МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-4-7-14

УДК 517.956

Дата: поступления статьи: 16.10.2020
после рецензирования: 16.11.2020
принятия статьи: 25.11.2020

С.А. Алдашев
Институт математики и математического моделирование,
г. Алматы, Республика Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8223-6900

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к многомерным параболическим уравнениям. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены, а их многомерные аналоги исследованы мало. Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована. Насколько известно, эта задача в пространстве не изучена. В данной статье показано, что для многомерного смешанного гиперболо-параболического уравнения задача Трикоми разрешима неоднозначно. Приводится явный вид этих решений.

Ключевые слова: задача Трикоми; многомерное уравнение; разрешимость; сферические функции.

Цитирование. Алдашев С.А. Задача Трикоми для многомерного смешанного гиперболо-параболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 4. С. 7–14. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-7-14.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Алдашев Серик Аймурзаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики и математического моделирование, 050100, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина, 125.

Введение

Задача Трикоми для гиперболо-параболических уравнений на плоскости изучена многими авторами (см.[3] и приведеную в ней библиографию). Однако их многомерные аналоги не исследованы.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена, а их многомерные аналоги исследованы мало [2].

Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована [1]. Насколько известно, это задача в пространстве не изучена. В данной статье показано, что для модельного многомерного смешанного гиперболо-параболического уравнения задача Трикоми имеет бесчисленное множество решений.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $D-$ конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ конусами $K_0:|x|=t$, $K_1:|x|=1-t$,
$0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}$, а при $t<0-$ цилиндрической поверхностью $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$ и плоскостью $t=t_0=const$, где $|x|-$ длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$. Часть конусов K_0,K_1, ограничивающих области D^+, обозначим через S_0, S^1 соответственно.

Пусть $S=\{(x,t):t=0,\ 0<|x|<1\}$, $\Gamma_0=\{(x,t):t=0,\ |x|=1\}$.

В области D рассмотрим модельное смешанное гиперболо-параболическое уравнение

$$0=\begin{cases}\Delta_x u-u_{tt},\ t>0,\\ \Delta_x u-u_t,\ t<0,\end{cases}\tag{1}$$

где Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=2,3,...,m-1$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Следуя [3], в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую задачу.

Задача T. Найти решение уравнения (1) в области D при $t\neq 0$ из класса
$C(\bar{D}\setminus\Gamma_0)\cap C^1(D)\cap C^2(D^+\cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0}=\varphi(r,\theta),\ \ u|_{\Gamma}=\psi(t,\theta).\tag{2}$$

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2), \theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l=0,1,...$ — пространства Соболева, а $\tilde{S}=\{(r,\theta)\in S,\ 0<r<\frac{1}{2}$.

Имеет место [4].

Лемма. Пусть $f(r,\theta)\in W^l_2(S)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta),\tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\bar{\varphi}^k_n(r)$, $\psi^k_n(t)$, $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3) соответственно функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)=u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta)=u_t(r,\theta,0)$.

Введем множество функций

$$B^l(\tilde{S})=\{f(r,\theta):f\in W^l_2(\tilde{S}),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(||f^k_n(r)||^2_{C^2((0,\frac{1}{2}))}+||f^k_n(r)||^2_{C([0,\frac{1}{2}])})\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty,\ l\geqslant m-1\}.$$

Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi(r,\theta)=r^3\varphi^*(r,\theta)$, $\varphi^*(r,\theta)\in B^l(\tilde{S})$, $\psi(t,\theta)\in W^l(\Gamma)$, $l\geqslant m+1$, то задача T разрешима неоднозначно.

Отметим, что неединственность решения задачи T показана в [5].

2. Разрешимость задачи 1

Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнение (1) в области D^+ имеет вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}=0,\tag{4}$$

где

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

При $t\to -0$ на S получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr}+\frac{m-1}{r}\tau_r-\frac{1}{r^2}\delta\tau=\nu(r,\theta),\ 0<r<1.\tag{5}$$

Известно [4], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи Т в области D^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (4) и (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [3], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=0, \tag{7}$$

$$\bar{\tau}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k=\bar{\nu}_n^k(r),\ 0<r<1, \tag{8}$$

при этом первое краевое условие (2) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,r)=\bar{\varphi}_n^k(r),\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2},\ k=\overline{1,\,k_n},\ n=0,1,\ldots. \tag{9}$$

В (7)–(9) произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi=\frac{r+t}{2}$, $\eta=\frac{r-t}{2}$, соответственно получим

$$u_{n\xi\eta}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u_n^k=0,\ 0<\eta<\xi<\frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k=\nu_n^k(\xi),\ 0<\xi<\frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$u_n^k(\xi,0)=\varphi_n^k(\xi),\ 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$\tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(2\xi),\ \nu_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi),\ \varphi_n^k(\xi)=\xi^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\varphi}_n^k(\xi),$$
$$\bar{\lambda}_n=((m-1)(3-m)-4\lambda_n)/4,\ k=\overline{1,\,k_n},\ n=0,1,\ldots.$$

Используя общее решение уравнения (10), полученное в [6], в работе [7] показано, что решение задачи Коши для уравнения (10) имеет вид

$$\begin{gathered}u_n^k(\xi,\eta)=\tfrac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\tfrac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi,;\xi,\eta)+\\+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\tfrac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}]d\xi_1,\end{gathered} \tag{13}$$

где $R(\xi,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]-$ функция Римана уравнения (10) [8], а $P_\mu(z)-$ функция Лежандра, $\mu=n+\frac{(m-3)}{2}$,

$$\frac{\partial}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^{\perp}}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^{\perp}}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)|_{\xi_1=\eta_1},$$

где $N^{\perp}-$ нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в стороны полуплоскости $\eta\leqslant\xi$.

Из (13) при $\eta=0$ с учетом (12) получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$g_n^k(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1, \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}g_n^k(\xi)=\sqrt{2}\varphi_n^k(\xi)-\tfrac{\xi}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\xi}\psi_n^k(\xi_1)P_\mu\left(\tfrac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1,\\ \tfrac{d}{d\xi}\left(\tfrac{\tau_n^k(\xi)}{\xi}\right)=\psi_n^k(\xi),\ \psi_n^k(0)=0.\end{gathered} \tag{15}$$

Уравнение (14) обратимо по формуле [7; 9], получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\nu_n^k(\xi)=\frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\xi}\xi_1(\xi^2-\xi_1^2)^{-\frac{1}{2}}P'_\mu\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)\frac{dg_n^k}{d\xi_1}d\xi_1. \tag{16}$$

Далее, из (15), (16) имеем

$$\nu_n^k(\xi)=f_n^k(\xi)+\int\limits_0^{\xi}G_n(\xi,\xi_1)\psi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{17}$$

где

$$\xi f_n^k(\xi) = \sqrt{2}\int\limits_0^\xi \xi_1(\xi^2-\xi_1^2)^{-\frac{1}{2}}P'_\mu\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)\frac{d\varphi_n^k}{d\xi_1}d\xi_1,$$

$$-\sqrt{2}\xi G_n(\xi,\xi_1) = \xi_1^2(\xi^2-\xi_1^2)^{-\frac{1}{2}}P'_\mu\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) + \int\limits_{\xi_1}^\xi t(\xi^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}P_\mu\left(\frac{\xi_1}{t}\right)P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{t}\right)dt +$$
$$+\int\limits_{\xi_1}^\xi \xi_1(\xi^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}P'_\mu\left(\frac{\xi}{t}\right)P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{t}\right)dt.$$

Ограниченным решением уравнения (11) является функция [10]

$$(s_2-s_1)\tau_n^k(\xi) = \int\limits_0^\xi(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2}-\xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1 + c_n^k(s_2-s_1)\xi^{s_1},\ 0<\xi<\frac{1}{2}, \tag{18}$$

где $s_1 = n+\frac{(m-1)}{2}$, $s_2 = -n-\frac{(m-3)}{2}$, c_n^k- произвольная постоянная.

Подставляя (17) в (18), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\psi_n^k(\xi) = F_n^k(\xi) + \int\limits_0^\xi L_n(\xi,\xi_1)\psi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{19}$$

где

$$F_n^k(\xi) = (s_1-1)c_n^k\xi^{s_1-2} + \frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_0^\xi[(s_2-1)\xi^{s_2-2}\xi_1^{3-s_2}-(s_1-1)\xi^{s_1-2}\xi_1^{3-s_1}]f_n^k(\xi_1)d\xi_1,$$

$$(s_2-s_1)L_n(\xi,\xi_1) = \int\limits_{\xi_1}^\xi[(s_2-1)\xi^{s_2-2}t^{3-s_2}-(s_1-1)\xi^{s_1-2}t^{3-s_1}]G_n(t,\xi_1)dt.$$

Определяя из (19) $\psi_n^k(\xi)$, найдем

$$\tau_n^k(\xi) = \xi\int\limits_0^\xi\psi_n^k(\xi_1)d\xi_1,\ 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2},\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots. \tag{20}$$

Учитывая оценки [4; 11], имеем

$$\begin{gathered}|P_\mu(z)|\leqslant C,\ |z|\leqslant 1,\ |P_\mu(\operatorname{ch}\eta)|\leqslant C\exp(\mu-\tfrac{1}{2})\eta,\ \eta>0,\\ |k_n|\leqslant c_2n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leqslant c_2n^{\frac{m}{2}+p-1},\ |Y_{0,m}^1(\theta)|=c_1,\ c,c_1=const,\end{gathered} \tag{21}$$

$j=\overline{1,m-1}$, $p=0,1,\dots$, а также ограничения на заданную функцию $\varphi(r,\theta)$. Аналогично [7] можно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\tau_0^1(r)Y_{0,m}^1(\theta) + \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}n^{-l}r^{\frac{(1-m)}{2}}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{22}$$

сходится абсолютно и равномерно, если $l>\frac{3m}{2}$.

Следовательно, в силу (19), задача (2), (4), (22) в области D^+ имеет бесчисленное множество решений вида

$$u(r,\theta,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}u_0^1(r,t)Y_{0,m}^1(\theta) + \sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{23}$$

где функции $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$ находятся по формуле (13), в которой $\nu_n^k(\xi)$, $\tau_n^k(\xi)$ определяются из (17), (20) и принадлежит классу $C(\bar{D}^+)\cap C^1(D^+\cup S)\cap C^2(D^+)$.

Теперь задачу T будем изучать в области D^-.

В области D^- рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0 \tag{24}$$

с условиямм

$$u|_S = \tau(r,\theta),\ u|_\Gamma = \psi(t,\theta). \tag{25}$$

Решение задачи (24), (25) будем искать в виде (6).

Подставляя (6) в (24), получим уравнение

$$u^k_{nrr} - u^k_{nt} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u^k_n = 0,\ k = \overline{1,\ k_n},\ n = 0, 1, \dots, \tag{26}$$

при этом краевое условие (25) имеет вид

$$u^k_n(r, 0) = g^k_n(r),\ u^k_n(1, t) = \psi^k_n(t),\ k = \overline{1,\ k_n},\ n = 0, 1, \dots, \tag{27}$$

$$g^k_n(r) = \begin{cases} \tau^1_0(r), \\ n^{-l}\tau^k_n(r),\ k = \overline{1,\ k_n},\ n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Произведя замену $\upsilon^k_n(r, t) = u^k_n(r, t) - \psi^k_n(t)$, задачу (26), (27) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon^k_n \equiv \upsilon^k_{nrr} - \upsilon^k_{nt} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \upsilon^k_n = f^k_n(r, t), \tag{28}$$

$$\upsilon^k_n(r, 0) = \tilde{g}^k_n(r),\ \upsilon^k_n(1, t) = 0,\ 0 < r < 1, \tag{29}$$

$$f^k_n(r, t) = \psi^k_{nt} - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \psi^k_n(t),\ \tilde{g}^k_n(r) = g^k_n(r) - \psi^k_n(0).$$

Решение задачи (28), (29) ищем в виде $\upsilon^k_n(r, t) = \upsilon^k_{1n} + \upsilon^k_{2n}$ где $\upsilon^k_{1n}(r, t)$ — решение задачи

$$L\upsilon^k_{1n} = f^k_n(r, t), \tag{30}$$

$$\upsilon^k_{1n}(r, 0) = 0,\ \upsilon^k_{1n}(1, t) = 0, \tag{31}$$

а $\upsilon^k_{2n}(r, t)$– решение задачи

$$L\upsilon^k_{2n} = 0, \tag{32}$$

$$\upsilon^k_{2n}(r, 0) = \tilde{g}^k_n(r),\ \upsilon^k_{2n}(1, t) = 0,\ 0 < r < 1. \tag{33}$$

Решение вышеуказанных задач, аналогично [1], рассмотрим в виде

$$\upsilon^k_n(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{34}$$

при этом пусть

$$f^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a^k_{s,n}(t) R_s(r),\ \tilde{g}^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b^k_{s,n} R_s(r). \tag{35}$$

Подставляя (34) в (30),(31), с учетом (35) получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{36}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{37}$$

$$T_{st} + \mu T = -a^k_{s,n}(t), \tag{38}$$

$$T_s(0) = 0. \tag{39}$$

Ограниченное решение задачи (36), (37) имеет вид [10]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r), \tag{40}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $J_\nu(z)$– функция Бесселя первого рода, $\gamma_{s,n}$– ее нули, $\mu = \gamma^2_{s,n}$.

Решение задачи (38), (39) записывается в виде

$$T_s(t) = -\int\limits_0^t a^k_{s,n}(\xi) \exp[-\gamma^2_{s,n}(t - \xi)] d\xi. \tag{41}$$

Подставляя (40) в (35), получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f^k_n(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a^k_{s,n}(t) J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1, \tag{42}$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{g}^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b^k_{s,n} J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \tag{43}$$

Ряды (42), (43) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [12], если

$$a_{s,n}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{44}$$

$$b_{s,n}^k = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_n^k(\xi) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{45}$$

где $\gamma_{s,n}, s = 1, 2, ...-$ положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (40), (41) получим решение задачи (30), (31) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r) \{ \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \exp[-\gamma_{s,n}^2 (t-\xi)] d\xi \}, \tag{46}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (44).

Далее, подставляя (34) в (32), (33), будем иметь уравнение

$$T_{st} + \gamma_{s,n}^2 T = 0,$$

решением которого является

$$T_s(t) = \exp(-\gamma_{s,n}^2 t). \tag{47}$$

Из (40), (47) с учетом (35) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} b_{s,n}^k J_\nu(\gamma_{s,n} r) \exp(-\gamma_{s,n}^2 t), \tag{48}$$

где $b_{s,n}^k$ находится из (45).

Следовательно, решение задачи (24), (25) в области D^- есть функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\psi_n^k(t) + \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)] r^{\frac{(1-m)}{2}} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{49}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t), \upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (46) и (48).

Учитывая ограничения на заданные функция $\varphi(r,\theta), \psi(t,\theta)$, а также оценки (21), аналогично [1; 7], можно показать, что полученные неоднозначные решения вида (23) и (49) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 659 с. URL: https://uch-lit.ru/matematika-2/dlya-studentov/tihonov-a-n-samarskiy-a-a-uravneniya-matematicheskoy-fiziki-onlayn.

[2] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с. URL: https://www.studmed.ru/bicadze-av-nekotorye-klassy-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh_5f371e781b6.html.

[3] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. Москва: Наука, 2006. 287 с. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17962288.

[4] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962. 254 с. URL: https://booksee.org/book/578442.

[5] Алдашев С.А. Неединственность решения задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 544–548. DOI: http://doi.org/10.1134/S0374064114040128.

[6] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Москва: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с. URL: https://1lib.education/book/1289692/1f5275?id=1289692&secret=1f5275.

[7] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 170 с.

[8] Copson E.T. On the Riemann-Green function // J. Rath. Mech and Anal. 1958. Vol. 1. P. 324–348. DOI: http://doi.org/10.1007/BF00298013.

[9] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. URL: https://booksee.org/book/441860.

[10] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1965. 703 с. URL: https://booksee.org/book/567727.

[11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Москва: Наука, 1973. 294 с. URL: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm.

[12] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 295 с. URL: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-4-7-14

Submited: 16.10.2020
Revised: 16.11.2020
Accepted: 25.11.2020

S.A. Aldashev
Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Republic of Kazakhstan
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8223-6900

TRICOMI PROBLEM FOR MULTIDIMENSIONAL MIXED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

ABSTRACT

It is known that in mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the media. If the medium is non-conducting, then we obtain multidimensional hyperbolic equations. If the medium's conductivity is higher, then we arrive at multidimensional parabolic equations. Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) reduces to multidimensional hyperbolic-parabolic equations. When studying these applications, one needs to obtain an explicit representation of solutions to the problems under study. Boundary-value problems for hyperbolic-parabolic equations on a plane are well studied; however, their multidimensional analogs have been analyzed very little. The Tricomi problem for the above equations has been previously investigated, but this problem in space has not been studied earlier. This article shows that the Tricomi problem is not uniquely solvable for a multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equation. An explicit form of these solutions is given.

Key words: Tricomi problem; multidimensional equation; solvability; spherical functions.

Citation. Aldashev S.A. Tricomi problem for multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 7–14. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-7-14. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Aldashev Serik Aimurzaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, chief research scientist, Instituti Mathematica et Mathematica Sculpturae, 125, Pushkin Street, Almaty, 050100, Republic of Kazakhstan.

References

[1] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1977, 659 p. Available at: https://uch-lit.ru/matematika-2/dlya-studentov/tihonov-a-n-samarskiy-a-a-uravneniya-matematicheskoy-fiziki-onlayn (In Russ.)

[2] Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981, 448 p. Available at: https://www.studmed.ru/bicadze-av-nekotorye-klassy-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh_5f371e781b6.html (In Russ.)

[3] Nakhushev A.M. Problems with displacement for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006, 287 p. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17962288. (In Russ.)

[4] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 254 p. Available at: https://booksee.org/book/578442. (In Russ.)

[5] Aldashev S.A. Nonuniqueness of the solution of the Tricomi problem for a multidimensional hyperbolic-parabolic equation. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 541–545. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266114040120. (English; Russian original)

[6] Bitsadze A.V. Mixed-type equations. Moscow: Izd. AN SSSR, 1959, 164 p. Available at: https://1lib.education/book/1289692/1f5275?id=1289692&secret=1f5275. (In Russ.)

[7] Aldashev S.A. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations. Almaty: Gylym, 1994, 170 p. (In Russ.)

[8] Copson E.T. On the Riemann-Green function. *(*Archive for Rational Mechanics and Analysis), 1958, vol. 1, pp. 324–348. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00298013.

[9] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. Available at: https://booksee.org/book/441860. (In Russ.)

[10] Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1965, 703 p. Available at: https://booksee.org/book/567727. (In Russ.)

[11] Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1973, 294 p. Available at: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm. (In Russ.)

[12] Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1974, 295 p. Available at: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm. (In Russ.)