



Научная статья

МЕХАНИКА

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-3-40-62

УДК 629.7.05

Дата: поступления статьи: 13.03.2020
после рецензирования: 27.03.2020
принятия статьи: 25.05.2020



О.Н. Белова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: BelovaONik@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanovav2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ. СМЕШАННОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ¹

АННОТАЦИЯ

Целью исследования является вычисление коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса полей напряжений и перемещений с помощью данных конечно-элементного моделирования пластины с наклонной центральной трещиной в поле одноосного растяжения. В статье проведено также моделирование нагружения полудиска с вертикальным и наклонным надрезом в условиях трехточечного изгиба. Моделирование проводилось в многофункциональном программном комплексе SIMULIA Abaqus. В работе предложен алгоритм для вычисления коэффициентов. Программа, написанная в системе компьютерной алгебры MAPLE, позволяет вычислить любое наперед заданное количество коэффициентов разложения М. Уильямса (амплитудных или масштабных множителей) и использует в качестве входных данных значения компонент тензора напряжения в точках в окрестности трещины и их координаты. Проведен анализ влияния количества вычисляемых коэффициентов на точность их определения. Даны рекомендации по выбору точек для вычисления коэффициентов.

Ключевые слова: поле напряжений, трещина, смешанное нагружение, коэффициенты разложения М. Уильямса, конечно-элементное моделирование.

Цитирование. Белова О.Н., Степанова Л.В. Вычисление коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений вблизи вершины трещины. Смешанное нагружение пластины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 3. С. 40–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-40-62>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Белова О.Н., 2020

Белова Оксана Николаевна — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Степанова Л.В., 2020

Степанова Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00631).

Введение

Хрупкое разрушение в твердом деформируемом теле и рост трещины в нем определяются полем напряжений вокруг вершины трещины и параметрами, описывающими сопротивление материала росту трещины. Поэтому одной из актуальных задач современной механики хрупкого разрушения является определение напряженно-деформированного состояния у вершины трещины или надреза в линейно-упругом изотропном материале. Несмотря на то что данная проблема линейной механики разрушения относится к хорошо известным задачам, получившим целый класс известных решений для тел с различными конфигурациями и системами нагрузок [1–3], остается еще много вопросов, и сейчас различным аспектам хрупкого разрушения посвящается большое количество исследований [4]. В настоящее время при оценке полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины или надреза прибегают к аналитическим, численным и экспериментальным методам. В хрупких материалах, проявляющих линейное упругое поведение, для получения аналитического распределения напряжений и перемещений в телах с дефектами используются методы теории упругости. К таким методам относятся аналитические, такие как методы теории функции комплексного переменного и метод интегральных преобразований. Одной из широко используемых в механике разрушения техник является метод разложения по собственным функциям. Впервые аналитическое решение в рядах было получено М. Уильямсом [5; 6]. Далее, подход, основанный на методе разложения по собственным функциям, получил развитие во многих работах [7–12] и продолжает оставаться часто применяемым методом получения аналитических решений.

В работах М. Уильямса получено асимптотическое представление поля напряжений, формально содержащее бесконечное количество слагаемых. Ранее в разложении, как правило, удерживались только первые два слагаемых, в которые входили коэффициенты интенсивности напряжений и T -напряжения. Однако в целой серии работ показано, что высшие приближения (регулярные слагаемые) играют существенную роль [11; 13–18]. Так, в статье [11] получено разложение асимптотических полей вершины трещины в линейно-упругом анизотропном материале. Особое внимание уделяется первым регулярным членам разложения поля напряжений (выражению для T -напряжений). Представлено упругое решение задачи для бесконечной анизотропной плоскости, содержащей наклонную центральную трещину, подвергнутую одноосному или двухосному нагружению. При таких условиях получены точные аналитические решения для всех коэффициентов разложения у вершины трещин. Результаты показывают, что T -член является единственным параметром, зависящим от упругих констант анизотропного материала. Дана оценка зависимости T -напряжения от свойств материала и показано, насколько существенно члены более высокого порядка, особенно T -напряжение, и какой вклад они могут вносить в описание поля напряжения вблизи вершины трещины.

Так, в цикле работ [11; 13–18] проведен анализ полей напряжений и перемещений в различных трещинах (нагруженных как в режиме I, так и во II режиме). Основная цель исследования состояла в том, чтобы дать точную оценку полей вблизи вершины трещины, которые впоследствии могут быть использованы, например, в случае квазихрупких материалов для оценки протяженности нелинейной зоны у вершины трещины в целом и зоны процесса разрушения в частности. Значения коэффициентов высших членов степенного разложения, с помощью которых могут быть выражены механические поля, определяются регрессионным методом по результатам численных расчетов. Анализ проведен с использованием 2D-численных моделей, и используется вычислительная система ANSYS FE. Обсуждаются различные аспекты описания полей напряжений и перемещений с помощью разложения Уильямса, в частности, сходимость коэффициентов первых нескольких членов разложения ряда, их абсолютные значения и важность для точной аппроксимации напряжений.

Таким образом, представление поля напряжений с учетом высших приближений – важная задача, решение которой необходимо для правильного и точного описания поля напряжений у вершины трещины в линейно-упругом теле. В последнее время для определения коэффициентов разложения М. Уильямса в ряд используются теоретические методы, экспериментальные и численные, например, метод конечных элементов. В настоящей статье выполнена попытка построения разложения М. Уильямса и определения коэффициентов разложения с помощью МКЭ-моделирования. В статье описана проведенная процедура извлечения коэффициентов высших приближения разложения поля напряжений в ряд в окрестности вершины трещины в образцах с различной геометрией. Компьютерное моделирование процессов разрушения имеет важное инженерное значение как прогностическая способность количественно оценить разрушение материала под различными нагрузками и является весомым фактором при проектировании. Часто целью моделирования является оценка коэффициентов интенсивности напряжения (КИН), которые используются в механике для количественной оценки полей напряжения вблизи трещины в однородном материале. Их значения можно найти с помощью коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса. В случае центральной трещины в пластине, находящейся под нагрузками

моды I и моды II, напряжения вблизи вершины трещины могут быть записаны в виде разложения М. Уильямса, которое имеет вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_{m,ij}^{(k)}(\theta) r^{\frac{k}{2}-1}, \quad (1)$$

где (r, θ) – полярная система координат с полюсом в рассматриваемой вершине трещины, a_k^m – коэффициенты, зависящие от геометрии и от типа и величины приложенных нагрузок; $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ – угловые функции, зависящие от компонент напряжения и типа нагрузки. Аналитическое представление угловых функций приведено в работе [7] и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta \right], \\ f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -\frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} - (-1)^k \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Первые члены разложения (1) описывают асимптотическое поведение решения вблизи вершины трещины и играют важную роль в механике разрушения. Зная первые коэффициенты разложения М. Уильямса, можно вычислить значения коэффициентов интенсивности напряжения и Т-напряжения по следующим формулам:

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(0), \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(0), \quad T = a_2^1 f_{1,11}^{(2)}(0). \quad (3)$$

Однако в работах [7; 12; 14; 15; 18] показана для целого ряда задач необходимость учета коэффициентов более высокого порядка.

Произвольное плоское нагружение образца приводит к появлению поля перемещений, которое может быть выражено рядами u_1 и u_2 соответственно, как

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^2 a_k^m f_m^{(k)}(r, \theta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^1 \frac{r^{\frac{k}{2}}}{2\mu} \left[\left(\kappa + \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \cos \frac{k}{2} \theta - \frac{k}{2} \cos \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \theta \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \frac{r^{\frac{k}{2}}}{2\mu} \left[\left(-\kappa - \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin \frac{k}{2} \theta + \frac{k}{2} \sin \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \theta \right] \end{aligned} \quad (4)$$

и

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^2 a_k^m g_m^{(k)}(r, \theta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^1 \frac{r^{\frac{k}{2}}}{2\mu} \left[\left(\kappa - \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \sin \frac{k}{2} \theta + \frac{k}{2} \sin \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \theta \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \frac{r^{\frac{k}{2}}}{2\mu} \left[\left(\kappa - \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \cos \frac{k}{2} \theta + \frac{k}{2} \cos \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \theta \right] \end{aligned} \quad (5)$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона и a_k^m – коэффициенты разложения полей напряжений и перемещений в ряд, подлежащие определению. Константа Колосова (κ) равна $3 - 4\nu$ для плоского деформированного состояния или $3 - 4\nu^*$, где $\nu^* = \nu/(1 + \nu)$, для плоского напряженного состояния.

1. Моделирование пластины

В программном комплексе SIMULIA Abaqus проведено конечно-элементное моделирование роста центральной трещины в пластине. Для реализации смешанного нагружения трещина моделировалась наклонной, при этом к пластине приложена растягивающая нагрузка. Схематическое описание модели приведено на рис. 1. Всего было выполнено моделирование 11 образцов. Различие образцов состояло в угле наклона трещины α . Он менялся от 0° до 90° с шагом в 10° . Создан также образец с углом наклона трещины 45° . Ширина пластины $L = 400$ см, высота $H = 800$ см, длина трещины $a = 10$ см.

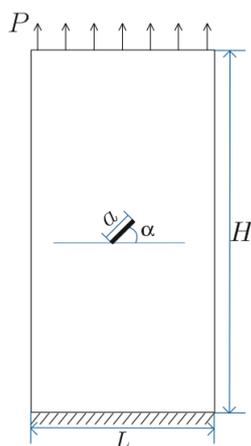


Рис. 1. Описание модели
Fig. 1. Description of the model

Свойства материала заданы с помощью констант модуля Юнга и коэффициента Пуассона и приняты $3 \cdot 10^{11}$ Па и 0.24 соответственно. Растягивающая нагрузка P приложена к верхней грани пластины и равна 100 Н. Нижняя грань пластины зафиксирована. Трещина задана с помощью типа "Контурный интеграл". Особенность состояния в вершине трещины описывается с помощью сингулярных конечных элементов. Всего разбиение содержало порядка 18 тыс. элементов. Способ разбиения вблизи вершины трещины показан на рис. 2. В результате расчета выводились значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I , K_{II} и T -напряжение для обеих вершин трещины.

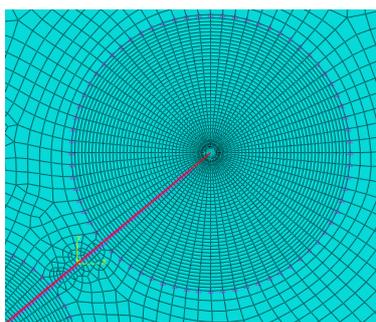


Рис. 2. Способ разбиения сетки модели
Fig. 2. Method of mesh partitioning of the model

Для выбора набора точек из окрестности вершины трещины был написан скрипт, сохраняющий значения компонент тензора напряжений σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} для точек, лежащих на окружностях с центром в вершине трещины и радиусом от 0.1 см до 4 см с шагом 0.1 см. На каждой окружности равномерно выбрано 72 точки. Таким образом известны координаты каждой точки, где r соответствует расстоянию точки от вершины трещины, а угол θ меняется от $-\pi$ до π . Пример выбора точек показан на рис. 3.

2. Моделирование полудиска

В программном комплексе SIMULIA Abaqus проведено конечно-элементное моделирование роста трещины в полудиске в условиях трехточечного изгиба. Для реализации смешанного нагружения трещина моделировалась наклонной. Схематическое описание модели приведено на рис. 4. Всего

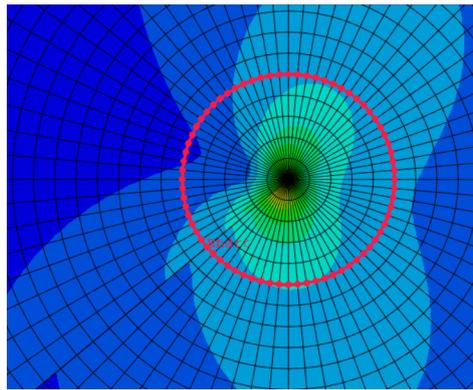


Рис. 3. Выбор набора точек
 Fig. 3. Selecting a set of points

было выполнено моделирование 6 образцов. Различие образцов состояло в угле наклона трещины α относительно горизонтальной оси. Он менялся от 40° до 90° с шагом в 10° . Радиус L полудиска

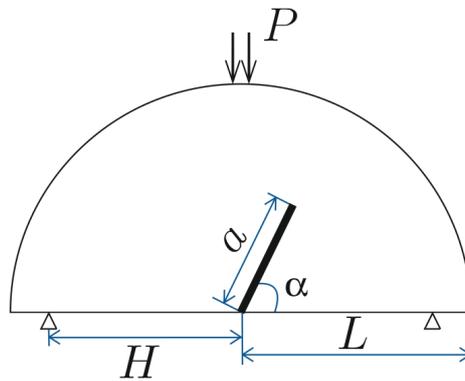


Рис. 4. Описание модели
 Fig. 4. Description of the model

равен 4 см, длина трещины $a = 1.4$ см. Свойства материала заданы с помощью констант модуля Юнга и коэффициента Пуассона и приняты $3 \cdot 10^{11}$ Па и 0.24 соответственно. Сжимающая нагрузка P приложена к верхней грани полудиска и равна 100 Н. На нижней грани полудиска смоделированы две точки опоры, находящиеся на одинаковом расстоянии от середины $H = 3.4$ см. Трещина задана с помощью типа "Контурный интеграл". Особенность состояния в вершине трещины описывается с помощью сингулярных конечных элементов. Всего разбиение содержало порядка 5 тыс. элементов. Способ разбиения сетки полудиска показан на рис. 5. В результате расчета выводились значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} и T -напряжение для обеих вершин трещины.

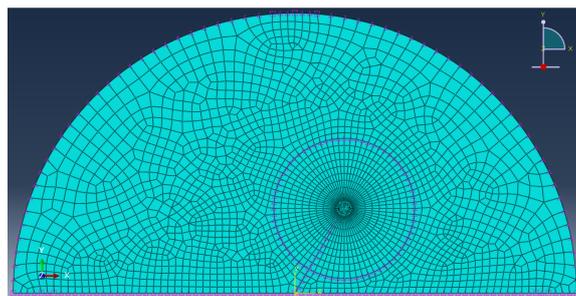


Рис. 5. Способ разбиения сетки модели
 Fig. 5. Method of mesh partitioning of the model

Выбор набора точек из окрестности вершин трещины был аналогичен выбору точек в пластине.

3. Алгоритм извлечения коэффициентов разложения М. Уильямса

В работе [20] описан подход оценки параметров разрушения для различных конфигураций трещины с помощью цифрового метода фотоупругости и конечно-элементного моделирования. Используя экспериментальные данные посредством матричных преобразований, были найдены коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса. В данной работе используется эта методика вычисления коэффициентов.

Рассмотрим формулу (1). Из результатов экспериментов или моделирования можно для выбранных точек получить значения компонент тензора напряжений. Следовательно, известны значения в левой части уравнения (1). Так как известны координаты выбранных точек, можно вычислить угловые функции и подставить в уравнение значения r . Пусть будет выбрано M точек и необходимо вычислить N приближений ($M \geq N$). Здесь под приближением N понимается вычисление $2N$ коэффициентов разложения М. Уильямса, то есть, если $N = 1$, то вычисляются коэффициенты a_1^1, a_2^1 , если $N = 2$, то вычисляются коэффициенты $a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2$ и т. д. Значения компонент тензора напряжения для каждой точки можно представить в виде вектора-столбца J размерностью $3M \times 1$. Для построения выбраны три компоненты тензора напряжения — это $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Компоненты были пересчитаны в соответствии с новой системой координат, повернутой относительно горизонтальной оси на угол наклона трещины и с центром в вершине разреза.

Искомые значения коэффициентов представим в виде вектора-столбца X размером $2N - 1 \times 1$. Для избежания появления нулевого столбца в матрице при ее построении пропускаем столбец при $f_{2,ij}^{(2)}$. При этом примем значение коэффициента $a_2^2 = 0$.

Составим матрицу A из угловых функций $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ и множителя с $r^{\frac{k}{2}-1}$. Данная матрица будет иметь размерность $3M \times 2N - 1$. В итоге уравнение (1) представим в виде

$$J = AX \tag{6}$$

С помощью последовательных преобразований найдем

$$X = (A^T A)^{-1} A^T J \tag{7}$$

Вектор-столбец X и будет содержать найденные значения коэффициентов a_k^m . Алгоритм вычисления коэффициентов был реализован в системе компьютерной алгебры MAPLE. Задача об одноосном растяжении наклонной трещины и задача о нормальном отрыве и поперечном сдвиге горизонтальной трещины — статически эквивалентные задачи [19]. Для задачи растяжения бесконечной пластины с центральной трещиной коэффициенты разложения М. Уильямса могут быть найдены аналитически. Например, в работе [7] аналитически определены коэффициенты разложения М. Уильямса.

При приложении к пластине растягивающей нагрузки коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{2n+1}^1 &= \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{3n+\frac{1}{2}} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{22}^\infty}{a^{n-\frac{1}{2}}}, \quad n \geq 0, \\ a_2^1 &= \frac{\sigma_{22}^\infty (\gamma-1)}{4}, \\ a_k^1 &= 0, \quad \text{остальные коэффициенты.} \end{aligned} \tag{8}$$

При действии сдвиговой нагрузки коэффициенты вычисляются как

$$\begin{aligned} a_{2n+1}^2 &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{3n+\frac{1}{2}} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{12}^\infty}{a^{n-\frac{1}{2}}}, \quad n \geq 0, \\ a_k^2 &= 0, \quad \text{остальные коэффициенты.} \end{aligned} \tag{9}$$

В итоге разложение М. Уильямса принимает вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^m f_{m,ij}^{(2n+1)}(\theta) r^{n-\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

Приложенная к пластине растягивающая нагрузка должна быть пересчитана в соответствии с новой системой координат. Таким образом, растягивающая нагрузка в новой системе координат примет вид $\sigma_{22} = P \cos(\alpha)^2$, а сдвиговая нагрузка — $\sigma_{12} = \frac{P}{2} \sin(2\alpha)$. Кроме того, коэффициент γ в формуле (8) отвечает за поперечное сжатие пластины при растяжении, то есть $\sigma_{11} = \gamma \sigma_{22}$. При этом коэффициент будет вычисляться по следующей формуле:

$$\gamma = \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}. \tag{11}$$

В данном случае компонента a_2^1 пересчитывается в связи с переходом к новой системе координат следующим образом:

$$a_2^1 = P \frac{(\sin(\alpha))^2 - (\cos(\alpha))^2}{4}. \tag{12}$$

Таким образом, зная точное решение для выбранной конфигурации, есть возможность сравнить ее с решением, полученным с помощью написанной программы. Поэтому точное аналитическое решение задачи о трещине в бесконечной линейно-упругой пластине использовалось далее для верификации результатов работы алгоритма извлечения коэффициентов разложения М. Уильямса полей напряжений и перемещений. После тестирования алгоритма разработанная программа была использована для вычисления коэффициентов разложения М. Уильямса поля напряжений вблизи вершины надреза в полудиске с вертикальным и наклонным под разными углами надрезом.

4. Результаты вычислений и выводы

Полученные с помощью программы коэффициенты разложения для центральной трещины в пластине приведены в табл. 1–4. В таблицах приведены также результаты аналитического решения (АР) и значения K_I , K_{II} , T — напряжений из конечно-элементного моделирования (МКЭ). Ниже приведены результаты в зависимости от угла наклона трещины. Угол наклона трещины относительно горизонтальной оси равен $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Точки выбраны из круговой области на расстоянии 1 см от вершины трещины.

Таблица 1

Table 1

$\alpha = 0$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$	АР	МКЭ
K_I	429.24	400.5581	399.092	400.1207	400.1812	400.1861	396.3327	399.1
K_{II}	-0.0731	0.4145	1.1088	1.3555	0.9889	0.8865	0	-0.02318
a_1^1	171.2420	159.7978	159.2147	159.6250	159.6492	159.6511	158.1138	
a_1^2	0.0291	-0.1693	-0.4423	-0.5407	-0.3945	-0.3536	0	
a_2^1	-21.4429	-24.1876	-24.4479	-24.5588	-25.0681	-25.1020	-25	25.125
a_2^2	0	0		0	0	0	0	
a_3^1		6.5993	7.1191	7.0363	7.6125	7.6154	7.9056	
a_3^2		-0.0180	0.0642	0.1021	0.1982	0.1207	0	
a_4^1			-0.1484	-0.0836	-0.2310	-0.1591	0	
a_4^2			-0.1540	-0.2242	-0.2007	-0.0851	0	
a_5^1				-0.1042	-0.3301	-0.4296	-0.1976	
a_5^2				0.0183	-0.0660	-0.1299	0	
a_6^1					0.1908	0.2392	0	
a_6^2					0.1285	0.1038	0	
a_7^1					-0.2058	-0.1898	0.0098	
a_7^2					-0.0292	0.0393	0	
a_8^1						-0.0295	0	
a_8^2						-0.0917	0	
a_9^1						0.0395	-0.0006	
a_9^2						0.0232	0	

На всех следующих рисунках по горизонтальной оси откладывается угол θ на котором находится точка, где $-\pi$ соответствует точке лежащей на нижней грани трещины, а π — на верхней. По вертикальной оси откладывается значение компонент тензора напряжения $\sigma_{i,j} \cdot 10^4$ (Па).

На рис. 6, 7, 8 приведено угловое распределение компонент тензора напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , соответственно построенных с использованием различного количества слагаемых асимптотического разложения М. Уильямса (сплошная линия). Построены также графики компонент тензора напряжения, полученные из конечно-элементного решения (кружочки) и из аналитического решения с теоретически определенными значениями амплитудных, масштабных множителей a_k^m (кривые показаны пунктирной линией). Точки для вычисления коэффициентов выбирались на расстоянии 1 см от вершины трещины. Трещина расположена под углом 45° к горизонтальной оси.

Из рис. 6 ясно видно, что на выбранном расстоянии от вершины трещины двух слагаемых в разложении Уильямса недостаточно для описания поля напряжений, трехчленное асимптотическое разложение оказывается существенно более близким к теоретическому и численному решению, тогда пятичленное асимптотическое разложение не отличимо от теоретического решения и конечно-элементного решения.

Из рис. 7 следует, что для представления компоненты тензора напряжений σ_{22} на выбранном расстоянии также двух и трех слагаемых недостаточно, необходимо сохранять пять и более членов ряда.

Таблица 2

Table 2

$\alpha = 30$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$	AP	МКЭ
K_I	322.486	301.5514	300.8074	303.1392	302.9326	303.0133	297.2495	298.1
K_{II}	153.594	173.518	173.9591	175.3769	175.8067	175.7748	171.6171	172.9
a_1^1	128.6533	120.3016	120.0048	120.9350	120.8526	120.8848	118.5854	
a_1^2	-61.2751	-69.2236	-69.3996	-69.9652	-70.1367	-70.1240	-68.4653	
a_2^1	-9.8648	-11.8366	-11.9694	-12.2318	-12.5218	-12.5051	-12.5	12.58
a_2^2	0	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		4.7941	5.0584	4.8783	5.2001	5.1486	5.9292	
a_3^2		-3.4453	-3.3923	-3.1488	-3.1823	-3.2554	-3.4232	
a_4^1			-0.0748	0.0746	0.0547	0.1009	0	
a_4^2			-0.0990	-0.5581	-0.6097	-0.5359	0	
a_5^1				-0.2398	-0.4105	-0.4273	-0.1482	
a_5^2				0.1336	0.1545	0.1394	0.0855	
a_6^1					0.1064	0.0818	0	
a_6^2					-0.0197	-0.0589	0	
a_7^1					-0.0844	-0.0342	0.0074	
a_7^2					-0.0152	0.0038	-0.0042	
a_8^1						-0.0190	0	
a_8^2						-0.0140	0	
a_9^1						0.0057	-0.0004	
a_9^2						-0.0090	0.0002	

Таблица 3

Table 3

$\alpha = 45$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$	AP	МКЭ
K_I	214.5309	200.5673	200.081	201.59	201.4553	201.5023	198.1663	198.2
K_{II}	177.4279	200.2887	200.6558	202.1449	202.6867	202.6550	198.1663	199.6
a_1^1	85.5854	80.0147	79.8208	80.4230	80.3690	80.3878	79.0569	
a_1^2	-70.7835	-79.9036	-80.0501	-80.6441	-80.8603	-80.8476	-79.0569	
a_2^1	1.8025	0.5026	0.4156	0.2384	0.0587	0.0710	0	0
a_2^2	0	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		3.1870	3.3594	3.2480	3.4513	3.4192	3.9528	
a_3^2		-3.9774	-3.9334	-3.6708	-3.7289	-3.7991	-3.9528	
a_4^1			-0.0482	0.0501	0.0341	0.0616	0	
a_4^2			-0.0823	-0.5791	-0.6393	-0.5776	0	
a_5^1				-0.1575	-0.2631	-0.2734	-0.0988	
a_5^2				0.1478	0.1871	0.1855	0.0988	
a_6^1					0.0681	0.0542	0	
a_6^2					-0.0467	-0.0882	0	
a_7^1					-0.0548	-0.0247	0.0049	
a_7^2					-0.0119	-0.0047	-0.0049	
a_8^1						-0.0119	0	
a_8^2						0.0041	0	
a_9^1						0.0041	-0.0003	
a_9^2						-0.0152	0.0003	

На рис. 8 показано распределение касательного напряжения. Можно было бы предположить, что доминирующее слагаемое, содержащее коэффициент интенсивности напряжений, и Т-напряжения играют ключевую роль. Тем не менее, как видно из рисунка, следует удерживать высшие приближения в разложении в ряд компонент тензора напряжений. Результаты извлечения параметров механики разрушения a_k^m существенно зависят от выбора точек для расчета. Зависимость параметров механики разрушения от выбранного радиуса концентрической окружности иллюстрируют графики распределения напряжений, приведенные ниже.

Рисунки 9, 10, 11 показывают, как меняются вычисленные значения компонент тензора напряжений в зависимости от расстояния от вершины трещины, на котором выбирались точки. Угол наклона трещины равен 30° , в асимптотическом разложении удерживалось 5 слагаемых.

Таблица 4
 Table 4

$\alpha = 60$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$	АР	МКЭ
K_I	106.5204	99.5784	99.3300	100.0578	99.9874	100.0063	99.0831	98.43
K_{II}	153.7127	173.4313	173.6869	174.9044	175.3937	175.3693	171.6171	172.9
a_1^1	42.4955	39.7260	39.6269	39.9172	39.8892	39.8967	39.5284	
a_1^2	-61.3225	-69.1890	-69.2910	-69.7767	-69.9719	-69.9622	-68.4653	
a_2^1	13.4801	12.8472	12.8026	12.7107	12.6285	12.6359	12.5	12.61
a_2^2	0	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		1.5750	1.6629	1.6137	1.7101	1.6952	1.9764	
a_3^2		-3.4431	-3.4124	-3.1941	-3.2534	-3.3070	-3.4232	
a_4^1			-0.0240	0.0247	0.0148	0.0261	0	
a_4^2			-0.0572	-0.4713	-0.5236	-0.4819	0	
a_5^1				-0.0779	-0.1266	-0.1306	-0.0494	
a_5^2				0.1248	0.1661	0.1725	0.0855	
a_6^1					0.0330	0.0277	0	
a_6^2					-0.0517	-0.0857	0	
a_7^1					-0.0269	-0.0142	0.0024	
a_7^2					-0.0075	-0.0086	-0.0042	
a_8^1						-0.0054	0	
a_8^2						0.0136	0	
a_9^1						0.0022	-0.0001	
a_9^2						-0.0154	0.0002	

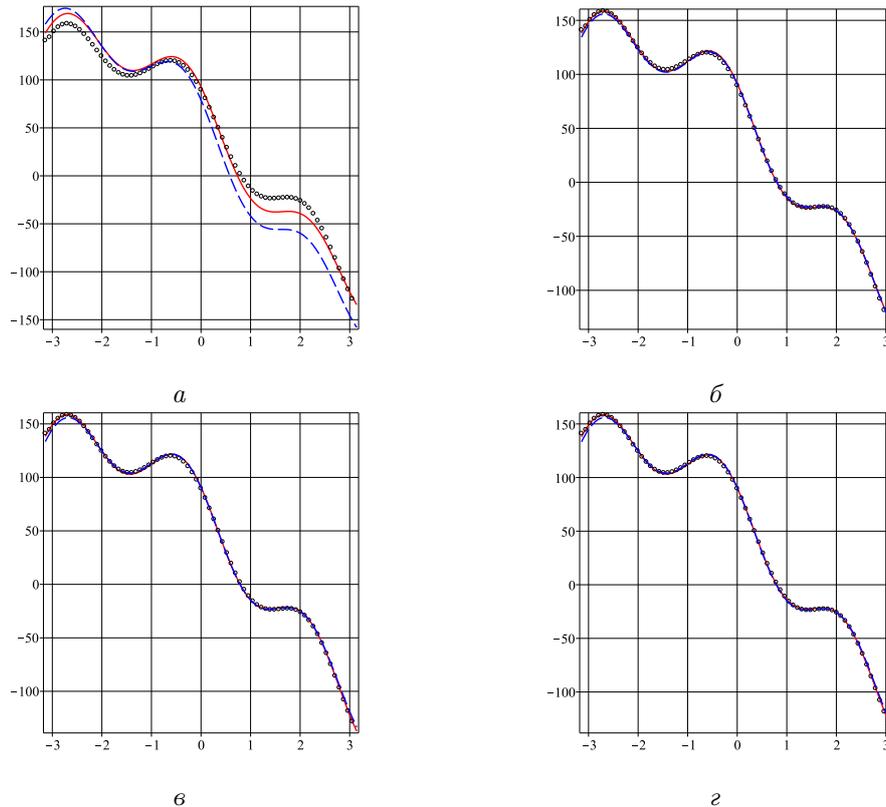


Рис. 6. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} в зависимости от количества удерживаемых слагаемых разложения. N — число удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса:

a — $N = 2$; $б$ — $N = 3$; $в$ — $N = 5$; $г$ — $N = 7$

Fig. 6. Angular distribution of the stress tensor component σ_{11} depending on the amount of the retained terms of the decomposition. N is the number of retained terms in the M. Williams expansion: a — $N = 2$; b — $N = 3$;

c — $N = 5$; d — $N = 7$

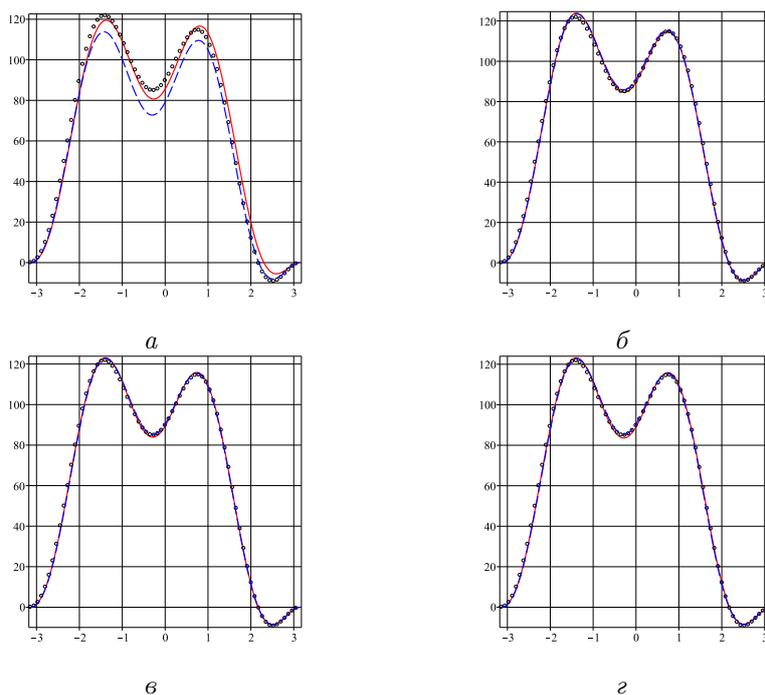


Рис. 7. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} в зависимости от количества удерживаемых слагаемых разложения. N – число удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса: a – $N = 2$; $б$ – $N = 3$; $в$ – $N = 5$; $г$ – $N = 7$

Fig. 7. Angular distribution of the stress tensor component σ_{22} depending on the amount of the retained terms of the decomposition. N is the number of retained terms in the M. Williams expansion: a – $N = 2$; $б$ – $N = 3$; $в$ – $N = 5$; $г$ – $N = 7$

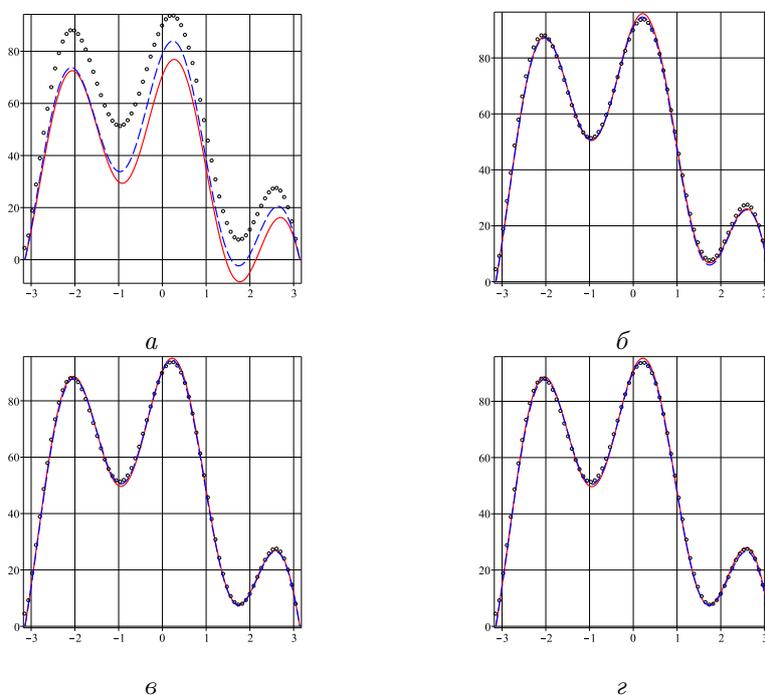


Рис. 8. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{12} в зависимости от количества удерживаемых слагаемых разложения. N – число удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса: a – $N = 2$; $б$ – $N = 3$; $в$ – $N = 5$; $г$ – $N = 7$

Fig. 8. Angular distribution of the stress tensor component σ_{12} depending on the amount of the retained terms of the decomposition. N is the number of retained terms in the M. Williams expansion: a – $N = 2$; $б$ – $N = 3$; $в$ – $N = 5$; $г$ – $N = 7$

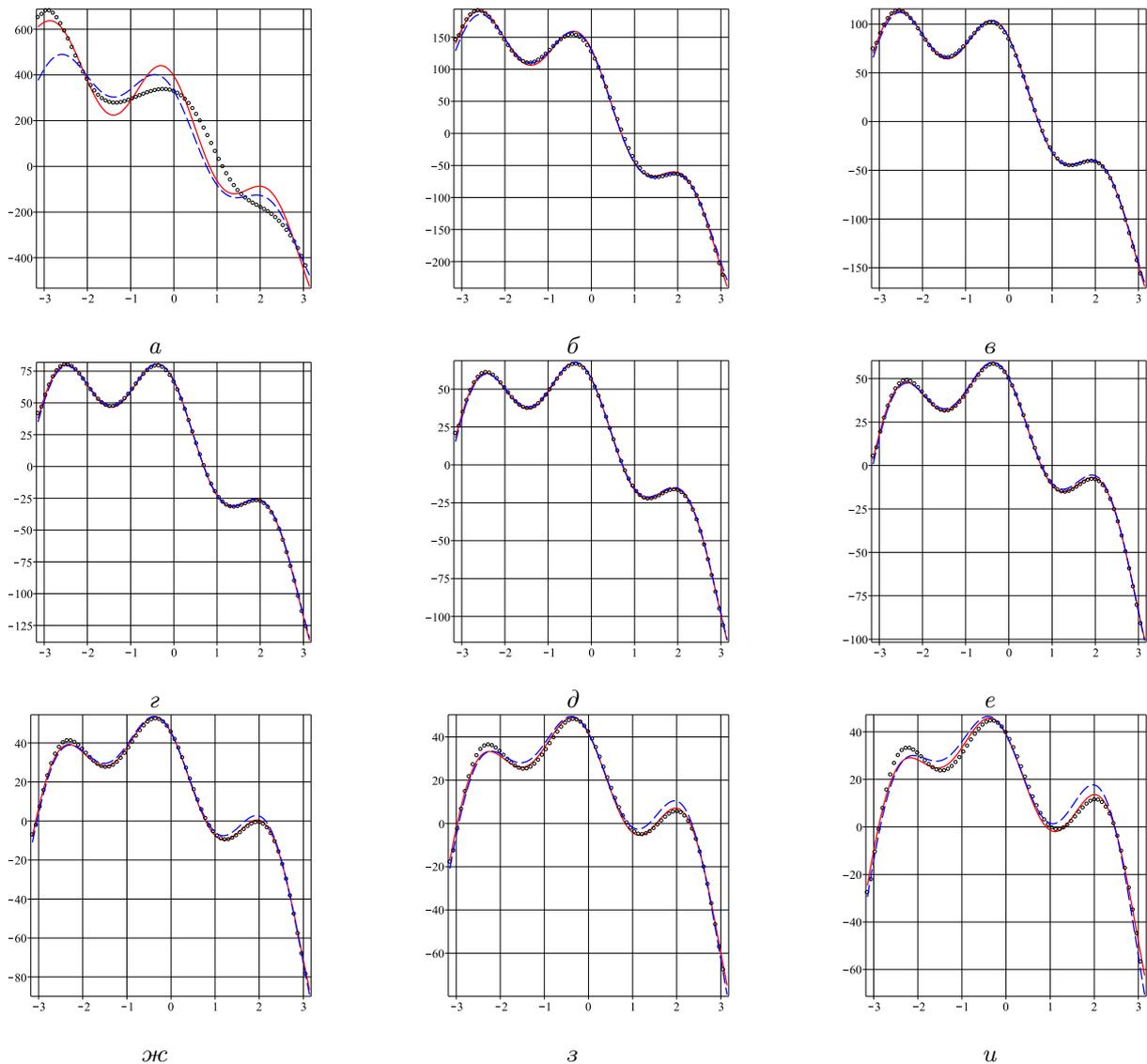


Рис. 9. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} в зависимости от выбора точек на концентрических окружностях с радиусом r : $a - r = 0.1$ см; $б - r = 0.5$ см; $в - r = 1$ см; $г - r = 1.5$ см; $д - r = 2$ см; $е - r = 2.5$ см; $ж - r = 3$ см; $з - r = 3.5$ см; $и - r = 4$ см

Fig. 9. Angular distribution of the stress tensor component σ_{11} depending on the choice of points on concentric circles with a radius r : $a - r = 0.1$ cm; $б - r = 0.5$ cm; $в - r = 1$ cm; $г - r = 1.5$ cm; $д - r = 2$ cm; $е - r = 2.5$ cm; $ж - r = 3$ cm; $з - r = 3.5$ cm; $и - r = 4$ cm

На рис. 9 видно, что на расстоянии $r = 0.1$ см аналитическое решение, показанное пунктирной линией, конечно-элементное решение, показанное кружочками, и восстановленное решение (сплошная линия), основанное на извлечении параметров механики разрушения, существенно отличаются друг от друга. Однако, рассматривая графики, можно заключить, что в окрестности вершины имеется кольцевая область, в которой асимптотическое решение М. Уильямса дает хорошее описание поля напряжений.

На рис. 10 показано распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} в зависимости от выбора точек на различных расстояниях от вершины трещины r .

На рис. 11 показаны распределения компоненты тензора напряжений σ_{12} в зависимости от выбора точек на различных расстояниях от вершины трещины r .

Из рис. 10 и 11 видно, что лучшее совпадение результатов будет при выборе точек из кольцевой области на некотором расстоянии от вершины трещины. При данных условиях наблюдается наибольшее совпадение на расстоянии от вершины трещины от 1 см до 2.5 см.

Сформулированный вывод представляется важным для обработки экспериментальных данных, полученных с помощью интерференционно-оптических методов механики деформируемого твердого

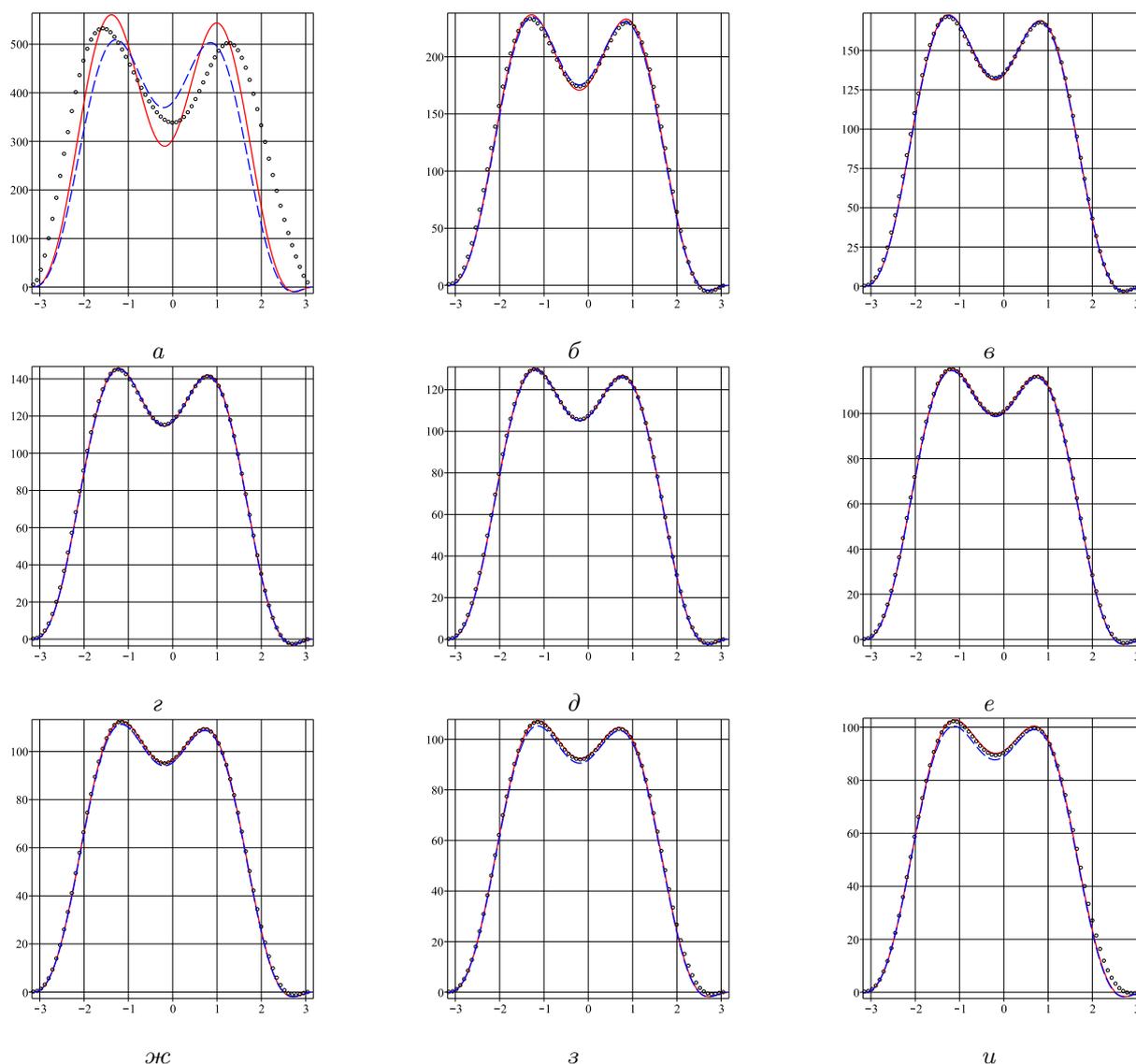


Рис. 10. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} в зависимости от выбора точек на концентрических окружностях с радиусом r : $a - r = 0.1$ см; $b - r = 0.5$ см; $c - r = 1$ см; $d - r = 1.5$ см; $e - r = 2$ см; $f - r = 2.5$ см; $g - r = 3$ см; $h - r = 3.5$ см; $i - r = 4$ см

Fig. 10. Angular distribution of the stress tensor component σ_{22} depending on the choice of points on concentric circles with a radius r : $a - r = 0.1$ cm; $b - r = 0.5$ cm; $c - r = 1$ cm; $d - r = 1.5$ cm; $e - r = 2$ cm; $f - r = 2.5$ cm; $g - r = 3$ cm; $h - r = 3.5$ cm; $i - r = 4$ cm

тела, нацеленных на экспериментальное определение параметров механики разрушения, а именно, на экспериментальное определение коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса.

При применении поляризационно-оптических методов с целью извлечения коэффициентов разложения М. Уильямса (методов цифровой фотоупругости, голографической интерферометрии, лазерной спекл-интерферометрии и цифрового градиентного зондирования) зачастую экспериментатор не знает, на каком расстоянии от вершины трещины выбирать точки (экспериментатор, например, в методе цифровой фотоупругости видит всю интерференционную картину изохроматических полос и изоклин: экспериментатор может выбрать точки на любой изохроматической полосе). Если экспериментальные точки выбраны на значительном удалении от вершины трещины, следует понимать, что в асимптотическом разложении М. Уильямса нужно удерживать большее количество слагаемых. К такому выводу независимо друг от друга пришли представители различных научных школ, и в настоящее время анализ поля напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном линейно упругом теле всегда осуществляется с учетом регулярных слагаемых в разложении М. Уильямса.

Подобные анализ и построения выполнены для моделей полудисков с вертикальным и наклонным надрезом в условиях трехточечного изгиба. Полуциркулярный диск с надрезом в последнее время

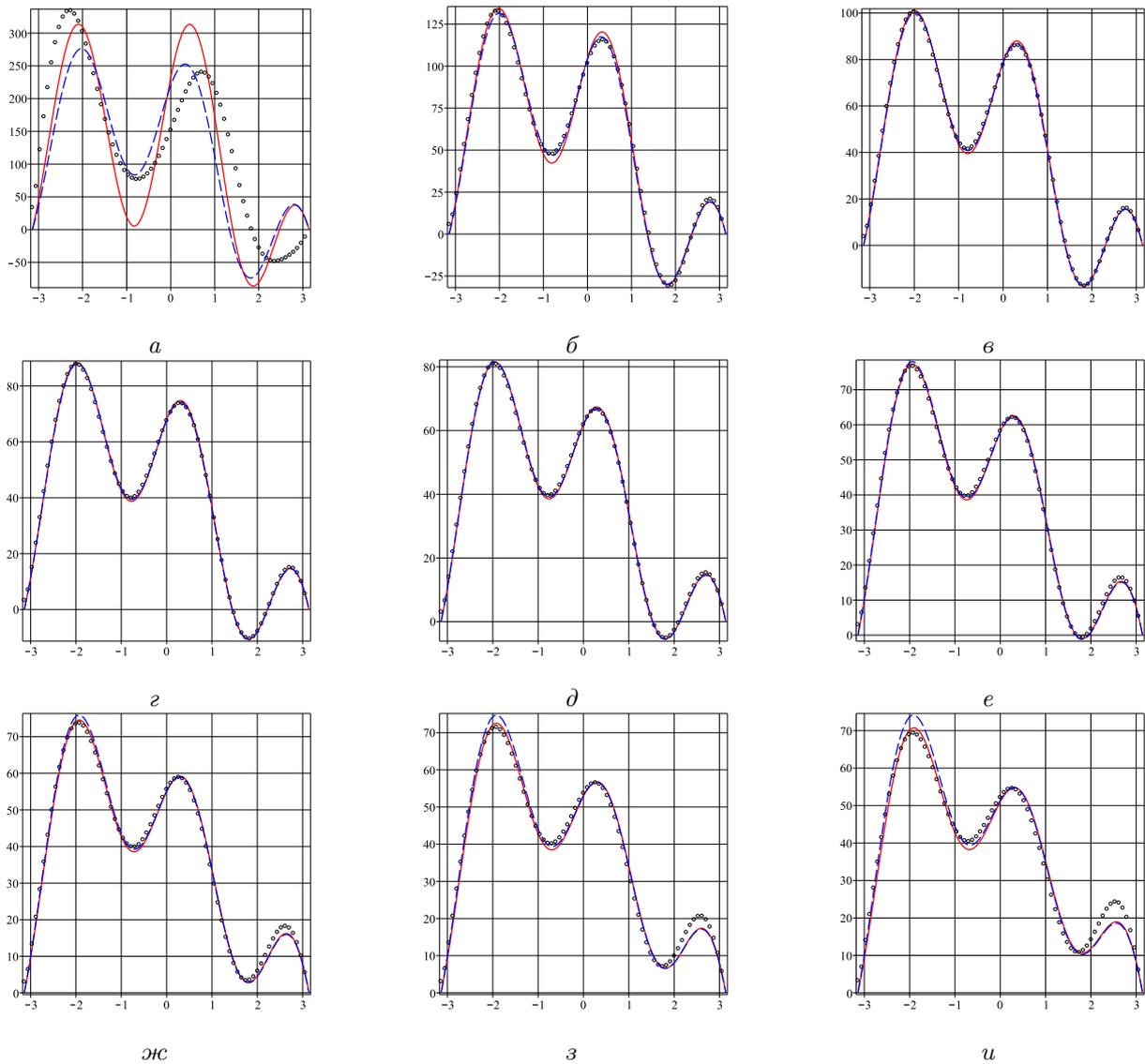


Рис. 11. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{12} в зависимости от выбора точек на концентрических окружностях с радиусом r : $a - r = 0.1$ см; $b - r = 0.5$ см; $в - r = 1$ см; $г - r = 1.5$ см; $д - r = 2$ см; $е - r = 2.5$ см; $жс - r = 3$ см; $з - r = 3.5$ см; $и - r = 4$ см

Fig. 11. Angular distribution of the stress tensor component σ_{12} depending on the choice of points on concentric circles with a radius r : $a - r = 0.1$ cm; $b - r = 0.5$ cm; $c - r = 1$ cm; $d - r = 1.5$ cm; $e - r = 2$ cm; $f - r = 2.5$ cm; $g - r = 3$ cm; $h - r = 3.5$ cm; $i - r = 4$ cm

часто используется как образец для изучения вопросов смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого нормального отрыва до чистого поперечного сдвига. В силу указанной причины полукруговой диск был выбран в качестве образца для проведения компьютерного вычислительного эксперимента. Проверенный на примере пластины с центральной трещиной алгоритм был использован для выделения коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса в окрестности вершины вертикального надреза и наклонного под разными углами надреза.

Полученные с помощью программы амплитудные (масштабные) коэффициенты многопараметрического разложения М. Уильямса полей напряжений и перемещений в окрестности вершины надреза в полудиске приведены в табл. 5–10. В таблицах приведены также значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I , K_{II} и T -напряжений, полученные из конечно-элементного анализа (МКЭ). Видно, что значения хорошо согласуются между собой.

Ниже приведены результаты для различных значений угла наклона надреза. Угол наклона трещины относительно горизонтальной оси равен 40° , 50° , 60° , 70° , 80° . Точки выбраны из кольцевой области на расстоянии 0.7 см от вершины трещины. Для трещины под углом 90° точки выбраны на расстоянии 0.9 см от вершины трещины.

Таблица 5

Table 5

$\alpha = 40$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	МКЭ
K_I	16.1068	40.7780	42.7034	42.6923	42.6931	42.6992	41.29
K_{II}	-18.7947	-21.0593	-23.7153	-23.6741	-23.6732	-23.6575	-23.53
a_1^1	6.4257	16.2681	17.0362	17.0317	17.0321	17.0345	
a_1^2	7.4980	8.4014	9.4610	9.4446	9.4442	9.4380	
a_2^1	2.6802	5.9665	6.0645	6.0803	6.0794	6.0759	6.095
a_2^2	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		-8.9792	-9.4459	-9.4480	-9.4479	-9.4479	
a_3^2		0.3154	0.4168	0.4387	0.4392	0.4437	
a_4^1		0.8619	0.6997	0.6748	0.6753	0.6785	
a_4^2		0.1722	1.2230	1.2122	1.2118	1.2092	
a_5^1			0.3245	0.3349	0.3352	0.3333	
a_5^2			-0.9438	-1.0152	-1.0156	-1.0189	
a_6^1			-0.2268	-0.1554	-0.1557	-0.1577	
a_6^2			1.0453	1.2005	1.2018	1.2036	
a_7^1			-0.2293	-0.3808	-0.3836	-0.3821	
a_7^2			-0.2110	-0.3297	-0.3301	-0.3272	
a_8^1			0.2939	0.4201	0.4228	0.4240	
a_8^2			-0.0931	-0.1573	-0.1609	-0.1620	
a_9^1			-0.2694	-0.2501	-0.2419	-0.2434	
a_9^2			0.1104	0.3665	0.3710	0.3678	

Таблица 6

Table 6

$\alpha = 50$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	МКЭ
K_I	25.7909	53.4675	55.3765	55.3771	55.3781	55.3770	54.05
K_{II}	-17.6345	-21.5479	-24.8201	-24.8198	-24.8179	-24.8107	-24.31
a_1^1	10.2890	21.3304	22.0920	22.0922	22.0926	22.0922	
a_1^2	7.0351	8.5963	9.9018	9.9016	9.9009	9.8980	
a_2^1	1.6922	5.4368	5.0169	5.0117	5.0107	5.0111	5.015
a_2^2	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		-10.1771	-10.2179	-10.2114	-10.2112	-10.2112	
a_3^2		1.0230	0.9562	0.9576	0.9583	0.9603	
a_4^1		1.0661	1.2811	1.2864	1.2874	1.2871	
a_4^2		0.0231	1.3932	1.3949	1.3945	1.3933	
a_5^1			-0.5873	-0.6285	-0.6287	-0.6284	
a_5^2			-1.0325	-1.0452	-1.0464	-1.0479	
a_6^1			0.1381	0.2262	0.2250	0.2248	
a_6^2			0.9708	0.9875	0.9881	0.9888	
a_7^1			-0.1847	-0.2813	-0.2817	-0.2820	
a_7^2			-0.1119	-0.1034	-0.1008	-0.0992	
a_8^1			0.0769	0.0950	0.0982	0.0992	
a_8^2			-0.2114	-0.2632	-0.2661	-0.2664	
a_9^1			-0.0090	0.1018	0.1022	0.1021	
a_9^2			0.1359	0.1986	0.1933	0.1909	

Таблица 7

Table 7

$\alpha = 60$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	МКЭ
K_I	36.8461	66.8460	68.8858	68.8797	68.8810	68.8805	67.22
K_{II}	-14.7595	-20.7339	-23.0435	-23.0364	-23.0327	-23.0227	-22.55
a_1^1	14.6995	26.6677	27.4814	27.4790	27.4795	27.4793	
a_1^2	5.8882	8.2716	9.1930	9.1901	9.1887	9.1847	
a_2^1	0.4014	4.4061	3.5112	3.5098	3.5083	3.5081	3.51
a_2^2	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		-10.9295	-10.6070	-10.6014	-10.6012	-10.6010	
a_3^2		1.4339	1.5194	1.5194	1.5205	1.5233	
a_4^1		1.0548	1.5850	1.5891	1.5907	1.5910	
a_4^2		0.1262	0.9062	0.9086	0.9081	0.9064	
a_5^1			-1.3502	-1.3850	-1.3855	-1.3854	
a_5^2			-0.6322	-0.6269	-0.6284	-0.6306	
a_6^1			0.4243	0.4882	0.4860	0.4852	
a_6^2			0.6773	0.6418	0.6421	0.6430	
a_7^1			-0.1952	-0.2432	-0.2428	-0.2431	
a_7^2			-0.0246	0.0396	0.0429	0.0454	
a_8^1			-0.0021	-0.0233	-0.0184	-0.0163	
a_8^2			-0.1435	-0.190718720.1925	-0.1925	-0.1928	
a_9^1			0.0795	0.1675	0.1647	0.1647	
a_9^2			0.0708	0.0423	0.0342	0.0304	

Таблица 8

Table 8

$\alpha = 70$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	МКЭ
K_I	47.4895	77.9271	81.1254	81.1201	81.1213	81.1212	79.15
K_{II}	-10.5843	-17.1507	-18.1158	-18.1025	-18.0969	-18.0846	-17.7
a_1^1	18.9455	31.0884	32.3643	32.3622	32.3627	32.3627	
a_1^2	4.2225	6.8421	7.2271	7.2218	7.2196	7.2147	
a_2^1	-1.0035	2.8648	1.7832	1.7820	1.7804	1.7797	1.7785
a_2^2	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		-10.7276	-10.4934	-10.4907	-10.4905	-10.4902	
a_3^2		1.4218	1.6936	1.6957	1.6973	1.7008	
a_4^1		0.7154	1.3884	1.3935	1.3954	1.3961	
a_4^2		0.2807	0.2810	0.2817	0.2808	0.2788	
a_5^1			-1.6627	-1.6786	-1.6791	-1.6792	
a_5^2			-0.0958	-0.0929	-0.0949	-0.0976	
a_6^1			0.4586	0.4703	0.4675	0.4662	
a_6^2			0.2582	0.2286	0.2290	0.2300	
a_7^1			-0.1800	-0.1660	-0.1657	-0.1659	
a_7^2			0.1271	0.1848	0.1888	0.1920	
a_8^1			-0.0355	-0.0689	-0.0621	-0.0591	
a_8^2			-0.1093	-0.1520	-0.1536	-0.1541	
a_9^1			0.0859	0.1016	0.0980	0.0978	
a_9^2			0.0390	0.01228	0.0026	-0.0025	

Таблица 9

Table 9

$\alpha = 80$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	МКЭ
K_I	55.4695	84.3138	89.9609	89.9535	89.9438	89.9351	87.66
K_{II}	-5.3448	-9.3521	-9.7530	-9.7868	-9.8046	-9.8392	-9.806
a_1^1	22.1291	33.6363	35.8892	35.8862	35.8824	35.8789	
a_1^2	2.1322	3.7309	3.8909	3.9043	3.9114	3.9252	
a_2^1	-2.1672	1.2489	0.2214	0.2350	0.2444	0.2528	0.3082
a_2^2	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		-9.6957	-10.0670	-10.0712	-10.0723	-10.0736	
a_3^2		0.9675	1.2434	1.2275	1.2215	1.2116	
a_4^1		0.2107	0.9787	0.9587	0.9486	0.9402	
a_4^2		0.1183	-0.1109	-0.1026	-0.0999	-0.0942	
a_5^1			-1.6217	-1.5992	-1.5959	-1.5927	
a_5^2			0.0558	0.1007	0.1098	0.1183	
a_6^1			0.1211	0.1352	0.1484	0.1573	
a_6^2			0.0819	-0.0050	-0.0082	-0.0109	
a_7^1			0.0779	0.0307	0.0280	0.0269	
a_7^2			0.2409	0.2847	0.2644	0.2528	
a_8^1			-0.1006	-0.0793	-0.1079	-0.1232	
a_8^2			-0.2330	-0.1585	-0.1420	-0.1403	
a_9^1			-0.0149	0.0430	0.0585	0.0608	
a_9^2			0.0762	-0.0820	-0.0363	-0.0156	

Таблица 10

Table 10

$\alpha = 90$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	МКЭ
K_I	46.8648	82.0528	92.3960	92.4072	92.4098	92.4146	90.77
K_{II}	-0.0069	-0.0034	0.00043	-0.0005	-0.0003	-0.0007	0.0008
a_1^1	18.6963	32.7343	36.8606	36.8651	36.8661	36.8681	
a_1^2	0.0027	0.0013	-0.0001	0.0002	0.0001	0.0003	
a_2^1	-2.5243	0.8738	-0.2647	-0.2678	-0.2707	-0.2746	-0.2782
a_2^2	0	0	0	0	0	0	
a_3^1		-8.8287	-9.6392	-9.6471	-9.6467	-9.6462	
a_3^2		0.0011	-0.0002	-0.0006	-0.0005	-0.0006	
a_4^1		-0.0858	0.5311	0.5351	0.5376	0.5407	
a_4^2		-0.0014	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	
a_5^1			-1.2951	-1.2544	-1.2551	-1.2561	
a_5^2			-0.0027	-0.0015	-0.0015	-0.0015	
a_6^1			0.0694	-0.0294	-0.0324	-0.0349	
a_6^2			0.0026	0.0001	0.0001	0.0001	
a_7^1			0.0240	0.1219	0.1225	0.1228	
a_7^2			-0.0021	0.0000	0.0001	0.0000	
a_8^1			-0.1879	-0.1962	-0.1907	-0.1874	
a_8^2			-0.0000	-0.0004	-0.0004	-0.0005	
a_9^1			0.1344	0.0353	0.0321	0.0315	
a_9^2			0.0001	-0.0016	-0.0017	-0.0016	

На рис. 12, 13, 14 приведены компоненты тензора напряжения, построенные с использованием различного количества коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса (сплошная линия) и полученные из конечно-элементного решения (черные кружочки). Точки для вычисления коэффициентов выбирались на расстоянии 0.7 см от вершины трещины. Трещина расположена под углом 70° к горизонтали.

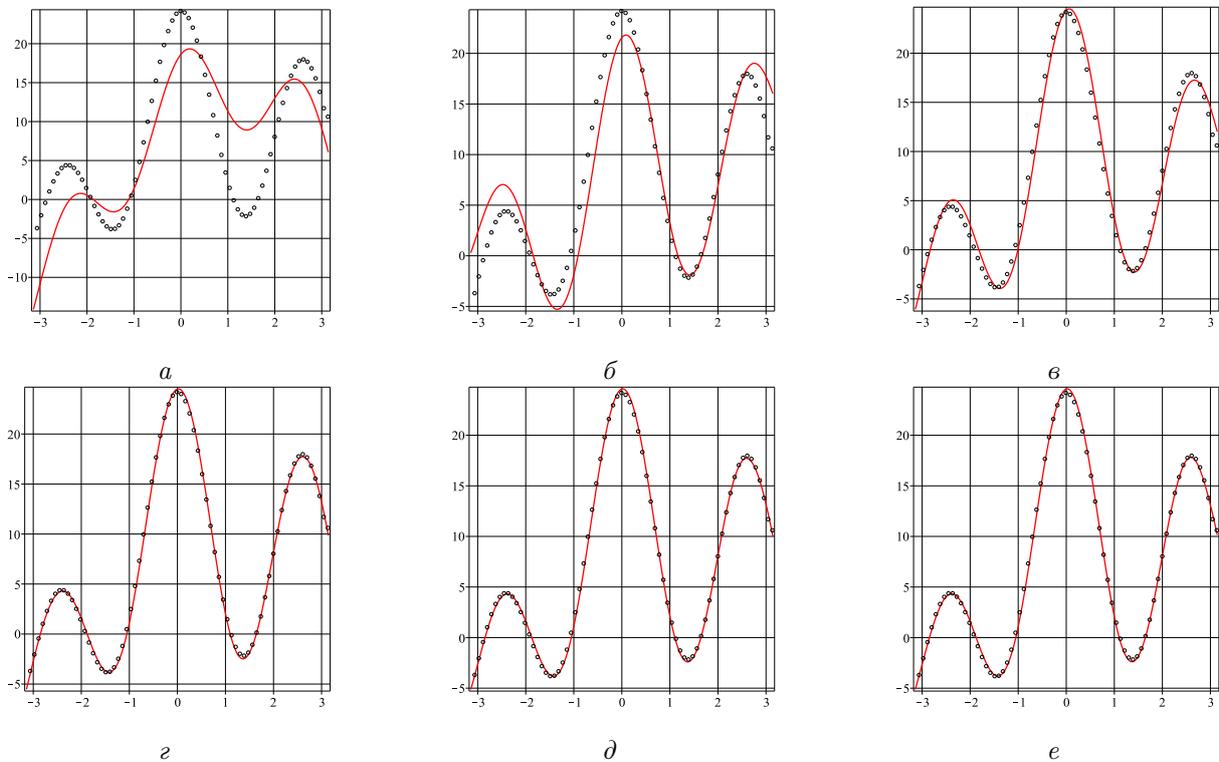


Рис. 12. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} в зависимости от количества удерживаемых слагаемых разложения. N — число удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса:

a — $N = 2$; b — $N = 3$; c — $N = 5$; d — $N = 10$; e — $N = 20$

Fig. 12. Angular distribution of the stress tensor component σ_{11} depending on the amount of the retained terms of the decomposition. N is the number of retained terms in the M. Williams expansion: a — $N = 2$; b — $N = 3$;

c — $N = 5$; d — $N = 10$; e — $N = 15$; f — $N = 20$

На рис. 12, 13, 14 изображено угловое распределение компонент тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, соответственно, в зависимости от количества удерживаемых слагаемых разложения N .

Из рис. 12, 13, 14 хорошо видно, что на выбранном расстоянии от вершины трещины необходимо гораздо больше слагаемых в разложении Уильямса для описания поля напряжений, чем в предыдущем случае с пластиной. В отличие от пластины, где необходимо удерживать 5 слагаемых, в полудиске нужно удерживать более 10 слагаемых. Десятичленное асимптотическое разложение не отличается от конечно-элементного решения.

На рис. 15, 16, 17 изображено, как меняются вычисленные значения компонент тензора напряжений в зависимости от расстояния от вершины трещины, на котором выбирались точки. Угол наклона трещины равен 60° , в асимптотическом разложении удерживалось 25 коэффициентов.

На рис. 15, 16, 17 показаны распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ соответственно, в зависимости от выбора точек на различных расстояниях от вершины трещины r .

На рис. 15, 16 видно, что на расстоянии до $r = 0.5$ см конечно-элементное решение, показанное кружочками, и восстановленное решение (сплошная линия), основанное на извлечении параметров механики разрушения, существенно отличаются друг от друга.

На рис. 17 различие конечно-элементного и восстановленного решений наблюдается до $r = 0.9$ см.

В такой постановке модели в окрестности вершины кольцевой области, в которой асимптотическое решение М. Уильямса дает хорошее описание поля напряжений, как было в пластине, не наблюдается. Необходимо продолжить исследование полудиска в условиях трехточечного изгиба.

Таким образом, в работе предложена методика вычисления коэффициентов и проведено сравнение их с результатами конечно-элементного моделирования и аналитическим решением. Приведены вычисленные коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса вблизи вершины трещины в

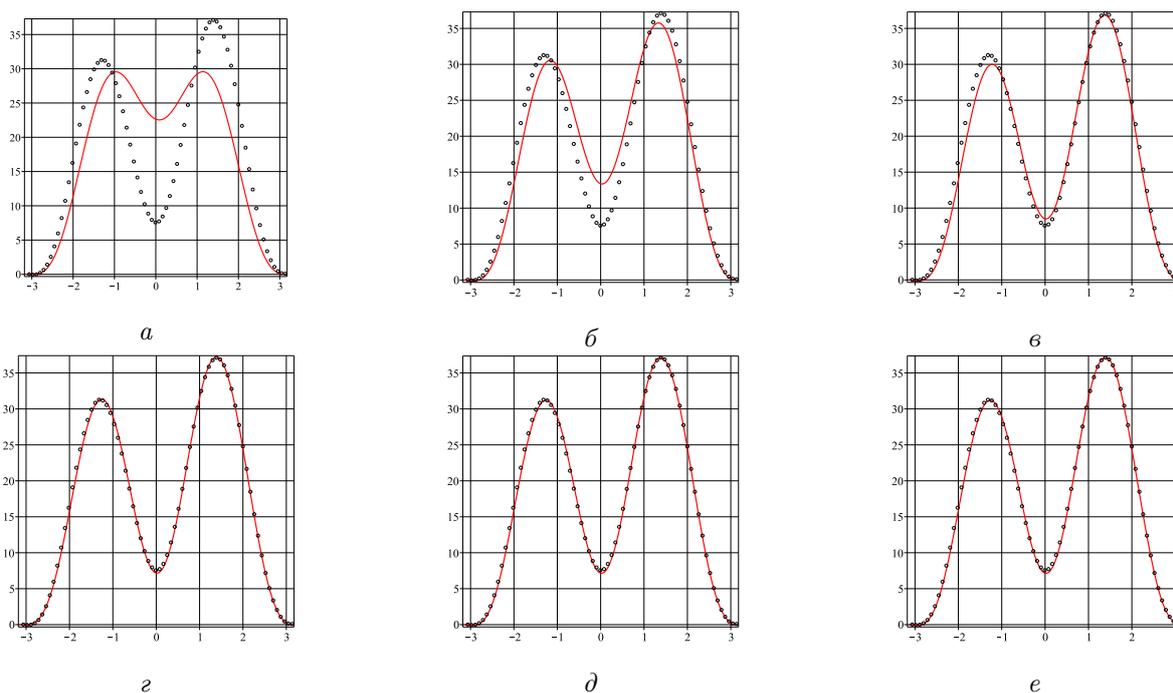


Рис. 13. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} в зависимости от количества удерживаемых слагаемых разложения. N – число удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса: a – $N = 2$; b – $N = 3$; $в$ – $N = 5$; $г$ – $N = 10$; $д$ – $N = 15$; e – $N = 20$

Fig. 13. Angular distribution of the stress tensor component σ_{22} depending on the amount of the retained terms of the decomposition. N is the number of retained terms in the expansion of M. Williams: a – $N = 2$; b – $N = 3$; c – $N = 5$; d – $N = 10$; e – $N = 15$; f – $N = 20$

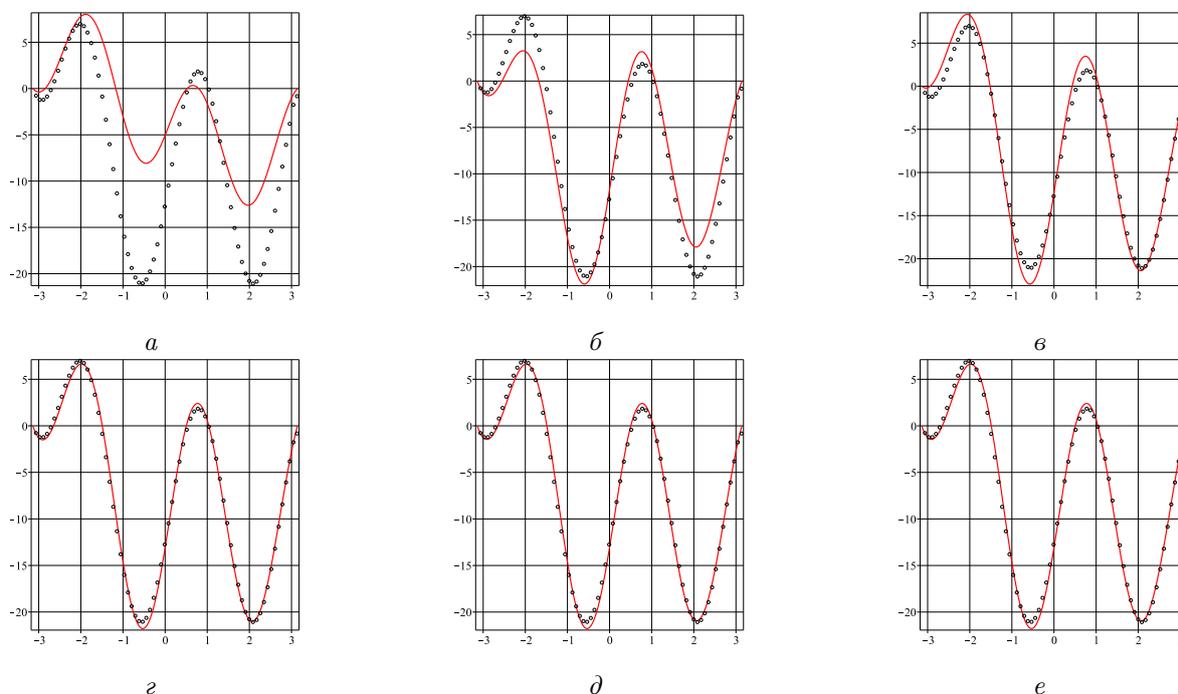


Рис. 14. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{12} в зависимости от количества удерживаемых слагаемых разложения. N – число удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса: a – $N = 2$; b – $N = 3$; $в$ – $N = 5$; $г$ – $N = 10$; $д$ – $N = 15$; e – $N = 20$

Fig. 14. Angular distribution of the stress tensor component σ_{12} depending on the amount of the retained terms of the decomposition. N is the number of retained terms in the M. Williams expansion: a – $N = 2$; b – $N = 3$; c – $N = 5$; d – $N = 10$; e – $N = 15$; f – $N = 20$

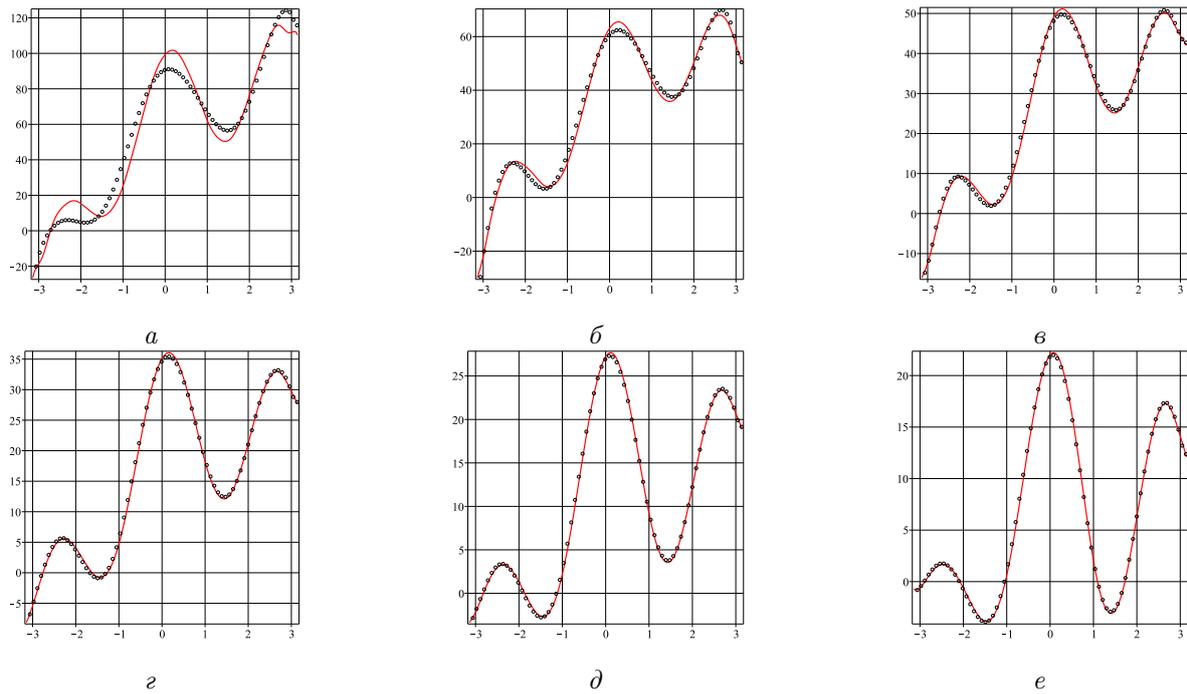


Рис. 15. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} в зависимости от выбора точек на концентрических окружностях с радиусом r : а — $r = 0.1$ см; б — $r = 0.2$ см; в — $r = 0.3$ см; г — $r = 0.5$ см; д — $r = 0.7$ см; е — $r = 0.9$ см

Fig. 15. Angular distribution of the stress tensor component σ_{11} depending on the choice of points on concentric circles with a radius r : а — $r = 0.1$ cm; б — $r = 0.2$ cm; в — $r = 0.3$ cm; д — $r = 0.5$ cm; е — $r = 0.7$ cm; ф — $r = 0.9$ cm

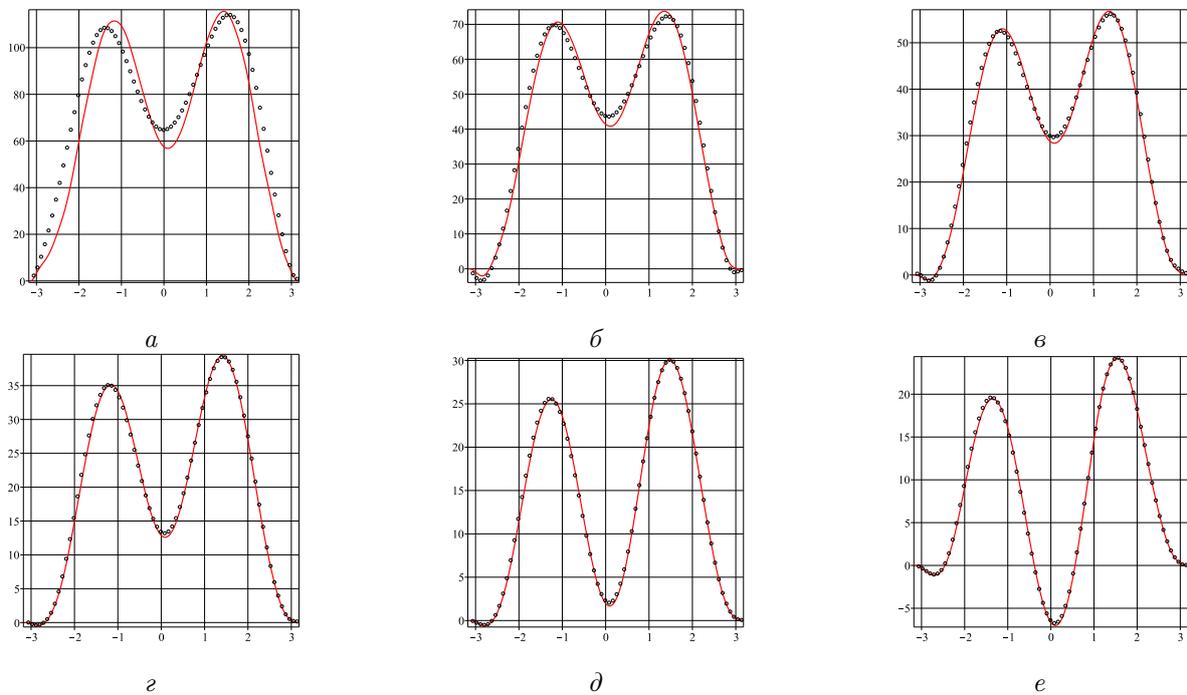


Рис. 16. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} в зависимости от выбора точек на концентрических окружностях с радиусом r : а — $r = 0.1$ см; б — $r = 0.2$ см; в — $r = 0.3$ см; г — $r = 0.5$ см; д — $r = 0.7$ см; е — $r = 0.9$ см

Fig. 16. Angular distribution of the stress tensor component σ_{22} depending on the choice of points on concentric circles with a radius r : а — $r = 0.1$ cm; б — $r = 0.2$ cm; в — $r = 0.3$ cm; д — $r = 0.5$ cm; е — $r = 0.7$ cm; ф — $r = 0.9$ cm

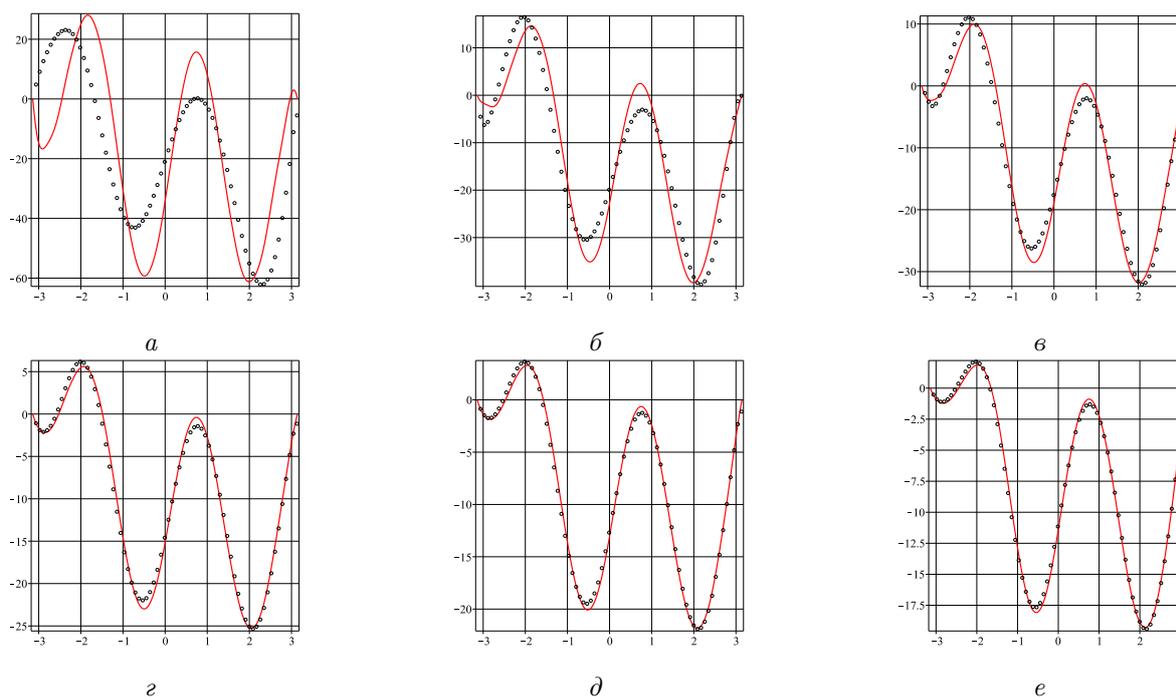


Рис. 17. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{12} в зависимости от выбора точек на концентрических окружностях с радиусом r : а – $r = 0.1$ см; б – $r = 0.2$ см; в – $r = 0.3$ см; г – $r = 0.5$ см; д – $r = 0.7$ см; е – $r = 0.9$ см

Fig. 17. Angular distribution of the stress tensor component σ_{12} depending on the choice of points on concentric circles with a radius r : а – $r = 0.1$ cm; б – $r = 0.2$ cm; в – $r = 0.3$ cm; д – $r = 0.5$ cm; е – $r = 0.7$ cm; ф – $r = 0.9$ cm

условиях смешанного нагружения в двух случаях: центральной трещины в пластине под действием растягивающей нагрузки и трещины в полудиске в условиях трехточечного изгиба. Показана эффективность предложенного алгоритма.

Литература

- [1] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. Москва: Наука, 1974. 312 с.
- [2] Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел: курс лекций. Санкт-Петербург: Профессия, 2012. 552 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=1503630>.
- [3] Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of elasticity solutions. Berlin: Springer, 2003. 324 с. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0169-3>.
- [4] Recho N. Fracture Mechanics and Crack Growth. Hoboken, Wiley, 2012. 493 с. DOI: <http://doi.org/10.1002/9781118387184>.
- [5] Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // Journal of Applied Mechanics. 1952. V. 74. P. 526–528. URL: <https://authors.library.caltech.edu/47672/1/382785.pdf>.
- [6] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1956. Vol. 24, № 1, pp. 109–114. URL: <https://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf>.
- [7] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49, № 3–4. P. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [8] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged materials: Numerical experiment and analytical solution // Numerical Analysis and Applications. 2015. № 8(2). P. 168–181.
- [9] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vols. 144–145, P. 265–275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.

- [10] Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2015. № 4. С. 188–225. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.12>.
- [11] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 91. P. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [12] Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 345–361. DOI: <https://doi.org/10.15372/SJNM20190307>.
- [13] Sobek J., Frantik P., Vesely V. Analysis of accuracy of Williams series approximation of stress field in cracked body — influence of area of interest around crack-tip on multi-parameter regression performance // Frattura ed Integrita Strutturale. 2017. Vol. 39, № 1, pp. 129–142. DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.14>.
- [14] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 143. P. 32–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [15] Malikova L., Vesely V., Seitl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // International Journal of Fatigue. 2016. Vol. 89. P. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010>.
- [16] Malikova L., Vesely V. Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria // Frattura ed Integrita Strutturale. 2015. Vol. 33. P. 25–32. DOI: <http://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.33.04>.
- [17] Malikova L., Vesely V. Influence of the elastic mismatch on crack propagation in a silicate-based composite // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2017. Vol. 91. P. 25–30. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.03.004>.
- [18] Vesely V., Sobek J., Seitl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip. // International Journal of Fatigue. 2016. Vol. 89. P. 20–35. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016>.
- [19] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет" 2001. 562 с. URL: https://www.studmed.ru/astafev-vi-radaev-yun-stepanova-lv-nelineynaya-mehanika-razrusheniya_260b181a836.html.
- [20] Patil P., Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2017. Vol. 93. P. 182–194. URL: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-3-40-62

Submitted: 13.03.2020

Revised: 27.03.2020

Accepted: 25.05.2020

O.N. Belova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: belovaonik@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanovaLv@samsu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

DETERMINATION OF THE COEFFICIENTS OF ASYMPTOTIC CRACK — TIP STRESS EXPANSION. MIXED MODE LOADING OF THE PLATE²

ABSTRACT

The aim of the study is to calculate the coefficients of M. Williams' asymptotic expansion of stress and displacement fields using the data of finite element modeling of a plate with an inclined central crack in a uniaxial tension field. In this work, we also simulated the loading of a half-disk with a vertical and oblique

²The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research grant within the framework of the scientific project No. 19-01-00631.

notch under conditions of three-point bending. The simulation was carried out in the multifunctional software SIMULIA Abaqus. The paper proposes an algorithm for calculating the coefficients. The program, written in the MAPLE computer algebra system, allows calculating any predetermined number of M. Williams expansion coefficients (amplitude or scale factors) and uses the values of the stress tensor components at points in the vicinity of the crack and their coordinates as input. The analysis of the influence of the number of calculated coefficients on the accuracy of their determination is carried out. Recommendations on the choice of points for calculating the coefficients are given.

Key words: stress field, crack, mixed loading, expansion coefficients M. Williams, finite element modeling.

Citation. Belova O.N., Stepanova L.V. Determination of the coefficients of asymptotic crack – tip stress expansion. Mixed mode loading of the plate. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia serii* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 40–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-30-40-62>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Belova O.N., 2020

Belova Oksana Nikolaevna – postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Stepanova L.V., 2020

Stepanova Larisa Valentinovna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Kachanov L.M. Fundamentals of fracture mechanics. Moscow: Nauka, 1974, 312 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/13776>. (In Russ.)
- [2] Pestrikov V.M., Morozov E.M. Fracture mechanics of solids: course of lectures. Saint Petersburg: Professia, 2012, 552 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=1503630>.
- [3] Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of elasticity solutions. Berlin: Springer, 2003, 324 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0169-3>.
- [4] Recho N. Fracture Mechanics and Crack Growth. Hoboken, Willey, 2012, 493 p. DOI: <http://doi.org/10.1002/9781118387184>.
- [5] Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. *Journal of Applied Mechanics*, 1952, vol. 74, pp. 526–528. Available at: <https://authors.library.caltech.edu/47672/1/382785.pdf>.
- [6] Williams M.L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. (*Journal of Applied Mechanics*), 1956, vol. 24, no. 1, pp. 109–114. Available at: <https://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf>.
- [7] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, no. 3–4, pp. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [8] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged materials: Numerical experiment and analytical solution. (*Numerical Analysis and Applications*), 2015, no. 8(2), pp. 168–181. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423915020081>.
- [9] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. (*International Journal of Solids and Structures*), 2018, vols. 144–145, pp. 265–275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [10] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete asymptotic expansion of M. Williams near the tips of collinear cracks of equal length in an infinite plane medium. (*PNRPU Mechanics Bulletin*), 2015, vol. 4, pp. 188–225. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.12>.
- [11] Nejatı M., Ghoulı S., Ayatollahı M. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. (*Applied Mathematical Modelling*), 2021, vol. 91, pp. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [12] Stepanova L.V. Asymptotic Analysis of the Crack Tip Stress Field (Consideration of Higher Order Terms). (*Numerical Analysis and Applications*), 2019, vol. 12, no. 3, pp. 284–296. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423919030078>. (English; Russian original)

- [13] Sobek J., Frantik P., Vesely V. Analysis of accuracy of Williams series approximation of stress field in cracked body - influence of area of interest around crack-tip on multi-parameter regression performance. (*Frattura ed Integrita Strutturale*), 2017, vol. 39, №1, pp. 129–142. DOI: [DOI https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.14](https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.14).
- [14] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry. (*Engineering Fracture Mechanics*), 2015, vol. 143, pp. 32–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [15] Malikova L., Vesely V., Seidl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 89, pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010>.
- [16] Malikova L., Vesely V. Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria. (*Frattura ed Integrita Strutturale*), 2015, vol. 33, pp. 25–32. DOI: <http://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.33.04>.
- [17] Malikova L., Vesely V. Influence of the elastic mismatch on crack propagation in a silicate-based composite. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017, vol. 91, pp. 25–30. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.03.004>.
- [18] Vesely V., Sobek J., Seidl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip. (*International Journal of Fatigue*), 2016, vol. 89, pp. 20–35. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016>.
- [19] Astafiev V.I., Radaev J.N., Stepanova L.V. Nonlinear fracture mechanics. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii universitet 2001, 562 p. Available at: https://www.studmed.ru/astafev-vi-radaev-yun-stepanova-lv-nelineynaya-mehanika-razrusheniya_260b181a836.html. (In Russ.)
- [20] Patil P., Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. (*Optics and Lasers in Engineering*), 2017, vol. 93, pp. 182–194. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.