МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ
MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-4-68-75

УДК 530.1:512.54+535.14

Дата: поступления статьи: 09.10.2020
после рецензирования: 11.11.2020
принятия статьи: 25.11.2020

А.В. Горохов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: alvgorokhov@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6908-1166
Г.И. Ерёменко
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: phys.geom@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5801-9463

КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ КУБИТОВ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена система двух диполь-дипольно взаимодействующих двухуровневых атомов (кубитов) во внешних полях. Показано, что с использованием когерентных состояний группы динамической симметрии системы $SU(2) \times SU(2)$ временная эволюция может быть сведена к "классической"динамике их комплексных параметров. Построены траектории когерентных состояний и рассчитаны временные зависимости вероятности нахождения кубитов на верхних уровнях.

Ключевые слова: когерентные состояния; группа динамической симметрии; квантовая динамика; многообразие Кэлера; кубит; двухуровненый атом; диполь-дипольное взаимодействие.

Цитирование. Горохов А.В., Ерёменко Г.И. Квантовая динамика системы кубитов во внешних полях // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 4. С. 68–75. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-68-75.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Горохов Александр Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Ерёменко Георгий Игоревич — студент кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Для описания эволюции квантовых систем используется метод квантования динамических систем, фазовые пространства которых являются многообразиями Кэлера с неевклидовой метрикой [1]. Хорошо известно, что данный метод был предложен математиком Ф.А. Березиным.

Формализм вторичного квантования для бозонов и фермионов заключается в использовании методов комплексного анализа и интегралов по траекториям для описания оператора эволюции квантовой системы. В статье рассмотрены компактные комплексные многообразия Кэлера, связанные с группой движения $SU(d)$, которые интересны для модельных задач квантовой оптики и квантовой информатики.

Наряду с исследованием квантовых операций с системой кубитов, для которых группой динамической симметрии является группа $SU(2)$, активно разрабатываются обобщения известных для кубитов схем квантовых вычислений и квантовых коммуникаций, в которых элементарными квантовыми ячейками будут выступать многомерные обобщения кубитов. Поэтому продолжает быть актуальной задача об исследовании временной динамики d-уровневых квантовых систем, взаимодействующих между собой и с внешними структурированными электромагнитными полями [2]. Рассмотрим квантовую систему, гамильтониан которой имеет вид некоторой функции от генераторов унитарного представления $\hat{T}(g)$ группы Ли G, действующего в гильбертовом пространстве состояний системы

$$\widehat{H} = f(\widehat{A_1}, \ldots, \widehat{A_r}), \tag{1}$$

а самосопряженные операторы $\widehat{A_1}, \ldots, \widehat{A_r}$ образуют базис представления алгебры Ли группы G. Такую группу называют группой динамической симметрии гамильтониана $\widehat{H}$. Операторы $\widehat{A_1}, \ldots, \widehat{A_r}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\widehat{A_\alpha}, \widehat{A_\beta}] = iC^{\gamma}_{\alpha\beta} * \widehat{A_\gamma}, i = \sqrt{-1}, \tag{2}$$

где $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — структурные постоянные группы G. Для большинства реальных задач f имеет вид некоторой полиномиальной зависимости генераторов $\widehat{A_1}, \ldots, \widehat{A_r}$, а если f имеет вид линейной комбинации генераторов, то в этом случае оператор эволюции такой квантовой системы может быть найден в виде оператора унитарного неприводимого представления группы G. Когерентное состояние $|CS\rangle$ строится по формуле:

$$|CS\rangle = |Z\rangle = \widehat{T}(g_Z)|\Psi_0\rangle, \tag{3}$$

здесь g_Z — элемент группы G, соответствующий точке $g_Z G_0$ однородного пространства G/G_0, а подгруппа $G_0 \subset G$ с точностью до фазового множителя оставляет инвариантным вектор $|\Psi_0\rangle$. Эволюция параметров когерентного состояния (КС) приводит к классической динамике для классического аналога квантовой задачи, при этом фазовым пространством выступает фактор-пространство G/G_0, на котором естественным образом реализуется структура комплексного многообразия Кэлера. Рассмотрим систему двух двухуровневых атомов, взаимодействующих с внешним классическим полем.

1. Динамика когерентных состояний двух двухуровневых атомов с внешними полями

Рассмотрим систему двух двухуровневых атомов, взаимодействующих с внешним классическим полем. Такая система может быть определена следующим оператором Гамильтона:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_1(t) + \hat{H}_2(t) + \hat{H}_{dd}, \tag{4}$$

где $\hat{H}_j(t)$ — хорошо известный гамильтониан кубита $(j = 1, 2)$ с учетом взаимодействия с внешним классическим электромагнитным полем [3]. Оператор Гамильтона для j-го атома имеет вид:

$$\hat{H}_j(t) = \omega_0 \widehat{S}^{(j)}_3 + \chi_j(t)\widehat{S}^{(j)}_+ + \bar{\chi_j}(t)\widehat{S}^{(j)}_-, \tag{5}$$

а внешнее поле определено таким образом:

$$\chi_j(t) = \chi_{0j} e^{-i\omega t}. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение генераторы группы $SU(2)$:

$$\widehat{S}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наряду с внешним полем в современной квантовой оптике и квантовой информатике рассматривают так называемое диполь-дипольное взаимодействие между атомами. Этот оператор, как правило, для двухуровневых атомов (кубитов) определяется соотношением

$$\hat{H}_{dd} = \Omega_{12}(\widehat{S}^{(1)}_+ \widehat{S}^{(2)}_- + \widehat{S}^{(1)}_- \widehat{S}^{(2)}_+). \tag{7}$$

Здесь $\hat{H}_{dd}$ — оператор диполь-дипольного взаимодействия кубитов, $\widehat{S}^{(j)}_+$ и $\widehat{S}^{(j)}_-$ — повышающий и понижающий операторы переходов между уровнями в j-м атоме, а Ω_{12} имеет смысл "константы" диполь-дипольного взаимодействия, которая зависит от расстояния между атомами, а для движущихся атомов – от времени.

Введем матричный элемент полного гамильтониана (4) между КС группы $SU(2) \times SU(2)$:

$$\mathcal{H} = \langle z_1, z_2|\widehat{H}|\bar{z_1}, \bar{z_2}\rangle. \tag{8}$$

Покажем, что для исследуемой системы эволюция параметров КС определяется уравнениями [4]:

$$\dot{z_1} = -i(1+z_1\bar{z_1})^2\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{z_1}}, \quad \dot{z_2} = -i(1+z_2\bar{z_2})^2\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{z_2}}. \tag{9}$$

Для этого найдем вначале серию матричных элементов:

$$\langle z_1|\widehat{S}_+^{(1)}|\bar{z_1}\rangle = \frac{z_1}{1+z_1\bar{z_1}}, \quad \langle z_1|\widehat{S}_-^{(1)}|\bar{z_1}\rangle = \frac{\bar{z_1}}{1+z_1\bar{z_1}},$$

$$\langle z_2|\widehat{S}_+^{(2)}|\bar{z_2}\rangle = \frac{z_2}{1+z_2\bar{z_2}}, \quad \langle z_2|\widehat{S}_-^{(2)}|\bar{z_2}\rangle = \frac{\bar{z_2}}{1+z_2\bar{z_2}},$$

$$\langle z_1|\widehat{S}_3^{(1)}|\bar{z_1}\rangle = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-z_1\bar{z_1}}{1+z_1\bar{z_1}}\right), \quad \langle z_2|\widehat{S}_3^{(2)}|\bar{z_2}\rangle = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-z_2\bar{z_2}}{1+z_2\bar{z_2}}\right).$$

Матричные элементы оператора диполь-дипольного взаимодействия определяются согласно свойству:

$$\langle z_1|\otimes\langle z_2|\widehat{S}_+^{(1)}\widehat{S}_-^{(2)}|\bar{z_1}\rangle\otimes|\bar{z_2}\rangle = \langle z_1|\widehat{S}_+^{(1)}|\bar{z_1}\rangle\langle z_2|\widehat{S}_-^{(2)}|\bar{z_2}\rangle = \frac{z_1\bar{z_2}}{(1+z_1\bar{z_1})(1+z_2\bar{z_2})}. \tag{10}$$

$$\langle z_1|\otimes\langle z_2|\widehat{S}_-^{(1)}\widehat{S}_+^{(2)}|\bar{z_1}\rangle\otimes|\bar{z_2}\rangle = \langle z_1|\widehat{S}_-^{(1)}|\bar{z_1}\rangle\langle z_2|\widehat{S}_+^{(2)}|\bar{z_2}\rangle = \frac{\bar{z_1}z_2}{(1+z_1\bar{z_1})(1+z_2\bar{z_2})}. \tag{11}$$

Кроме того,

$$\mathcal{H}_1(z_1,\bar{z_1}) = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1-z_1\bar{z_1}}{1+z_1\bar{z_1}}\right) + \chi_1(t)\left(\frac{z_1}{1+z_1\bar{z_1}}\right) + \bar{\chi_1}(t)\left(\frac{\bar{z_1}}{1+z_1\bar{z_1}}\right), \tag{12}$$

$$\mathcal{H}_2(z_2,\bar{z_2}) = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1-z_2\bar{z_2}}{1+z_2\bar{z_2}}\right) + \chi_2(t)\left(\frac{z_2}{1+z_2\bar{z_2}}\right) + \bar{\chi_2}(t)\left(\frac{\bar{z_2}}{1+z_2\bar{z_2}}\right). \tag{13}$$

Символ полного гамильтониана в результате приводится к виду:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z_1,z_2,\bar{z_1},\bar{z_2}) &= -\tfrac{\omega_0}{2}\left(\tfrac{1-z_1\bar{z_1}}{1+z_1\bar{z_1}}\right) - \tfrac{\omega_0}{2}\left(\tfrac{1-z_2\bar{z_2}}{1+z_2\bar{z_2}}\right) + \\ &+\chi_1(t)\left(\tfrac{z_1}{1+z_1\bar{z_1}}\right) + \chi_2(t)\left(\tfrac{z_2}{1+z_2\bar{z_2}}\right) + \bar{\chi_1}(t)\left(\tfrac{\bar{z_1}}{1+z_1\bar{z_1}}\right) + \bar{\chi_2}(t)\left(\frac{\bar{z_2}}{1+z_2\bar{z_2}}\right) + \\ &+\Omega_{12}\frac{z_1\bar{z_2}+\bar{z_1}z_2}{(1+z_1\bar{z_1})(1+z_2\bar{z_2})}.\end{aligned} \tag{14}$$

Вычисляя производные и производя соответствующие преобразования:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{z_1}} = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{z_1(z_1\bar{z_1}+1)-z_1(z_1\bar{z_1}-1)}{(z_1\bar{z_1}+1)^2}\right) + \frac{\bar{\chi_1}(t)(z_1\bar{z_1}+1)-z_1(\chi_1(t)z_1+\bar{\chi_1}(t)\bar{z_1})}{(z_1\bar{z_1}+1)^2} + \\ +\Omega_{12}\frac{z_2(z_1\bar{z_1}+1)-z_1(z_1\bar{z_2}+\bar{z_1}z_2)}{(z_1\bar{z_1}+1)^2(z_2\bar{z_2}+1)},\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{z_2}} = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{z_2(z_2\bar{z_2}+1)-z_2(z_2\bar{z_2}-1)}{(z_2\bar{z_2}+1)^2}\right) + \frac{\bar{\chi_2}(t)(z_2\bar{z_2}+1)-z_2(\chi_2(t)z_2+\bar{\chi_2}(t)\bar{z_2})}{(z_2\bar{z_2}+1)^2} + \\ +\Omega_{12}\frac{z_1(z_2\bar{z_2}+1)-z_2(z_1\bar{z_2}+\bar{z_1}z_2)}{(z_2\bar{z_2}+1)^2(z_1\bar{z_1}+1)},\end{aligned} \tag{16}$$

придём к явному виду уравнений для параметров КС:

$$\begin{cases}\dot{z_1} = -i\omega_0 z_1 - \chi_1(t)z_1^2 + \bar{\chi_1}(t) + \Omega_{12}\frac{z_2+\bar{z_2}z_1^2}{1+z_2\bar{z_2}}, \\ \dot{z_2} = -i\omega_0 z_2 - \chi_2(t)z_2^2 + \bar{\chi_2}(t) + \Omega_{12}\frac{z_1+\bar{z_1}z_2^2}{1+z_1\bar{z_1}}.\end{cases} \tag{17}$$

2. Траектории когерентных состояний и вероятности нахождения на верхнем уровне двух кубитов с учётом диполь-дипольного взаимодействия во внешнем поле

Для нахождения траекторий двух двухуровневых атомов численно решим систему уравнений (17). Уравнения в данной системе представляют собой уравнения Рикатти. Решим данную систему численно, воспользовавшись пакетом *Wolfram Mathematica*.

Рассмотрим систему уравнений для классического поля в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия, т. е. положим $\Omega_{12} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{z_1} = -i\omega_0 z_1 - \chi_1(t) z_1^2 + \bar{\chi_1}(t), \\ \dot{z_2} = -i\omega_0 z_2 - \chi_2(t) z_2^2 + \bar{\chi_2}(t). \end{cases} \tag{18}$$

Зададим принципиально разные начальные условия для системы уравнений: пусть для первого двухуровнего атома они будут комплексными, а для второго вещественными. Получим следующие траектории движения для двух двухуровневых атомов (рис 1, 2):

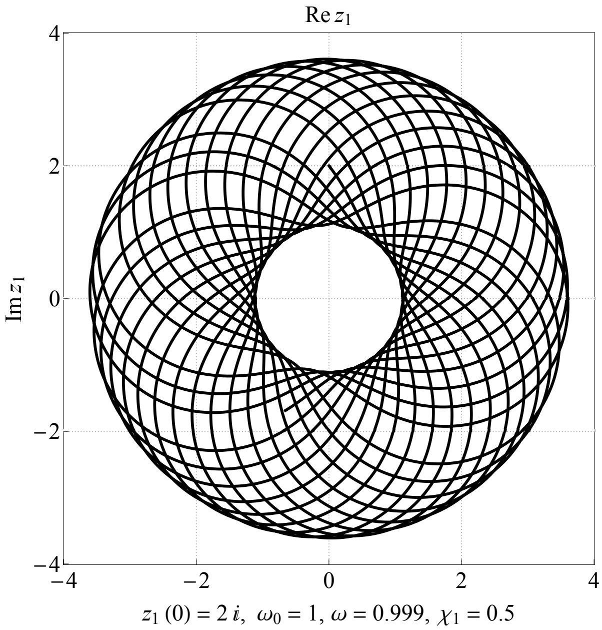


Рис. 1. Траектория движения когерентного состояния z_1 при заданных параметрах и начальных условиях
Fig. 1. The trajectory of motion of the coherent state z_1 for given parameters and initial conditions

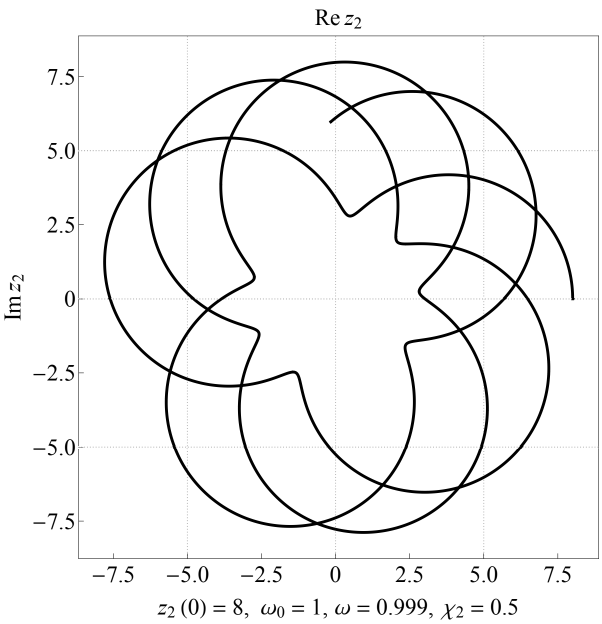


Рис. 2. Траектория движения когерентного состояния z_2 при заданных параметрах и начальных условиях
Fig. 2. Trajectory of motion of the coherent state z_2 for given parameters and initial conditions

Определим вероятность нахождения на верхнем уровне следующим соотношением:

$$P_j = \frac{z_j \bar{z}_j}{1 + z_j \bar{z}_j}, \tag{19}$$

где j — порядковый номер двухуровнего атома.

Тогда в модели, не учитывающей диполь-дипольное взаимодействие, находим следующие временные зависимости для вероятности нахождения j-го атома на верхнем уровне, показанной на рис. 3 для первого кубита и рис. 4 для второго.

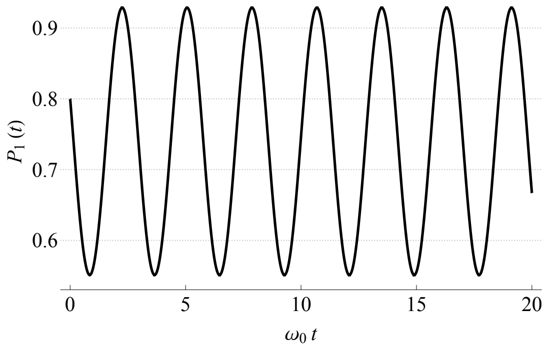


Рис. 3. Вероятность нахождения на верхнем уровне для первого кубита в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия

Fig. 3. Probability of being at the upper level for the first qubit in the absence of dipole-dipole interaction

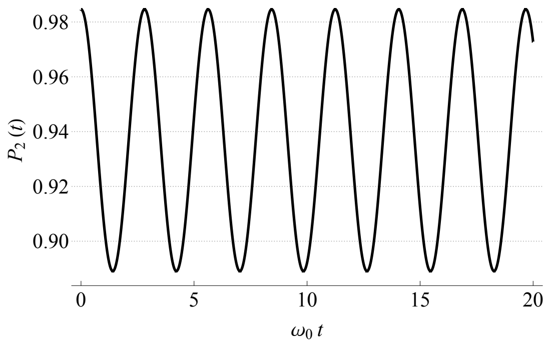


Рис. 4. Вероятность нахождения на верхнем уровне для второго кубита в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия

Fig. 4. Probability of being at the upper level for the second qubit in the absence of dipole-dipole interaction

Теперь рассмотрим систему (17), учтя диполь-дипольное взаимодействие. Пусть значение константы диполь-дипольного взаимодействия Ω_{12} будет небольшим для того, чтобы оценить влияние на насёленность уровней. Начальные условия для первого и второго атомов остаются такими же (рис. 5, 6).

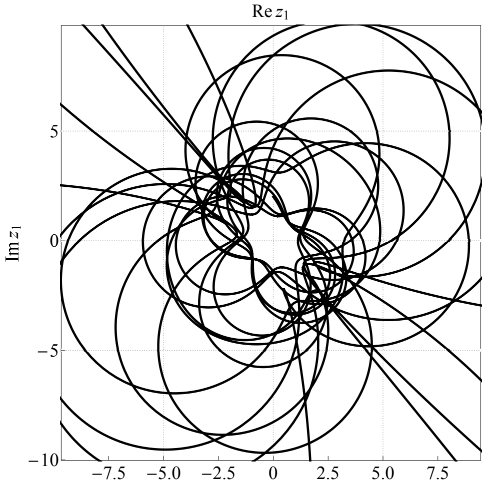
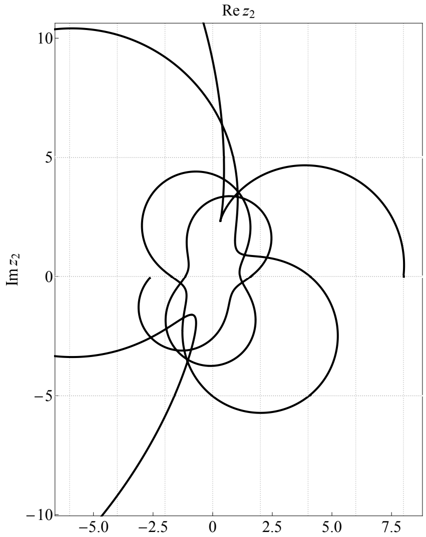


Рис. 5. Траектория движения когерентного состояния z_1 при заданных параметрах и начальных условиях с учётом диполь-дипольного взаимодействия

Fig. 5. Trajectory of motion of the coherent state z_1 for given parameters and initial conditions taking into account the dipole-dipole interaction



$z_2(0) = 8,\ \omega_0 = 1,\ \omega = 0.999,\ \chi_2 = 0.5,\ \Omega_{12} = 0.1$

Рис. 6. Траектория движения когерентного состояния z_2 при заданных параметрах и начальных условиях с учётом диполь-дипольного взаимодействия

Fig. 6. Trajectory of motion of the coherent state z_2 for given parameters and initial conditions taking into account the dipole-dipole interaction

Аналогичным образом определим вероятность нахождения на верхнем уровне для первого и второго двухуровневых атомов с учётом диполь-дипольного взаимодействия согласно формуле (19) (рис. 7, 8).

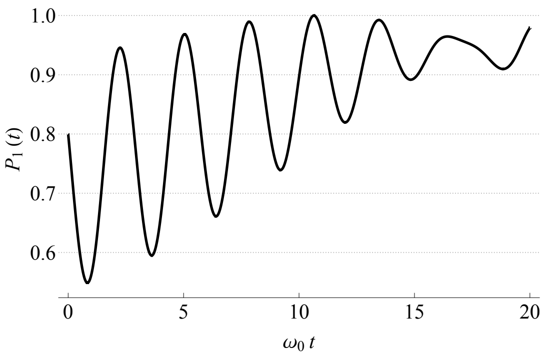


Рис. 7. Вероятность нахождения на верхнем уровне для первого кубита с учётом диполь-дипольного взаимодействия

Fig. 7. Probability of being at the upper level for the first qubit, taking into account the dipole-dipole interactions

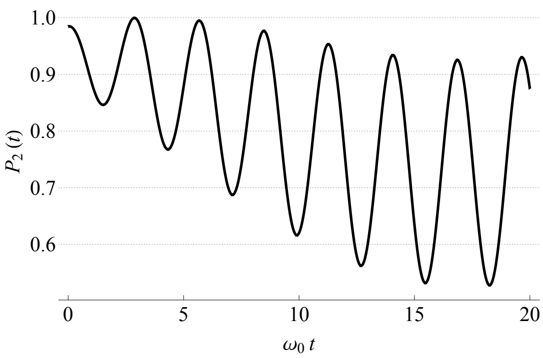


Рис. 8. Вероятность нахождения на верхнем уровне для второго кубита с учётом диполь-дипольного взаимодействия

Fig. 8. Probability of being at the upper level for the second qubit, taking into account the dipole-dipole interactions

Выводы

Построив когерентные состояния для четырехмерного фундаментального представления группы $SU(4)$, находим, что функция $K(Z,\bar{Z})$, определяющая скобку Пуассона для символов двухкубитных операторов, равна

$$K(Z,\bar{Z}) = (1 + \xi^1\bar{\xi}^1 + \xi^2\bar{\xi}^2 + \xi^3\bar{\xi}^3),$$

где $Z \equiv (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — локальные комплексные переменные в пространстве Кэлера $SU(4)/U(3)$. Вычисляя символ оператора (2.4) и находя компоненты тензоров $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, находим уравнения вида

$$\dot{z}^\alpha = \{z^\alpha, \mathcal{H}\}, \dot{\bar{z}}^\alpha = \{\bar{z}^\alpha, \mathcal{H}\},$$

которые решаются численно при задании разных начальных условий, при которых могут быть приготовлены кубиты, и для разных параметров системы (возможно учесть расстройку частот кубитов, рассмотреть внешнее поле в разных состояниях поляризации и возможную зависимость константы диполь-дипольного взаимодействия от времени). Эти уравнения достаточно громоздки, поэтому мы не приводим здесь их явный вид. Легко видеть, что в отличие от уравнений для параметров КС на группе $SU(2)\times SU(2)$ здесь имеется дополнительное уравнение для комплексной переменной ξ^3, которой можно придать смысл параметра запутывания двух однокубитных когерентных состояний. В самом деле, прямое произведение однокубитных КС $|z^1\rangle \otimes |z^2\rangle$ при вложении $SU(2) \times SU(2) \subset SU(4)$ приводит к частному виду параметра $\tilde{\xi}^3 \equiv z^1 \cdot z^2$, что отражает отсутствие запутывания в двухкубитной системе. Кроме того, уравнения для параметров КС на группе $SU(4)$ являются точными в отличие от уравнений на группе $SU(2) \times SU(2)$, где без учета квантовых поправок вида

$$|\Psi(t)\rangle = \int\limits_{G/G_0} F(Z, Z_0|t)|Z\rangle \, d\mu(Z,\bar{Z})$$

нельзя получить запутанное (чистое) состояние кубитов из их начального незапутанного состояния. Детальный расчет на основе полной группы динамической симметрии $SU(4)$ будет опубликован дополнительно.

Литература

[1] Березин Ф.А. Ковариантные и контравариантные символы операторов // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1972. Т. 36. С. 1134–1167. URL: http://mi.mathnet.ru/izv2347.

[2] Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. Москва: Наука, 1986. 272 с. URL: http://inis.jinr.ru/sl/vol2/Ax-books/Disk_02/MDManiac-2/Perelomov_Coherent-States.pdf.

[3] Gorokhov A.V. Coherent States and Path Integrals for Model Hamiltonians in Quantum Optics // Bulletin of the Russian Academy of Sciences Physics. 2016. Vol. 80, no. 7, pp. 788–794. DOI: http://dx.doi.org/10.3103/S1062873816070157.

[4] Горохов А.В. Принципы симметрии и квантовая динамика. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2015. 220 с. URL: http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobiya/Matematicheskie-metody-sovremennoi-kvantovoi-optiki-Elektronnyi-resurs-elektron-ucheb-posobie-68550/1/Горохов%20А.В.%20Математические.pdf.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-4-68-75

Submited: 09.10.2020
Revised: 11.11.2020
Accepted: 25.11.2020

A.V. Gorokhov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: alvgorokhov@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6908-1166
G.I. Eremenko
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: phys.geom@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5801-9463

QUANTUM DYNAMICS OF THE CUBIT SYSTEM IN EXTERNAL FIELDS

ABSTRACT
A system of two dipole-dipole interacting two-level elements (qubits) in external fields is considered. It is shown that using the coherent states (CS) of the dynamic symmetry group of the $SU(2) \times SU(2)$ system, the time evolution can be reduced to the "classical"dynamics of the complex parameters of the CS. The trajectories of the CS are constructed and the time dependences of the probability of finding qubits at the upper levels are calculated.

Key words: coherent states; dynamical symmetry group; quantum dynamics; Kahler manifold; qubits; two-level atom; dipole–dipole interaction.

Citation. Gorokhov A.V., Eremenko G.I. Quantum dynamics of the cubit system in external fields. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 68–75. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-68-75. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Gorokhov Alexander Viktorovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Eremenko George Igorevich — student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Berezin F.A. Covariant and contravariant symbols of operators. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1972, vol. 6, no. 5, pp. 1117–1151. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/IM1972v006n05ABEH001913. (English; Russian original)

[2] Perelomov A.M. Generalized coherent states and their applications. Moscow: Nauka, 1986, 272 p. Available at: http://inis.jinr.ru/sl/vol2/Ax-books/Disk_02/MDManiac-2/Perelomov_Coherent-States.pdf. (In Russ.)

[3] Gorokhov A.V. Coherent States and Path Integrals for Model Hamiltonians in Quantum Optics. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences Physics*, 2016, vol. 80, no. 7, pp. 788–794. DOI: http://dx.doi.org/10.3103/S1062873816070157.

[4] Gorokhov A.V. Symmetry principles and quantum dynamics. Samara: Izd-vo «Samarskii universitet», 2015, 220 p. Available at: http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobiya/Matematicheskie-metody-sovremennoi-kvantovoi-optiki-Elektronnyi-resurs-elektron-ucheb-posobie-68550/1/Горохов%20А.В.%20Математические.pdf. (In Russ.)