_{Q_T} (a(x)(\tilde{u}_n(x.t))_x \eta_x(x,t) - \tilde{u}_n(x.t)\eta_t(x.t))\,dxdt = a(l)\int_0^T \psi(t)\eta(l,t)dt \tag{2.6}$$

выполняется для каждой функции $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$. Принимая во внимание соотношения (2.3), (2.5) и (2.6), мы видим, что существует предельная функция $u = u_\phi \in V_2^{1,0}(Q_T)$, которая является слабым решением задачи (1.1)–(1.3) с граничной функцией ϕ и

$$|u - \tilde{u}_n|_{Q_T} \leqslant C\|\phi - \tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.7}$$

Таким образом, по неравенству, следующему из теорем вложения (см. [15], гл. 1, § 6, (6.15)), мы получим

$$\begin{aligned}
\|y - \tilde{u}_n(c,\cdot)\|_{L_2(0,T)} &= \|u(c,\cdot) - \tilde{u}_n(c,\cdot)\|_{L_2(0,T)}\\
&\leqslant |u - \tilde{u}_n|_{Q_T} \leqslant C\|\phi - \tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что $y = u(c,\cdot) \in B_M$ и B_M является замкнутым подмножеством в $L_2(0,T)$.

Таким образом, по лемме 3.1 существует единственная функция $y(t) = u(c,t)$, где $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение задачи (1.1)–(1.3) с такой функцией $\phi = \phi_0 \in \Phi_M$, что

$$\inf_{\phi \in \Phi_M} J[\phi] = J[\phi_0]. \tag{2.9}$$

Докажем, что такая функция $\phi_0 \in \Phi_M$ единственна. Если это не так, то рассмотрим две такие функции ϕ_1, ϕ_2 и соответствующую пару решений u_1, u_2. Функция $\tilde{u} = u_1 - u_2$ является решением задачи

$$\tilde{u}_t = (a(x)\hat{u}_x)_x, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T, \tag{2.10}$$

$$\tilde{u}(0,t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \tilde{\phi}(t), \qquad 0 < t < T, \tag{2.11}$$

$$\tilde{u}(c,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.12}$$

$$\tilde{u}_x(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.13}$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0 \qquad 0 < x < l. \tag{2.14}$$

Теперь мы докажем, что функция $\tilde{u}$ в прямоугольнике $Q_T^{(c)} = (c,l) \times (0,T)$ совпадает с решением задачи

$$\hat{u}_t = (a(x)\hat{u}_x)_x, \qquad c < x < l, \qquad 0 < t < T, \tag{2.15}$$

$$\hat{u}(c,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.16}$$

$$\hat{u}_x(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.17}$$

$$\hat{u}(x,0) = 0, \qquad c < x < l. \tag{2.18}$$

Чтобы доказать это, достаточно положить в интегральном тождестве (1.5) функцию η равной 0 на $[0,c] \times [0,T]$. Но решение задачи (2.15)–(2.18) равно нулю на $[c,l] \times [0,T]$, следовательно, мы имеем

$$\tilde{u}(x,t) = 0, \quad c < x < l, \quad 0 < t < T. \tag{2.19}$$

Теперь мы докажем, что

$$\tilde{u}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \tag{2.20}$$

Заметим, что по теореме 2 из [17], §11, слабое решение $\tilde{u}$ является классическим решением уравнения (2.10) в Q_T. Теперь мы используем теорему 5 из [18], §3, где доказано следующее утверждение. Рассмотрим такую функцию $u \in C^{2,1}(\Omega)$, $\Omega \subset R^2$, что

$$u_t = (a(x)u_x)_x, \quad (x,t) \in \Omega \subset R^2.$$

Пусть G_0 — связная компонента множества $\Omega \cap \{t = t_0\}$, а $\widetilde{G}$ – связное открытое подмножество множества G_0. Тогда если $u|_{\widetilde{G}} = 0$, то $u|_{G_0} = 0$.

Применяя эту теорему к решению $\tilde{u}$ задачи (2.10)–(2.14) для любого $t_0 \in (0,T)$ и $G_0 = (0,l) \times \{t_0\}$, $\widetilde{G} = (c,l) \times \{t_0\}$, мы получим, что из (2.19) следует (2.20). Таким образом, имеем $u(x,t) = 0$ для всех $x \in (0,l)$ и $t \in (0,T)$. Это означает, что $\tilde{\phi}(t) = \tilde{u}(0,t) = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что с помощью аналогичных рассуждений можно доказать теоремы существования и единственности для других важных классов управляющих функций.

Обозначим через Φ_M^0 класс управляющих функций

$$\Phi_M^0 = \{\phi \in W_2^1(0,T) : \ \|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \ \phi(0) = 0\}.$$

Теорема 3.2. *Существует единственная функция $\phi_0(t) \in \Phi_M^0$, для которой*

$$\inf_{\phi \in \Phi_M^0} J[\phi] = J[\phi_0].$$

Обозначим через $\bar{\Phi}_M^0$ класс управляющих функций

$$\bar{\Phi}_M^0 = \{\phi \in W_2^1(0,T) : \ \|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \ \phi_1 \leqslant \phi(t) \leqslant \phi_2\}$$

с некоторыми постоянными ϕ_1 и ϕ_2.

Теорема 3.3. *Существует единственная функция $\phi_0(t) \in \bar{\Phi}_M^0$, для которой*

$$\inf_{\phi \in \bar{\Phi}_M^0} J[\phi] = J[\phi_0].$$

3. О точной управляемости

Наряду с вопросом о существовании и единственности решения экстремальной задачи, важным вопросом является точная управляемость. Под точной управляемостью будем понимать возможность получения в точке $x = c$ следа $u(c,t)$ почти всюду совпадающего на $[0,T]$ с заданной функцией $z(t)$. Соответственно, точным управлением будем называть такую функцию $\phi_0 \in \Phi_M$, при которой функционал $J[\phi_0]$ обращается в нуль:

$$J[\phi_0] = \int_0^T (u_{\phi_0}(c,t) - z(t))^2 \, dt = 0.$$

Следующая теорема показывает, что множество функций $z \in L_2(0,T)$, допускающих точную управляемость, достаточно "мало".

Теорема 4.1. *Множество всех функций $z \in L_2(0,T)$, для которых возможна точная управляемость, т.е. $J[\phi] = 0$ для некоторого $\phi \in \Phi_M$, является множеством первой категории в $L_2(0,t)$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (1.1) для функции $u_1 \in V_2^{1,0}(Q_T)$ с краевыми условиями

$$u_1(0,t) = \phi_1(t), \qquad 0 < t < T,$$
$$(u_1)_x(l,t) = \psi(t), \qquad 0 < t < T,$$

и такое же уравнение для функции $u_2(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ с краевыми условиями

$$u_2(0,t) = \phi_2(t), \qquad 0 < t < T,$$
$$(u_2)_x(l,t) = \psi(t), \qquad 0 < t < T.$$

Функция $\tilde{u} = u_1 - u_2$ является решением уравнения (1.1) с краевыми условиями

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{\phi}(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3.1}$$
$$\tilde{u}_x(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{3.2}$$

и начальным условием

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{3.3}$$

Теперь рассмотрим в прямоугольнике $Q_T^{(2l)} = (0,2l) \times (0,T)$ задачу

$$\bar{u}_t = (\bar{a}(x)\bar{u}_x)_x, \quad 0 < x < 2l, \quad 0 < t < T, \tag{3.4}$$
$$\bar{u}(0,t) = \tilde{\phi}(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3.5}$$
$$\bar{u}(2l,t) = \tilde{\phi}(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3.6}$$
$$\bar{u}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 2l. \tag{3.7}$$

где $\bar{a}(x) = a(x)$, $x \in (0,l)$, $\bar{a}(x) = a(2l-x)$, $x \in (l,2l)$. Слабое решение задачи (3.4)–(3.7) — это функция $\bar{u}(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T^{(2l)})$, удовлетворяющая краевым условиям $u(0,t) = u(2l,t) = \tilde{\phi}(t)$ и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T^{(2l)}} \big(\bar{a}(x)\bar{u}_x(x,t)\eta_x(x,t) - \bar{u}(x,t)\eta_t(x,t)\big)dxdt = 0 \tag{3.8}$$

для любой такой функции $\eta \in W_2^1(Q_T)$, что $\eta(\cdot,T) = 0$, $\eta(0,\cdot) = 0$, $\eta(2l,\cdot) = 0$. Из равенства(3.8) следует

$$\bar{u}(x,t) = \tilde{u}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \tag{3.9}$$

По принципу максимума для слабых решений (см. [14], ч. 3, §7, теорема 7.2), решение $\bar{u}(x,t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{ess}\inf_{t\in[0,T]} \tilde{\phi}(t) \leqslant \bar{u}(x,t) \leqslant \operatorname{ess}\sup_{t\in[0,T]} \tilde{\phi}(t). \tag{3.10}$$

Из (3.10) получим

$$\operatorname{ess}\sup_{Q_T} |\tilde{u}| \leqslant \operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|, \tag{3.11}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\tilde{u}(c,t)| \leqslant \operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|. \tag{3.12}$$

Интегрируя неравенство (3.12), мы получим

$$\int_0^T \tilde{u}^2(c,t)dt \leqslant T\left(\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|\right)^2. \tag{3.13}$$

Пусть функции $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ являются точными управляющими функциями для данных $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Это означает, что

$$J[\phi_1] = \int_0^T (u_{\phi_1}(c,t) - z_1(t))^2 dt = 0,$$

$$J[\phi_2] = \int_0^T (u_{\phi_2}(c,t) - z_2(t))^2 dt = 0.$$

В этом случае неравенство (3.13) влечет неравенство

$$\int_0^T (z_1(t) - z_2(t))^2\, dt \leqslant T\left(\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|\right)^2 \tag{3.14}$$

для произвольных функций $z_1(t)$ и $z_2(t)$, допуская точную управляемость.

Пусть $Z \subset L_2(0,T)$ — множество функций $z(t)$, допускающих точное управление. Имеем $Z = \cup_{M=1}^{\infty} Z_M$, где $Z_M \subset L_2(0,T)$ — множество функций, точно управляемых с помощью $\phi \in \Phi_M$. Рассмотрим произвольную последовательность управляющих функций $\{\phi_k\} \subset \Phi_M$, $M = 1, 2, \ldots$, и соответствующую последовательность $\{z_k\} \subset Z_M$. Множество Φ_M — ограниченное множество $W_2^1(0,T)$. По теореме вложения для $W_2^1(0,T)$ имеем

$$\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_{k_l} - \phi_{k_j}| \to 0, \quad l, j \to \infty, \tag{3.15}$$

для некоторой подпоследовательности ϕ_{k_j}. Из (3.14) и (3.15) мы получим для последовательности $\{z_{k_j}(t)\} \subset Z_M$ соотношение

$$\int_0^T (z_{k_l}(t) - z_{k_j}(t))^2 dt \leqslant T\left(\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_{k_l}(t) - \phi_{k_j}(t)|\right)^2 \to 0, \quad j, l \to \infty. \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что Z_M — предкомпактное множество в $L_2(0,T)$. Таким образом, Z_M нигде не плотно в $L_2(0,T)$. А так как $Z = \cup_{M=1}^{\infty} Z_M$, мы заключаем, что Z — множество первой категории в $L_2(0,T)$. Теорема 4.1 доказана.

Далее будут сформулированы утверждения, показывающие, что точная управляемость может не иметь места не только для функций $z \in L_2(0,T)$, но и для $z \in C([0,T])$.

Рассмотрим вопрос о точной управляемости в задаче (1.1)–(1.3) в случае, когда $\psi(t) = 0$ (отсутствует поток через правый конец).

$$\bar{u}_t = (a(x)\bar{u}_x)_x, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(0,t) = \phi(t), \qquad 0 < t < T, \\ \bar{u}_x(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\bar{u}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{3.19}$$

Теорема 4.2. *Для любого $M > 0$ существует такая функция $z \in C([0,T])$, что для любой функции $\phi \in \Phi_M$ для задачи (3.17)–(3.19) справедливо неравенство $J[\phi] > 0$.*

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $\psi(t) \neq 0$, т. е. будем рассматривать задачу (1.1)–(1.3). Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3 *Для любых $M > 0$ и $M_1 > 0$ существует такая функция $z \in C([0,T])$, что для любой функции $\phi(t) \in \Phi_M$ и любой такой функции $\psi(t) \in W_2^1(0,T)$, что $\|\psi(t)\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M_1$, для задачи (1.1)–(1.3) выполняется неравенство*

$$J[\phi] = \int_0^T (u_\phi(c,t) - z(t))^2 \, dt > 0.$$

Литература

[1] Лашин Д.А. Стратегия управления микрокламатом в теплицах // Гавриш. Москва, 2005. № 1. С. 33–35.

[2] Лашин Д.А. Об оптимальном управлении температурным режимом // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. Вып. 6. С. 853.

[3] Lashin D. A. On the existence of optimal control of temperature regimes // J. of Math. Sci. 2009. V. 158. № 2. P. 219–227.

[4] Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations / I.V. Astashova [et al.] // J. of Natural Geometry. Jnan Bhawan. London. 2003. V. 23. № 1–2. P. 1–126.

[5] Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой, 2012. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 647 с.

[6] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972.

[7] Бутковский А.Г. Оптимальное управление в системах с распределенными параметрам // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22. № 1. С. 17–26.

[8] Егоров А.И. Optimal Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами М.: Наука, 1978.

[9] Егоров Ю.В. Некоторые задачи теории оптимального управления // Ж. Выч. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3. № 5. С. 887–904.

[10] Butkovsky A.G., Egorov A.I., Lurie K.A. Optimal control of distributed systems // SIAM J. Control. 1968. Vol. 6. № 3. P. 437–476.

[11] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения., Новосибирск: Научная книга, 1999.

[12] Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. Москва.: БИНОМ. 2004.

[13] Farag M.H., Talaat T.A., Kamal E.M. Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problems // Cubo. 2013. V. 15. № 2. P. 111–119.

[14] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Мир 1972.

[15] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, Москва: Физматлит, 1973.

[16] Riesz F., Szökefalvi-Nagy B., Functional Analysis, New-York: Dover, 1990.

[17] Ильин А.А., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук. 1962. 17. Вып. 3. С. 3–146.

[18] Ландис Е. М., Олейник О.А. Общенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. Вып. 2. Р. 190–206.

References

[1] D. A. Lashin. Strategy of management to microclimate in hothouses *Gavrish.* Moscow, 2005. no. 1, p.33–35. (in Russian)

[2] D. A. Lashin. On the optimal control of a temperature regime. *Differ. Equ.*, 2008, V. 44, no. 6, P. 853.

[3] D. A. Lashin. On the existence of optimal control of temperature regimes. *J. of Math. Sci.*, 2009, V. 158, no. 2, P. 219–227.

[4] I. V. Astashova, A. V. Filinovskiy, V. A. Kondratiev, L. A. Muravei, *Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations* // J. of Natural Geometry. Jnan Bhawan. London. 2003, V. 23, no. 1–2, P. 1–126.

[5] *Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition*, edited by I. V. Astashova, Moscow: UNITY-DANA, 2012, 647 p. (in Russian)

[6] J. L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Berlin: Springer, 1971.

[7] A. G. Butkovsky. Optimal Control in the Systems with Distributed Parameters. *Avtomatika i Telemechanika*, 1961, 22, no. 1, P. 17–26.

[8] A. I. Egorov, *Optimal Control by Heat and Diffusion Processes*, Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)

[9] Yu. V. Egorov, Some Problems of Theory of Optimal Control *Zhurnal. Vych. Mat. i Mat. Fiziki.* 1963, V. 3, no. 5, P. 887 – 904. (in Russian)

[10] A. G. Butkovsky, A. I. Egorov, K. A. Lurie. Optimal control of distributed systems. *SIAM J. Control.* 1968, Vol. 6, no. 3, P. 437 – 476.

[11] A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and applications*, Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 1999. (in Russian)

[12] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control system design*, London – New-York: Pearson, 2000.

[13] M. H. Farag, T. A. Talaat, E. M. Kamal. Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problems. *Cubo*, 2013, V. 15, no. 2, P. 111–119.

[14] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'seva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, 23, Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.

[15] O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary value problems of mathematical physics*, Moscow: Fizmatlit, 1973.

[16] F. Riesz, B. Szökefalvi-Nagy, *Functional Analysis*, New-York: Dover, 1990.

[17] A. M. Ilin, A. S. Kalashnikov, O. A. Oleinik. Linear equations of second order of parabolic type. *Russ. Math. Surways*, 1962, V. 17, issue 3, P. 3–146.

[18] E. M. Landis, O. A. Oleinik. Generalized analiticity and some connected properties of solutions of elliptic and parabolic equations. *Russ. Math. Surways*, 1974, V. 29, issue 2, P. 190–206.

I.V. Astashova, D.A. Lashin, A.V. Filinovskiy[2]

ON A MODEL OF OPTIMAL TEMPERATURE CONTROL IN HOTHOUSES

While growing plants in industrial hothouses it needs to keep the temperature according to round-the-clock graph at the point of growth of plant located at the fixed height. Only small deviations are admitted. To obtain this it is possible to increase the temperature by heating the floor and to decrease the temperature by opening the ventilator windows at the ceiling. We propose and analyse the model based on the heat equation. Physical sense of this problem is that at one end of the infinitely thin rod of length l (the height of the hothouse) we keep during the time T the temperature $\phi(t)$ (control function), while at the other end we have the given heat flow $\psi(t)$. It requires to find the control function $\phi_0(t)$ such that the temperature at the fixed point c be maximally closed to the given temperature $z(t)$. For the estimation of the control quality we use a quadratic integral functional.

Key words: optimal control, temperature control, hothouse, heat equation, quadratic integral functional.

Статья поступила в редакцию 18/*VI*/2016.

The article received 20/*VI*/2016.

[2]*Astashova Irina Viktorovna* (`ast@diffiety.ac.ru`), the Dept. of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation; Dept.of MESI, Plekhanov Russian University of Economics, 117997, Stremyanny lane, 36, Moscow, Russian Federation.

Lashin Dmitriy Alexandrovich (`dalasin@gmail.com`), FITO research and production company, 142784, Russian Federation, Moscow, Moscovskiy, 35-12.

Filinovskiy Alexey Vladislavovich (`flnv@yandex.ru`), Bauman Moscow State Technical University, 105005, Baumanskaya 2nd st., 5; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, 119991, GSP-1, Leninskiye Gory, 1, Moscow, Russian Federation.

УДК 517.95

В.А. Гущина[1]

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

В данной работе для уравнения смешанного эллиптико - гиперболического типа со степенным вырождением на переходной линии в прямоугольной области изучается задача Дезина с условиями периодичности и нелокальным условием, связывающим значения производной по нормали на нижнем основании прямоугольника со значением искомого решения на линии изучения типа. Установлены необходимые и достаточные условия единственности решения, при этом единственность решения доказана на основании полноты системы собственных функций одномерной задачи на собственные значения.

Ключевые слова: степенное вырождение, линия перехода, нелокальное условие, прямоугольная область, единственность решения, одномерная задача, единственность.

1. Постановка задачи

Рассмотрим вырождающееся уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv (sgny)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - b^2(sgny)|y|^m u = F(x,y) \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < l,\ -\alpha < y < \beta\}$, где $m > 0$, $b \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $l > 0$ – заданные действительные постоянные, и поставим задачу А.А.Дезина [1].

Задача Дезина. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{1.2}$$

$$Lu = F(x,y), (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{1.3}$$

$$u(0,y) - u(l,y) = 0, \quad u_x(0,y) - u_x(l,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{1.4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{1.5}$$

$$u_y(x,-\alpha) - \lambda u(x,0) = \psi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.6}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, λ – заданный действительный параметр.

Гущина Виолетта Александровна (ivanov@mail.ru), (violetta.novikova.1991@mail.ru), кафедра математики Самарский государственный социально-педагогический университет, 443090, Российская Федерация, г. Самара, ул. Максима–Горького, 55/57.

В работах [1; 2; 3, с. 18–20] показано, что метод поиска разрешимых расширений для дифференциальных операторов может быть адаптирован к оператору Лаврентьева - Бицадзе с условиями периодичности (1.4) и однородными условиями (1.5) и (1.6) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$). В работах [4], [5, с. 143 - 153] задача (2) – (6) изучена, когда $\alpha = l$, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $m = 0$, $b = 0$, $F(x,y) = f(x,y) \cdot H(y)$, $H(y)$ – функция Хевисайда, $\lambda \geqslant 0$. Показано, что при $\lambda < 0$ однородная задача (т. е. когда $f(x,y) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения.

Данная работа является продолжением работ [6] и [7], где была изучена задача (2)–(6) в некоторых частных случаях.

В данной статье для поставленной задачи (1.2) – (1.6) установлен критерий единственности при всех $m > 0$, $b \geqslant 0$ и некоторых условиях относительно параметров α, β, l и λ.

2. Единственность решения задачи

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (1.2) – (1.6) при $F(x,y) \equiv 0$. Следуя работам [8 – 10] введем функции

$$u_0(y) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int\limits_0^l u(x,y)dx, \quad u_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,y) \cos \mu_n x dx, \tag{2.1}$$

$$\upsilon_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x,y) \sin \mu_n x dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n = \frac{2\pi n}{l}. \tag{2.2}$$

Аналогично этим работам, относительно функции $u_n(y)$ получим дифференциальное уравнение

$$u_n''(y) - (sgny)|y|^m (b^2 + \mu_n^2) u_n(y) = 0, \quad y \neq 0, \tag{2.3}$$

с граничными условиями

$$u_n(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \mu_n x dx = \varphi_n, \tag{2.4}$$

$$u_n'(-\alpha) - \lambda u_n(0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \cos \mu_n x dx = \psi_n. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.3) путем замены $u_n(y) = z(p_n|y|^q)\sqrt{|y|}$ приводится к обычному уравнению Бесселя относительно функции z при $y < 0$, а при $y > 0$ – к модифицированному уравнению Бесселя. Затем на основании общих решений уравнений Бесселя находится общее решение уравнения (2.3) [11, с. 304, 318]

$$u_n(y) = \begin{cases} a_n I_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)\sqrt{y} + b_n K_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)\sqrt{y}, & y > 0, \\ c_n J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)\sqrt{-y} + d_n Y_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)\sqrt{-y}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)$, $Y_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)$ функции Бесселя 1 и 2 рода соответственно, $I_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)$, $K_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)$ модифицированные функции Бесселя, а $q = \frac{m+2}{2}$ и $p_n q = \sqrt{b^2 + \mu_n^2}$, a_n, b_n, c_n и d_n – произвольные постоянные.

Подберем постоянные a_n, b_n, c_n, d_n так, чтобы в силу условий (1.2) выполнялись условия сопряжения

$$u_n(0+0) = u_n(0-0), \quad u'_n(0+0) = u'_n(0-0) \tag{2.7}$$

Опираясь на асимптотические формулы функций Бесселя [11, с. 307; 319]:

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{z}{2})^\nu,\ Y_\nu(z) \sim \begin{cases} -(\frac{2}{z})^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}, & \nu > 0, \\ -\frac{cos\pi\nu\Gamma(-\nu)}{\pi}(\frac{z}{2})^\nu, & \nu < 0; \end{cases}$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{z}{2})^\nu,\ K_\nu(z) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}(\frac{2}{z})^\nu, & \nu > 0, \\ \frac{\Gamma(-\nu)}{\pi}(\frac{z}{2})^\nu, & \nu < 0, \end{cases}$$

первое из равенств (2.7) выполнено при $d_n = -\pi b_n/2$, второе при

$$c_n = -a_n + \pi b_n/2 \cdot ctg(\frac{\pi}{4q}).$$

Поставив полученные выражения постоянных c_n и d_n в (2.6), будем иметь

$$u_n(y) = \begin{cases} a_n I_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)\sqrt{y} + b_n K_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)\sqrt{y}, & y > 0, \\ -a_n J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)\sqrt{-y} + b_n \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)\sqrt{-y}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q) = \frac{\pi}{2sin(\frac{\pi}{2q})}[J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)].$$

Теперь, удовлетворяя функции (2.8) граничным условиям (2.4), (2.5) для нахождения a_n, b_n, получим систему

$$\begin{cases} a_n I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q) + b_n K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q) = \varphi_n \beta^{-\frac{1}{2}} \\ a_n J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q) + b_n C_q[J_{1-\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q) - J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q) + \lambda_{qn}] = \frac{\psi_n}{p_n q\alpha^{q-\frac{1}{2}}}, \end{cases} \tag{2.9}$$

здесь

$$C_q = \frac{\pi}{2\sin(\frac{\pi}{2q})}, \quad \lambda_{qn} = \frac{\lambda}{\frac{1}{2q}\Gamma(\frac{-1}{2q})}(\frac{2}{p_n})^{\frac{1}{2q}}\frac{1}{p_n q\alpha^{q-\frac{1}{2}}}.$$

Если при всех $n \in N$ определитель системы (2.9)

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)E(n) \neq 0, \tag{2.10}$$

где

$$E(n) = C_q[J_{1-\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q) - J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q) + \lambda_{qn}] - \frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n(\alpha)^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)},$$

то данная система имеет единственное решение

$$a_n = \frac{1}{\Delta_n(\alpha,\beta)}[\varphi_n\beta^{-\frac{1}{2}}C_q A_n - B_n\psi_n], \tag{2.11}$$

$$b_n = \frac{1}{\Delta_n(\alpha,\beta)}[C_n\psi_n - \beta^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q)\varphi_n], \tag{2.12}$$

где

$$A_n = J_{1-\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q) - J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q) + \lambda_{qn},$$

$$B_n = \frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)}{p_n q\alpha^{q-\frac{1}{2}}},\ C_n = \frac{I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)}{p_n q\alpha^{q-\frac{1}{2}}}.$$

С учетом (2.11) и (2.12) из (2.8) найдем окончательный вид функции

$$u_n(y)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta_n(\alpha,\beta)}[\varphi_n\beta^{-\frac12}\sqrt{y}\Delta_n(\alpha,y)+\\ +\psi_n\sqrt{y}(C_nK_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)-B_nI_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q))], & y>0,\\ \frac{1}{\Delta_n(\alpha,\beta)}[-\varphi_n\beta^{-\frac12}\sqrt{-y}D_n(\alpha,-y)+\\ +\psi_n\sqrt{-y}(B_nJ_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)+C_n\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q))], & y<0,\end{cases} \tag{2.13}$$

где

$$\Delta_n(\alpha,y)=C_qA_nI_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)-J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q),$$
$$D_n(\alpha,-y)=C_qA_nJ_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)+J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q).$$

Аналогично получим, что функция $u_0(y)$ является решением краевой задачи:

$$u_0''(y)-b^2y^mu_0(y)=0,\quad y>0,$$
$$u_0''(y)+b^2y^mu_0(y)=0,\quad y<0, \tag{2.14}$$

$$u_0(0+0)=u_0(0-0),\quad u_0'(0+0)=u_0'(0-0), \tag{2.15}$$

$$u_0(\beta)=\sqrt{\frac{1}{l}}\int\limits_0^l\varphi(x)dx=\varphi_0, \tag{2.16}$$

$$u_0'(-\alpha)-\lambda u_0(0)=\sqrt{\frac{1}{l}}\int\limits_0^l\psi(x)dx=\psi_0. \tag{2.17}$$

Рассмотрим сначала случай когда $b>0$. Общее решение уравнений (2.14) имеет вид

$$u_0(y)=\begin{cases}a_0I_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q)\sqrt{y}+b_0K_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q)\sqrt{y}, & y>0,\\ c_0J_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q)\sqrt{-y}+d_0Y_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q)\sqrt{-y}, & y<0.\end{cases} \tag{2.18}$$

Удовлетворяя (2.18) условиям (2.15) – (2.17), найдем

$$u_0(y)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta_0(\alpha,\beta)}[\varphi_0\beta^{-\frac12}\sqrt{y}\Delta_0(\alpha,y)+\\ +\psi_0\sqrt{y}(C_0K_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q)-B_0I_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q))], & y>0,\\ \frac{1}{\Delta_0(\alpha,\beta)}[-\varphi_0\beta^{-\frac12}\sqrt{-y}D_0(\alpha,-y)+\\ +\psi_0\sqrt{-y}(B_0J_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q)+C_0\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q))], & y<0,\end{cases} \tag{2.19}$$

где

$$A_0=J_{1-\frac{1}{2q}}(p_0\alpha^q)-J_{\frac{1}{2q}-1}(p_0\alpha^q)+\lambda_{q0},$$
$$B_0=\frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_0\beta^q)}{p_0q\alpha^{q-\frac12}},\ C_0=\frac{I_{\frac{1}{2q}}(p_0\beta^q)}{p_0q\alpha^{q-\frac12}},$$
$$D_0(\alpha,-y)=C_qA_0J_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q)+J_{\frac{1}{2q}-1}(p_0\alpha^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q),$$
$$\Delta_0(\alpha,y)=C_qA_0I_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q)-J_{\frac{1}{2q}-1}(p_0\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q),$$
$$\Delta_0(\alpha,\beta)=C_qA_0I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)-J_{\frac{1}{2q}-1}(p_0\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_0\beta^q).$$

Теперь вернемся к случаю, когда $b=0$. Общее решение уравнений (2.14) при $b=0$ определяется по формуле

$$u_0(y)=\begin{cases}\widetilde{a}_0 y+\widetilde{b}_0, & y>0,\\ \widetilde{c}_0 y+\widetilde{d}_0, & y<0.\end{cases} \tag{2.20}$$

Удовлетворяя функцию (2.20) условиям (2.15) – (2.17), будем иметь

$$u_0(y)=\varphi_0\frac{\lambda y+1}{1+\beta\lambda}+\psi_0\frac{y-\beta}{1+\beta\lambda},\quad 1+\beta\lambda\neq 0. \tag{2.21}$$

Таким образом, функция $u_0(y)$ представима в следующем виде:

$$u_0(y)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta_0(\alpha,\beta)}[\varphi_0\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y}\Delta_0(\alpha,y)+\\ +\psi_0\sqrt{y}(C_0K_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q)-B_0I_{\frac{1}{2q}}(p_0y^q))], & b>0,\quad y>0,\\ \frac{1}{\Delta_0(\alpha,\beta)}[-\varphi_0\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{-y}D_0(\alpha,-y)+\\ +\psi_0\sqrt{-y}(B_0J_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q)+C_0\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_0(-y)^q))], & b>0,\quad y<0,\\ \varphi_0\frac{\lambda y+1}{1+\beta\lambda}+\psi_0\frac{y-\beta}{1+\beta\lambda},\quad b=0,\quad y\in[-\alpha,\beta]. \end{cases} \tag{2.22}$$

Аналогично $u_n(y)$ построим функцию

$$\upsilon_n(y)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta_n(\alpha,\beta)}[\widetilde{\varphi}_n\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y}\Delta_n(\alpha,y)+\\ +\widetilde{\psi}_n\sqrt{y}(C_nK_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)-B_nI_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q))], & y>0,\\ \frac{1}{\Delta_n(\alpha,\beta)}[-\widetilde{\varphi}_n\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{-y}D_n(\alpha,-y)+\\ +\widetilde{\psi}_n\sqrt{-y}(B_nJ_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)+C_n\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q))], & y<0,\end{cases} \tag{2.23}$$

здесь

$$\widetilde{\varphi}_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\widetilde{\varphi}(x)\sin\mu_nxdx,\qquad \widetilde{\psi}_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\widetilde{\psi}(x)\sin\mu_nxdx.$$

Из формул (2.13), (2.22), (2.23) при выполнении условий (2.10) и $1+\beta\lambda\neq 0$ следует единственность решения задачи (1.2) – (1.6), так как если $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$ на $[0,l]$, то $u_n(y)\equiv 0$, $\upsilon_n(y)\equiv 0$, $u_0(y)\equiv 0$ при любом $n\in N$ и $y\in[-\alpha,\beta]$. Тогда из формул (2.1) и (2.2) следует

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\int\limits_0^l u(x,y)dx\equiv 0,\qquad \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u(x,y)\cos\mu_nxdx\equiv 0,$$
$$\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u(x,y)\sin\mu_nxdx\equiv 0,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда в силу полноты системы функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}},\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_nx,\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_nx\right\}$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что функция $u(x,y)=0$ почти всюду на отрезке $[0,l]$ при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку в силу (1.2) функция $u(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,y)\equiv 0$.

Если теперь нарушено условие (2.10) при некоторых m, b, l, α, β, $n=p$, т.е. $\Delta_p(\alpha,\beta)=0$. Тогда однородная задача (1.2) – (1.6), где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$, имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,y) = u_p(y)(C_1 \cos \mu_p x + C_2 \sin \mu_p x), \tag{2.24}$$

здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные,

$$u_p(y) = \begin{cases} \frac{1}{J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q)} \cdot \Delta_p(\alpha,y)\sqrt{y}, \quad y>0, \\ \\ \frac{1}{J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q)}[-C_q A_p J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)- \\ \\ -J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)]\sqrt{-y}, \quad y<0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Действительно, построенная функция (2.24) удовлетворяет всем условиям (1.2) – (1.6) при $F(x,y) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$. По построению функция (2.25) является решением уравнения (2.3) при $n = p$ и $y \neq 0$. Тогда функция (2.24) удовлетворяет условиям (1.2) – (1.4) при $F(x,y) \equiv 0$.

Граничное условие (1.5) выполняется, так как функция (2.24) при $y = \beta$ обращается в нуль в силу условия $\Delta_p(\alpha,\beta) = 0$.

Теперь проверим выполнимость условия (1.6). Для этого достаточно проверить условие $u'_p(-\alpha) - \lambda u_p(0) = 0$. Вычислим

$$u'_p(-\alpha) = C_q \frac{\lambda}{\frac{1}{2q}\Gamma(-\frac{1}{2q})}(\frac{2}{p_n})^{\frac{1}{2q}}, \; u_p(0) = -C_q \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2q})}(\frac{p_n}{2})^{-\frac{1}{2q}}.$$

Отсюда уже следует справедливость условия (1.6).

Таким образом, установлен критерий единственности решения задачи (1.2) – (1.6).

Теорема. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи (1.2) – (1.6), то оно единственно только тогда, когда $\Delta_n(\alpha,\beta) \neq 0$ при всех $n \in N$.*

Литература

[1] Дезин А.А. On the solvable extensions of partial differential operators, Outlines of the Joint Soviet - American Symposium on Partial Differential Equations, 1963. Novosibirsk. С. 65–66.

[2] Дезин А.А. Операторы с первой производной по времени и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР, 1967. Т. 31. № 1. С. 61–86.

[3] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[4] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения, 2009, Т. 45. № 8. С. 1199–2003.

[5] Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанных типов дифференциальных уравнений (Изд-во КБНЦ РАН, Нальчик – 2011).

[6] Сабитов К.Б., Новикова В.А. Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Изв. вузов. 2016. Т. 6. С. 61–72.

[7] Сабитов К.Б., Гущина (Новикова) В.А. Задача Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Изв. вузов (принята в печать).

[8] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.

[9] Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 1. С. 105–113.

[10] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 68–78.

[11] Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Физматлит. 2003. 352 с.

References

[1] Dezin AA On the solvable extensions of partial differential operators, Outlines of the Joint Soviet — American Symposium on Partial Differential Equations, 1963. Novosibirsk. P. 65–66.

[2] Dezin AA Operators of the first time derivative and nonlocal boundary conditions. Proceedings AN of SSSR, 1967. T. 31. № 1. P. 61–86.

[3] Nahushev AM Problems with shift for partial differential equations. M .: Science, 2006. 287 p.

[4] Nakhusheva ZA A nonlocal problem AA Dezin for the Lavrent'ev-Bitsadze. Differents. equation. 2009. T. 45. № 8. P. 1199–2003.

[5] Nakhusheva ZA Non-local boundary value problems for the major and mixed types of differential equations (Publ KBSC RAS, Nalchik — 2011).

[6] KB Sabitov, Novikova VA A nonlocal problem AA Dezin for the Lavrent'ev — Bitsadze's equation. Proceedings of universities. 2016. T. 6. P. 61–72.

[7] KB Sabitov, Gushina (Novikova) VA The Dezin's problem for inhomogeneous Lavrent'ev - Bitsadze's equation. Proceedings of universities (accepted for publication).

[8] KB Sabitov Dirichlet problem for equations of mixed type in rectangular area. Report RAN. 2007. T. 413. № 1. P. 23–26.

[9] KB Sabitov, Sidorenko OG The problem with periodicity conditions for a mixed-type degenerate equation. Differential equations. 2010. T. 46. № 1. P. 105–113.

[10] KB Sabitov, Vagapova EV The Dirichlet is problem for an equation of mixed type with two lines of degeneracy in a rectangular area. Differential equations. 2013. T. 49. № 1. P. 68–78.

[11] KB Sabitov Equations of mathematical physics M.: FIZMATLIT. 2003. 352 p.

V.A. Gushchina[2]

DEZIN NONLOCAL PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION WITH POWER DEGENERATION

In this article, for the equation of mixed elliptic - hyperbolic type with a power degeneracy on the transition line in a rectangular area are studied the problem Dezin with periodicity conditions and non-local condition, binding values of the normal derivative on the lower base of the rectangle with the value of the target solution on the line type of study. Necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the solution were settled, and the uniqueness of the solution was proved problem on the based on completeness of the system of peculiar functions of one-problem or the peculiar.

Key words: the degree of degeneracy, the transition line, nonlocal condition, rectangular area, the uniqueness of solution, one-dimensional problem, the uniqueness.

Статья поступила в редакцию 13/ V/2016.

The article received 13/ V/2016.

[2] *Gushchina Violetta Aleksandrovna* (violetta.novikova.1991@mail.ru), Department of Math, Volga region socially-humanitarian academy, 55/57 Maxim Gorky str., Samara, 443090, Russian Federation.

УДК 517.956.3

В.Б. Дмитриев[1]

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе рассматриваются начально-краевые задачи с нелокальными граничными условиями, содержащими интегральный оператор, для уравнения четвертого порядка. Доказана единственность решения. Рассмотрены вспомогательные задачи. Применен метод регуляризации, получены априорные оценки решения. Доказана разрешимость вспомогательных задач и операторного уравнения, приводящие к результату разрешимости исходных задач.

Ключевые слова: уравнение 4-го порядка, нелокальные условия, теоремы вложения, обобщенное решение, пространства Соболева.

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений с частными производными в настоящее время весьма активно изучаются, однако в основном рассматриваются уравнения второго порядка. Отметим некоторые из недавних работ по исследованию нелокальных задач для гиперболических и параболических уравнений [1], [2], [3] и список литературы в них.

Многочисленные работы по исследованию уравнений высокого порядка в своем большинстве связаны с изучением классических начальных и начально-краевых задач. В книге "Неклассические уравнения математической физики высокого порядка"[4] приведен обширный перечень работ, посвященных этим вопросам. Добавим к нему несколько более поздних работ: [5], [6].

Важный шаг был сделан в работе А. И. Кожанова и Л. С. Пулькиной [8], где была доказана однозначная разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений.

В настоящей работе доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка, содержащим как интегральный оператор от искомого решения, так и значение производной от него на границе.

Дмитриев Виктор Борисович (dmitriev_v.b@mail.ru), Самарский колледж железнодорожного транспорта им. А.А. Буянова, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный переулок, 18.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv -D_t^4 u - (a(x,t)\, u_x)_x + c(x,t)\, u = f(x,t) \tag{1.1}$$

в прямоугольнике $Q_T = \{(x,\tau) : 0 < x < l, 0 < \tau < T\}$, и поставим для него следующие задачи:

Задача 1. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0,\ u_t(x,T) = 0, \tag{1.2}$$

$$u_x(l,t) = 0 \tag{1.3}$$

и нелокальному условию:

$$u_x(0,t) = \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy. \tag{1.4}$$

Задача 2. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.2), нелокальному условию (1.4) и условию

$$u(l,t) = 0. \tag{1.5}$$

Функция $K(y)$ предполагается заданной в $[0,l]$. При этом мы потребуем выполнения условий:

$$0 < \nu \leqslant a(x,t) \leqslant \mu. \tag{1.6}$$

Обозначим $W_2^{2,4}(Q_T)$ замыкание множества гладких функций, удовлетворяющих условиям (1.2), по норме

$$\|u\|_{2,4}^2 = \int\limits_0^T \left(\|u\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|D_2^4 u\|_{L_2(0,l)}^2 \right) dt.$$

Введем пространство

$$V(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^{2,4}(Q_T), D_t^4\, u \in L_2(Q_T)\};$$

введём обозначение

$$B_0(\lambda) = \sup_t |\lambda\, a(0,t) - a_t(0,t)|\,.$$

Получим условия единственности и затем условия существования решения каждой из задач 1 и 2 из пространства $W_2^{2,4}(Q_T)$; затем получим некоторый общий результат – условия существования единственного решения. Верна

Некоторые оценки. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$c \in C^1(\overline{Q_T}); a,\ a_t,\ a_x,\ a_{xx},\ a_{xxt} \in C(\overline{Q_T}), \tag{1.7}$$

$$c(x,t) > 0 \quad \forall (x,t) \in Q_T, -c_t(x,t) > 0; K \in C[0,l]; \tag{1.8}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q_T), f_x(x,t); \tag{1.9}$$

$$|\, a,\, a_t,\, a_x \,| \leqslant A_0; \tag{1.10}$$

далее, пусть для $k_0 = \int\limits_0^l K^2(y)\,dy$ *выполняются неравенства*

$$k_0\,A_0\,T < \frac{2}{\sqrt{3}}; k_0\,A_0\,a(x,t) - a_t(x,t) \geqslant \rho_1; \tag{1.11}$$

$$c(x,T) - \frac{\nu + l\,a(0,T)}{\nu\,l}\,a(0,T) - k_0\,a(0,T) \geqslant 0; \tag{1.12}$$

$$k_0\,A_0\,c(x,t) - c_t(x,t) - \frac{\rho_1 + 2A_0\,l}{\rho_1\,l}\,A_0 -$$

$$- \left(\frac{\rho_1 + 2(A_0^2\,k_0 + A_0)\,l}{\rho_1\,l} + k_0 \right) B_0(k_0\,A_0) \geqslant \delta_4 > 0; \tag{1.13}$$

$$c(x,T) \geqslant 0,\, c(x,T) - a_{xx}(x,T) \geqslant 0; \tag{1.14}$$

$$|c| \leqslant S_0,\, |c_x| \leqslant S_1 \quad \forall x, t; \tag{1.15}$$

$$T \leqslant \frac{3\,k_0\,A_0}{2\,(A_0 + S_1\,)},\, T < \rho_1/A_0 \tag{1.16}$$

для некоторых положительных констант A_0, ρ_1, δ_4, S_0, S_1.

Основная теорема. *Пусть выполняются условия (1.7)-(1.16). Тогда решение каждой из задач 1 и 2 из пространства* $W_2^{2,4}(Q_T)$ *существует и единственно.*

Доказательство теоремы проведем по следующей схеме:

1. Докажем единственность решений задач 1 и 2.

2. Сформулируем вспомогательные задачи и покажем, что задачи 1 и 2 эквивалентны операторным уравнениям относительно граничных значений решений соответствующих вспомогательных задач.

3. Докажем разрешимость вспомогательных задач.

4. Обоснуем полную непрерывность операторов, входящих в полученные в пункте 2 уравнения. Затем объединим результаты условий единственности и существования в следующей теореме.

Успешная реализация пунктов 1 — 4 и позволит утверждать, что решения обеих задач существуют единственны.

Приступим к выполнению нашей программы.

2. Доказательство единственности решения задач

Докажем единственность решения рассматриваемых задач при выполнении оценок (1.7)-(1.16).

Доказательство. Предположим, что каждая из поставленных задач имеет два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Умножим (1.1), где $u_1 - u_2$, на $u_t\, e^{-\lambda\, t}$ и проинтегрируем по области Q_T. Интегрируя по частям и учитывая условия (1.2) и (1.3) или (1.4) при $x = l$, получим:

$$\frac{3}{2}\lambda \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_{tt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, a - a_t)\, u_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l u_{tt}^2|_{t=T}\, dx +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, c - c_t)\, u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l a(x,T)\, u_x^2(x,T)\, dx +$$

$$+\frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l c(x,T)\, u^2(x,T)\, dx - \frac{\lambda^3}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt =$$

$$= - \int\limits_0^T a(0,t)\, u_t(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt. \tag{2.1}$$

Рассмотрим правую часть равенства (2.1) и сделаем некоторые оценки. Последнее слагаемое в правой части (2.1) сначала преобразуем:

$$- \int\limits_0^T a(0,t)\, u_t(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T a(0,t)\, u(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u_t(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \{\lambda\, a(0,t) - a_t(0,t)\}\, u(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt -$$

$$-a(0,T)\, u(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int\limits_0^l K(y)\, u_t(y,T)\, dy\, dt.$$

Теперь воспользуемся неравенством $|\, a(0,t)\,| \leqslant A_0$, вытекающим из условий теоремы, и, кроме того, заметим, что имеет место равенство

$$u(0,t) = \int\limits_x^0 u_\xi(\xi,t)\, d\xi + u(x,t).$$

Отсюда легко вывести неравенство

$$u^2(0,t) \leqslant \delta_i \int\limits_0^l u_x^2(x,t)\, dx + c(\delta_i) \int\limits_0^l u^2(x,t)\, dx, \quad c(\delta_i) = \frac{\delta_i + 1}{\delta_i\, l}. \tag{2.2}$$

Оно справедливо для любого $t \in [0,T]$. Далее, неравенство Коши в сочетании с (2.2) приводит к оценкам:

$$\left| \int_0^T a(0,t)\, u(0,t) \int_0^l K(y)\, u_t(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^T |\, a(0,t)\,|\, u^2(0,t)\, e^{-\lambda\, t}\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T |\, a(0,t)\,| \left(\int_0^l K(y)\, u_t(y,t)\, dy \right)^2 e^{-\lambda\, t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\, A_0 \int_0^T u^2(0,t)\, e^{-\lambda\, t}\, dt + \frac{1}{2}\, A_0 \int_0^T \left(\int_0^l K^2(y)\, dy \right) \cdot \int_0^l u_t^2(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant A_0\, \frac{\delta_1}{2} \int_0^T \int_0^l u_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + A_0\, \frac{c(\delta_1)}{2} \int_0^T \int_0^l u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{A_0\, k_0}{2} \int_0^T \int_0^l u_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt;$$

$$\left| \int_0^T \{\lambda\, a(0,t) - a_t(0,t)\}\; u(0,t) \int_0^l K(y)\, u(y,t) dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant B_0(\lambda)\, \frac{\delta_2}{2} \int_0^T \int_0^l u_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + B_0(\lambda)\, \frac{c(\delta_2)}{2} \int_0^T \int_0^l u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{B_0(\lambda)\, k_0}{2} \int_0^T \int_0^l u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt;$$

$$\left| a(0,T)\, u(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int_0^l K(y)\, u(y,T)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_3}{2}\, a(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int_0^l u_x^2(x,T)\, dx + \frac{c(\delta_3)}{2}\, a(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int_0^l u^2(x,T)\, dx +$$

$$+ \frac{a(0,T)\, k_0}{2}\, e^{-\lambda\, T} \int_0^l u^2(x,T)\, dx.$$

В этих неравенствах δ_i выберем следующим образом:

$$\delta_1 = \frac{\rho_1}{2\, A_0}, \delta_2 = \frac{\rho_1}{2(A_0^2\, k_0 + A_0)}, \delta_3 = \frac{\nu}{a(0,T)}.$$

Тогда

$$c(\delta_1) = \frac{\rho_1 + 2A_0\, l}{\rho_1\, l}, c(\delta_2) = \frac{\rho_1 + 2(A_0^2\, k_0 + A_0)\, l}{\rho_1\, l}, c(\delta_3) = \frac{\rho_1 + 2A_0\, l}{\rho_1\, l}.$$

Так как на основании теорем вложения ([7], с.143) справедливо неравенство ([4], с.11)

$$\|D_t^k u\|_0^2 \leqslant \varepsilon \|u\|_{1,2}^2 + c(\varepsilon)\, \|u\|_0^2,$$

где обозначено $\|u\|_0 = \|u\|_{L_2}$, то с учетом того, что функция $k_0\, A_0\, c(x,t) - c_t(x,t)$ достаточно велика, получим $\int\limits_0^T \int\limits_0^l u^2\, dx\, dt \leqslant 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Можно избежать неопределенности условия «функция $k_0\, A_0\, c(x,t) - c_t(x,t)$ достаточно велика», если потребовать выполнения следующих условий, вытекающих из условий теоремы:

$$\lambda^2\, T^2 < \frac{4}{3}, c(x,T) - \frac{\nu + l\, a(0,T)}{\nu\, l}\, a(0,T) - k_0\, a(0,T) \geqslant 0;$$

$$k_0\, A_0\, c(x,t) - c_t(x,t) - \frac{\rho_1 + 2A_0\, l}{\rho_1\, l}\, A_0 -$$

$$-\left(\frac{\rho_1 + 2(A_0^2\, k_0 + A_0)\, l}{\rho_1\, l} + k_0\right) B_0(k_0\, A_0) \geqslant \delta_4 > 0.$$

Эти условия получены в результате громоздких преобразований. Продемонстрируем их вывод. Прежде всего, заметим, что справедливо представление

$$D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}} = \int\limits_0^t (D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}})_t\, dt = \int\limits_0^t D_t^2 v e^{-\frac{\lambda t}{2}}\, dt - \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^t D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}}\, dt,$$

из которого можно получить неравенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (D_t v)^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant T^2 \int\limits_0^T \int\limits_0^l (D_t^2 v)^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt + \frac{\lambda^2\, T^2}{4} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (D_t v)^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt. \tag{2.3}$$

Если $\lambda^2\, T^2 < 4$, то из неравенства (2.3) следует, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (D_t v)^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{4T^2}{4 - \lambda^2\, T^2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (D_t^2 v)^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Теперь выясним, можно ли подобрать число λ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{3}{2}\lambda - \frac{2\, \lambda^3\, T^2}{4 - \lambda^2\, T^2} - \frac{k_0\, A_0}{2}\right) \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_{tt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l \Big\{ c(x,T) - c(\delta_3)\, a(0,T) - k_0\, a(0,T) \Big\}\, u^2(x,T)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Big(\lambda\, c - c_t - c(\delta_1)\, A_0 - c(\delta_2)\, B_0(\lambda) - k_0\, B_0(\lambda) \Big)\, u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int\limits_0^l \Big\{a(x,T)-\delta_3\,a(0,T)\Big\}\,u_x^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l \Big(\lambda\,a-a_t-\delta_1\,A_0-\delta_2\,B_0(\lambda)\Big)\,u_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt\leqslant 0,$$

которое получено из (2.1) с помощью выведенных оценок.

Положив $\lambda=\lambda_0=k_0\,A_0$, убеждаемся в том, что если выполнены наши предположения, то

$$\frac{3}{2}\lambda-\frac{2\,\lambda^3\,T^2}{4-\lambda^2\,T^2}-\frac{k_0\,A_0}{2}\geqslant 0,\ c(x,T)-c(\delta_3)\,a(0,T)-k_0\,a(0,T)\geqslant 0,$$

$$\lambda\,c-c_t-c(\delta_1)\,A_0-c(\delta_2)\,B_0(\lambda)-k_0\,B_0(\lambda)\geqslant\delta_4>0,$$

$$a(x,T)-\delta_3\,a(0,T)\geqslant 0,$$

$$\lambda\,a-a_t-\delta_1\,A_0-\delta_2\,B_0(\lambda)\geqslant 0,$$

откуда, в частности, $\int\limits_0^T\int\limits_0^l u^2\,dx\,dt\leqslant 0$, стало быть, $u(x,t)=0$, что и доказывает наше утверждение.

3. Вспомогательная задача

Теперь, следуя плану, рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача 1а. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и граничным условиям

$$u_x(0,t)=\mu(t),\quad u_x(l,t)=0. \tag{3.1}$$

Задача 2а. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и граничным условиям

$$u_x(0,t)=\mu(t),\quad u(l,t)=0. \tag{3.2}$$

Лемма. Если выполняются условия согласования

$$D^k\mu|_{t=0}=0, k=0,1,2, D^1\mu|_{t=T}=0, \tag{3.3}$$

то задачи 1 и 2 эквивалентны операторному уравнению

$$\mu(x,t)=\int\limits_0^l K(y)\,u_i(y,t)\,dy,\ i=1,2, \tag{3.4}$$

где $u_i(x,t)$ — решения вспомогательных задач 1а и 2а соответственно.

Доказательство. Пусть задача 1 имеет решение $u(x,t)\in W_2^{2,4}(Q_T)$. Тогда существует граничное значение производной $u_x(0,t)$, которое обозначим $\mu(x,t)$. В силу условия (1.3)

$$\mu(x,t) = \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy.$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям $u_x(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = 0$, т.е. является решением задачи 1a. Пусть теперь $\mu(x,t)$ — решение уравнения (3.4), где $u(x,t)$ — решение задачи 1a, т.е. удовлетворяет уравнению (1.1), условиям (1.2) и (3.2). Но тогда эта функция, являясь решением уравнения (3.4), удовлетворяет и условию (1.3), стало быть, является решением задачи 1. Аналогичные рассуждения можно провести для задачи 2.

Теорема 3. Если выполняются условия (1.7), (1.9) основной теоремы, $\mu(x,t) \in W_2^4(0,T)$ и

$$D^k \mu|_{t=0} = 0, k = 0,1,2, \quad D^1 \mu|_{t=T} = 0, \tag{3.5}$$

то существует решение задачи 1a, принадлежащее пространству $W_2^{2,4}(Q_T)$.

Доказательство. Введя новую неизвестную функцию $v(x,t)$, положив $v(x,t) = u(x,t) + w(x,t)$, где функция $w(x,t) = \dfrac{(l-x)^2}{2l}\, \mu(t)$, перейдем к задаче с однородными граничными условиями:

$$Lv = F(x,t), F(x,t) = f(x,t) - Lw, \tag{3.6}$$

$$D^k v|_{t=0} = 0, k = 0,1,2, D^1 v|_{t=T} = 0, \tag{3.7}$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0. \tag{3.8}$$

Решающую роль в доказательстве теоремы играет априорная оценка, к выводу которой мы и приступим.

4. Априорная оценка

Воспользуемся методом регуляризации. Определим оператор

$$L_\varepsilon v = Lv - \varepsilon\, v_{xxt},\ \varepsilon > 0,$$

и рассмотрим задачу: найти функцию $v(x,t) \in V(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_\varepsilon v = F(x,t) \tag{4.1}$$

и условиям (3.7), (3.8).

Хорошо известно [6, 13], что задача с условиями (3.7), (3.8) для уравнения (4.1) с фиксированным $\varepsilon > 0$ однозначно разрешима в нужном классе функций.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l L_\varepsilon v\, v_t\, e^{-\lambda t}\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_0^l F(x,t)\, v_t\, e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая условия (3.7), (3.8), получим:

$$\frac{3}{2}\lambda\int_0^T\int_0^l v_{tt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l (\lambda\, a - a_t)\, v_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l (\lambda\, c - c_t)\, v^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon\int_0^T\int_0^l v_{xt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2}\int_0^l a(x,T)\, v_x^2(x,T)\, dx +$$

$$+\frac{e^{-\lambda\, T}}{2}\int_0^l c(x,T)\, v^2(x,T)\, dx - \frac{\lambda^3}{2}\int_0^T\int_0^l v_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^T\int_0^l F(x,t)\, v_t\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.2}$$

На следующем этапе рассмотрим равенство

$$\int_0^T\int_0^l L_\varepsilon v\, v_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = \int_0^T\int_0^l F(x,t)\, v_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.3}$$

Заметим, что с учётом $(av_x)_x = a_x v_x + a v_{xx}$ имеет место

$$\int_0^T\int_0^l a_x v_x\, v_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = -\int_0^T\int_0^l (a_x v_x)_x\, v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt =$$

$$= -\int_0^T\int_0^l (a_{xx} v_x + a_x v_{xx})\, v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt =$$

$$= -\int_0^l a_{xx}\,\frac{v_x^2}{2} e^{-\lambda\, t}\, dx\Big|_0^T + \int_0^T\int_0^l (a_{xxt} - \lambda\, a_{xx})\,\frac{v_x^2}{2} e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt - \int_0^T\int_0^l a_x\, v_{xx}\, v_{xt} e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

С учётом начальных условий $(v_{tt}|_{t=0} = 0)$ имеем:

$$v_t = \int_0^t v_{\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau,\; v_{xt} = \int_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau.$$

Эти равенства нам понадобятся в дальнейшем. Применим их в оценке слагаемых:

$$\int_0^T\int_0^l a_x\, v_{xx}\, v_{xt} e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = \int_0^T\int_0^l a_x\, v_{xx}\int_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau\, e^{-\lambda\, t/2} e^{-\lambda\, t/2}\, dx\, dt.$$

$$\left|\int_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau\, e^{-\lambda\, t/2}\right| = \left|\int_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, e^{-\lambda\, t/2}\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\; e^{-\lambda\, t/2}\, d\tau \leqslant \int\limits_0^t |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\; e^{-\lambda\, \tau/2}\, d\tau,$$

поскольку $e^{-\lambda\,\tau/2} \geqslant e^{-\lambda\, t/2}$ в силу того, что $\tau \leqslant t$.

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_0^l a_x\, v_{xx} \int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau\, e^{-\lambda\, t/2} e^{-\lambda\, t/2}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\, e^{-\lambda\,\tau/2}\, d\tau \cdot \int\limits_0^T |a_x\, v_{xx}|\, e^{-\lambda\, t/2}\, dt \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T |v_{x\tau\tau}(x,\tau)| e^{-\lambda\,\tau/2}\, d\tau \right)^2 dx \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T |a_x\, v_{xx}|\, e^{-\lambda\, t/2}\, dt \right)^2 dx \right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2_{x\tau\tau}(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \cdot T \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T a_x^2\, dt \right) \cdot \left(\int\limits_0^T v^2_{xx} e^{-\lambda\, t}\, dt \right) dx \right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2_{x\tau\tau}(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2_{xx} e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx \right)^{\frac12}.$$

Здесь $C_4 = \left(T \cdot \sup\limits_x \int\limits_0^T a_x^2\, dt \right)^{\frac12}$. Далее, преобразование (4.3) приводит к равенству:

$$\frac32 \lambda \int\limits_0^T \int\limits_0^l {v_{xtt}}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac12 \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, a - a_t)\, v^2_{xx}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac12 \int\limits_0^T \int\limits_0^l (a_{xxt} - \lambda\, a_{xx})\, v^2_x\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon \int\limits_0^T \int\limits_0^l v^2_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l a(x,T)\, v^2_{xx}(x,T)\, dx +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l \{ c(x,T) - a_{xx}(x,T) \}\, v^2_x(x,T)\, dx - \frac{\lambda^3}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l v^2_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, F - F_x)\; v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^l c\, v\, v_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^l a_x\, v_{xx}\, v_{xt} e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.4}$$

Наконец, рассмотрим равенство

$$-\int_0^T\int_0^l L_\varepsilon v\, D_t^4 v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = -\int_0^T\int_0^l F(x,t)\, D_t^4 v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

После преобразований получим:

$$\int_0^T\int_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon \int_0^T\int_0^l (D_t^2\, v_x)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt+$$

$$+\varepsilon\, d_1 \int_0^T\int_0^l v_{xt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = -\int_0^T\int_0^l (a\, v_x)_x\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt$$

$$+\int_0^T\int_0^l cv\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt - \int_0^T\int_0^l F(x,t)\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.5}$$

(Здесь $d_1 = const.$) Приступим к выводу оценок. Применив неравенство Коши, получим из (4.2):

$$\frac{3}{2}\lambda\int_0^T\int_0^l v_{tt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l (\lambda\, a - a_t)\, v_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l (\lambda\, c - c_t)\, v^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon\int_0^T\int_0^l v_{xt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2}\int_0^l a(x,T)\, v_x^2(x,T)\, dx+$$

$$+\frac{e^{-\lambda\, T}}{2}\int_0^l c(x,T)\, v^2(x,T)\, dx \leqslant \delta_5 \int_0^T\int_0^l v_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt+$$

$$+c(\delta_5)\int_0^T\int_0^l F^2(x,t)\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{\lambda^3}{2}\int_0^T\int_0^l v_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.6}$$

В (4.4) проинтегрируем по частям

$$\int_0^T\int_0^l c\, v\, v_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = -\int_0^T\int_0^l c_x\, v\, v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt - \int_0^T\int_0^l c\, v_x\, v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt,$$

а затем оценим слагаемые в правой части. Преобразовывая подынтегральное выражение и затем применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\left|\int_0^T\int_0^l c_x\, v\, v_{xt} e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt\right| = \left|\int_0^T\int_0^l c_x\, v \int_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau\, e^{-\lambda\, t/2} e^{-\lambda\, t/2}\, dx\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^l \left(\int_0^T |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\, e^{-\lambda\, \tau/2}\, d\tau \cdot \int_0^T |c_x|\cdot|v| e^{-\lambda\, t/2}\, dt\right)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^l \int_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \cdot T \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^l \left(\int_0^T c_x^2\, dt \right) \cdot \left(\int_0^T v^2\, e^{-\lambda\, t}\, dt \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left(\int_0^l \int_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^l \int_0^T v^2 e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $C_5 = \left(T \cdot \sup\limits_x \int_0^T c_x^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Далее, имеем

$$\int_0^T \int_0^l c\, v_x\, v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l (\lambda\, c - c_t)\, v_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

Теперь из (4.3) получим:

$$\frac{3}{2}\lambda \int_0^T \int_0^l v_{xtt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l (\lambda\, a - a_t)\, v_{xx}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l (\lambda\, c - c_t + a_{xxt} - \lambda\, a_{xx})\, v_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^l v_{xxt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int_0^l a(x,T)\, v_{xx}^2(x,T)\, dx + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int_0^l \{c(x,T) - a_{xx}(x,T)\}\, v_x^2(x,T)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_3(\delta_6) \int_0^T \int_0^l |F - F_x|^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \delta_6 \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau \right)^2 e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{\lambda^3}{2} \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau \right)^2 e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ C_4 \left(\int_0^l \int_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^l \int_0^T v_{xx}^2 e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ C_5 \left(\int_0^l \int_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^l \int_0^T v^2 e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.7)$$

Умножим (4.6) на произвольное число $d > 0$ и сложим с (4.7), получим:

$$\frac{3}{2}\,d\,\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{tt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,a-a_t)\,v_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{3}{2}\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xtt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,a-a_t)\,v_{xx}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,c-c_t)\,v^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\varepsilon\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\,d\int\limits_0^l a(x,T)\,v_x^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,c-c_t+a_{xxt}-\lambda\,a_{xx})\,v_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xxt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l a(x,T)\,v_{xx}^2(x,T)\,dx+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\,d\int\limits_0^l c(x,T)\,v^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l\{c(x,T)-a_{xx}(x,T)\}\,v_x^2(x,T)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c(\delta_5)\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l F^2(x,t)\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{\lambda^3}{2}\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\delta_5\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_t^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+c_3(\delta_6)\int\limits_0^T\int\limits_0^l|F-F_x|^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\delta_6\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{\lambda^3}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+C_4\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{xx}^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+C_5\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что теоремы вложения для анизотропных пространств гарантируют существование и принадлежность нужным классам всех производных, возникающих при интегрировании исходных равенств [4]. Далее, мы используем следующие неравенства:

$$C_4\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{xx}^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_4}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx+\frac{C_4}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{xx}^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx;$$

$$C_5\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_5}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx+\frac{C_5}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^T v^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx.$$

Заметим, что в силу условий теоремы существования

$$c(x,T)\geqslant 0,\; c(x,T)-a_{xx}(x,T)\geqslant 0.$$

Тогда, приводя подобные слагаемые и требуя неотрицательности коэффициентов и слагаемых в левой части, после умножения на 2 получаем следующие условия, нужные нам для наших целей:

$$3\,\lambda\geqslant\frac{\lambda^3}{2}\cdot T^2+\,\delta_5\cdot T^2,$$

$$3\,\lambda\geqslant\left(T\cdot\sup_x\int\limits_0^T a_x^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}+\left(T\cdot\sup_x\int\limits_0^T c_x^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\lambda^3}{2}\cdot T^2+\,\delta_6\cdot T^2,$$

$$\lambda\,a-a_t>\left(T\cdot\sup_x\int\limits_0^T a_x^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}},\; d\,(\lambda\,c-c_t)>\left(T\cdot\sup_x\int\limits_0^T c_x^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d\,(\lambda\,a-a_t)+\lambda\,c-c_t+a_{xxt}-\lambda\,a_{xx}>0.$$

Возьмём $\delta_5=\delta_6$, тогда первое ограничение пропадает.

Заметим, что если $|a_x|\leqslant A_0$, $|c|\leqslant S_0$, $|c_x|\leqslant S_1\quad\forall x,t$, то для выполнения второго ограничения достаточно положить

$$3\,\lambda\geqslant T\;(A_0+S_1)+\lambda^3\cdot\frac{T^2}{2}+\,\delta_6\cdot T^2. \tag{4.8}$$

В этом равенстве параметр λ можно положить практически любым и подобрать T. Но, исходя из некоторых соображений удобства и из доказательства единственности решения, мы положим $\lambda=\lambda_0=k_0\,A_0$.

Далее, можно положить

$$\lambda\,a-a_t>T\,A_0,\; d\,(\lambda\,c-c_t)>\lambda\,C_5, \tag{4.9}$$

$$d\,(\lambda\,a-a_t)+\lambda\,c-c_t+a_{xxt}-\lambda\,a_{xx}>T\,S_0, \tag{4.10}$$

Первое неравенство в (4.9) будет выполняться для нашего $\lambda=\lambda_0$ согласно условиям теоремы, поскольку $T<\rho_1/A_0$, а для выполнения второго, если положить d достаточно большим, достаточно потребовать $\lambda\,c-c_t\geqslant\delta_7$, где $\delta_7>0$. При этом, в силу условий теоремы достаточно положить $\delta_7=\delta_4$.

Условие (4.10) выполняется в силу условий теоремы: поскольку слагаемые ограничены, то $|\lambda\, c - c_t + a_{xxt} - \lambda\, a_{xx}| < \infty$, а тогда существует такое число M, что $\lambda\, c - c_t + a_{xxt} - \lambda\, a_{xx} > -M$. Тогда неравенство (4.10) будет выполняться, если $d \geqslant \dfrac{T\, S_0 + M}{\rho_1}$. Таким образом, мы сможем выбрать достаточно большое d для того, чтобы неравенства (4.9) и (4.10) выполнялись.

Далее, для выполнения неравенства (4.8) достаточно потребовать выполнения условий $3\,\lambda/2 \geqslant T\ (A_0 + S_1)$, $3\,\lambda/2 \geqslant \lambda^3 \cdot T^2/2 + \delta_6 \cdot T^2$.

Тогда для T получаем следующие условия:

$$T \leqslant \frac{3\,\lambda}{2\ (A_0 + S_1\,)},\; T^2 \leqslant \frac{3\,\lambda}{\lambda^3 + 2\,\delta_6}.$$

Таким образом, T должно удовлетворять всем этим условиям, то есть, должно быть достаточно мало.

В силу произвольности δ_6 достаточно потребовать $\lambda^2\, T^2 < 3$, а это выполняется в силу условий теоремы. (В силу условий теоремы $k_0\, A_0\, T < \frac{2}{\sqrt{3}}; k_0\, A_0\, a(x,t) - a_t(x,t) \geqslant \rho_1$.)

Вооружившись полученными оценками, продолжим доказательство теоремы существования решения. Для этого применим рассуждения, совершенно аналогичные тем, с помощью которых доказана теорема единственности. При соответствующих предположениях относительно коэффициента $c(x,t)$ мы можем воспользоваться и вариантом, представленным в замечании 1. Из (4.5) и (4.7) будем иметь:

$$M_1 \int_0^T \int_0^l \left[v_{tt}^2 + v_{xtt}^2 + v^2 + v_x^2 + v_{xx}^2\right]\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^l v_{xxt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ d\,\varepsilon \int_0^T \int_0^l v_{xt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \leqslant K_2 \int_0^T \int_0^l \left(F^2 + F_x^2\right)\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.11}$$

В правой части (4.5) сделаем оценки, заметим, что с учётом равенства: $(av_x)_x = a_x v_x + a v_{xx}$ имеет место:

$$\left| \int_0^T \int_0^l D_t^4\, v\, (a_x v_x + a v_{xx})\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_8}{2} \int_0^T \int_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_1(\delta_8) \int_0^T \int_0^l v_{xx}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_2(\delta_8) \int_0^T \int_0^l v_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

Здесь зависимости $c_1(\delta_8)$ и $c_2(\delta_8)$ определяются постоянными μ, A_0. Далее, имеем:

$$\left| \int_0^T \int_0^l c(x,t)\, v\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_8}{2} \int_0^T \int_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_2(\delta_8) \int_0^T \int_0^l v^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt;$$

$$\left| \int_0^T \int_0^l F(x,t)\, v\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_8}{2} \int_0^T \int_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_3(\delta_8) \int_0^T \int_0^l F^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

Положим в этих неравенствах $\delta_8 = 1/2$ и используем полученное ранее неравенство (4.11). В результате получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon\, M_3 \int_0^T \int_0^l (D_t^2\, v_x)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_3 \int_0^T \int_0^l \left(F^2 + F_x^2\right)\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.12}$$

Итогом проделанных преобразований и оценок является неравенство:

$$\|v\|^2_{W_2^{2,4}(Q_T)} + \varepsilon(\|D_t^2 v_x\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v_{xt}\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v_{xxt}\|^2_{L_2(Q_T)}) \leqslant$$

$$\leqslant K\, \|F\|^2_{W_2^{0,1}(Q_T)}, \tag{4.13}$$

справедливое для функций, принадлежащих пространству V. Эта оценка позволяет завершить доказательство теоремы 2. Действительно, обозначим $\{v^\varepsilon(x,t)\}$ — семейство решений задачи (4.1), (3.7), (3.8) для $\varepsilon > 0$. Для любой из этих функций справедлива оценка

$$\|v^\varepsilon\|^2_{W_2^{2,4}(Q_T)} + \varepsilon \|D_t v^\varepsilon_{xx}\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant K, \tag{4.14}$$

где $K > 0$ и не зависит от ε. Но тогда из семейства $\{v^\varepsilon(x,t)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v^{\varepsilon_n}(x,t)\}$ слабо сходящуюся к $v(x,t) \in W_2^{2,4}(Q_T)$ при $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$. Этот предел и есть единственное решение задачи 1a с однородными граничными условиями для п.в. $(x,t) \in Q_T$. Тогда $u(x,t) = v(x,t) - w_1(x,t)$ — решение задачи 1a.

Теорема 4. Если выполняются условия (5), (7) основной теоремы, $\mu(x,t) \in W_2^{2,4}(Q_T)$ и

$$\mu(x,0) = \mu_t(x,0) = \mu_{tt}(x,0) = 0, \tag{4.15}$$

$$\mu_t(x,T) = 0. \tag{4.16}$$

то существует единственное решение задачи 2a, принадлежащее пространству $W_2^{2,4}(Q_T)$.

Доказательство почти полностью совпадает с доказательством теоремы 1. Единственное отличие состоит в выборе функции $w_2(x,t) = (x - l)\, \mu(x,t)$, с помощью которой задачу 2a можно свести к задаче с однородными условиями. Получена оценка

$$\|v\|^2_{W_2^{2,4}(Q_T)} + \varepsilon(\|D_t^2 v_x\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v_{xt}\|^2_{L_2(Q_T)} + \|D_t v_{xx}\|^2_{L_2(Q_T)}) \leqslant$$

$$\leqslant M\,\|G(x,t)\|^2_{W_2^{0,1}(Q_T)}, \tag{4.17}$$

где по-прежнему $v(x,t)$ — решение вспомогательной задачи 2a с однородными условиями, $G(x,t) = f(x,t) - L\,w_2(x,t)$ — новая правая часть после перехода к задаче с однородными условиями.

Перейдем к завершающему этапу доказательства основной теоремы.

Обозначим $u_\mu(x,t)$ — решение задачи 1a для однородного уравнения (1.1), а $u_f(x,t)$ — решение задачи 1a для уравнения (1.1), но с нулевыми условиями.

Тогда $u(x,t) = u_\mu(x,t) + u_f(x,t)$ в силу линейности задачи. Применив теперь к решению вспомогательной задачи интегральное условие из (1.3), получим:

$$\mu(x,t) = \int\limits_0^l K(y)\,u_\mu(y,t)\,dy + g(x,t), \tag{4.18}$$

где $g(x,t) = \int\limits_0^l K(y)\,u_f(y,t)\,dy$ и не зависит от $\mu(x,t)$. Заметим, что в силу полученных оценок и условий теоремы $g(x,t) \in W_2^4(0,T)$. Оператор $K\mu = \int\limits_0^l K(y)\,u_\mu(y,t)\,dy$ представляет собой композицию ограниченного в силу полученных оценок оператора $u(\mu)$ и вполне непрерывного интегрального, вследствие чего является вполне непрерывным оператором, действующим из $W_2^4(0,T)$ в $W_2^4(0,T)$. Но тогда в силу леммы об эквивалентности задачи 1 и доказанной в теореме 1 единственности ее решения операторное уравнение (4.18) однозначно разрешимо. Это означает, что существует функция $\mu(x,t)$ такая, что решение задачи 1a удовлетворяет интегральному условию (1.3). Проведенные рассуждения полностью применимы к задачам 2 и 2a. Теорема полностью доказана.

Литература

[1] *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[2] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространствено нелокальных задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. 2008. № 3(62). С. 165–174.

[3] Пулькина Л.С. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1084–1089.

[4] Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Изд-во ВЦ СО РАН, Новосибирск, 1995. 133 с. 1.

[5] Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Utrecht, 1999.

[6] Кожанов А.И. О разрешимости первой начально-краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа высокого порядка // Неклассические уравнения математической физики. Сб. научн. трудов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2007. С. 172–181.

[7] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Изд. ИЛ–М., 1961. 122 с.

[8] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Доклады Академии наук. Т. 404. № 5. 2005.

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: "Наука 1973. 408 с.

[10] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: "Наука 1967. 736 с.

[11] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Уч-к для ун-тов]. Изд. 4-е - М.: "Наука 1974. 331 с.

[12] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

[13] Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

References

[1] *A. I. Kozhanov, L. S. Pulkina* On the solvability of boundary value problems with nonlocal boundary conditions of integral form for multidimensional hyperbolic equations.// Differents. equation. 2006. 42. No. 9. P. 1166-1179.

[2] *A. I. Kozhanov* On the solvability of some spatial nonlocal problems for linear parabolic equations. //Vestnik SamSU. 2008. No. 3(62). P. 165-174.

[3] *L. S. Pulkina* Initial boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation. //Differents. equation. 2008. T. 44. No. 8. P. 1084-1089.

[4] *Egorov I. E., Fedorov V. E.* Nonclassical equations of mathematical physics. Publishing house SB RAS computing center, Novosibirsk, 1995. 133 C. 1.

[5] *A. I. Kozhanov* Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Utrecht, 1999.

[6] *A. I. Kozhanov* On the solvability of the first initial-boundary value problem for a class of degenerate Sobolev type equations of high order. //Nonclassical equations of mathematical physics. Sat. sci. works. Novosibirsk: Publishing house of Institute of mathematics of SB RAS, 2007. Pp. 172-181.

[7] *L. Harding* the Cauchy Problem for hyperbolic equations. Ed. IL – Moscow, 1961. 122 p.

[8] *A. I. Kozhanov, L. S. Pulkina* On the solvability of boundary value problems with nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations//Doklady mathematics, vol. 404, No. 5, 2005.

[9] *O. A. Ladyzhenskaya* Boundary value problems of mathematical physics. M.: Nauka, 1973, 408 S.

[10] *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. M.: "Nauka 1967. 736 S.

[11] *L.S. Pontryagin* Ordinary differential equations [section for universities]. Ed. 4th - M.: "Nauka 1974. 331. with silt.

[12] *Besov O. V., Il'in V. P., Nikolsky S. M.* Integral representations of functions and embedding theorems. M.: Nauka, 1975. 480 S.

[13] *S. Y. Yakubov*, Linear differential-operator equations and their applications. Baku: Elm Press, 1985.

V.B. Dmitriev[2]

A NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR A FOURTH ORDER EQUATION

In this paper we consider initial-boundary problems with integral conditions for certain fourth order equation. Unique solvability of posed problems is proved. The proof is based on apriori estimates, regularization method, auxiliary problems method, embedding theorems.

Key words: equation of 4-th order, nonlocal conditions, embedding theorems, generalized solution, Sobolev spaces.

Статья поступила в редакцию 22/ *VI*/2016.

The article received 22/ *VI*/2016.

[2] *Dmitriev Victor Borisovich* (dmitriev_v.b@mail.ru), Samara College of railway transport. A. A. Buyanova, Samara, 443066, Russian Federation.

УДК 517.95

Н.В. Зайцева[1]

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Для гиперболического уравнения с оператором Бесселя поставлена начально-граничная задача с интегральным нелокальным условием первого рода в прямоугольной области.

В работе поставленная задача с нелокальным интегральным условием первого рода эквивалентно сведена к локальной задаче с граничными условиями второго рода.

Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения эквивалентной задачи. Решение построено в явном виде в виде ряда Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

Затем показана однозначная разрешимость первоначальной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, оператор Бесселя, нелокальное интегральное условие, единственность, существование, ряд Фурье — Бесселя.

Введение

Пусть $D = \{(x,t)|0 < x < l, 0 < t < T\}$ – прямоугольная область координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ – заданные действительные числа. Обозначим часть границы области через $\Gamma_l = \{(x,t)|x = l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Рассмотрим в области D гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0, \tag{1}$$

где $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$ – заданное действительное число.

Уравнение (1) возникает, например, при переходе от декартовых координат к цилиндрическим в волновом уравнении при изучении радиальных колебаний газа в неподвижной неограниченной цилиндрической трубке, также при переходе к сферическим координатам при исследовании малых колебаний газа около его положения равновесия внутри непроницаемой оболочки сферической формы [1,

Зайцева Наталья Владимировна (n.v.zaiceva@yandex.ru), кафедра высшей математики и математического моделирования, Института математики и механики им. Н.И. Лобачесвского, Казанского (Приволжского) федерального университета, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

с.185, 191]. В работе [2, с.164 – 225] впервые и обстоятельно изучены краевые задачи Коши и Коши-Гурса для уравнения (1) при всех $k \geqslant 1$ в характеристическом треугольнике, а в [3] показана некорректность постановки этих задач при $k < 0$.

Работы [4], [5] посвящены изучению задачи Трикоми для уравнения смешанного типа, у которого гиперболическая часть совпадает с уравнением (1).

Постановка задачи. Найти функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_l) \cap C^2(D), \tag{2}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 0+0} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)\, x^k\, dx = A = \text{const}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

где A – заданное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\, x^k\, dx = A, \quad \int\limits_0^l \psi(x)\, x^k\, dx = 0. \tag{7}$$

Из постановки задачи (2) – (7) видно, что граничное условие (6) является нелокальным. Такое интегральное условие ранее возникло в работах [6] – [8] для уравнения теплопроводности, например, в [8] при изучении вопроса об устойчивости разрежения плазмы. Физически нелокальное условие (6) означает постоянство внутренней энергии системы.

В работах [9], [10] впервые методами функционального анализа изучены краевые задачи с интегральными условиями типа (6) и более сложными условиями для уравнения (1) при $k = 0$, для телеграфного уравнения и для более общих уравнений гиперболического типа с гладкими коэффициентами.

В работе [11] впервые исследована краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области с нелокальным условием (6).

Исследованию нелокальных задач для уравнений с оператором Бесселя посвящены работы [12] – [16] и других авторов.

В данной работе методом спектрального анализа [11], [17] – [20] доказаны теоремы единственности и существования решения задачи (2) – (7). При этом решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений (2) и (3).

Если умножить уравнение (1) на x^k и проинтегрировать при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, то получим

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt} x^k\, dx - \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\,dx - \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0. \tag{8}$$

В силу условий (2), (5) и (6) в равенстве (8) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, так как все слагаемые имеют конечные пределы при $\varepsilon \to 0$. В результате получим локальное граничное условие

$$u_x(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9}$$

В дальнейшем вместо задачи (2) – (7) будем рассматривать задачу (2) – (5), (9).

1. Единственность решения

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (2), (5) и (9) будем искать в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя данную функцию в уравнение (1) и граничные условия (5) и (9), после разделения переменных получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0+0} x^k X'(x) = 0, \quad X'(l) = 0, \tag{11}$$

где λ^2 – постоянная разделения.

Известно, что общее решение уравнения (10) имеет вид

$$X(x) = C_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x) + C_2 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \tag{12}$$

где $J_\nu(\xi)$, $J_{-\nu}(\xi)$– функции Бесселя первого рода не целых порядков, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Для того, чтобы функция (12) удовлетворяла первому условию из (11), положим $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. Таким образом, решение уравнения (10), удовлетворяющее первому условию из (11), имеет вид

$$X(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \tag{13}$$

Потребуем теперь, чтобы функция (13) удовлетворяла второму граничному условию из (11):

$$\frac{dX(x)}{dx}\bigg|_{x=l} = \left(-\lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x)\right)\bigg|_{x=l} = -\lambda l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l) = 0,$$

откуда получим

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{14}$$

Таким образом, система собственных функций задачи (10) и (11) имеет вид

$$X_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \ n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

а собственные значения μ_n определяются как нули уравнения (14).

Известно [21, с.633], что система собственных функций (15) ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k.

Также, согласно [22, с.317] для собственных значений задачи (10) и (11) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4} k + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Далее, следуя [11], [17] – [20], рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int\limits_0^l u(x,t) x^k X_n(x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{17}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (15). На основании (17) введем в рассмотрение вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) x^k X_n(x)\, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{18}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Продифференцируем равенство (18) по переменной t дважды при $0 < t < T$, и, с учетом уравнения (1), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t) x^k X_n(x)\, dx = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left(u_{xx} + \frac{k}{x} u_x\right) x^k X_n(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x) X_n(x)\, dx = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\, dx. \tag{19}$$

Из (18), в силу уравнения (10), будем иметь

$$u_{n,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) x^k \left[X''_n(x) + \frac{k}{x} X'_n(x)\right] dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) \frac{d}{dx}\left(x^k X'_n(x)\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[u(x,t) x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\, dx\right],$$

откуда находим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\, dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(x,t) x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), будем иметь

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x,t) x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{21}$$

Из формулы (13) следует, что $X_n(x) = O(1)$, $X'_n(x) = O(x)$ при $x \to 0$. Тогда с учетом условий (2), (5), (9) и (11), переходя в равенстве (21) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим для определения функций $u_n(t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{22}$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t, \tag{23}$$

где a_n, b_n – произвольные постоянные, требующие определения. С этой целью сначала функции (17) удовлетворим начальным условиям (4):

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)x^k X_n(x)\,dx = \int_0^l \varphi(x)x^k X_n(x)\,dx = \varphi_n, \tag{24}$$

$$u'_n(0) = \int_0^l u_t(x,0)x^k X_n(x)\,dx = \int_0^l \psi(x)x^k X_n(x)\,dx = \psi_n. \tag{25}$$

С учетом (24) и (25) из (23) будем иметь

$$u_n(0) = a_n = \varphi_n, \quad u'_n(0) = b_n\lambda_n = \psi_n,$$

откуда находим

$$a_n = \varphi_n, \quad b_n = \frac{\psi_n}{\lambda_n}. \tag{26}$$

Подставляя значения (26) в (23), найдем окончательный вид функции

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t. \tag{27}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (2) – (5), (9). Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$, тогда из (24) и (25) при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$. Из (27) получим, что $u_n(t) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (17) при любом $t \in [0,T]$ имеем

$$\int_0^l u(x,t)x^k X_n(x)\,dx = 0. \tag{28}$$

Отсюда, в силу полноты системы (15) в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Поскольку, согласно (2), функция $u(x,t) \in C(\overline{D})$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2) – (5), (9), то оно единственно.*

2. Существование решения

На основании найденных частных решений (15) и (27) решение задачи (2) – (5), (9) запишем в виде ряда Фурье-Бесселя

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{29}$$

где функции $u_n(t)$ определяются по формуле (27), а функции $X_n(x)$ – по формуле (15).

Рассмотрим следующие ряды, полученные формально из ряда (29) почленным дифференцированием:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) X_n(x), \quad u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X'_n(x). \tag{30}$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)X_n(x),\quad u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n''(x). \tag{31}$$

Теперь покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в начальные условия (4) задачи, ряд (29) и ряды (30), (31) сходятся равномерно в области $\overline{D}$.

Лемма 1. *Для достаточно больших n и при любом $t\in[0,T]$ справедливы оценки:*

$$|u_n(t)|\leqslant C_1\left(|\varphi_n|+\frac{|\psi_n|}{n}\right), \tag{32}$$

$$|u_n'(t)|\leqslant C_2\left(n|\varphi_n|+|\psi_n|\right), \tag{33}$$

$$|u_n''(t)|\leqslant C_3\left(n^2|\varphi_n|+n|\psi_n|\right), \tag{34}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство оценок (32) – (34) непосредственно следует из формул (27) и (16).

Лемма 2. *Для достаточно больших n и при всех $x\in[0,l]$ выполнены оценки:*

$$|X_n(x)|\leqslant C_4 n^{-\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

$$|X_n'(x)|\leqslant C_5 n^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

$$|X_n''(x)|\leqslant C_6 n^{\frac{3}{2}}. \tag{37}$$

Доказательство. Функция $X_n(x)=x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}\left(\lambda_n x\right)\in C^2[0,l]$ и при больших ξ справедлива оценка

$$J_\nu(\xi)=O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right). \tag{38}$$

Тогда из (38) следует справедливость оценки (35). Вычислим теперь

$$X_n'(x)=-\lambda_n x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k+1}{2}}\left(\lambda_n x\right). \tag{39}$$

Тогда из (38) и (39) следует справедливость оценки (36).

Из уравнения (10) запишем

$$X_n''(x)=-\frac{k}{x}X_n'(x)-\lambda_n^2X_n(x).$$

Отсюда в силу неравенств (35) и (36) следует справедливость оценки (37). ■

Согласно леммам 1 и 2 при любом $(x,t)\in\overline{D}$ ряд (29) мажорируется рядом

$$C_7\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-\frac{1}{2}}|\varphi_n|+n^{-\frac{3}{2}}|\psi_n|\right), \tag{40}$$

ряды (30) и (31) мажорируются соответственно рядами

$$C_8\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{2}}|\varphi_n|+n^{-\frac{1}{2}}|\psi_n|\right), \tag{41}$$

$$C_9\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{3}{2}}|\varphi_n|+n^{\frac{1}{2}}|\psi_n|\right). \tag{42}$$

Исследуем ряды (40) – (42) на сходимость.

Лемма 3. *Если функции $\varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$ и*

$$\varphi'(0)=\psi'(0)=\varphi'(l)=\psi'(l)=0,$$

то выполняются оценки:

$$|\varphi_n| \leqslant \frac{C_{10}}{n^4}, \qquad |\psi_n| \leqslant \frac{C_{11}}{n^2}. \tag{43}$$

Доказательство. С учетом (10), (11) и условий $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$ из (24) будем иметь

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^l \varphi(x)(x^k X_n'(x))' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\varphi(x) x^k X_n'(x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi'(x) x^k X_n'(x) dx\right] = \frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \varphi'(x) x^k X_n'(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2}\left[\varphi'(x) x^k X_n(x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l (\varphi'(x) x^k)' X_n(x) dx\right] = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l (\varphi'(x) x^k)' X_n(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x) dx - \frac{k}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \frac{\varphi'(x)}{x} x^k X_n(x) dx.$$

Введем обозначения

$$\varphi_n^{(2)} = \int\limits_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x) dx, \qquad \varphi_{1n} = \int\limits_0^l \varphi_1(x) x^k X_n(x) dx, \qquad \varphi_1(x) = \frac{\varphi'(x)}{x}, \tag{44}$$

в результате чего получим

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^2}\varphi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\varphi_{1n}. \tag{45}$$

В силу (10) и (11) первый интеграл из (44) преобразуем к виду:

$$\varphi_n^{(2)} = \int\limits_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \varphi''(x)\left(x^k X_n'(x)\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\varphi''(x) x^k X_n'(x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x) dx\right] = \frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x) dx = \frac{\varphi_n^{(3)}}{\lambda_n^2}, \tag{46}$$

где

$$\varphi_n^{(3)} = \int\limits_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x) dx.$$

Аналогично на основании (10), (11) и $\varphi'(l) = 0$ проинтегрируем по частям два раза второй интеграл из (44):

$$\varphi_{1n} = \int\limits_0^l \varphi_1(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \varphi_1(x)\left(x^k X_n'(x)\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\varphi_1(x) x^k X_n'(x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x) dx\right] = \frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x) dx = \frac{\varphi_{1n}^{(1)}}{\lambda_n^2}, \tag{47}$$

где

$$\varphi_{1n}^{(1)} = \int\limits_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x) dx,$$

и этот интеграл в силу (39) сходится.

Подставив (46) и (47) в равенство (45), найдем

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^4}\varphi_n^{(3)} - \frac{k}{\lambda_n^4}\varphi_{1n}^{(1)}. \tag{48}$$

Из (48) следует первая оценка из (43).

На основании (25) при $\psi'(0) = \psi'(l) = 0$, производя аналогичные вычисления, получим

$$\psi_n = \int\limits_0^l \psi(x) x^k X_n(x) dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \psi''(x) x^k X_n(x) dx - \frac{k}{\lambda_n^2}\int\limits_0^l \frac{\psi'(x)}{x} x^k X_n(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\psi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\psi_{1n}, \tag{49}$$

где

$$\psi_n^{(2)} = \int\limits_0^l \psi''(x) x^k X_n(x) dx, \quad \psi_{1n} = \int\limits_0^l \frac{\psi'(x)}{x} x^k X_n(x) dx.$$

Из (49) следует вторая оценка из (43). ■

Согласно лемме 3, ряды (40) – (42) мажорируются числовым рядом

$$C_{12}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}. \tag{50}$$

А, следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряды (29) – (31) в области $\overline{D}$ сходятся равномерно.

Таким образом, построена функция $u(x,t)$, определяемая рядом (29), которая удовлетворяет всем условиям задачи (2) – (5), (9). Тем самым доказана

Теорема 2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (2) – (5), (9), определяемое рядом (29), при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теперь покажем, что функция $u(x,t)$, заданная рядом (29), является решением задачи (2) – (7).

Теорема 3. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3 и условиям (7), то существует единственное решение задачи (2) – (7), определяемое рядом (29), при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (2) – (5), (9) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда уравнение (1) выполняется всюду в области D. Умножим уравнение (1) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. В результате получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t) x^k\, dx - \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0.$$

В последнем равенстве, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом условий (5) и (9), будем иметь

$$\int\limits_0^l u_{tt}(x,t)x^k\,dx = 0. \tag{51}$$

Проинтегрируем равенство (51) по переменной t, в результате имеем

$$\int\limits_0^l u_t(x,t)x^k\,dx = C_1 = \mathrm{const}. \tag{52}$$

Полученное равенство (52) проинтегрируем еще раз по переменной t. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_0^l u(x,t)x^k\,dx = C_1 t + C_2, \quad C_2 = \mathrm{const}. \tag{53}$$

Полагая в равенстве (52) $t = 0$, с учетом условий (4) и (7), найдем

$$\int\limits_0^l u_t(x,0)x^k\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)x^k\,dx = C_1 = 0.$$

Положим теперь $t = 0$ в равенстве (53), откуда с учетом условий (4) и (7), и найденного значения $C_1 = 0$, получим

$$\int\limits_0^l u(x,0)x^k\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)x^k\,dx = C_2 = A.$$

Подставляя найденные значения констант $C_1 = 0$ и $C_2 = A$ в равенство (53), имеем

$$\int\limits_0^l u(x,t)x^k\,dx = A. \tag{54}$$

Тем самым, мы показали, что при выполнении условий согласования (7) условия (6) и (9) эквивалентны. А, значит, эквивалентны и задачи (2) – (7) и (2) – (5), (9). ■

Литература

[1] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа. 1970. 712 с.

[2] Пулькин С.П. Избранные труды. Самара: Изд-во «Универс групп», 2007. 264 с.

[3] Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстетда// Изв. вузов. Математика. 1960. № 6(19). С. 214–225.

[4] Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений// Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 59–63.

[5] Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом спектральным методом // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2. С. 64–71.

[6] Cannon I.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. T. 21. № 2. P. 155–160.

[7] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. ВМ и МФ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.

[8] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 276–304.

[9] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений// Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.

[10] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2012. 194 с.

[11] Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием// Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1468–1478.

[12] Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.

[13] Бенуар Н.Э., Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2094–2098.

[14] Bouziani A., Mesloub S. A strong solution of an envolution problem with integral condition // Georgian Mathematical Journal. 2002. Vol. 9, № 12. P. 149–159.

[15] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2001. № 76. P. 1–8.

[16] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения // Неклассические уравнения математической физики. ИМ СО РАН. Новосибирск. 2005. С. 37–43.

[17] Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2011. Т. 9. Вып. 4. С. 596–602.

[18] Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2009. № 12. С. 49–58.

[19] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 68–78.

[20] Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 3. С. 393–406.

[21] Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

[22] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. Изд-во Мир, 1986. 381 с.

References

[1] Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations of mathematical physics in partial derivatives. Moscow: Vysshaya shkola. 1970. - 712 p. (in Russ.)

[2] Pulkin S.P. Selected Works. Samara: Univers Group Publishers, 2007. 264 p. (in Russ.)

[3] Pulkin S.P. On uniqueness of solution of singular Hellerstedt problem// Izv. vuzov. Mathem. 1960. No 6(19). P. 214–225. (in Russ.)

[4] Sabitov K.B., Ilyasov R.R. Ill-posed boundary value problems for certain class of hyperbolic equations// Izv. vuzov. Mathem. 2001. No 5. P. 59–63. (in Russ.)

[5] Sabitov K.B., Ilyasov R.R. Solution of Tricomi problem for equation of mixed type with singular coefficient by spectral method// Izv. vuzov. Mathem. 2004. No 2. – P. 64–71. (in Russ.)

[6] Cannon I.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy// Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21. No 2. P. 155–160.

[7] Kamynin L.I. Certain boundary value problem of heat-conductivity theory with non-classical boundary conditions// Journ, Vych. Math. i Math. Phys. 1964. Vol. 4. No 6. P. 1006–1024. (in Russ.)

[8] Ionkin N.I. Solution of certain boundary value problem on heat-conductivity with non-classical boundary condition// Differ. Uravn. 1977. Vol. 13. No 2. P. 276–304. (in Russ.)

[9] Pulkina L.S. Non-local problem with integral condition for hyperbolic equations// Differ. Uravn. 2004. Vol. 40. No 7. P. 887–892. (in Russ.)

[10] Pulkina L.S. Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations. Samara: Samara University Publishers, 2012. 194 p. (in Russ.)

[11] Sabitov K.B. Boundary value problem for equation of parabolic – hyperbolic type with nonlocal integral condition// Differ. Uravn. 2010. Vol. 46. No 10. P. 1468 – 1478. (in Russ.)

[12] Yurchuk N.I. Mixed problem with integral condition for some hyperbolic eqyations// Differ. Uravn. 1986. Vol. 22. № 12. P. 2117–2126. (in Russ.)

[13] Benouar N.E., Yurchuk N.I. Mixed problem with integral condition for a parabolic eqyations with Bessel operator// Differ. Uravn. 1991. Vol. 27. № 12. P. 2094–2098. (in Russ.)

[14] Bouziani A., Mesloub S. A strong solution of an envolution problem with integral condition// Georgian Mathematical Journal. 2002. Vol. 9, № 12. P. 149–159.

[15] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions// Electronic Journal of Differential Equations. 2001. № 76. P. 1-8.

[16] Beilin S.A. Mixed problem with integral condition for wave equation// Nonclassical equations of mathematical phisics. Sobolev Institute of Mathematics. Novosibirsk. 2005. P. 37–43. (in Russ.)

[17] Sabitov K.B. Nonlocal problem for equation of parabolic – hyperbolic type in rectangular domain// Mathem. Zametki. 2011. Vol. 89. No 4. P. 596–602. (in Russ.)

[18] Sabitiva Yu.K. Non-local initial–boundary value problems for degenerate hyperbolic equation// Izv. vuzov. Mathem. 2009. No 12. P. 49–58. (in Russ.)

[19] Sabitov K.B., Vagapova E.V. Dirichlet problem for an equation of mixed type with two degeneration lines in a rectangular domain, Differential equations, 2013, Vol. 49, No. 1, P. 68–78. (in Russ.)

[20] Sabitiva Yu.K. Boundary value problem with non-local integral condition for equations of mixed type with degeneration on transfer line// Mathem. Zametki. 2015. Vol. 98. No 3. P. 393–406. (in Russ.)

[21] Watson G.N. Theory of Bessel functions. Part I. Moccow: Inostr. Literature, 1949. 799 p. (in Russ.)

[22] Olver F.W.J. Introduction to asymptotics and special functions. Moscow: Mir, 1986. 381 p. (in Russ.)

N.V. Zaitseva[2]

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH BESSEL OPERATOR IN A RECTANGULAR DOMAIN WITH INTEGRAL BOUNDARY VALUE CONDITION OF THE FIRST KIND

We consider a boundary value problem with integral nonlocal boundary condition of the first kind for a hyperbolic equation with Bessel differential operator in a rectangular domain.

The equivalence of this problem and a local problem with boundary conditions of the second kind is established.

The existence and uniqueness of solution of the equivalent problem are proved by means of the spectral method. The solution of the problem is obtained in the form of the Fourier-Bessel series. Convergence is proved in the class of regular solutions.

Key words: hyperbolic equation, Bessel differential operator, non-local boundary value condition, Fourier — Bessel series, uniqueness, existence.

Статья поступила в редакцию 18/ V/2016.

The article received 18/ V/2016.

[2] *Zaitseva Natalya Vladimirovna* (ivanov@mail.ru),(n.v.zaiceva@yandex.ru), Dept. of higher mathematics and mathematical modeling, Lobachevskii Institute of mathematics and mechanics, Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, 420008, Russian Federation.

УДК 512.8, 517.98, 621.391

С.Я. Новиков, М.Е. Федина[1]

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА ПО МОДУЛЯМ ИЗМЕРЕНИЙ[2]

Рассмотрены вопросы выбора векторов в конечномерных вещественных и комплексных пространствах так, чтобы по модулям измерений скалярных произведений этих векторов с неизвестным вектором оказалось возможным восстановить его.

Исследуется инъективность нелинейных отображений.

Ключевые слова: пространство, сигнал, системы векторов, инъективность отображения, скалярные произведения.

1. Введение

Пусть V — пространство с комплексным скалярным произведением и ортонормированным базисом (ОНБ) $\{u_i\}_{i=1}^M$. Каждый "сигнал" $v \in V$ единственным образом представляется суммой

$$v = \sum_{i=1}^{M} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Комплексные коэффициенты представления $\langle v, u_i \rangle$ дают возможность полного восстановления сигнала и часто понимаются как "измерения" сигнала. Реальные измерения получаются вещественными, и зазор между $\langle v, u_i \rangle$ и $|\langle v, u_i \rangle|$ оказывается непреодолимым при восстановлении сигнала.

Представляя сигнал в различных базисах, мы получаем разностороннюю информацию о нем. Так, переходя от представления по ортам в $\mathbb{C}^M$ к представлению в базисе Фурье, получаем частотные характеристики сигнала, дающие широкие возможности для его цифровой обработки.

Последние годы значительное количество работ [1, 2, 3, 4] посвящено решению такой задачи:

Существуют ли системы $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ такие, для которых возможно восстановить v по набору чисел $|\langle v, \varphi_i \rangle|$?

В классе ОНБ такая задача неразрешима.

Новиков Сергей Яковлевич (nvks@ssau.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики, Самарский университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Федина Мария Ефимовна (phedina@ssau.ru), кафедра безопасности информационных систем, Самарский университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, проект № 204.

В англоязычной литературе сформулированная выше задача и связанные с ней вопросы составили раздел прикладных исследований под названием "PHASE RETRIEVAL (возвращение, воспроизведение фазы)".

Пионерской работой в этом направлении оказалась работа [1], в которой была доказана теоретическая возможность точного восстановления сигнала (с точностью до унимодулярного множителя), если в качестве системы представления использовать избыточные системы.

Дальнейшее развитие этого направления идет по двум ветвям:

1) поиск таких систем "измерительных" векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{I}}$, которые позволят восстановить произвольный сигнал $v \in V$ по набору вещественных чисел $|\langle v, \varphi_i\rangle|$;

2) обоснование возможности восстановления произвольного сигнала с большой вероятностью для относительно небольшого числа "случайно выбранных" измерительных векторов.

Второй подход весьма близок теории сжатого зондирования (в английских статьях "Compressed sensing", перевод предложен Б.С. Кашиным).

В данной работе будут изложены результаты, полученные в первом направлении, и сформулированы некоторые нерешенные задачи. То, что касается второго, будет предметом отдельной статьи.

Основная проблема, поставленная в [3], до сих пор далека от окончательного решения:

Найти необходимые и достаточные условия на систему векторов представления $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ (т.н. "измерительных векторов"), которые обеспечивают инъективность и устойчивость отображения "измерения амплитуды" сигнала x

$$(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2.$$

Естественной областью определения этого отображения является пространство $V = \mathbb{R}^M$ или $\mathbb{C}^M$. Заметим, однако, что $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$, если $y = cx$ для некоторого скаляра c с единичным модулем. Поэтому, строго говоря, отображение $\mathcal{A} : V \to \mathbb{R}^N$ не может быть инъективным. В дальнейшем изложении будем считать областью определения $\mathcal{A}$ либо $\mathbb{R}^M/\{\pm 1\}$, либо $\mathbb{C}^M/\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — окружность единичного радиуса на комплексной плоскости. При таком соглашении вопросы об инъективности и устойчивости отображения $\mathcal{A}$ являются содержательными.

2. Инъективность в $\mathbb{R}^M$

Восстановить сигнал x невозможно, если отображение $\mathcal{A}$ не является инъективным.

Следующее определение конкретизирует определение инъективности применительно к поставленной задаче.

Определение 1. *Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$) обеспечивает* **воспроизведение фазы (ВФ)***, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$), таких, что $|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle|$ для всех $i = 1, \dots, N$, имеем $x = cy$, где $c = \pm 1$ для $\mathbb{R}^M$ (и $c \in \mathbb{T}$ для $\mathbb{C}^M$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность на комплексной плоскости).*

Важным для анализа инъективности оказалось следующее свойство, которое мы назвали свойством *альтернативной полноты*, заменяя тем самым английское сочетание "complement property".

Определение 2. *Набор векторов* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ *в* $\mathbb{R}^M$ *(*$\mathbb{C}^M$*) назовем альтернативно полным (АП) если для любого* $S \subseteq \{1, \dots, N\}$ *либо* $\{\varphi_n\}_{n \in S}$, *либо* $\{\varphi_n\}_{n \in S^c}$ *полно в* $\mathbb{R}^M$ $(\mathbb{C}^M)$.

Для пространства $\mathbb{R}^M$ свойство альтернативной полноты эквивалентно инъективности отображения $\mathcal{A}$.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^M/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^N$ *определено равенствами* $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2$, $n = 1, \dots, N$. *Тогда* $\mathcal{A}$ *инъективно тогда только тогда, когда* Φ *альтернативно полно.*

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что $\Phi \notin$ (АП). Следовательно, найдется $S \subseteq \{1, \dots, N\}$ такое, что ни $\{\varphi_n\}_{n \in S}$, ни $\{\varphi_n\}_{n \in S^c}$ не полно в $\mathbb{R}^M$. Выбираем ненулевые векторы $u, v \in \mathbb{R}^M$ так, что $\langle u, \varphi_n\rangle = 0$ для всех $n \in S$ и $\langle v, \varphi_n\rangle = 0$ для всех $n \in S^c$. Для каждого n имеем

$$|\langle u \pm v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 \pm 2\langle u, \varphi_n\rangle\langle v, \varphi_n\rangle + |\langle v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 + |\langle v, \varphi_n\rangle|^2.$$

Отсюда следует, что $|\langle u + v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u - v, \varphi_n\rangle|^2$ для каждого n, и $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u - v)$. Более того, так как u и v ненулевые, по предположению, то и $u + v \neq \pm(u - v)$. Таким образом, инъективности отображения $\mathcal{A}$ нет.

Достаточность. Предположим, что $\mathcal{A}$ не инъективно. Это означает, что существуют векторы $x, y \in \mathbb{R}^M$ такие, что $x \neq \pm y$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$. Обозначим $S := \{n : \langle x, \varphi_n\rangle = -\langle y, \varphi_n\rangle\}$. Имеем: $\langle x + y, \varphi_n\rangle = 0$ для каждого $n \in S$, и $\langle x - y, \varphi_n\rangle = 0$ для каждого $n \in S^c$. По предположению, $x \neq \pm y$, поэтому $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Таким образом, и $\{\varphi_n\}_{n \in S}$, и $\{\varphi_n\}_{n \in S^c}$ не полны в $\mathbb{R}^M$. •

Таким образом оказалось, что система, которая допускает восстановление фазы, с необходимостью оказывается фреймом пространства $\mathbb{R}^M$. Из дальнейшего станет ясным, что аналогичная картина наблюдается и в $\mathbb{C}^M$.

Напомним, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ называется фреймом (каркасом) пространства $\mathbb{R}^M$ $(\mathbb{C}^M)$, если существуют константы $0 < A < B$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R}^M$ $(\forall x \in \mathbb{C}^M)$

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^N |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

В конечномерном пространстве понятие фрейма эквивалентно понятию полноты системы, т. е. равенству $\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{R}^M$ $(\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{C}^M)$.

3. Инъективность в $\mathbb{C}^M$

Подробнее теория фреймов изложена в [5, 6]. В пространстве $\mathbb{C}^M$ не найдено практически применимой характеризации инъективности.

Прежде чем доказывать известный ныне критерий (теорема 4 ниже), рассмотрим следующее вспомогательное утверждение. Оно позволяет увидеть аналогию между теоремами 2 и 4. Если $a = (a_1, \dots, a_M)^T \in \mathbb{C}^M$ и $b = (b_1, \dots, b_M)^T \in \mathbb{C}^M$, то скалярное (внутреннее) произведение $\langle a, b\rangle$ можно представить в виде b^*a, где b^* — сопряженный вектор-строка $b^* = (\overline{b_1}, \dots, \overline{b_M})$. Внешнее произведение ab^* дает $M \times M$-матрицу с элементами

$$\begin{pmatrix} a_1\overline{b_1} & a_1\overline{b_2} & \dots & a_1\overline{b_M} \\ a_2\overline{b_1} & a_2\overline{b_2} & \dots & a_2\overline{b_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_M\overline{b_1} & a_M\overline{b_2} & \dots & a_M\overline{b_M} \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}^M$. *Рассмотрим множество* $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$ *векторов в* $\mathbb{R}^M$. *Альтернативная полнота* Φ *эквивалентна равенству* $\mathrm{span}\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N = \mathbb{R}^M$ *для любого* $u \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$.

Доказательство. Очевидно, что $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N = \{\langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n\}_{n=1}^N$.

Необходимость. Предположим противное. Пусть существует вектор $u \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ такой, что

$$\mathrm{span}\{\langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n\}_{n=1}^N \neq \mathbb{R}^M. \qquad (**)$$

Пусть $S_1 = \{n : \langle u, \varphi_n\rangle = 0\}$. Ясно, что

$$\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1} \neq \mathbb{R}^M. \qquad (*)$$

Рассмотрим два случая:

1) число элементов в S_1 больше, чем $N - M$. Тогда число элементов в S_1^c меньше M. Вместе со (*) последнее противоречит АП Φ;

2) число элементов в S_1 меньше или равно $N - M$. Из АП Φ и (*) следует, что

$$\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1^c} = \mathbb{R}^M. \qquad (*)$$

Однако это противоречит (**).

Достаточность. Предположим противное. Пусть существует $S_1 \subseteq \{1, \ldots, N\}$ такое, что

$$\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1} \neq \mathbb{R}^M \text{ и } \mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1^c} \neq \mathbb{R}^M. \qquad (***)$$

Выберем u ортогональным $\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1}$. Тогда $\mathrm{span}\{\langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n\}_{n\in S_1^c} = \mathbb{R}^M$. Однако это противоречит (***). •

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ *определено соотношениями* $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2$, $n = 1, \ldots, N$. *Векторы* $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$ *будем рассматривать как векторы пространства* $\mathbb{R}^{2M}$. *Пусть* $S(u) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(а) $\mathcal{A}$ *инъективно.*

(б) $\dim S(u) \geqslant 2M - 1$ *для каждого* $u \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}$.

(в) $S(u) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{iu\}^\perp$ *для каждого* $u \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}$.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(в): Предположим, что отображение $\mathcal{A}$ инъективно. Требуется доказать, что линейная оболочка векторов $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$ является ортогональным дополнением вектора iu. Ортогональность в данном случае понимается в смысле вещественного скалярного произведения $\langle a, b\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\,\langle a, b\rangle$. Заметим, что

$$|\langle u \pm v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 \pm 2\mathrm{Re}\langle u, \varphi_n\rangle\langle\varphi_n, v\rangle + |\langle v, \varphi_n\rangle|^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned}|\langle u + v, \varphi_n\rangle|^2 - |\langle u - v, \varphi_n\rangle|^2 = 4\mathrm{Re}\langle u, \varphi_n\rangle\langle\varphi_n, v\rangle = \\ = 4\mathrm{Re}\,\varphi_n^* u\langle\varphi_n, v\rangle = 4\langle\varphi_n\varphi_n^* u, v\rangle_{\mathbb{R}}.\end{aligned} \qquad (1)$$

Если $v \in S(u)^\perp$, то правая часть (1) равна нулю. В силу инъективности $\mathcal{A}$ получаем существование комплексного числа $\omega, |\omega| = 1$ такого, что $u + v = \omega(u - v)$. Так как $u \neq 0$, то $\omega \neq -1$. Имеем

$$v = -\frac{1-\omega}{1+\omega}u = -\frac{(1-\omega)(1+\bar{\omega})}{|1+\omega|^2}u = \frac{2\mathrm{Im}\omega}{|1+\omega|^2}iu,$$

т.е. $S(u)^\perp \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{iu\}$.

Для доказательства включения $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iu\} \subseteq S(u)^{\perp}$ возьмем $v = \alpha iu$ с некоторым $\alpha \in \mathbb{R}$, положим $\omega := \frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$ и заметим, что $|\omega| = 1$. Имеем:

$$u + v = u + \alpha iu = (1 + \alpha i)u = \frac{1 + \alpha i}{1 - \alpha i}(u - \alpha iu) = \omega(u - v).$$

Следовательно, левая часть (1) равна нулю, и $v \in S(u)^{\perp}$. Заметим, что в доказательстве последнего включения инъективность $\mathcal{A}$ не требовалась. Это замечание будет использоваться в дальнейшем.

(б)$\Leftrightarrow$ (в): из (в) сразу следует (б). Для доказательства обратной импликации заметим сначала, что iu ортогонален каждому из $\varphi_n\varphi_n^* u$:

$$\langle \varphi_n\varphi_n^* u,\ iu\rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\langle \varphi_n\varphi_n^* u,\ iu\rangle = \operatorname{Re}\langle u, \varphi_n\rangle\langle \varphi_n,\ iu\rangle = -\operatorname{Re} i|\langle u, \varphi_n\rangle|^2 = 0.$$

Это означает, что $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iu\} \subseteq S(u)^{\perp}$. В силу (б), $\dim S(u)^{\perp} \leqslant 1$. Из последних двух соотношений получаем (в).

(в)$\Rightarrow$ (а): предположим, что $\mathcal{A}(x) = |\varphi_n^* x|^2 = |\varphi_n^* y|^2 = \mathcal{A}(y)$. Если $x = y$, инъективность получена. Если $x - y \neq 0$, то применим (в) к $u = x - y$. Следующие ниже преобразования покажут нам, что $x + y \in S(x - y)^{\perp}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n\varphi_n^*(x - y), x + y\rangle_{\mathbb{R}} &= \operatorname{Re}\langle \varphi_n\varphi_n^*(x - y), x + y\rangle = \operatorname{Re}(x + y)^*\varphi_n\varphi_n^*(x - y) = \\ &= \operatorname{Re}\left(|\varphi_n^* x|^2 - x^*\varphi_n\varphi_n^* y + y^*\varphi_n\varphi_n^* x - |\varphi_n^* y|^2\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(-x^*\varphi_n\varphi_n^* y + \overline{x^*\varphi_n\varphi_n^* y}\right) = 0.\end{aligned}$$

Итак, $x + y \in S(x - y)^{\perp} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{i(x - y)\}$, то есть существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $x + y = \alpha i(x - y)$, отсюда $y = \frac{1-\alpha i}{1+\alpha i}x$, что означает $x \equiv y \bmod \mathbb{T}$. •

Следующая теорема показывает, что инъективность отображения "измерений амплитуды" $(\mathcal{A}(x))(n) = |\langle x, \varphi_n\rangle|^2$, $n = 1, \ldots, N$ в комплексном пространстве эквивалентна в широком смысле (с точностью до вещественного множителя) инъективности другого отображения

$$(\mathcal{B}(x))(n) := \arg\left(\langle x, \varphi_n\rangle^2\right),\ n = 1, \ldots, N,$$

которое измеряет только фазы восстанавливаемого сигнала, то есть является отображением "измерений фазы". Будем считать, по определению, что $\arg\left(\langle x, \varphi_n\rangle^2\right) = 0$, если $|\langle x, \varphi_n\rangle| = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ *определено соотношениями* $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2$, $n = 1, \ldots, N$. *Отображение* $\mathcal{A}$ *инъективно тогда и только тогда, когда отображение* $(\mathcal{B}(x))(n) := \arg\left(\langle x, \varphi_n\rangle^2\right)$, $n = 1, \ldots, N$ *инъективно по модулю* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *то есть* $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(y) \Rightarrow x \equiv y \bmod \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство. По теореме 2 инъективность $\mathcal{A}$ эквивалентна следующему утверждению:

$$\forall x \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}, \qquad \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_n\varphi_n^* x\}_{n=1}^N = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{ix\}^{\perp}. \tag{2}$$

Как было отмечено в доказательстве теоремы 2, включение $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{ix\} \subseteq \left(\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_n\varphi_n^* x\}_{n=1}^N\right)^{\perp}$ справедливо для любого $x \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}$. Поэтому (2) эквивалентно следующей импликации:

$$\begin{gathered}\forall x \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\},\ \operatorname{Re}\langle \varphi_n\varphi_n^* x,\ iy\rangle = 0\ \forall n = 1, \ldots, N \implies y = 0 \\ \text{или } y \equiv x \bmod \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Докажем, что $\mathrm{Re}\langle\varphi_n\varphi_n^* x, iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x,\varphi_n\rangle\overline{\langle y,\varphi_n\rangle} = 0$ тогда и только тогда, когда $\arg\left(\langle x,\varphi_n\rangle^2\right) = \arg\left(\langle y,\varphi_n\rangle^2\right)$. После этого оказывается возможным заменить левую часть импликации (3) на равенство $\arg\left(\langle x,\varphi_n\rangle^2\right) = \arg\left(\langle y,\varphi_n\rangle^2\right)$ и теорема будет доказана. Положим для краткости $a := \langle x,\varphi_n\rangle$ и $b := \langle y,\varphi_n\rangle$. Теперь остается доказать, что $\mathrm{Im}\, a\bar{b} = 0$ тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из трех равенств: $\arg(a^2) = \arg(b^2)$, $a = 0$ или $b = 0$.

($\Leftarrow$) Если a или b равно нулю, равенство очевидно. В оставшихся случаях имеем $2\arg(a) = \arg(a^2) = \arg(b^2) = 2\arg(b)$, отсюда $2(\arg(a) - \arg(b))$ кратно 2π, и $\arg(a\bar{b}) = \arg(a) - \arg(b)$ кратно π. Следовательно, $a\bar{b} \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{Im}\, a\bar{b} = 0$.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{Im}\, a\bar{b} = 0$. Запишем полярное представление чисел $a = re^{i\theta}$ и $b = se^{i\phi}$. Из условия, $rs\sin(\theta-\phi) = 0$. Такое возможно когда либо r, либо s равны нулю. Если ни одна из этих возможностей не имеет места, то $\sin\theta\cos\phi = \cos\theta\sin\phi$. Отсюда получаем, что если θ кратно $\pi/2$, то и ϕ кратно $\pi/2$. Поэтому $\arg(a^2) = 2\arg(a) = \pi = 2\arg(b) = \arg(b^2)$. В оставшемся случае делим обе части равенства на $\cos\theta\cos\phi$ и получаем равенство $\tan\theta = \tan\phi$, из которого вытекает $\theta = \phi \bmod \pi$ и $\arg(a^2) = 2\arg(a) = 2\arg(b) = \arg(b^2)$. •

Лемма 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ *определено соотношениями* $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x,\varphi_n\rangle|^2$, $n = 1,\ldots,N$. *Если* $\mathcal{A}$ *инъективно, то отображение* $\mathcal{C} : \mathbb{C}^M/\{\pm1\} \to \mathbb{C}^N$, *определенное равенствами* $(\mathcal{C}(x))(n) := \langle x,\varphi_n\rangle^2$, $n = 1,\ldots,N$ *также инъективно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ инъективно. Справедливы следующие утверждения (первое по определению, второе — по теореме 3):

1) если $\forall n = 1,\ldots,N$, $|\langle x,\varphi_n\rangle|^2 = |\langle y,\varphi_n\rangle|^2$, то $y \equiv x \bmod \mathbb{T}$;

2) если $\forall n = 1,\ldots,N$, $\arg(\langle x,\varphi_n\rangle^2) = \arg(\langle y,\varphi_n\rangle^2)$, то $y \equiv x \bmod \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Пусть $\langle x,\varphi_n\rangle^2 = \langle x,\varphi_n\rangle^2$ для всех $n = 1,\ldots,N$. Выполнены условия утверждений (1) и (2). Из равенства $y \equiv x \bmod \mathbb{T}$ вытекает, что $x = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$. Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то существует $\omega \in \mathbb{T}\cap\mathbb{R}\setminus\{0\} = \{\pm1\}$ такое, что $y = \omega x$. В любом случае $y \equiv x \bmod\{\pm1\}$, то есть $\mathcal{C}$ инъективно. •

Теорема 4. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ *определено соотношениями* $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x,\varphi_n\rangle|^2$, $n = 1,\ldots,N$. *Если* $\mathcal{A}$ *инъективно, то* Φ *удовлетворяет свойству альтернативной полноты.*

Интересно сравнить теорему 4 с теоремой 2 и понять, почему в комплексном случае не проходит доказательство первой части теоремы 2. Для комплексного поля равенство теоремы 2 принимает вид

$$|\langle u \pm v,\varphi_n\rangle|^2 = |\langle u,\varphi_n\rangle|^2 \pm 2\mathrm{Re}\langle u,\varphi_n\rangle\overline{\langle v,\varphi_n\rangle} + |\langle v,\varphi_n\rangle|^2 = |\langle u,\varphi_n\rangle|^2 + |\langle v,\varphi_n\rangle|^2.$$

В проведенном доказательстве теоремы 2 было показано, что отрицание свойства (АП) приводит к равенству $\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}(u-v)$ и при этом $u+v \neq \pm(u-v)$, что противоречит инъективности $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^M/\{\pm1\}$. Однако, может иметь место, например, такое равенство $u + v = i(u - v)$, и инъективность $\mathcal{A}$ на $\mathbb{C}^M/\mathbb{T}$ не доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу леммы 2, инъективность $\mathcal{A}$ влечет инъективность $\mathcal{C}$ на $\mathbb{C}^M/\{\pm1\}$. Поэтому достаточно доказать, что если $\mathcal{C}$ инъективно на $\mathbb{C}^M/\{\pm1\}$, то $\Phi \in$ (АП). Будем рассуждать как в доказательстве теоремы 2. Предположим что $\Phi \notin$ (АП). Тогда существует $S \subseteq \{1,\ldots,N\}$ такое, что ни $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, ни $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ не полны в $\mathbb{C}^M$. Следовательно, найдутся ненулевые векторы u, $v \in \mathbb{C}^M$ такие, что $\langle u,\varphi_n\rangle = 0$ для всех $n \in S$ и $\langle v,\varphi_n\rangle = 0$ для всех

$n \in S^c$. Для каждого n имеем

$$\langle u \pm v, \varphi_n \rangle^2 = \langle u, \varphi_n \rangle^2 \pm 2\langle u, \varphi_n \rangle \langle v, \varphi_n \rangle + \langle v, \varphi_n \rangle^2 = \langle u, \varphi_n \rangle^2 + \langle v, \varphi_n \rangle^2.$$

Так как $\langle u+v, \varphi_n \rangle^2 = \langle u-v, \varphi_n \rangle^2$ для каждого n, то $\mathcal{C}(u+v) = \mathcal{C}(u-v)$. Однако, так как u и v ненулевые, по предположению, то $u+v \neq \pm(u-v)$, что противоречит инъективности $\mathcal{C}$ на $\mathbb{C}^M/\{\pm 1\}$. •

Свойство альтернативной полноты недостаточно для инъективности отображения в пространстве $\mathbb{C}^M$. Достаточно рассмотреть векторы $(1,0)$, $(0,1)$ и $(1,1)$. Они удовлетворяют (АП), но $\mathcal{A}((1,i)) = (1,1,2) = \mathcal{A}((1;-i))$, хотя $(1,i) \not\equiv (1,-i) \bmod \mathbb{T}$; более того, векторы с вещественными координатами вообще не могут давать инъективные измерения в комплексном пространстве, так как они не различают векторы с комплексно сопряженными координатами.

4. Системы измерительных векторов

Поиск хороших достаточных условий для инъективности в комплексном пространстве остается актуальным. В вещественном пространстве найдены примеры хороших "измерительных векторов", например, так называемые "полные спарки": множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}^M$ называется "полным спарком", если каждое его подмножество из M векторов полно в $\mathbb{R}^M$.

Лемма 3. *Всякий полный спарк $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ с $N \geqslant 2M-1$ удовлетворяет свойству альтернативной полноты.*

Доказательство. Предположим противное: существует $S \subseteq \{1,2,\ldots,N\}$ такое, что ни $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, ни $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ не полны в $\mathbb{R}^M$. По определению полного спарка, отсюда следует, что $|S| < M$ и $|S^c| < M$, то есть $N < 2M-1$, что противоречит условию. •

В силу теоремы 2 всякий полный спарк представляет собой хорошее множество для инъективности отображения в вещественном пространстве. С другой стороны, найдены эффективные методы построения полных спарков [7]. Оставаясь в рамках детерминированной модели, естественно возникает вопрос об определении для пространства размерности M наименьшего числа $N^*(M)$ "измерительных векторов", обеспечивающих инъективность отображения $\mathcal{A}$.

Для $\mathbb{R}^M$ число $N^*(M)$ может быть найдено с использованием теоремы 2.

Предложение 1. *Если $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ и $N \leqslant 2M-2$, то отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^M/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^N$ не является инъективным. Если $N = 2M-1$, то отображение $\mathcal{A}$ инъективно тогда и только тогда, когда Φ — полный спарк.*

Доказательство. Если $N \leqslant 2M-2$, то множество $\{1,2,\ldots,N\}$ можно разбить на подмножества S и S^c так, чтобы мощность каждого не превосходила $M-1$. Ни одно из множеств $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ не может быть полным.

Если $N = 2M-1$, и $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ — полный спарк, то инъективность $\mathcal{A}$ следует из леммы 3 и теоремы 2. Обратно, если $\mathcal{A}$ инъективно, то $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ является альтернативно полным семейством. Возьмем произвольное подмножество $S \subseteq \{1,2,\ldots,N\}$ с $|S| = M$. Тогда $|S^c| = M-1$ и $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ не может быть полным. Следовательно, $\{\varphi_n\}_{n\in S}$ полно, и Φ — полный спарк. •

Таким образом, $N^*(M) = 2M-1$ для $\mathbb{R}^M$.

Переходим к рассмотрению ситуации в $\mathbb{C}^M$.

В этом случае поставленный вопрос имеет историю. Весьма долго представлялась правдоподобной гипотеза о равенстве $N^*(M) = 3M - 2$. Эта гипотеза была опровергнута в [8], в этой работе было доказано, что $N^*(M) \geqslant 4M - 2\alpha(M-1) - 3$, где $\alpha(M-1) \leqslant \log_2(M)$ обозначает количество единиц в бинарном представлении числа $M - 1$.

С другой стороны, в [1] доказано, что $N^*(M) \leqslant 4M - 2$.

В настоящее время правдоподобной представляется

$(4M-4)$**-гипотеза.** *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$

определено соотношениями $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n \rangle|^2$, $n = 1, \ldots, N$.

Если $M \geqslant 2$, *то:*

1) если $N < 4M - 4$, *то* $\mathcal{A}$ *не является инъективным;*

2) если $N \geqslant 4M-4$, *то* $\mathcal{A}$ *может быть инъективным для некоторых фреймов.*

Ниже будет дано обоснование этой гипотезы.

Определим M^2-мерное пространство $\mathbb{H}^{M \times M}$ комплексных самосопряженных $M \times M$ матриц. Это пространство над полем вещественных чисел. Для заданного набора $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ определим *оператор матричного анализа* $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{M \times M} \to \mathbb{R}^N$ равенствами $(\mathbf{A}H)(n) = \langle H, \varphi_n \varphi_n^* \rangle_{HS}$, здесь $\langle \cdot, cdot \rangle_{HS}$ обозначает скалярное произведение Гильберта-Шмидта, индуцирующее матричную норму Фробениуса [9]. Подробнее,

$$\langle H, G \rangle_{HS} = \sum_{m,n=1}^{M} h_{mn} \overline{g_{mn}} = \mathrm{Tr}[G^* H].$$

Заметим, что $\mathbf{A}$ — линейный оператор, и

$$(\mathbf{A}xx^*)(n) = \langle xx^*, \varphi_n \varphi_n^* \rangle_{HS} = \mathrm{Tr}[\varphi_n \varphi_n^* xx^*] =$$
$$= \mathrm{Tr}[\varphi_n^* xx^* \varphi_n] = \varphi_n^* xx^* \varphi_n = |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 = (\mathcal{A}(x))(n).$$

Полученное равенство показывает, что $x \bmod \mathbb{T}$ может быть расширен до xx^*, при таком расширении процесс измерения амплитуды становится линейным за счет увеличения размерности пространства, в котором проводятся измерения.

Посмотрим, как отражается инъективность при таком расширении.

Лемма 4. *Отображение* $\mathcal{A}$ *не является инъективным тогда и только тогда, когда в ядре оператора* $\mathbf{A}$ *существует матрица ранга* 1 *или* 2.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathcal{A}$ не инъективно, т. е. существуют $x, y \in \mathbb{C}^M/\mathbb{T}$ такие, что $x \neq y$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$. Отсюда следует, что $\mathbf{A}xx^* = \mathbf{A}yy^*$, и $xx^* - yy^* \in \ker \mathbf{A}$. Ранг матрицы $xx^* - yy^*$ равен 1 или 2 в зависимости от зависимости (независимости) векторов x и y.

Достаточность. Сначала предположим, что ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицу H ранга 1. Тогда существует $x \in \mathbb{C}^M$ такой, что $H = xx^*$ и $(\mathcal{A}(x))(n) = (\mathbf{A}xx^*)(n) = 0 = (\mathcal{A}(0))(n)$. Но $x \not\equiv 0 \bmod \mathbb{T}$, и $\mathcal{A}$ оказывается не инъективным.

Теперь предположим существование (самосопряженной) матрицы H ранга 2 в ядре оператора $\mathbf{A}$. По спектральной теореме существуют ортонормированные векторы u_1, $u_2 \in \mathbb{C}^M$ и ненулевые вещественные числа $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ такие, что $H = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*$. Так как $H \in \ker \mathbf{A}$, то для каждого n имеем:

$$0 = \langle H, \varphi_n \varphi_n^* \rangle_{HS} = \langle \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*, \varphi_n \varphi_n^* \rangle_{HS} =$$
$$= \lambda_1 |\langle u_1, \varphi_n \rangle|^2 + \lambda_2 |\langle u_2, \varphi_n \rangle|^2. \tag{4}$$

Положим $x := |\lambda_1|^{1/2}u_1$ и $y := |\lambda_2|^{1/2}u_2$, заметим, что $y \not\equiv x \bmod \mathbb{T}$, так как они ненулевые и ортогональные. Для завершения доказательства покажем, что $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$. Если λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки, то по (4), $|\langle x, \varphi_n\rangle|^2 + |\langle y, \varphi_n\rangle|^2 = 0$ для каждого n, следовательно, $|\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = 0 = |\langle y, \varphi_n\rangle|^2$.

Если $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, то $xx^* - yy^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* = H \in \ker \mathbf{A}$, следовательно, $\mathcal{A}(x) = \mathbf{A}xx^* = \mathbf{A}yy^* = \mathcal{A}(y)$. •

Теорема 5. $(4M-4)$*-гипотеза верна для* $M = 2$.

Доказательство. (а) Пусть $N < 4M - 4 = 4$. Так как $\mathbf{A}$ определяет линейное отображение из 4-мерного вещественного пространства в N-мерное вещественное пространство, ядро $\mathbf{A}$ с необходимостью нетривиально, так как, по теореме о ранге и дефекте,

$$\dim \operatorname{Im}(\mathbf{A}) + \dim \ker(\mathbf{A}) = 4.$$

Кроме того каждый ненулевой элемент ядра имеет ранг 1 или 2, и, по лемме 4, $\mathcal{A}$ не будет инъективным.

(б) Рассмотрим матрицу, образованную 16 вещественными переменными:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_5 + ix_6 & x_9 + ix_{10} & x_{13} + ix_{14} \\ x_3 + ix_4 & x_7 + ix_8 & x_{11} + ix_{12} & x_{15} + ix_{16} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Если обозначить n-й столбец $\Phi(x)$ через $\varphi_n(x)$, то получаем, что $\mathcal{A}$ инъективно именно тогда, когда $x \in \mathbb{R}^{16}$ порождает базис $\{\varphi_n(x)\varphi_n(x)^*\}_{n=1}^4$ в пространстве 2×2 самосопряженных матриц. В самом деле, в этом случае zz^* однозначно определяется через $\mathbf{A}zz^* = \{\langle zz^*, \varphi_n(x)\varphi_n(x)^*\rangle_{HS}\}_{n=1}^4 = \mathcal{A}(z)$, что определит и z с точностью до унимодулярного множителя. Пусть $\mathbf{A}(x)$ обозначает 4×4 матричное представление оператора матричного анализа, в котором n-я строка состоит из координат $\varphi_n(x)\varphi_n(x)^*$ в некотором базисе пространства $\mathbb{H}^{2\times 2}$, например,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\}. \tag{6}$$

Тогда $V = \{x : \operatorname{Re} \det \mathbf{A}(x) = \operatorname{Im} \det \mathbf{A}(x) = 0\}$ оказывается вещественным алгебраическим многообразием в $\mathbb{R}^{16}$, и замечаем, что $\mathcal{A}$ инъективно, если $x \in V^c$. Так как V^c открыто в топологии Зарисского, оно либо пусто, либо плотно в евклидовой топологии. Но $V^c \neq \emptyset$, выбирая x так, что

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & i \end{bmatrix},$$

получаем $x \in V^c$ (см. теорему 4.1 в [5]). •

Для доказательства аналогичного результата для $M = 3$ в [3] предложен проверочный тест.

Тест Кахилла (Cahill) проверки инъективности отображения $\mathcal{A}$ при $M = 3$:

1) выбрать измерительные векторы $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^3$;
2) определить оператор матричного анализа $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^N$ так, чтобы $\mathbf{A}H = \{\langle H, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS}\}_{n=1}^N$;
3) если $\dim \ker(\mathbf{A}) = 0$, то $\mathbf{A}$ инъективно, а, следовательно, и $\mathcal{A}$ инъективно;
4) если $\dim \ker(\mathbf{A}) > 0$, то выбрать $H \in \ker(\mathbf{A})$, $H \neq 0$;
   4 а) если $\dim \ker(\mathbf{A}) = 1$, и $\det(H) \neq 0$, то $\mathcal{A}$ инъективно;
   4 б) во всех остальных случаях $\mathcal{A}$ неинъективно.

Теорема 6. *Для $M = 3$ тест Кахилла корректно определяет инъективность $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Если $\mathbf{A}$ инъективно, то $\mathcal{A}(x) = \mathbf{A}xx^* = \mathbf{A}yy^* = \mathcal{A}(y)$, то есть, $y \equiv x \bmod \mathbb{T}$.

Далее, предположим, что $\mathbf{A}$ имеет одномерное ядро. По лемме 4, $\mathcal{A}$ инъективно тогда и только тогда, когда ядро $\mathbf{A}$ порождено матрицей полного ранга 3.

Наконец, если размерность ядра не меньше 2, то существуют линейно независимые (ненулевые) матрицы A и B в ядре. Если $\det(A) = 0$, то её ранг должен быть 1 или 2, и, по лемме 4, $\mathcal{A}$ не инъективно.

Если $\det(A) \neq 0$, рассмотрим функцию

$$f : t \mapsto \det(A \cos t + B \sin t) \quad t \in [0; \pi].$$

Так как $f(0) = \det(A)$ и $f(\pi) = \det(-A) = -\det(A)$, по теореме о промежуточных значениях существует $t_0 \in [0, \pi]$ такое, что $f(t_0) = 0$, то есть матрица $A \cos t_0 + B \sin t_0$ вырождена. Эта матрица ненулевая, так как A и B линейно независимы, поэтому она имеет ранг 1 или 2. По лемме 9, $\mathcal{A}$ неинъективно. •

Теорема 7. $(4M - 4)$*-гипотеза верна для* $M = 3$.

Доказательство. (а) Если $N < 4M - 4 = 8$, то, по теореме о ранге и дефекте (см. доказательство теоремы 5), размерность ядра оператора матричного анализа $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^N$ не меньше 2, поэтому (тест Кахилла), $\mathcal{A}$ не является инъективным.

(б) Рассмотрим вещественную 3×8-матрицу, подобную (5). Отображение $\mathcal{A}$ инъективно, если $x \in \mathbb{R}^{48}$ порождает семейство $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{8} \subseteq \mathbb{C}^3$, которое удовлетворяет тесту Кахилла. Для этого, согласно теореме о ранге и дефекте, ядро оператора матричного анализа должно иметь размерность не больше 1 и порождаться несингулярной матрицей. Для представления оператора $\mathbf{A}(x)$ матричного анализа в виде 8×9-матрицы используется ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}^{3\times 3}$, подобный (6). Элементы этой матрицы, которую будем обозначать $\mathbf{A}(x)$, являются полиномами от x. Рассмотрим матрицу

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} y^T \\ \mathbf{A}(x) \end{bmatrix},$$

где $y \in \mathbb{R}^9$, и пусть $u(x)$ обозначает вектор из миноров первой строки матрицы $B(x, y)$. Тогда $\langle y, u(x)\rangle = \det(B(x, y))$. Отсюда следует, что $u(x)$ лежит в ядре $\mathbf{A}(x)$, так как каждая строка $\mathbf{A}(x)$ ортогональна $u(x)$.

Вспомогательное утверждение. $u(x) = 0$ *тогда и только тогда, когда размерность ядра оператора* $\mathbf{A}(x)$ *не меньше* 2*, то есть строки* $\mathbf{A}(x)$ *линейно зависимы.*

($\Leftarrow$) Координаты вектора $u(x)$ являются знакопеременными определителями 8×8 подматриц матрицы $\mathbf{A}(x)$, которые с необходимостью будут нулевыми в силу линейной зависимости строк.

($\Rightarrow$) Имеем $0 = \langle y, 0\rangle = \langle y, u(x)\rangle = \det(B(x, y))$ для всех $y \in \mathbb{R}^9$. Это означает, что даже если $y \neq 0$ и ортогонален строкам $\mathbf{A}(x)$, строки $B(x, y)$ линейно зависимы а, следовательно, и строки $\mathbf{A}(x)$ должны быть линейно зависимыми. ◦

Используем доказанное вспомогательное утверждение для завершения доказательства теоремы. Определим матрицу $U(x) \in \mathbb{H}^{3\times 3}$ с координатами вектора $u(x)$ в выбранном ранее базисе. Элементы матрицы $U(x)$ являются полиномами от x. Отображение $\mathcal{A}$ инъективно тогда и только тогда, когда $\det U(x) \neq 0$. Для обоснования рассмотрим три случая:

1) $U(x) = 0$, т. е. $u(x) = 0$, что эквивалентно $\dim\ker(\mathbf{A}(x)) \geqslant 2$. По тесту Кахилла, $\mathcal{A}$ не инъективно;

2) $\ker(U(x)) \neq 0$, но $\det U(x) = 0$. По тесту Кахилла, $\mathcal{A}$ не инъективно;

3) $\ker(U(x)) \neq 0$, и $\det U(x) \neq 0$. По тесту Кахилла, $\mathcal{A}$ инъективно.

Определим вещественное алгебраическое многообразие $V = \{x : \det U(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{48}$. Заметим, что $\mathcal{A}$ инъективно, только если $x \in V^c$. Множество V^c открыто в топологии Зарисского, поэтому оно либо пусто, либо всюду плотно в евклидовой топологии. Первая возможность исключается, так как, например, следующая матрица проходит тест Кахилла:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2i & i & -1 \end{bmatrix}.$$

При таком выборе координат ядро оператора матричного анализа $\mathbf{A}$ одномерно и порождается невырожденной матрицей. Следовательно, соответствующее отображение $\mathcal{A}$ инъективно. •

Теорема 7 опровергает высказанную ранее т. н. гипотезу Райта (Wright) [10] о том, что

$$N^*(M) \leqslant 3M - 2.$$

Авторы благодарны И.Я. Новикову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Balan R., Casazza P., Edidin D. On signal reconstruction without noizy phase Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2006. V. 20. I. 3. PP. 345–356.

[2] Bodmann B. G., Hammen N. Stable phase retrieval with low-redundancy frames. Available online: arXiv:1302.5487.

[3] Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2014. V. 37. I. 1. PP. 106–125.

[4] Fickus M., Mixon D.G., Nelson A.A., Wang Ya. Phase retrieval from very few measurements. Linear Algebra and Its Applications. 2014. V. 449. PP. 475–499.

[5] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит. 2005.

[6] Новиков С.Я., Лихобабенко М.А. Фреймы конечномерных пространств. Самара. Самарский госуниверситет. 2013.

[7] Alexeev B., Cahill J., Mixon D. Full spark frames. Journal of Fourier Analysis and Applications. 2012. V. 18. I. 6. PP. 1167–1194.

[8] Heinosaary T., Mazzarella I., Wolf M.M. Quantum tomography ... Available online: arXiv:1206.1405.

[9] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва. Мир. 1989.

[10] Vogt A. Position and momentum distributions do not determine the quantum mechanical state. In: Mathematical Foundations of Quantum Theory (Marlow A. R.,ed.). Academic Press. New York. 1978. PP. 365-372.

References

[1] Balan R., Casazza P., Edidin D. *On signal reconstruction without noizy phase* Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2006. V. 20. I. 3. PP. 345–356.

[2] Bodmann B. G., Hammen N. *Stable phase retrieval with low-redundancy frames.* Available online: arXiv:1302.5487.

[3] Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A. *Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval.* Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2014. V. 37. I. 1. PP. 106–125.

[4] Fickus M., Mixon D. G., Nelson A. A., Wang Ya. *Phase retrieval from very few measurements.* Linear Algebra and Its Applications. 2014. V. 449. PP. 475–499.

[5] Novikov I.Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet theory* Moscow, Physmatlit. 2005.

[6] Novikov S. Ya., Likhobabenko M. A. *Frames in finitedimensional spaces.* Samara. Samara University. 2013.

[7] Alexeev B., Cahill J., Mixon D. *Full spark frames.* Journal of Fourier Analysis and Applications. 2012. V. 18. I. 6. PP. 1167–1194.

[8] Heinosaary T., Mazzarella I., Wolf M. M. *Quantum tomography ...* Available online: arXiv:1206.1405.

[9] Horn R., Johnson Ch. *Matrix Analysis.* Moscow, Mir. 1989.

[10] Vogt A. Position and momentum distributions do not determine the quantum mechanical state. In: Mathematical Foundations of Quantum Theory (Marlow A. R.,ed.). Academic Press. New York. 1978. PP. 365–372.

S.Y. Novikov, M.E. Fedina[3]

RESTORING THE SIGNAL BY MODULES OF MEASUREMENT

The questions of the selection of vectors in finite-dimensional real and complex spaces so that the modules of scalar products of these vectors with the unknown vector were possible to restore it, are observed.

Also, the injectivity of nonlinear mappings is studied.

Key words: space, signal, systems of vectorsв, injectivity of mappings, scalar products.

Статья поступила в редакцию 15/ *VI*/2016.

The article received 15/ *VI*/2016.

[3] *Novikov Sergey Yakovlevich* (nvks@ssau.ru), the Dept. of Theory of Probability and Mathematical Statistics, Samara University, Samara, 443011, Russian Federation.

Fedina Maria Efimovna (phedina@ssau.ru), the Dept. of Security of Information Systems, Samara University, Samara, 443011, Russian Federation.

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552

М.В. Шамолин[1]

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[2]

В работе систематизируются результаты по исследованию уравнений пространственного движения динамически симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о пространственном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи. Полученные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. Указаны нетривиальные механические и топологические аналогии.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, динамическая система, трехмерный фазовый портрет, случай интегрируемости

1. Модельные предположения

Рассмотрим однородный плоский круговой диск $\mathcal{D}$ с центром в точке D, плоскость которого перпендикулярна державке OD (ср. с [1]). Диск жестко закреплен к державке, находящейся на сферическом шарнире O, и обтекается однородным потоком среды (рис. 1). В этом случае тело представляет собой физический (сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила $\mathbf{S}$ воздействия потока среды на диск направлена параллельно державке, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}_D$ точки D относительно потока и державкой OD (рис. 1), углом β_1, измеряемым в плоскости диска $\mathcal{D}$ (таким образом, (v, α, β_1) — сферические координаты конца

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

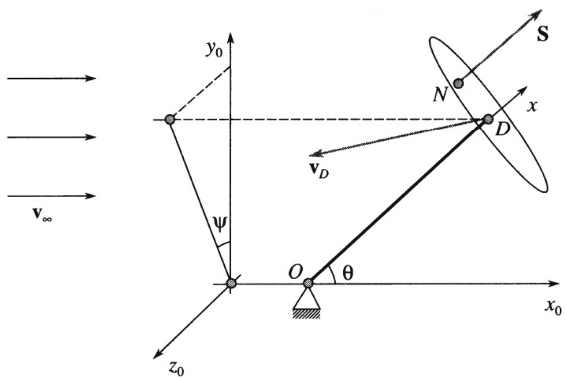

Рис. 1. Закрепленный маятник на сферическом шарнире в потоке набегающей среды

вектора $\mathbf{v}_D$), а также приведенной угловой скоростью $\omega \cong l\Omega/v_D$, $v_D = |\mathbf{v}_D|$ (l — длина державки, Ω — угловая скорость маятника). Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания пространственных тел [2, 3]. Таким образом, примем, что сила $\mathbf{S}$ направлена по нормали к диску в сторону, противоположную направлению скорости $\mathbf{v}_D$, и проходит через некоторую точку N диска так, что вектор скорости $\mathbf{v}_D$ и сила воздействия $\mathbf{S}$ лежат в плоскости ODN. Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/l$ определяет ориентацию державки. Тогда $\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}$, $s(\alpha) = s_1(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha$, где коэффициент сопротивления $s_1 \geqslant 0$ зависит лишь от угла атаки α. В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно точки D функция $s(\alpha)$ является четной.

Пусть $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось $Dx = Dx_1$ имеет направляющий вектор $\mathbf{e}$, а оси $Dx_2 = Dy$ и $Dx_3 = Dz$ лежат в плоскости диска $\mathcal{D}$ (рис. 1). На этом же рисунке показаны и $\theta = \xi$, $\psi = \eta_1$ — углы, определяющие положение маятника на сфере. При этом угол θ измеряется между державкой и направлением набегающего потока (ось x_0), а угол ψ — между проекцией державки на неподвижную плоскость y_0z_0, перпендикулярную набегающему потоку, и осью y_0 (рис. 1). Очевидно, что углы $(\theta, \psi) = (\xi, \eta_1)$ являются сферическими координатами точки D.

Пространством положений такого сферического (физического) маятника является двумерная сфера

$$\mathbf{S}^2\{(\xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^2 : \ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi, \ \eta_1 \mod 2\pi\}, \tag{1.1}$$

а фазовым пространством — касательное расслоение двумерной сферы

$$T_*\mathbf{S}^2\{(\dot\xi, \dot\eta_1; \xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^4 : \ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi, \ \eta_1 \mod 2\pi\}. \tag{1.2}$$

Сопоставим угловой скорости $\Omega = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2 + \Omega_3\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные вектора системы координат $Dx_1x_2x_3$) кососимметрическую матрицу

$$\tilde\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tilde\Omega \in \mathrm{so}(3).$$

Расстояние от центра D диска до центра давления (точки N, рис. 1) будет иметь вид

$$|\mathbf{r}_N| = r_N = DN\left(\alpha, \beta_1, \frac{l\Omega}{v_D}\right), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}\} = \{0, y_N, z_N\}$ в системе $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$ (волну над Ω опустим).

2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли so(3)

Если $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$ — тензор инерции тела-маятника в системе координат $Dx_1x_2x_3$, то общая система уравнений его движения примет следующий вид:

$$\begin{gathered} I_1\dot{\Omega}_1 = 0, \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \tfrac{\Omega}{v_D}\right)s(\alpha)v_D^2, \\ I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \tfrac{\Omega}{v_D}\right)s(\alpha)v_D^2, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\{-s(\alpha)v_D^2, 0, 0\}$ — разложение силы $\mathbf{S}$ воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3$.

Поскольку размерность алгебры Ли so(3) равна 3, система уравнений (2.1) и составляет группу динамических уравнений на so(3), а, попросту говоря, уравнения движения.

Видно, что в правую часть системы уравнений (2.1) входят, прежде всего, углы α, β_1, поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли so(3) присоединить несколько групп кинематических уравнений.

Сразу же заметим, что система (2.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \tag{2.1}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \mathrm{const}. \tag{2.2}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{2.3}$$

При условиях (2.1)–(2.3) система (2.1) примет вид незамкнутой системы двух уравнений:

$$I_2\dot{\Omega}_2 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D}\right)s(\alpha)v_D^2, \quad I_2\dot{\Omega}_3 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D}\right)s(\alpha)v_D^2. \tag{2.4}$$

3. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска $\mathcal{D}$) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1) = \tilde{\Omega}\begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Равенство (3.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3$.

Действительно, в левой части равенства (3.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1x_2x_3$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1)$ — единичный вектор вдоль оси вектора $\mathbf{v}_D$. Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1)$ имеет сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1)$, определяющие разложение (3.2). В правой части равенства (3.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, 0\}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3$.

На втором слагаемом правой части равенства (3.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1)$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (3.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{gathered} v_D\cos\alpha = -v_\infty\cos\xi, \\ v_D\sin\alpha\cos\beta_1 = l\Omega_3 + v_\infty\sin\xi\cos\eta_1, \\ v_D\sin\alpha\sin\beta_1 = -l\Omega_2 + v_\infty\sin\xi\sin\eta_1. \end{gathered} \tag{3.3}$$

4. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости $\tilde{\Omega}$ и координаты $\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \xi, \eta_1$ фазового пространства (1.2) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbf{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1; \xi, \eta_1\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n, n = 3$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных Ω_2, Ω_3, через новые переменные z_1, z_2 (из набора z). Для этого производится следующий поворот на угол η_1:

$$\begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_1)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$T_{1,2}(\eta_1) = \begin{pmatrix} \cos\eta_1 & -\sin\eta_1 \\ \sin\eta_1 & \cos\eta_1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-\eta_1)\begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$z_1 = \Omega_2\cos\eta_1 + \Omega_3\sin\eta_2, \;\; z_2 = -\Omega_2\sin\eta_1 + \Omega_3\cos\eta_2. \tag{4.2}$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$z_2 = \dot{\xi}, \;\; z_1 = -\dot{\eta}_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}. \tag{4.3}$$

Таким образом, две группы уравнений (4.1) и (4.3) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\Omega_2 = -\dot{\xi}\sin\eta_1 - \dot{\eta}_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1, \ \ \Omega_3 = \dot{\xi}\cos\eta_1 - \dot{\eta}_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1. \tag{4.4}$$

Видно, что три группы соотношений (2.4), (3.3), (4.4) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v_D}\right), \ \ z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v_D}\right), \ \ s(\alpha). \tag{4.5}$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α, а функции y_N, z_N могут зависеть, наряду с углами α, β_1, вообще говоря, и от приведенной угловой скорости $\omega \cong l\Omega/v_D$.

5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (круговым диском $\mathcal{D}$) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [3, 4] с той же моделью воздействия среды (рис. 2).

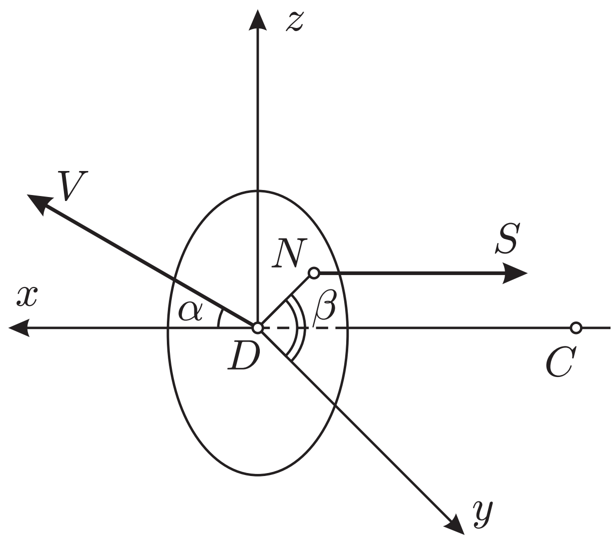

Рис. 2. Пространственное движение свободного динамически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

Если (v,α,β_1) — сферические координаты вектора скорости центра D диска $\mathcal{D}$, лежащего на оси симметрии тела, $\Omega = \{\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3\}$ — проекции его угловой скорости на оси системы координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью $Dx_1 = Dx$ (C — центр масс, рис. 2), а оси $Dx_2 = Dy, Dx_3 = Dz$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, \ I_2, \ I_3 = I_2, \ m$ — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$
\begin{gathered}
\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \sigma(\Omega_2^2+\Omega_3^2) = \frac{F_x}{m},\\
\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha -\\
-\Omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma\Omega_1\Omega_2 - \sigma\dot{\Omega}_3 = 0,\\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \Omega_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 -\\
-\Omega_2 v\cos\alpha - \sigma\Omega_1\Omega_3 + \sigma\dot{\Omega}_2 = 0,\\
I_1\dot{\Omega}_1 = 0,\\
I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 = -z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

$F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma = CD$, при этом

$$
\left(0, y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right), z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\right)
$$

— координаты точки N приложения силы $\mathbf{S}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$, связанной с телом (рис. 2, на котором $\beta = \beta_1$).

Первые три уравнения системы (5.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения системы (5.1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (5.1) шестого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^2\times\mathrm{so}(3)$ трехмерного многообразия на алгебру Ли so(3). При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (5.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [4, 5]).

5.1. Циклический первый интеграл

Сразу же заметим, что система (5.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \tag{5.2}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \mathrm{const}. \tag{5.3}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{5.4}$$

5.2. Неинтегрируемая связь

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [6, 7])

$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{5.5}$$

то в системе (5.1) вместо F_x будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5.5) [7, 8]. Действительно, формально выражая величину T в силу системы (5.1), получим при $\cos\alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) +$$
$$+ s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{I_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left[z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]\right]. \tag{5.6}$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5.5). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (5.1) в результате действий порождает независимую систему четвертого порядка следующего вида:

$$\begin{gathered}
\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha - \sigma\dot\Omega_3 = 0,\\
\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \Omega_2 v\cos\alpha + \sigma\dot\Omega_2 = 0,\\
I_2\dot\Omega_2 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
I_2\dot\Omega_3 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered} \tag{5.7}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (5.7) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\dot\alpha v\cos\alpha + v\cos\alpha\left[\Omega_3\cos\beta_1 - \Omega_2\sin\beta_1\right] + \sigma\left[-\dot\Omega_3\cos\beta_1 + \dot\Omega_2\sin\beta_1\right] = 0,\\
\dot\beta_1 v\sin\alpha - v\cos\alpha\left[\Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_1\right] + \sigma\left[\dot\Omega_2\cos\beta_1 + \dot\Omega_3\sin\beta_1\right] = 0,\\
\dot\Omega_2 = -\tfrac{v^2}{I_2}z_N\left(\alpha, \beta_1, \tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\\
\dot\Omega_3 = \tfrac{v^2}{I_2}y_N\left(\alpha, \beta_1, \tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered} \tag{5.8}$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{pmatrix}\Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_1)\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$$T_{1,2}(\beta_1) = \begin{pmatrix}\cos\beta_1 & -\sin\beta_1\\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1\end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = T_{1,2}(-\beta_1)\begin{pmatrix}\Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix},$$

т.е.

$$z_1 = \Omega_2\cos\beta_1 + \Omega_3\sin\beta_2, \quad z_2 = -\Omega_2\sin\beta_1 + \Omega_3\cos\beta_2. \tag{5.10}$$

Как видно из (5.8), на многообразии

$$O = \left\{(\alpha, \beta_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbf{R}^4: \ \alpha = \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbf{Z}\right\} \tag{5.11}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$. Формально, таким образом, на многообразии (5.11) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат (v, α, β_1), а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (5.8) вырождается.

Из этого следует, что система (5.7) вне и только вне многообразия (5.11) эквивалентна системе

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_2 + \tfrac{\sigma v}{I_2}\tfrac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right],\\
\dot z_2 = \tfrac{v^2}{I_2}s(\alpha)\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right] -\\
- z_1^2\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \tfrac{\sigma v}{I_2}\tfrac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_1\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right],\\
\dot z_1 = z_1 z_2\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left[-\tfrac{v^2}{I_2}s(\alpha) + \tfrac{\sigma v}{I_2}\tfrac{s(\alpha)}{\sin\alpha}z_2\right]\times\\
\times\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right],\\
\dot\beta_1 = z_1\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \tfrac{\sigma v}{I_2}\tfrac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\tfrac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right].
\end{gathered}
\tag{5.12}
$$

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, z_1/v, z_2/v)$ в силу (5.10).

Нарушение теоремы единственности для системы (5.8) на многообразии (5.11) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (5.11) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (5.12), пересекая многообразие (5.11) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (5.5) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (5.6).

Пусть

$$
\lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]s(\alpha)}{\cos\alpha} = L\left(\beta_1, \frac{\Omega}{v}\right).
$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$
\lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1\right]s(\alpha)\right)\right| < +\infty.
$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$
T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega\right) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{m\sigma L v^2}{I_2}. \tag{5.13}
$$

где значения Ω_2, Ω_3 — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидова пространства $\mathbf{E}^3$, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$
T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \tag{5.14}
$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (5.13) и (5.14) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (5.11), что и доказывает сделанное замечание.

5.3. Постоянная скорость центра масс

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [9, 10])

$$
\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \tag{5.15}
$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс), то в системе (5.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = s(\alpha)v^2, \;\; \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{5.16}$$

Случай (5.16) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы четвертого порядка после некоторого преобразования системы (5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{i,j=0,\;\; i\leqslant j}^{3} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\Omega_i\Omega_j = T_1\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)v^2, \;\; \Omega_0 = v. \tag{5.17}$$

Введем для начала новые квазискорости (5.9)–(5.10).

Систему (5.1) в случаях (5.2)–(5.4) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\dot v + \sigma(z_1^2+z_2^2)\cos\alpha - \\
-\sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\sin\alpha\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = \\
= \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \\
\dot\alpha v + z_2 v - \sigma(z_1^2+z_2^2)\sin\alpha - \\
-\sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\cos\alpha\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = \\
= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \\
\dot\Omega_3 = \frac{v^2}{I_2}y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \;\; \dot\Omega_2 = -\frac{v^2}{I_2}z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\dot\beta_1\sin\alpha - z_1\cos\alpha - \\
-\frac{\sigma v}{I_2}s(\alpha)\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = 0.
\end{gathered} \tag{5.18}$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1, 2$, $< \cdot >= n_1 v <'>$, $n_1 > 0$, $n_1 = \mathrm{const}$, система (5.18) приведется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{5.19}$$

$$\begin{gathered}
\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha + \\
+\frac{\sigma}{I_2 n_1}s(\alpha)\cos\alpha\left[y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 + z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1\right] - \\
-\frac{T_1(\alpha,\beta_1,n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha,
\end{gathered} \tag{5.20}$$

$$\begin{gathered}
Z_2' = \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2}[1 - \sigma n_1 Z_2\sin\alpha]\left[y_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\cos\beta_1 + z_N(\alpha,\beta_1,n_1 Z)\sin\beta_1\right] - \\
-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha -
\end{gathered}$$

$$-\frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right] -$$

$$-Z_2 \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha, \tag{5.21}$$

$$Z_1' = \frac{1}{I_2 n_1^2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}[\sigma n_1 Z_2\sin\alpha - 1]\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right] +$$

$$+Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha -$$

$$-\frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha)\sin\alpha\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1\right] -$$

$$-Z_1 \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha, \tag{5.22}$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+\frac{\sigma}{I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right], \tag{5.23}$$

$$\Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha +$$

$$+\frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha)\sin\alpha\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right] +$$

$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha.$$

Видно, что в системе пятого порядка (5.19)–(5.23) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (5.20)–(5.23), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (5.16) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка также возможен.

6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Выберем функцию $\mathbf{r}_N$ в следующем виде (диск $\mathcal{D}$ задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \ \ \mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1\right) \tag{6.1}$$

(см. (3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выполнены равенства

$$x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \ \ x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1,$$

убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [11, 12], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \;\; s(\alpha) = B\cos\alpha, \;\; A, B > 0. \tag{6.2}$$

6.1. Приведенные системы

Теорема 6..1 *Совместные уравнения (2.1), (3.3), (4.4) при выполнении условий (2.1)–(2.3), (6.1), (6.2) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (1.2) двумерной сферы (1.1).*

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \;\; n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \;\; <\cdot>= n_0 v_\infty <'>, \tag{6.3}$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{array}{l} \xi'' + b_*\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \eta_1'^2\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\ \eta_1'' + b_*\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} = 0, \;\; b_* > 0. \end{array} \tag{6.4}$$

Фазовый портрет системы (6.4) $(\xi \leftrightarrow \theta, \;\; \eta_1 \leftrightarrow \psi)$ изображен на рис. 3.

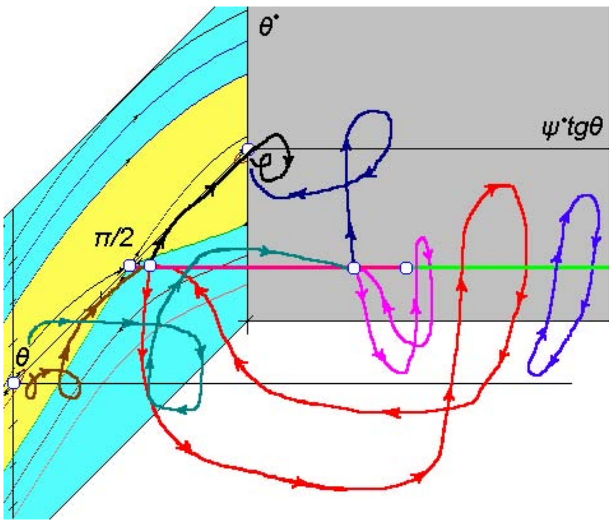

Рис. 3. Фазовый портрет закрепленного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (4.3)) к переменным w

$$w_2 = -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_2 - b_*\sin\xi, \;\; w_1 = -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_1, \tag{6.5}$$

система (6.4) будет эквивалентна системе

$$\xi' = -w_2 - b_*\sin\xi, \;\; w_2' = \sin\xi\cos\xi - w_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \;\; w_1' = w_1 w_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.6}$$

$$\eta_1' = w_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^2\{(w_2, w_1; \xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^4: \ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi, \ \eta_1 \mod 2\pi\}$$

двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{(\xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^2: \ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi, \ \eta_1 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе четвертого порядка (6.6), (6.7) по причине цикличности переменной η_1 выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.6), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии.

6.2. Общие замечания об интегрируемости системы

Для полного интегрирования системы (6.6), (6.7) четвертого порядка необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла.

6.2.1. Система при отсутствии силового поля

Рассмотрим систему (6.6), (6.7) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{w_2, w_1; \xi, \eta_1\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\xi, \eta_1\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.3) тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ во втором уравнении системы (6.6) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = -w_2, \tag{6.8}$$

$$w_2' = -w_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.9}$$

$$w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.10}$$

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \tag{6.11}$$

Система (6.8)–(6.11) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 6..2 *Система (6.8)–(6.11) обладает тремя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = C_1 = const, \tag{6.12}$$

$$\Phi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1 \sin\xi = C_2 = const, \tag{6.13}$$

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3 = const. \tag{6.14}$$

Два первых интеграла (6.12), (6.13) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются две (вообще говоря, ненулевые) компоненты угловой скорости трехмерного твердого тела, а именно:

$$\Omega_2 \equiv \Omega_2^0 = \text{const}, \ \ \Omega_3 \equiv \Omega_3^0 = \text{const}.$$

В частности, наличие первого интеграла (6.12) объясняется равенством

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2}\left[\Omega_2^2 + \Omega_3^2\right] \equiv C_1^2 = \text{const}.$$

Третий первый интеграл (6.14) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на η_1 и может быть найден из следующей квадратуры: $dw_1/d\eta_1 = w_2$, при этом если воспользоваться уровнем первого интеграла (6.12)

$$\int d\eta_1 = \pm \int \frac{dw_1}{\sqrt{C_1^2 - w_1^2}},$$

то искомое равенство примет вид

$$\eta_1 + C_3 = \pm \arcsin \frac{w_1}{C_1} = \pm \arcsin \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}},$$

откуда

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \eta_1 \mp \arcsin \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} = C_3. \tag{6.15}$$

Теперь перефразируем теорему 6..2.

Теорема 6..3 *Система (6.8)–(6.11) обладает тремя независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{w_1^2 + w_2^2}{w_1 \sin \xi} = C_1' = const, \tag{6.16}$$

$$\Psi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_2' = const, \tag{6.17}$$

$$\Psi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3' = const. \tag{6.18}$$

Первый интеграл (6.18) также имеет кинематический смысл и “привязывает” уравнение на η_1, а функции Ψ_2, Ψ_3 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_3.

В формулировке теоремы 6..3 (в отличие от теоремы 6..2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.16)–(6.18) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6..3 преобразованный набор первых интегралов (6.16)–(6.18) системы (6.8)–(6.11) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

6.2.2. Система при наличии консервативного силового поля

Теперь рассмотрим систему (6.6), (6.7) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ во втором уравнении системы (6.6) (в отличие от системы (6.8)–(6.11)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -w_2, \tag{6.19}$$

$$w_2' = \sin\xi\cos\xi - w_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.20}$$

$$w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.21}$$

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \tag{6.22}$$

Итак, система (6.19)–(6.22) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 6..4 *Система (6.19)–(6.22) обладает тремя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1^2 + w_2^2 + \sin^2\xi = C_1 = const, \tag{6.23}$$

$$\Phi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1 \sin\xi = C_2 = const, \tag{6.24}$$

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3 = const. \tag{6.25}$$

Первый интеграл (6.23) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (6.25) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_1 и может быть найден аналогичным образом.

Действительно, искомый интеграл может быть найден из следующей квадратуры: $dw_1/d\eta_1 = w_2$, при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (6.23), (6.24)

$$\int d\eta_1 = \pm \int \frac{dw_1}{\sqrt{C_1^2 - w_1^2 - C_2^2/w_1^2}},$$

то искомое равенство примет вид

$$\eta_1 + C_3 = \pm \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4w_1^2 - 2C_1^2}{C_1^4 - 4C_2^2}}, \ \ C_1^2 > 2|C_2|,$$

откуда

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \eta_1 \mp \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4w_1^2 - 2C_1^2}{C_1^4 - 4C_2^2}} = C_3, \ \ C_1^2 > 2|C_2|, \tag{6.26}$$

где вместо C_1, C_2 необходимо подставить левые части равенств (6.23), (6.24).

Теперь перефразируем теорему 6..4.

Теорема 6..5 *Система (6.19)–(6.22) обладает тремя независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{w_1^2 + w_2^2 + \sin^2 \xi}{w_1 \sin \xi} = C_1' = const, \tag{6.27}$$

$$\Psi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_2' = const, \tag{6.28}$$

$$\Psi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3' = const. \tag{6.29}$$

Функции Ψ_2, Ψ_3 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_3.

В формулировке теоремы 6..5 (в отличие от теоремы 6..4) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.27)–(6.29) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6..5 преобразованный набор первых интегралов (6.27)–(6.29) системы (6.19)–(6.22) (системы при наличии консервативного силового поля) попрежнему остается набором первых интегралов данной системы.

6.3. Полный список первых интегралов

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (6.6), (6.7) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (6.6) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_2}{d\xi} = \frac{\sin \xi \cos \xi - w_1^2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_2 - b_* \sin \xi}, \ \ \frac{dw_1}{d\xi} = \frac{w_1 w_2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_2 - b_* \sin \xi}. \tag{6.30}$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (6.30) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_2}{d\tau} = \frac{\tau - w_1^2/\tau}{-w_2 - b_* \tau}, \ \ \frac{dw_1}{d\tau} = \frac{w_1 w_2/\tau}{-w_2 - b_* \tau}. \tag{6.31}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам $w_k = u_k\tau,\ k = 1, 2$, приводим систему (6.31) к следующему виду:

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 - b_*},\ \ \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 - b_*}. \tag{6.32}$$

Сопоставим системе второго порядка (6.32) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_*u_2}{2u_1u_2 + b_*u_1}, \tag{6.33}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1}\right) = 0.$$

Итак, уравнение (6.33) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{6.34}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_2, w_1; \xi) = \frac{w_2^2 + w_1^2 + b_*w_2\sin\xi + \sin^2\xi}{w_1\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{6.35}$$

Замечание 6..1 *Рассмотрим систему (6.6) с переменной диссипацией с нулевым средним [13, 14], становящейся консервативной при* $b_* = 0$*:*

$$\xi' = -w_2,\ \ w_2' = \sin\xi\cos\xi - w_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\ \ w_1' = w_1w_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \tag{6.36}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_2^2 + w_1^2 + \sin^2\xi = C_1^* = const, \tag{6.37}$$

$$w_1\sin\xi = C_2^* = const. \tag{6.38}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.37), (6.38) также является первым интегралом системы (6.36). Но при $b_* \neq 0$ *каждая из функций*

$$w_2^2 + w_1^2 + b_*w_2\sin\xi + \sin^2\xi \tag{6.39}$$

и (6.38) по отдельности не является первым интегралом системы (6.6). Однако отношение функций (6.39), (6.38) является первым интегралом системы (6.6) при любом b_**.*

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.6). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (6.34) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_*}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_*^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{6.40}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{6.41}$$

и фазовое пространство системы (6.6) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.40).

Таким образом, в силу соотношения (6.34) первое уравнение системы (6.32) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1U_1(C_1,u_2)}{-u_2-b_*},$$

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (6.41).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.6) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau}=\int\frac{(-b_*-u_2)du_2}{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}/2}. \tag{6.42}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\sin\xi|$. Если

$$u_2+\frac{b_*}{2}=r_1,\ \ b_1^2=b_*^2+C_1^2-4,$$

то правая часть равенства (6.42) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}+b_*\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\pm\frac{b_*}{2}I_1,$$

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\ \ r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{6.43}$$

При вычислении интеграла (6.43) возможны три случая.

I. $b_*>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+\text{const}. \tag{6.44}$$

II. $b_*<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{6.45}$$

III. $b_*=2$.

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{6.46}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{w_2}{\sin\xi}+\frac{b_*}{2}, \tag{6.47}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b_*>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \qquad (6.48)$$

II. $b_*<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \qquad (6.49)$$

III. $b_*=2$.

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \qquad (6.50)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.6) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 6..2 *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (6.34).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2(w_2,w_1;\xi)=G\left(\sin\xi,\frac{w_2}{\sin\xi},\frac{w_1}{\sin\xi}\right)=C_2=\mathrm{const}. \qquad (6.51)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (6.6), (6.7) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau}=\frac{u_1(2u_2+b_*)}{(-b_*-u_2)\tau},\quad \frac{d\eta_1}{d\tau}=\frac{u_1}{(-b_*-u_2)\tau},$$

то $du_1/d\eta_1=2u_2+b_*$. Очевидно, что при $u_1\neq 0$ выполнено равенство

$$u_2=\frac{1}{2}\left(-b_*\pm\sqrt{b_1^2-4\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2}\right),\quad b_1^2=b_*^2+C_1^2-4,$$

тогда интегрирование следующей квадратуры:

$$\eta_1+\mathrm{const}=\pm\int\frac{du_1}{\sqrt{b_1^2-4\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2}}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\eta_1+C_3)=\pm\arcsin\frac{2u_1-C_1}{\sqrt{b_*^2+C_1^2-4}},\quad C_3=\mathrm{const}.$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\eta_1+C_3)]=\pm\frac{2u_1-C_1}{\sqrt{b_*^2+C_1^2-4}}$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\eta_1+C_3)]=\pm\frac{2w_1-C_1\sin\xi}{\sqrt{b_*^2+C_1^2-4}\sin\xi}.$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, "привязывающего" уравнение (6.7), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (6.34).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (6.34)):

$$\mathrm{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 - b_* u_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 + 4b_* u_2 + b_*^2)}.$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\mathrm{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \frac{(w_1^2 - w_2^2 - b_* w_2 \sin\xi - \sin^2\xi)^2}{w_1^2(4w_2^2 + 4b_* w_2 \sin\xi + b_*^2 \sin^2\xi)},$$

или окончательно

$$\Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = -\eta_1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{w_1^2 - w_2^2 - b_* w_2 \sin\xi - \sin^2\xi}{w_1(2w_2 + b_*\sin\xi)} = C_3 = \mathrm{const}. \quad (6.52)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.6), (6.7) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (6.35), (6.51), (6.52) (при этом используются выражения (6.47)–(6.50)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6..6 *Три группы соотношений (2.1), (3.3), (4.4) при условиях (2.1)–(2.3), (6.1), (6.2) обладают тремя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

6.4. Топологические аналогии

Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой (5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.12).

При выполнении условий (6.1), (6.2) система (5.12) примет вид

$$\alpha' = -w_2 + b\sin\alpha,\ \ w_2' = \sin\alpha\cos\alpha - w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \ w_1' = w_1 w_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (6.53)$$

$$\beta_1' = w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (6.54)$$

если ввести безразмерные параметр, переменные и дифференцирование по аналогии с (6.3):

$$b = \sigma n_0,\ \ n_0^2 = \frac{AB}{I_2},\ \ z_k = n_0 v w_k,\ \ k = 1, 2,\ \ < \cdot >= n_0 v <'> . \quad (6.55)$$

Теорема 6..7 *Система (6.53), (6.54) (для свободного тела) эквивалентна системе (6.6), (6.7) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha,\ \ \eta_1 = \beta_1,\ \ b_* = -b. \quad (6.56)$$

Следствие 6..1 *1. Угол атаки α и угол скольжения β_1 для свободного тела (рис. 2) эквивалентны соответственно углам отклонения $\xi = \theta$ и $\eta_1 = \psi$ закрепленного маятника (рис. 1).*

2. *Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.*

3. *Первые интегралы системы (6.53), (6.54) могут быть автоматически получены через равенства (6.35), (6.51), (6.52) после подстановок (6.56) (см. также [12, 15]):*

$$\Theta_1'(w_2, w_1; \alpha) = \frac{w_2^2 + w_1^2 - bw_2 \sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_1 \sin\alpha} = C_1 = const. \tag{6.57}$$

$$\Theta_2'(w_2, w_1; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_2}{\sin\alpha}, \frac{w_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = const. \tag{6.58}$$

$$\Theta_3'(w_2, w_1; \alpha, \beta_1) =$$
$$= -\beta_1 \pm \frac{1}{2} arctg \frac{w_1^2 - w_2^2 + bw_2 \sin\alpha - \sin^2\alpha}{w_1(2w_2 - b\sin\alpha)} = C_3 = const. \tag{6.59}$$

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (5.15). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.19)–(5.23).

Тогда, в силу условий (5.15), (6.1), (6.2), (6.55) ($w_k \leftrightarrow Z_k$) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.20)–(5.23)) примет вид аналитической системы

$$\begin{gathered} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \\ Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \\ Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{gathered} \tag{6.60}$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.61}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом: $n_1 = n_0$.

Если вопрос о первых интегралах системы (6.53), (6.54) решается с помощью следствия 6..1, то аналогичный вопрос для системы (6.60), (6.61) решает следующая теорема 6..8.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (6.60), (6.61) имеет следующий вид:

$$\Theta_1''(Z_2, Z_1; \alpha) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - bZ_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{6.62}$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.60), используя при этом первый интеграл (6.62). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin\alpha, \ \ Z_k = u_k\tau, \ \ k = 1, 2, \ \ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{6.63}$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \tag{6.64}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия $b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0$.

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (6.64) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (6.64), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1]\exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right], \ C = \text{const}.$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2''(Z_2, Z_1; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{Z_2}{\sin\alpha}, \frac{Z_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{6.65}$$

используя при этом обозначения и замены (6.63).

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (6.60), (6.61) найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно предъявить один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.61). Искомый первый интеграл может быть получен из

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm\frac{2Z_1 - C_1\sin\alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}\sin\alpha}.$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, "привязывающего" уравнение (6.61), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в нем необходимо формально вместо C_1 подставить левую часть (6.62). Но, проводя некоторые преобразования, получим окончательный вид дополнительного первого интеграла:

$$\Theta_3''(Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) = -\beta_1 \pm \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2\sin\alpha - \sin^2\alpha}{Z_1(2Z_2 - b\sin\alpha)} = C_3 = \text{const}. \tag{6.66}$$

Теорема 6..8 *Три первых интеграла (6.62), (6.65), (6.66) системы (6.60), (6.61) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 6..9 *Три первых интеграла (6.62), (6.65), (6.66) системы (6.60), (6.61) эквивалентны трем первым интегралам (6.57), (6.58), (6.59) системы (6.53), (6.54).*

Действительно, пары первых интегралов (6.62), (6.57) и (6.66), (6.59) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные Z_k, $k = 1, 2$, для системы (6.60), (6.61) с фазовыми переменными w_k, $k = 1, 2$, для системы (6.53), (6.54). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (6.65), (6.58), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Заключение

Итак, мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше. (1) Движение закрепленного на сферическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил). (2) Пространственное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи). (3) Пространственное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [9, 10].

Литература

[1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.

[2] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 114. № 1. P. 919–975.

[3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". Т. 125. "Динамические системы". 2013. С. 5–254.

[4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.

[5] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.

[6] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.

[9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

[10] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во “Экзамен”, 2007. 352 с.

[11] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 122. № 1. P. 2841–2915.

[12] Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. 2007. Т. 43. № 10. С. 49–67.

[13] Шамолин М.В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. мат. и мех. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 273–287.

[14] Шамолин М.В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 3. С. 43–49.

[15] Шамолин М.В. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения // Прикл. механика. 2009. Т. 45. № 6. С. 125–140.

References

[1] Shamolin M.V. Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Esyestvennonauchnaya* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113. (in Russ.)

[2] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium, *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, **114**, no. 1, pp. 919–975.

[3] Shamolin M.V. Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field, *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i ee prolodzeniya. Tematicheskie obzory* [Contemporary Mathematics and its Applications], **125**, Dynamical Systems, 2013, pp. 5–254. (in Russ.)

[4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. New case of integrability in dynamics of multi-dimensional body, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Esyestvennonauchnaya* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2012, no. 9/1(110), pp. 35–41. (in Russ.)

[5] Shamolin M.V., Variety of types of phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium, *Doklady RAN* [Physics Doklady], 1996, **349**, no. 2, pp. 193–197. (in Russ.)

[6] Shamolin M.V., Dynamical Systems With Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications, *Fund. Prikl. Mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2008, **14**, no. 3, pp. 3–237. (in Russ.)

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. Mathematical aspect in classical and celestial mechanics, M.: VINITI, 1985. 304 p. (in Russ.)

[8] Trofimov V.V. Symplectic structures on symmetruc spaces automorphysm groups, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33. (in Russ.)

[9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems, *Fund. Prikl. Mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2010, **16**, no. 4, pp.3–229. (in Russ.)

[10] Shamolin M.V. Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body, M.: Ekzamen, 2007. 352 pp. (in Russ.)

[11] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body, *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, **122**, no. 1, pp. 2841–2915.

[12] Shamolin M.V. Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium, *Prikl. Mekh.* [International Applied Mechanics], 2007, **43**, no. 10, pp. 49–67.

[13] Shamolin M.V. New integrable cases in dynamics of a medium-interacting body with allowance for dependence of resistance force moment on angular velocity, *Prikl. Mat. Mekh.* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2008, **72**, no. 2, pp. 273–287.

[14] Shamolin M.V. Integrability of some classes of dynamic systems in terms of elementary functions, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin], no. 3, pp. 43–49 (2008).

[15] Shamolin M.V. Stability of a rigid body translating in a resisting medium, *Prikl. Mekh.* [International Applied Mechanics], 2009, **45**, no. 6, pp. 125–140.

M. V. Shamolin[3]

CASES OF INTEGRABILITY CORRESPONDING TO THE PENDULUM MOTION IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

In this actitity, we systemize some results on the study of the equations of spatial motion of dynamically symmetric fixed rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of a spatial motion of a free rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. The obtained results are systematized and served in the invariant form. We also show the nontrivial topological and mechanical analogies.

Key words: rigid body, resisting medium, dynamical system, three-dimensional phase pattern, case of integrability

Статья поступила в редакцию 18/ V/2016.

The article received 18/ V/2016.

[3] *Shamolin Maxim Vladimirovich* (`ivanov@mail.ru`), (`shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Асташов Евгений Александрович, аспирант кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, в 2013 г. окончил Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова по специальности "Математика".

Область научных интересов: алгебраическая геометрия, теория особенностей.

Асташова Ирина Викторовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, профессор кафедры высшей математики факультета МЭСИ Российского экономического университета им.Г.В.Плеханова. Тема канд. дис.: "Асимптотические свойства решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений" (защ. в 1989 г.); тема докт. дис.: "Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений" (защ. в 2008 г.). Автор и соавтор 130 научных работ, в т. ч. монографии "Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений".

Область научных интересов: качественная теория дифференциальных уравнений и смежные вопросы.

Лашин Дмитрий Александрович кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ООО НПФ ФИТО, закончил с отличием Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ) в 2005 г., Тема канд. дис.: "Оптимальное управление температурным режимом в теплице" (защ. в 2008 г.). Автор и соавтор более 20 научных работ, имеет патенты и изобретения.

Область научных интересов: Теория управления, экстремальные задачи, системы регулирования микроклимата в теплице.

Филиновский Алексей Владиславович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Тема канд. дис.: "Стабилизация при больших значениях времени решений внешних краевых задач для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-\Delta)^p u = 0$" (защ. в 1985 г.); тема докт. дис.: "Стабилизация решений волнового уравнения в областях с бесконечными границами" (защ. в 1999 г.). Автор и соавтор 75 научных работ, в т. ч. монографий "Some problems in the qualitative theory of differential equations" (2003 г.), "Стабилизация и спектр в задачах распространения волн". (2012 г.).

Область научных интересов: Стабилизация решений нестационарных задач, экстремальные задачи для уравнений в частных производных, спектральная теория.

Гущина Виолетта Александровна, аспирант кафедры физики, математики и методики обучения Самарского государственного социально-педагогического университета, в 2013 г. окончила Самарский государственный социально-педагогический университет по специальности "математика"

Область научных интересов: дифференциальные уравнения.

Дмитриев Виктор Борисович, кандидат физ.-мат. наук, преподаватель математики, Самарский колледж железнодорожного транспорта им. А.А. Буянова, закончил Самарский государственный университет в 2002 г. по специальности "Математика". Тема канд. дис.: "Краевые задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений"(защ. в 2006 г.). Автор и соавтор 28 научных работ.

Область научных интересов: уравнения математической физики, нелокальные задачи, интегральные условия.

Зайцева Наталья Владимировна, ассистент кафедры высшей математики и математического моделирования, Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанского (Приволжского) федерального университета, в 2002 г. окончила Казанский государственный педагогический университет по специальности "математика и информатика."

Область научных интересов: дифференциальные уравнения и математическая физика, начально-граничные задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя с интегральными условиями первого и второго родов, моделирование.

Новиков Сергей Яковлевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. Декан факультета математики, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва. Тема канд. дис.: "Геометрические свойства симметричных пространств"(защ. в 1981 г.). Тема докт. дис.: "Последовательности функций в функциональных пространствах и их приложения"(защ. в 2003 г.) Автор и соавтор 47 научных работ, в т. ч. монографии "Последовательности функций в симметричных пространствах".

Область научных интересов: геометрия функциональных пространств, гармонический анализ, математические основы цифровой обработки сигналов.

Федина Мария Ефимовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры безопасности информационных систем Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва Тема канд. дис.: "Связанные задачи механики трещин в теории ползучести с поврежденностью"(защ. в 2004). Автор и соавтор 43 научных работ.

Область научных интересов: математические основы цифровой обработки сигналов.

Шамолин Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, академик РАЕ. Тема докт. дис.: "Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой" (защ. в 2004 г.). Имеет более 350 печатных работ, в т. ч. 9 монографий.

Область научных интересов: прикладная математика, методы математического моделирования; классическая механика, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой; качественная теория динамических систем, типичность, абсолютная и относительная грубость; динамика многомерного твердого тела в неконсервативных силовых полях; дифференциальная и топологическая диагностика, задачи дифференциальной диагностики в диагностических пространствах; теория фракталов; математическая логика и информатика.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Astashov Evgeny Aleksandrovich, postgraduate student of Lomonosov Moscow State University, the Dept. of Mechanics and Mathematics, in 2013 graduated from Lomonosov Moscow State University with a degree in "Mathematics".

Research interests: algebraic geometry, singularity theory.

Astashova Irina Viktorovna, Professor of Lomonosov Moscow State University, Dept. of Mechanics and Mathematics, Ch. of Differential Equations.
Professor Plekhanov Russian University of Economics, Dept. of MESI, Ch. of higher mathematics. PhD in Physics and Mathematics. Theme: "Asymptotic properties of some nonlinear differential equations" (graduated in 1989). Doctor degree in Physics and Mathematics. Theme: "Qualitative properties of quasilinear ordinary differential equations" (graduated in 2008). Author and coauthor of 125 papers, include the book "*Astashova I. V.* Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations. In: Astashova I. V. (ed.) Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition, (647 c.) M.: UNITY-DANA, pp. 22–290. (Russian)" (2012 г.),

Research interests: Qualitative theory of differential equations and related topics.

Lashin Dmitriy Aleksandrovich, PhD in Physics and Mathematics, Leading Researcher, FITO Research and Prodaction Company. Graduated with honor from Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI) in 2005, PhD Theme: "Optimal thermal control in the greenhouse" (graduated in 2008). Author and coauthor of more than 20 scientific papers, has patents and inventions.

Research interests: Control theory, extremum problems, climate control system in the greenhouse.

Filinovskiy Alexey Vladislavovich, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of the Chair of High Mathematics of N.E. Bauman Moscow State Technical University. Ph. D.: "Stabilization for large values of time for solutions of exterior boundary value problems to the equation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-\Delta)^p u = 0$" (1985); Dr. Sc.: "Stabilization of solutions of the wave equation in domains with infinite boundaries " (1999). Author and co-author of more then 70 scientific papers include monographes "Some problems in the qualitative theory of differential equations" (2003), "Filinovskiy A.V. Stabilisation and spectr in the problems of wave propagation. In: Astashova I. V. (ed.) Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition, (647 c.) M.: UNITY-DANA, pp. 289–463.. (Russian)" (2012 г.).

Research interests: Stabilization of solutions to non-stationary problems, extremum problems for partial differential equations, spectral theory.

Gushchina Violetta Alexandrovna, postgraduate of Samara State Social - Pedagogical University, the Dept. of Physics, Mathematics and teaching methods, in 2013 graduated from Samara state pedagogical university with a degree in "mathematics"

Research interests:differential equations.

Dmitriev Viktor Borisovich, candidate of physical and mathematical Sciences, Professor of mathematics, Samara College of railway transport of A.A.Buyanov. Graduated from Samara state University in 2002, specialty "Mathematics". The subject of the candidate dis.: "Boundary value problems with non-classical conditions for hyperbolic equations"(Def. 2006). Author and co-author of 28 scientific papers.

Research interests: equations of mathematical physics, nonlocal problems, integral conditions.

Zaitseva Natalya Vladimirovna, assistant, Dept. of higher mathematics and mathematical modeling, Lobachevskii Institute of mathematics and mechanics, Kazan (Volga region) Federal University, in 2002 graduated from Kazan State Pedagogical University with a degree in "Mathematics and Informatics."

Research interests: Differential Equations and Mathematical Physics, the boundary value problems for a hyperbolic equation with Bessel operator with integral boundary value conditions of the first and second kinds, modeling.

Novikov Sergey Yakovlevich, Dr. of Physical and Mathematical Sci., prof. Dean of the Faculty of Mathematics, Head of the Chair of the theory of probability and mathematical statistics. Chair of the theory of Probability and Mathematical Statistics, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev The subject of the candidate dis.: "Geometric properties of symmetric spaces " (1981). Subject of Doctor's thesis: "Sequences of functions in function spaces and their Applications" (2003) Author of more than 47 publications, 1 monograph "Sequences of functions in symmetric spaces".

Research interests: the geometry of function spaces, harmonic analysis, mathematical foundations of digital signal processing.

Fedina Maria Efimovna, kand. of Physics and Mathematics, Associate Professor, of the department the security of information systems chair, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev. The subject of the candidate dis.: "Related problems of mechanics of cracks in the theory of creep damage"(2004). Author of more than 43 publications.

Research interests: mathematical foundations of digital signal processing.

Shamolin Maxim Vladimirovich, Dr. of Physical and Mathematical Sci., prof., leading researcher of the Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University. Academician of Russian Academy of Natural History. Subject of Doctor's thesis: "Methods of analysis of certain classes of nonconservative systems in dynamics of a rigid body interacting with a medium" (2004). Author of more than 350 publications (including 9 monographs).

Research interests: applied mathematics, methods of mathematical modeling, classical mechanics, dynamics of a rigid body interacting with a medium, qualitative theory of dynamic systems, tipicity, absolute and relative roughness, dynamics of multi-dimensional rigid body in nonconservative fields of forces, differential and topological diagnostics, problems of differential diagnostics in diagnostical spaces, fractal theory, mathematical logic and informatics.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу *http://vestnik.samsu.ru.*

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегий журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: louise@samdiff.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть поразделной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\LaTeX 2_\varepsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций $\TeX$'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами $\LaTeX$'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("-"), двойной дефис ("–")[1], тройной дефис ("—")[2]. Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных"фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

---

[1]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--~`

[2]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

Уважаемые авторы, просим предоставить сведения для размещения в журнале на странице "Сведения об авторах"

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры ...., в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности "..........".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of ...., in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in "............".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.