Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 09.10.2020
после рецензирования: 11.11.2020
принятия статьи: 25.11.2020

А.В. Гилев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: toshqaaa@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6747-5826

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрена задача Гурса с нелокальными интегральными условиями для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной. Методы исследования разрешимости классических краевых задач для уравнений с частными производными не могут быть применены без серьезных модификаций и предварительных действий к нелокальным задачам. Выбор метода исследования разрешимости нелокальной задачи зависит от вида интегрального условия. В процессе разработки методов, эффективных для нелокальных задач, были выделены интегральные условия различных типов [1]. Разрешимость нелокальной задачи Гурса с интегральными условиями первого рода для общего уравнения с доминирующей смешанной производной второго порядка была исследована в [2]. Интегральные условия рассматриваемой задачи являются нелокальными условиями второго рода, поэтому для исследования разрешимости задачи мы предлагаем другой метод, который заключается в сведении поставленной нелокальной задачи к классической задаче Гурса, но для нагруженного уравнения. В статье получены условия, выполнение которых гарантирует существование единственного решения поставленной задачи. Основным инструментом доказательства являются априорные оценки, полученные в работе.

Ключевые слова: неклассическая задача; нелокальные условия; нагруженное уравнение; задача Гурса; интегральные условия второго рода; существование и единственность решения; метод последовательных приближений; редукция.

Цитирование. Гилев А.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 4. С. 25–35. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Гилев Антон Владимирович — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Математическое моделирование явлений окружающей нас действительности приводит к различным новым задачам дифференциальных уравнений с частными производными. Одним из классов качественно новых задач являются задачи с нелокальными условиями, к которым приводит моделирование различных процессов и явлений в случаях, когда мы не знаем или не можем измерить то, что происходит на границе какого-либо реального процесса.

По определению [1], нелокальными условиями называются соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных в различных граничных и внутренних точках области, в которой ищется решение поставленной задачи.

Началом многих исследований данного класса задач для уравнений в частных производных послужила статья Дж. Кэннона [3], в которой исследована задача с нелокальным интегральным условием для уравнения теплопроводности, а в конце XX века задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений стали объектом систематических исследований [4–7].

Дальнейшие исследования показали, что нелокальные задачи тесно связаны с нагруженными уравнениями, которыми занимались многие исследователи в последней четверти XX века.

Нагруженным уравнением называется уравнение, которое содержит след некоторых операций от искомого решения [8]. К данному типу уравнений приводят задачи математической физики, математической биологии, теории моделирования нелокальных процессов. Стоит отметить, что задачи, связанные как с нелокальными условиями, так и с нагруженными уравнениями, не являются классическими в силу неприменимости к ним ранее известных методов исследования, что приводит к новым трудностям при решении задач, а также к потребности в разработке новых методов решения.

Как было отмечено раньше, существует взаимосвязь между нагруженными уравнениями и нелокальными задачами, а именно установлено, что нагруженные уравнения используются как метод решения нелокальных задач для дифференциальных уравнений в производных [9]. Указанная связь удобна тем, что благодаря ей возможно редуцировать задачу о решении некоторого уравнения, удовлетворяющего нелокальному условию, к задаче о нахождении решения некоторого нагруженного уравнения, удовлетворяющего классическим граничным условиям.

В данной статье рассмотрена нелокальная задача для гиперболического уравнения в области, ограниченной его характеристиками. Отметим, что задачи с интегральными условиями первого рода для гиперболического уравнения в характеристической области рассматривались в работах [2; 10; 11].

В настоящей статье в качестве нелокальных условий рассмотрены интегральные условия второго рода. Благодаря методу редукции нелокальная задача сведена к задаче Гурса, но для нагруженного уравнения. Сформулированы условия, выполнение которых гарантирует существование единственного решения поставленной задачи. Основным инструментом доказательства являются априорные оценки, полученные в работе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в $Q = (0, a) \times (0, b)$ следующую нелокальную задачу: найти решение уравнения

$$u_{xy}(x, y) + A(x, y)u_x(x, y) + B(x, y)u_y(x, y) + C(x, y)u(x, y) = f(x, y), \tag{1.1}$$

удовлетворяющее нелокальным условиям

$$u(x, 0) + \int_0^b K_2(x, y)u(x, y)dy = \varphi(x), \quad u(0, y) + \int_0^a K_1(x, y)u(x, y)dx = \psi(y). \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения, его правая часть, а также функции $K_i(x, y)$ достаточно гладкие, причем выполняются условия

$$K_1(x, 0) = 0, \quad K_2(0, y) = 0. \tag{1.3}$$

В силу того, что условия (1.2) являются нелокальными, мы не можем воспользоваться известными результатами о разрешимости задачи Гурса. Однако предложенный в статье метод позволит свести нелокальную задачу (1.1)–(1.2) к классической задаче Гурса для нагруженного уравнения и доказать разрешимость поставленной задачи.

Одним из методов решения подобных задач является метод редукции задачи с нелокальными условиями к задаче с классическими граничными условиями, но для нагруженного уравнения.

2. Редукция к задаче Гурса

Введем новую неизвестную функцию

$$v(x, y) = u(x, y) + \int_0^a K_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi + \int_0^b K_2(x, \eta)u(x, \eta)d\eta, \tag{2.1}$$

предполагая, что $u(x,y)$ является решением задачи (1.1)–(1.2). Тогда легко видеть, что в силу (1.2) и (1.3)

$$v(x,0)=u(x,0)+\int\limits_0^a K_1(\xi,0)u(\xi,0)d\xi+\int\limits_0^b K_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta=u(x,0)+\int\limits_0^b K_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta=\varphi(x);$$

$$v(0,y)=u(0,y)+\int\limits_0^a K_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+\int\limits_0^b K_2(0,\eta)u(0,\eta)d\eta=u(0,y)+\int\limits_0^a K_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi=\psi(y).$$

Отсюда следует, что новая неизвестная функция удовлетворяет условиям

$$v(x,0)=\varphi(x),\ \ v(0,y)=\psi(y).$$

Выразив из (2.1) $u(x,y)$ и подставив в уравнение (1.1), получим уравнение относительно функции $v(x,y)$:

$$v_{xy}(x,y)+A(x,y)v_x(x,y)+B(x,y)v_y(x,y)+C(x,y)v(x,y)-A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^b K_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-$$

$$-B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^a K_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-C(x,y)(\int\limits_0^a K_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+\int\limits_0^b K_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta)=f(x,y).$$

Таким образом, мы получили задачу Гурса для нагруженного гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной. Введем следующее обозначение:

$$P(x,y,u)=A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^b K_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^a K_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+$$

$$+C(x,y)(\int\limits_0^a K_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+\int\limits_0^b K_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta).$$

Тогда задачу Гурса можно записать в следующем виде:

$$v_{xy}(x,y)+A(x,y)v_x(x,y)+B(x,y)v_y(x,y)+C(x,y)v(x,y)=f(x,y)+P(x,y,u); \tag{2.2}$$

$$v(x,0)=\varphi(x),\ \ v(0,y)=\psi(y). \tag{2.3}$$

3. Разрешимость задачи Гурса для нагруженного уравнения

Теорема 1
Пусть

$$A,B,C\in C(\overline{Q}),K_i\in C^1(\overline{Q}),f(x,y)\in L_2(Q),\sqrt{2(a+b)\kappa}<1,$$
$$K_1(x,0)=K_2(y,0)=0.$$

Тогда существует единственное решение задачи Гурса (2.2)–(2.3).

Доказательство
Доказательство проведем в несколько этапов:

1. Покажем, что задача (2.2)–(2.3) эквивалентна системе интегральных уравнений.

2. Докажем разрешимость уравнения (2.1).

3. Выведем предварительные оценки.

4. Докажем разрешимость системы (3.4).

Сначала сведем задачу (2.2)–(2.3) к системе интегральных уравнений.
Предположим, что v — решение задачи Гурса. Положим

$$v_x(x,y)=\nu(x,y),\ \ v_y(x,y)=w(x,y), \tag{3.1}$$

откуда

$$v_{xy}(x,y) = \nu_y(x,y), \;\; v_{yx}(x,y) = w_x(x,y). \tag{3.2}$$

Тогда из (2.2)

$$\begin{cases} \nu_y(x,y) = f(x,y) + P(x,y,u) - A(x,y)\nu(x,y) - B(x,y)w(x,y) - C(x,y)v(x,y), \\ w_x(x,y) = f(x,y) + P(x,y,u) - A(x,y)\nu(x,y) - B(x,y)w(x,y) - C(x,y)v(x,y), \\ v_y(x,y) = w(x,y). \end{cases} \tag{3.3}$$

Из (2.3) получим

$$v(x,0) = \varphi\prime(x); \quad w(0,y) = \psi\prime(y).$$

Проинтегрировав каждое из соотношений (3.3), приходим к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} \nu(x,y) = \varphi\prime(x) + \int\limits_0^y (f + P - A\nu - Bw - Cv)dy, \\ w(x,y) = \psi\prime(y) + \int\limits_0^x (f + P - A\nu - Bw - Cv)dx, \\ v(x,y) = \varphi(x) + \int\limits_0^y wdy. \end{cases} \tag{3.4}$$

Таким образом, если $v(x,y)$ — решение задачи Гурса, то (u,ν,w) удовлетворяет системе интегральных уравнений (3.4). Покажем обратное. Пусть (v,ν,w) — решение (3.4). Тогда из последнего равенства (3.4)

$$v(0,y) = \varphi(0) + \int\limits_0^y w(0,y)dy = \varphi_0 + \int\limits_0^y \psi'(y)dy = \psi(y).$$

Аналогично

$$v(x,0) = \varphi(x).$$

Еще раз воспользуемся последним равенством (3.4) и получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi\prime(x) + \int\limits_0^y \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}dy = \varphi\prime(x) + \int\limits_0^y (f + P - A\nu - Bw - Cv)dy = \nu(x,y).$$

Покажем, что v удовлетворяет (2.2). Из третьего уравнения системы (3.4) $v_y(x,y) = w(x,y)$. В силу (3.1)–(3.3) и первого уравнения (3.4), имеем

$$v_x(x,y) = \varphi'(x) + \int\limits_0^y w_x(x,y)dy = \varphi'(x) + \int\limits_0^y (f - P - A\nu - Bw - Cv)dy = \nu(x,y).$$

Следовательно, (3.1) выполняется. Подставим теперь (3.1) в первое уравнение системы (3.3)

$$v_{xy}(x,y) = f(x,y) + P(x,y,u) - A(x,y)v_x(x,y) - B(x,y)v_y(x,y) - C(x,y)v(x,y).$$

Получили, что v удовлетворяет уравнению (2.2).

Таким образом, система (3.4) эквивалентна (2.2)–(2.3).

Докажем, что система (3.4) имеет единственное решение. Однако заметим, что для доказательства разрешимости поставленной задачи нам потребуется доказать разрешимость уравнения (2.1), а также оценить $P(x,y,u)$ через $v(x,y)$.

4. Доказательство разрешимости (2.1)

Рассмотрим интегральное уравнение

$$v(x,y) = u(x,y) + \int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx + \int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy.$$

Докажем его разрешимость при помощи принципа сжатых отображений.

Рассмотрим оператор

$$Au(x,y) = u(x,y) + \int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx + \int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy$$

и покажем, что он переводит функцию $u(x,y) \in L_2(Q)$ в другую функцию из этого же пространства. Обозначим

$$A(x,y) = \int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx + \int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy.$$

Заметим, что в силу условий теоремы существуют числа $K_i > 0$ такие, что

$$\kappa_1 = \max_{[0,b]} \int\limits_0^a K_1^2(x,y)dx, \quad \kappa_2 = \max_{[0,a]} \int\limits_0^b K_2^2(x,y)dy.$$

Применим неравенство Коши, получим

$$A^2(x,y) \leqslant 2(\int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx)^2 + 2(\int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy)^2 \leqslant 2\kappa_1 \int\limits_0^a u^2(x,y)dx + 2\kappa_2 \int\limits_0^b u^2(x,y)dy. \quad (4.1)$$

Тогда легко видеть, что

$$\int\limits_0^b \int\limits_0^a A^2(x,y)dxdy \leqslant 2a\kappa_1 \int\limits_0^b \int\limits_0^a u^2(x,y)dxdy + 2b\kappa_2 \int\limits_0^b \int\limits_0^a u^2 dxdy.$$

Оценим теперь

$$\rho(Au_1, Au_2) = (\int\limits_0^b \int\limits_0^a (Au_1 - Au_2)^2 dxdy)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\int\limits_0^a \int\limits_0^b (2(\int\limits_0^a K_1(x,y)(u_1(x,y) - u_2(x,y))dx)^2 +$$

$$+2(\int\limits_0^b K_2(x,y)(u_1(x,y)-u_2(x,y))dy)^2)dxdy)^{\frac{1}{2}} \leqslant (2(a+b)\kappa \int\limits_0^a \int\limits_0^b (u_1(x,y)-u_2(x,y))^2 dxdy)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2(a+b)\kappa}\rho(u_1,u_2),$$

где $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$.

Если $\sqrt{2(a+b)\kappa} < 1$, то мы находимся в условиях принципа сжатых отображений. Тем самым доказано, что уравнение (2.1) разрешимо, если $K_i \in C^1(\overline{Q})$.

5. Вывод априорных оценок решения

Приступим к выводу оценок.

Сначала оценим $u(x,y)$ через $v(x,y)$, используя соотношение (2.1).

В силу условий теоремы существуют положительные числа $\hat{\kappa_1}, \hat{\kappa_2}$ такие, что

$$\max_{[0,b]} \int\limits_0^a |K_{1y}(x,y)|dx \leqslant \hat{\kappa_1},$$

$$\max_{[0,a]} \int\limits_0^b |K_{2x}(x,y)|dy \leqslant \hat{\kappa_2}.$$

Из равенства

$$u(x,y) = v(x,y) - \int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx - \int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy$$

следует неравенство

$$|u(x,y)| \leqslant \int\limits_0^a |K_1(x,y)||u(x,y)|dx + \int\limits_0^b |K_2(x,y)||u(x,y)|dy.$$

Тогда

$$\max_{(x,y)\in Q} |u(x,y)| \leqslant \max_{(x,y)\in Q} |v(x,y)| + \max_{(x,y)\in Q} |u(x,y)| \int\limits_0^a |K_1(x,y)|dx + \max_{(x,y)\in Q} |u(x,y)| \int\limits_0^b |K_2(x,y)|dy,$$

$$\max_{(x,y)\in Q}|u(x,y)| \leqslant \max_{(x,y)\in Q}|v(x,y)| + (\kappa_1+\kappa_2)\max_{(x,y)\in Q}|u(x,y)|.$$

Получим

$$\max_{(x,y)\in Q}|u(x,y)| \leqslant \frac{1}{1-\kappa_1-\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|v(x,y)|. \tag{5.1}$$

Для нахождения нормы в C^1 нам потребуются оценки $u_x(x,y)$ и $u_y(x,y)$.

Оценим $u_x(x,y)$

$$|u_x(x,y)| \leqslant |v_x(x,y)| + \int\limits_0^b |K_2(x,y)||u_x(x,y)|dy + \int\limits_0^b |(K_2(x,y))_x||u(x,y)|dy,$$

$$\max_{(x,y)\in Q}|u_x(x,y)| \leqslant \max_{(x,y)\in Q}|v_x(x,y)| + \kappa_2\max_{(x,y)\in Q}|u_x(x,y)| + \hat{\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|u(x,y)|.$$

Окончательно получим

$$\max_{(x,y)\in Q}|u_x(x,y)| \leqslant \frac{1}{1-\kappa_2}(\max_{(x,y)\in Q}|v_x(x,y)| + \frac{\hat{\kappa_2}}{1-\kappa_1-\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|v(x,y)|). \tag{5.2}$$

Аналогично можно оценить и $u_y(x,y)$

$$\max_{(x,y)\in Q}|u_y(x,y)| \leqslant \frac{1}{1-\kappa_1}(\max_{(x,y)\in Q}|v_y(x,y)| + \frac{\hat{\kappa_1}}{1-\kappa_1-\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|v(x,y)|). \tag{5.3}$$

Принимая во внимание оценки (5.1)–(5.3), получим

$$||u(x,y)||_{C^1} = \max_{(x,y)\in Q}|u(x,y)| + \max_{(x,y)\in Q}|u_x(x,y)| + \max_{(x,y)\in Q}|u_y(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant (\frac{1}{1-\kappa_1-\kappa_2} + \frac{\hat{\kappa_2}}{(1-\kappa_2)(1-\kappa_1-\kappa_2)} + \frac{\hat{\kappa_1}}{(1-\kappa_1)(1-\kappa_1-\kappa_2)})\max_{(x,y)\in Q}|v(x,y)| +$$

$$+\frac{1}{1-\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|v_x(x,y)| + \frac{1}{1-\kappa_1}\max_{(x,y)\in Q}|v_y(x,y)|.$$

Запишем данную оценку в более компактном виде

$$||u(x,y)||_{C^1(D)} \leqslant \gamma||v(x,y)||_{C^1(D)}, \tag{5.4}$$

где

$$\gamma = \max\{\frac{1-\kappa_1-\kappa_2+\kappa_1\kappa_2+\hat{\kappa_2}-\kappa_1\hat{\kappa_2}+\hat{\kappa_1}-\hat{\kappa_1}\kappa_2}{(1-\kappa_1)(1-\kappa_2)(1-\kappa_1-\kappa_2)}; \frac{1}{1-\kappa_2}; \frac{1}{1-\kappa_1}\}.$$

Теперь оценим

$$\begin{aligned} P(x,y,u) \leqslant |A(x,y)|(\int\limits_0^b |K_2(x,y)||u_x(x,y)|dy + \int\limits_0^b |(K_2(x,y))_x||u(x,y)|dy) + \\ +|B|(\int\limits_0^a |K_1(x,y)||u_y(x,y)|dx + \int\limits_0^a |(K_1(x,y))_y||u(x,y)|dx) + \\ +|C(x,y)|(\int\limits_0^a |K_1(x,y)||u(x,y)|dx + \int\limits_0^b |K_2(x,y)||u(x,y)|dy). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Учитывая приведенные выше оценки, получим

$$\begin{aligned} \max_{(x,y)\in Q}|P(x,y,u)| \leqslant (\frac{|A(x,y)|+|B(x,y)|\hat{\kappa_1}+|C(x,y)|(\kappa_1+\kappa_2)}{1-\kappa_1-\kappa_2} + \frac{|A(x,y)|\hat{\kappa_2}}{(1-\kappa_2)(1-\kappa_1-\kappa_2)} + \\ +\frac{|B(x,y)|\hat{\kappa_1}}{(1-\kappa_1)(1-\kappa_1-\kappa_2)})\max_{(x,y)\in Q}|v(x,y)| + \frac{|A(x,y)|}{1-\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|v_x(x,y)| + \frac{|B(x,y)|}{1-\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|v_y(x,y)|. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Отметим, что в силу условий теоремы существует число $M>0$ такое, что

$$|A(x,y)| + |B(x,y)| + |C(x,y)| \leqslant M.$$

Тогда, увеличив правую часть (5.6), окончательно имеем

$$||P(x,y,u)||_{C(Q)} \leqslant M\gamma||v(x,y)||_{C^1(Q)}. \tag{5.7}$$

6. Метод последовательных приближений

В одном из предыдущих разделов задача Гурса (2.2)–(2.3) была сведена к системе интегральных уравнений (3.4). Решение системы (3.4) будем искать методом последовательных приближений. Положим

$$\nu_0 = \varphi'(x); \;\; w_0 = \psi'(y); \;\; v_0 = \varphi(x);$$

$$\begin{cases} \nu_n(x,y) = \nu_0 + \int\limits_0^y (f - A\nu - Bw - Cv)dy + \int\limits_0^y P(x,y,u_n)dy, \\ w_n(x,y) = w_0 + \int\limits_0^x (f - A\nu - Bw - Cv)dx + \int\limits_0^x P(x,y,u_n)dx, \\ v_n(x,y) = v_0 + \int\limits_0^y w_{n-1}dy. \end{cases}$$

Докажем сходимость последовательностей $\{\nu_n\}$,$\{w_n\}$,$\{v_n\}$.

Покажем, что для разности $|\nu_n - \nu_{n-1}|$, для разностей $|w_n - w_{n-1}|$ и $|v_n - v_{n-1}|$ данная оценка доказывается аналогично, имеет место следующая оценка:

$$|\nu_n - \nu_{n-1}| \leqslant TM^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{6.1}$$

где T — максимум среди всех чисел, ограничивающих разности $|\nu_n - \nu_{n-1}|, |w_n - w_{n-1}|, |v_n - v_{n-1}|$.

При $n = 1$ имеем

$$\nu_1 - \nu_0 = \int\limits_0^y (f - A\varphi'(x) - B\psi'(y) - C\varphi(x))dy + \int\limits_0^y P(x,y,u_1)dy,$$

$$||P(x,y,u_1)|| \leqslant M\gamma||v_1||_{C^1}.$$

Пусть $\varphi, \psi, \varphi', \psi', A, B, C$ ограничены. Тогда оценка (6.1) очевидна, так как найдется такое число T, что

$$|\nu_1 - \nu_0| \leqslant \int\limits_0^b (|f| + |A||\varphi'(x)| + |B||\psi'(y)| + |C||\varphi(x)|)dy + \int\limits_0^y M\tilde{\kappa}\gamma(|\varphi(x)| + |\psi(y)| + |\varphi'(x)| + |\psi'(y)|)dy \leqslant M\tilde{\kappa}T\gamma,$$

где $\tilde{\kappa} = \max\{\kappa_1; \kappa_2; \kappa\}$.

Аналогично доказывается справедливость оценки (6.1) для разностей $|w_1 - w_0|$ и $|v_1 - v_0|$.

При $n = 2$ получим

$$|\nu_2 - \nu_1| \leqslant \int\limits_0^y (|A||\nu_1 - \nu_0| + |B||w_1 - w_0| + |C||v_1 - v_0|)dy + \int\limits_0^y |P(x,y,u_2) - P(x,y,u_1)|dy.$$

Принимая во внимание случай $n = 1$, для первого слагаемого данной суммы имеем

$$\int\limits_0^y (|A||\nu_1 - \nu_0| + |B||w_1 - w_0| + |C||v_1 - v_0|)dy \leqslant \int\limits_0^y TMdy \leqslant TMy.$$

Рассмотрим второе слагаемое. В силу линейности $P(x,y,u)$

$$P(x,y,u_2) - P(x,y,u_1) = P(x,y,u_2 - u_1).$$

Тогда

$$|P(x,y,u_2 - u_1)| \leqslant Mq\gamma(|v_2 - v_1| + |(v_2)_x - (v_1)_x| + |(v_2)_y - (v_1)_y|). \tag{6.2}$$

Отметим, что

$$(v_2)_x = (v_0)_x + (\int\limits_0^y w_1 dy)_x = \nu_1,$$

$$(v_1)_x = \nu_0, \;\; (v_2)_y = w_1; \;\; (v_1)_y = w_0.$$

Тогда (6.2) можно записать в следующем виде:

$$P(x,y,u_2) - P(x,y,u_1) \leqslant M\tilde{\kappa}\gamma(|v_2 - v_1| + |\nu_1 - \nu_0| + |w_1 - w_0|). \tag{6.3}$$

Рассмотрим теперь

$$|v_2 - v_1| = |\int\limits_0^y (w_1 - w_0)dy| \leqslant TY.$$

Из (6.3) получим
$$|P(x,y,u_2) - P(x,y,u_1)| \leqslant MT\tilde{\kappa}y\gamma.$$
Таким образом
$$|\nu_2 - \nu_1| \leqslant TMy + TM\tilde{\kappa}y\gamma = TMy(1+\tilde{\kappa}\gamma).$$

Положим, что для произвольного n оценка (6.1) верна. Покажем, что она верна и для $n+1$. Имеем
$$|\nu_{n+1} - \nu_n| \leqslant \int\limits_0^y (|A||\nu_n - \nu_{n-1}| + |B||w_n - w_{n-1}| + |C||v_n - v_{n-1}|)dy + \int\limits_0^y |P(x,y,u_{n+1}) - P(x,y,u_n)|dy.$$
Очевидно, что
$$\int\limits_0^y (|A||\nu_n - \nu_{n-1}| + |B||w_n - w_{n-1}| + |C||v_n - v_{n-1}|)dy \leqslant TM^{n-1}y^{n-1}.$$
Распишем $|P(x,y,u_{n+1}) - P(x,y,u_n)|$
$$|P(x,y,u_{n+1}) - P(x,y,u_n)| = M\tilde{\kappa}\gamma(|v_{n+1} - v_n| + |(v_{n+1})_x - (v_n)_x| + |(v_{n+1})_y - (v_n)_y|).$$
Оценим теперь
$$v_{n+1} - v_n = \int\limits_0^y (w_n - w_{n-1})dy.$$
По предположению индукции получим
$$|v_{n+1} - v_n| \leqslant \int\limits_0^y TM^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}dy = \frac{TM^{n-1}}{(n-1)!}(\frac{(x+y)^n}{n} - \frac{x^n}{n}) \leqslant TM^n\frac{(x+y)^n}{n!}.$$
Заметим, что
$$(v_{n+1})_x - (v_n)_x = \int\limits_0^y ((w_n)_x - (w_{n-1})_x)dy = \nu_n - \nu_{n-1}.$$
Следовательно
$$|v_{n+1} - v_n| \leqslant TM^n\frac{(x+y)^n}{n!}.$$
Аналогичным образом
$$(v_{n+1})_y - (v_n)_y = w_n - w_{n-1},$$
$$|(v_{n+1})_y - (v_n)_y| \leqslant TM^n\frac{(x+y)^n}{n!}.$$
Значит
$$|P(x,y,u_{n+1}) - P(x,y,u_n)| \leqslant TM^n\frac{(x+y)^n}{n!}.$$
Таким образом, справедливость оценки (6.1) доказана для разности $|\nu_n - \nu_{n-1}|$. Для других разностей данная оценка доказывается аналогично.

Мы получили, что ряды
$$\nu_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\nu_n - \nu_{n-1});\ v_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n-1});\ w_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(w_n - w_{n-1}) \tag{6.4}$$
сходятся, так как они мажорируются рядом
$$T + T\sum_{n=1}^{\infty} M^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!},$$
который сам является сходящимся, так как
$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$
Из полученного результата следует, что сходятся и последовательности частичных сумм $\{v_n\}; \{w_n\}; \{\nu_n\}$.

Заметим, что наши последовательности приближенных решений являются последовательностями частичных сумм рядов, сходимость которых мы доказали. Тогда, в силу определения сходимости ряда, последовательности приближенных решений сходятся. Покажем, что последовательности приближенных решений сходятся к решениям системы (3.4).

Введем обозначения

$$\nu(x,y)=\lim_{n\to\infty}\nu_n(x,y);\;\; v(x,y)=\lim_{n\to\infty}v_n(x,y);$$
$$w(x,y)=\lim_{n\to\infty}w_n(x,y);\;\; u(x,y)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,y).$$

Напомним, что по нашему предположению, $\varphi,\psi,\varphi',\psi',A,B,C$ ограничены, а значит, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Тогда, переходя к пределу в

$$\nu_n=\varphi_0'(x)+\int\limits_0^y(f-A\nu_{n-1}-Bw_{n-1}-Cv_{n-1})+\int\limits_0^y P(x,y,u_n)dy,$$

получим

$$\nu=\varphi_0'(x)+\int\limits_0^y(f-A\nu-Bw-Cv)dy+\int\limits_0^y P(x,y,u)dy.$$

Переходя к пределу в двух других соотношениях, получим (3.4), а значит, предельные функции являются решениями (3.4).

Докажем единственность решения задачи (2.2)–(2.3). Предположим, что существуют два различных решения поставленной задачи

$$(\nu^1;w^1;v^1);\;\;(\nu^2;w^2;v^2).$$

Обозначим

$$\nu^0=\nu^1-\nu^2,$$
$$w^0=w^1-w^2,$$
$$v^0=v^1-v^2.$$

Тогда

$$\nu^0=-\int\limits_0^y(A\nu^0+Bw^0+Cv^0)dy.$$

Аналогично можно переписать и два других соотношения, входящих в систему (3.4).

Раннее была доказана оценка (6.1). Значит

$$|\nu^0|\leqslant TM^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!};\;\; |w^0|\leqslant TM^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!};\;\; |v^0|\leqslant TM^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Так как единственной тройкой функций, удовлетворяющей этим неравенствам для любого n, является

$$\nu^0=w^0=v^0=0,$$

то

$$\nu^1=\nu^2;\;\; w^1=w^2;\;\; v^1=v^2.$$

Таким образом система (3.4) имеет единственное решение.

В силу эквивалентности системы интегральных уравнений (3.4) и задачи Гурса (2.2)–(2.3), задача Гурса (2.2)–(2.3) имеет единственное решение.

7. Разрешимость задачи (1.1) – (1.2)

Теорема 2

Пусть выполняются условия теоремы 1, а также следующие условия:

$$\max_{(x,y)\in Q}|u(x,y)|\leqslant\frac{1}{1-\kappa_1-\kappa_2}\max_{(x,y)\in Q}|v(x,y)|,$$
$$||u(x,y)||_{C^1(D)}\leqslant\gamma||v(x,y)||_{C^1(D)}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1.1)–(1.2).

Доказательство

Для доказательства достаточно показать, что (1.1)–(1.2) и задача Гурса (2.2)–(2.3) эквивалентны.

Пусть v — решение (2.2)–(2.3) и выполняется (2.1). Тогда, очевидно, выполняются условия (1.2). Подставив v в (2.2), после элементарных, но громоздких, преобразований получим (1.1).

Литература

[1] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2012. 194 с.

[2] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. URL: http://mi.mathnet.ru/de10101

[3] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 21, № 2. P. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/QAM

[4] Byszewski L. Existance and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x,t,u,u_x)$ // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1990. Vol. 3, № 3. P. 163–168. URL: https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/HOA/JAMSA/Volume3_3/168.pdf.

[5] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 656–661. URL: http://mi.mathnet.ru/de10157.

[6] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решение нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103. URL: http://mi.mathnet.ru/mm832.

[7] Bouziani A., Benouar N. Probleme mixte avec conditions integrales pour une classe d'equations hyperboliques // Bull. Belg. Math. Soc. 1996. № 3. P. 137–145. URL: http://doi.org/10.36045/BBMS

[8] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с. URL: https://obuchalka.org/20210213129285/nagrujennie-uravneniya-i-ih-primenenie-nahushev-a-m-2012.html; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20886619.

[9] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006, Т. 42, № 9. С. 1166–1179. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9296592

[10] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 171–174. URL: http://mi.mathnet.ru/de5770

[11] Асанова А.Т. Нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике // Изв. вузов. Матем. 2017. № 5. С. 11–25. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm9233.

[12] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: Физматгиз, 1959. 232 с. URL: https://1lib.education/book/571663/1c6922?id=571663&secret=1c6922.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35

Submited: 09.10.2020
Revised: 11.11.2020
Accepted: 25.11.2020

A.V. Gilev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: toshqaaa@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6747-5826

A NONLOCAL PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH A DOMINANT MIXED DERIVATIVE

ABSTRACT

In this article, we consider the Goursat problem with nonlocal integral conditions for a hyperbolic equation with a dominant mixed derivative. Research methods of solvability of classical boundary value problems for partial differential equations cannot be applied without serious modifications. The choice of a research method of solvability of a nonlocal problem depends on the form of the integral condition. In the process of developing methods that are effective for nonlocal problems, integral conditions of various types were identified [1]. The solvability of the nonlocal Goursat problem with integral conditions of the first kind for a general equation with dominant mixed derivative of the second order was investigated in [2]. In our problem, the integral conditions are nonlocal conditions of the second kind, therefore, to investigate the solvability of the problem, we propose another method, which consists in reducing the stated nonlocal problem to the classical Goursat problem, but for a loaded equation. In this article, we obtain conditions that guarantee the existence of a unique solution of the problem. The main instrument of the proof is the a priori estimates obtained in the paper.

Key words: non-classical problem; non-local conditions; loaded equation; Goursat problem; integral conditions of the second kind; existence and uniqueness of a solution; method of successive approximations; reduction.

Citation. Gilev A.V. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with a dominant mixed derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 25–35. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Gilev Anton Vladimirovich — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Pulkina L.S. Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii universitet 2012, 194 p. (In Russ.)

[2] Pulkina L.S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 2. pp. 316–318. DOI: http://doi.org/10.1007/BF02754219. (English; Russian original)

[3] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, vol. 21, no. 2, pp. 155-–160. DOI: http://doi.org/10.1090/QAM

[4] Byszewski L. Existance and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x,t,u,u_x)$. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 1990, vol. 3, no. 3, pp. 163–168. Available at: https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/HOA/JAMSA/Volume3_3/168.pdf.

[5] Ilin V.A., Moiseev E.I. Uniqueness of the solution of a mixed problem for the wave equation with nonlocal boundary conditions. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 5, pp. 728–733. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754231 (English; Russian original)

[6] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103. Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/mm832. (In Russ.)

[7] Bouziani A., Benouar N. Probleme mixte avec conditions integrales pour une classe d'equations hyperboliques. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 1996. no. 3, pp. 137–145. DOI: https://doi.org/10.36045/BBMS

[8] Nakhushev A.M. Loaded equations and their application. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. Available at: https://obuchalka.org/20210213129285/nagrujennie-uravneniya-i-ih-primenenie-nahushev-a-m-2012.html; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20886619. (In Russ.)

[9] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 9. pp. 1233—1246. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023. (English; Russian original)

[10] Nahusheva Z.A. A nonlocal problem for partial differential equations. *Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 171–174. Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/de5770. (In Russ.)

[11] Assanova A.T. Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–20. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X17050024. (English; Russian original)

[12] Mikhlin S.G. Lectures on linear integral equations. Moscow: Fizmatgiz, 1959, 232 p. Available at: https://1lib.education/book/571663/1c6922?id=571663&secret=1c6922. (In Russ.)