Научная статья

МАТЕМАТИКА

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-3-7-16

УДК 517.956.223 (MSC 2010: 31A30,35J58)

Дата: поступления статьи: 13.03.2020
после рецензирования: 27.03.2020
принятия статьи: 25.05.2020

К.Ж. Назарова
Международный казахско-турецкий университет
имени Х.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан
E-mail: gjnazarova@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879

Б.Х. Турметов
Международный казахско-турецкий университет
имени Х.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан
E-mail: turmetovbh@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7735-6484

К.И. Усманов
Международный казахско-турецкий университет
имени Х.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан
E-mail: y_kairat@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1377-4633

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

АННОТАЦИЯ

Настоящая статья посвящена исследованию вопросов разрешимости некоторых краевых задач для нового класса дифференциальных уравнений с инволюцией. В пространстве R^n вводится отображение $Sx = -x$. С помощью этого отображения вводится нелокальный аналог оператора Лапласа, а также граничный оператор с наклонной производной. Изучены краевые задачи, обобщающие известную задачу с наклонной производной. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемых задач. В классе Гельдера изучена также гладкость решения. Используя известные утверждения о решениях краевой задачи с наклонной производной для классического уравнения Пуассона, найдены точные порядки гладкости решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: инволюция, нелокальное уравнение, нелокальная задача, наклонная производная, уравнение Пуассона, гладкость, существование, единственность.

Цитирование. Назарова К.Ж., Турметов Б.Х., Усманов К.И. О разрешимости некоторых краевых задач с инволюцией // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 3. С. 7–16. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-7-16.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Назарова Кулзина Жаркимбековна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави, 161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, 29.

Турметов Батирхан Худайбергенович — профессор, доктор физико-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави, 161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, 29.

Усманов Кайрат Идрисович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави, 161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, 29.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК, грант № AP08855810.

Введение

Дифференциальные уравнения, в которых наряду с искомой функцией $u(t)$ присутствуют значение $u(S(t))$, где $S^2(t) = t$, называются уравнениями со сдвигами Карлемана [1] или уравнениями с инволюцией. Теория уравнений с инволютивно преобразованными аргументами и их приложения подробно описаны в монографиях [2; 3]. В целом дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят, вообще говоря, при различных значениях аргументов называют нелокальными дифференциальными уравнениями.

Краевые и начально-краевые задачи для нелокальных аналогов классических дифференциальных уравнений исследовались в многочисленных работах авторов [4–9].

Помимо этого для классических уравнений можно исследовать нелокальные краевые задачи типа Бицадзе — Самарского [10], в которых значения искомой функции $u(x)$ в границе области связаны со значениями $u(Sx)$. Отметим, что многочисленные приложения нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений к задачам физики, техники и других отраслей науки подробно описаны в работах [11; 12].

В настоящей статье при помощью отображения типа инволюции рассматривается аналог нелокального оператора Лапласа, и для соответствующего нелокального аналога уравнения Пуассона исследуется краевая задача с наклонной производной. Кроме того, для классического уравнения Пуассона изучается также нелокальная краевая задача, в котором граничная условия задается в виде связи значений наклонной производной в точках x и Sx.

Отметим, что основные краевые задачи (Дирихле, Неймана и Робена) для нелокального аналога уравнения Пуассона с преобразованиями типа инволюции исследованы в работе [13]. Кроме того, для классического уравнения Пуассона обобщенная краевая задача Дирихле с отображениями типа инволюции изучена в работе [14].

Переходим к постановке задач, рассматриваемых в настоящей статье. Для любого $x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ из R^n введем обозначение $x = (\tilde{x}, x_n)$, где $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$. Пусть $m \geqslant 2$, $\Omega_m = \left\{x \in R^n : |\tilde{x}|^2 + |x_n|^m < 1\right\}$, $\partial\Omega_m = \left\{x \in R^n : |\tilde{x}|^2 + |x_n|^m = 1\right\}$, $\Gamma = \{x \in \partial\Omega_m : x_n = 0\}, n \geqslant 3$.

В пространстве R^n рассмотрим отображение $Sx = -x$ и введем оператор $I_S u(x) = u(-x)$. Очевидно, что отображение S является инволюцией, т. е. $S^2 x = x$.

Пусть a, b — действительные числа. Рассмотрим в области Ω_m следующие задачи

Задача 1. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega_m) \cap C^1(\bar{\Omega}_m)$, удовлетворяющую условиям

$$a\Delta u(x) + b\Delta u(-x) = f(x), \;\; x \in \Omega_m, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = g(x), \;\; x \in \partial\Omega_m \tag{2}$$

$$u(x) = \phi(x), \;\; x \in \Gamma. \tag{3}$$

Задача 2. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega_m) \cap C^1(\bar{\Omega}_m)$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(x) = f(x), \;\; x \in \Omega_m, \tag{4}$$

$$a\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + b\frac{\partial u}{\partial x_n}(-x) = g(x), \;\; x \in \partial\Omega_m, \tag{5}$$

$$u(x) = \phi(x), \;\; x \in \Gamma. \tag{6}$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial x_n}(-x)$ означает $\frac{\partial u}{\partial x_n}(-x) = I_S\left[\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right]$. Заметим, что

$$I_S\left[\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right] \neq \frac{\partial}{\partial x_n} I_S[u(x)].$$

Если $a = 1$, $b = 0$, то рассматриваемые задачи совпадают с известной краевой задачей с наклонной производной для классического уравнения Пуассона. Известные утверждения относительно этой задачи мы изложим в п. 2 настоящей работы.

Отметим также, что краевые задачи с отображениями типа инволюция исследованы в работах [15; 16].

1. О задаче с наклонной производной

Приведем известные утверждения относительно задачи с наклонной производной для уравнения Лапласа.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta v(x) = 0, \ \ x \in \Omega_m, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(x) = h(x), \ x \in \partial\Omega_m, \tag{8}$$

$$v(x) = \psi(x), \ x \in \Gamma. \tag{9}$$

Заметим, что вырождающиеся краевые задачи с наклонной производной для эллиптических уравнений исследованы в работах многочисленных авторов [17; 18]. В работе [17] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть в задаче (7)–(9) $\psi(x) = 0$ и $h(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$, где $\lambda > 1 - \frac{1}{m}$, причем число $\lambda + \frac{1}{m}$ нецелое. Тогда решение задачи (7)–(9) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$.

Теорема 2. Пусть в задаче (7)–(9) $\psi(x) = 0$, $\lambda > 0$, причем число $\lambda + \frac{1}{m}$ нецелое. Тогда существует функция $h(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$ такое, что решение задачи (7)–(9) при любом $\varepsilon > 0$ не принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}+\varepsilon}(\bar{\Omega}_m)$.

Таким образом, из утверждений теорем 1 и 2 следует, что в отличие от задачи Неймана в случае задачи с наклонной производной получается потеря гладкости решения на порядок $1-\frac{1}{m}$. В следующем утверждении доказывается, что при специальном выборе граничной функции $h(x)$ эту потерю гладкости решения можно восстановить. В работе [18] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $0 < \lambda < 1$ и $\psi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$. Предположим, что $h(x) = x_n^{m-1} \cdot g_0(x)$, где $g_0(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$. Тогда существует решение задачи (7)–(9), принадлежащее классу $C^{\lambda+1}(\bar{\Omega}_m)$.

В дальнейшем при доказательстве основных утверждений относительно задач 1 и 2 существенно используются утверждения теорем 1–3.

2. Исследования задачи 1

Исследуем задачу 1. Сначала приведем теорему о единственности решения.

Теорема 4. Пусть $a \neq \pm b$, и решение задачи 1 существует, тогда оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — решение однородной задачи 1. Обозначим $v(x) = au(x) + bu(-x)$, $x \in \Omega_m$. Тогда $\Delta v(x) = 0$, $x \in \Omega_m$; $v(x)|_{\Gamma} = 0$. Далее из равенства

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_n} = a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + b\frac{\partial}{\partial x_n}I_S u(x) = a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} - b \cdot I_S\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right] = a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} - b\frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}$$

и однородного граничного условия (2) следует

$$\left.\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = 0.$$

Таким образом, если $u(x)$ — решение однородной задачи 1, то функция $v(x) = au(x) + bu(Sx)$ будет удовлетворять однородным условиям задачи (7)–(9). Тогда по теореме 1 имеем $v(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m$. Следовательно,

$$au(x) + bu(-x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m.$$

Из этого равенства также следует

$$au(-x) + bu(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m.$$

Отсюда

$$\left(a^2 - b^2\right)u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m.$$

Тогда, если $a \neq \pm b$, то $u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в задаче 1 выполняется условие $a = \pm b$, то легко показать, что однородная задача имеет ненулевые решения. Например, рассмотрим функцию $u(x) = \left(1 - |x|^2\right)^2 H(x)$, где $H(x) = x_n \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})$. Очевидно, что $u(x)\Big|_{\Gamma} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{\partial\Omega_m} = 0$ и $H(x)$ — гармоническая функция в Ω. Тогда из равенств

$$\Delta H(x) = 0; \quad \Delta\left(1 - |x|^2\right)^2 = \Delta\left[1 - 2|x|^2 + |x|^4\right] = -4n + 4(2+n)|x|^2;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} H(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(1 - |x|^2\right)^2 =$$

$$= x_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_1 + ... + x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(1 - |x|^2\right)^2 - (x_1 + ... + x_{n-1}) 4\left(1 - |x|^2\right) x_n =$$

$$= -x_n \sum_{j=1}^{n-1} 4\left(1 - |x|^2\right) x_j - 4x_n\left(1 - |x|^2\right)(x_1 + ... + x_{n-1}) =$$

$$= -4x_n(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})\left(1 - |x|^2\right) = -4H(x)\left(1 - |x|^2\right)$$

следует

$$\Delta u(x) = H(x)\Delta\left(1 - |x|^2\right)^2 + \left(1 - |x|^2\right)\Delta H(x) + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} H(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(1 - |x|^2\right)^2 =$$

$$= -4n + 4(2+n)|x|^2 - 8\left(1 - |x|^2\right) H(x).$$

Следовательно,

$$\Delta u(-x) = -4n + 4(2+n)|x|^2 - 8\left(1 - |x|^2\right) H(x).$$

Отсюда получаем, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x) - \Delta u(-x) = 0, \ \ x \in \Omega_m$$

и однородным граничным условиям (2) и (3).

Далее исследуем существование и гладкость решения задачи 1.

Теорема 5. Пусть $a \neq \pm b$, $\lambda > 1 - \frac{1}{m}$, причем число $\lambda + \frac{1}{m}$ нецелое, $f(x) \in C^{\lambda + \frac{1}{m} - 1}\left(\bar{\Omega}_m\right)$, $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$, $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$. Тогда решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C^{\lambda + \frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — решение задачи (1)–(3). Обозначим $v(x) = au(x) + bu(-x)$, $x \in \Omega_m$. Тогда для функции $v(x)$ получаем краевую задачу

$$\Delta v(x) = f(x), \ \ x \in \Omega_m, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\bigg|_{\partial\Omega_m} = ag(x) - bg(-x) \equiv h(x), \tag{11}$$

$$v(x)\bigg|_{\Gamma} = a\phi(x) + b\phi(-x) \equiv \psi(x). \tag{12}$$

Решение задачи (10)–(12) будем искать в виде $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$, где функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ являются решениями следующих задач:

$$\Delta v_1(x) = f(x), \ \ x \in \Omega_m, v_1(x)|_{\partial\Omega_m} = 0, \tag{13}$$

$$\Delta v_2(x) = 0, \ \ x \in \Omega_m; \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_n}\bigg|_{\partial\Omega_m} = h(x) - \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n}, v_2(x)\bigg|_{\Gamma} = \psi(x). \tag{14}$$

По условию теоремы $f(x) \in C^{\lambda + \frac{1}{m} - 1}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Тогда решение задачи (13) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda + \frac{1}{m} + 1}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Следовательно, $\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \in C^{\lambda + \frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Далее, если $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$, $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$, то $\psi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$, а функция $h(x) - \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n}$, по крайней мере, принадлежит классу $C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$. Тогда по теореме 1 решение задачи (14) существует и принадлежит классу $C^{\lambda + \frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$.

Значит, функция $v(x)=v_1(x)+v_2(x)$ удовлетворяет условиям задачи (10)–(12) и, по крайней мере, принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar\Omega_m\right)$. В равенстве $v(x)=au(x)+bu(-x),\ x\in\Omega_m$, меняя x на $-x$, получим $v(-x)=au(-x)+bu(x)$. Отсюда, если $a\neq\pm b$, то

$$u(x)=\frac{a}{a^2-b^2}v(x)-\frac{b}{a^2-b^2}v(-x),x\in\bar\Omega_m. \quad (15)$$

Покажем, что если функция $v(x)$ является решением задачи (10)–(12), то при выполнении услови $a\neq\pm b$ функция $u(x)$ из (15) удовлетворяет всем условиям задачи 1. Действительно, применяя к равенству (15) оператор Δ, для точек $x\in\Omega_m$ имеем

$$\Delta u(x)=\frac{a}{a^2-b^2}\Delta v(x)-\frac{b}{a^2-b^2}\Delta v(-x)=\frac{a}{a^2-b^2}f(x)-\frac{b}{a^2-b^2}f(-x).$$

Меняя в последнем равенстве x на $-x$, получим

$$\Delta u(-x)=\frac{a}{a^2-b^2}f(-x)-\frac{b}{a^2-b^2}f(x).$$

Отсюда

$$a\Delta u(x)+b\Delta u(x)=\frac{a^2}{a^2-b^2}f(x)-\frac{ab}{a^2-b^2}f(-x)+\frac{ba}{a^2-b^2}f(-x)-\frac{b^2}{a^2-b^2}f(x)=f(x),$$

т. е. функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Далее для точек $x\in\partial\Omega_m$ из граничного условия (11) имеем

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m}=\frac{a}{a^2-b^2}\left.\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m}+\frac{b}{a^2-b^2}\left.\frac{\partial v(-x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m}=\frac{a}{a^2-b^2}h(x)+\frac{b}{a^2-b^2}h(-x)=$$
$$=\frac{a}{a^2-b^2}\left[ag(x)-bg(-x)\right]+\frac{b}{a^2-b^2}\left[ag(-x)-bg(x)\right]=g(x).$$

Аналогично для точек $x\in\Gamma$, используя условие (12), получим

$$\left.u(x)\right|_{\Gamma}=\frac{a}{a^2-b^2}\left.v(x)\right|_{\Gamma}-\frac{b}{a^2-b^2}\left.v(-x)\right|_{\Gamma}=\frac{a}{a^2-b^2}\psi(x)-\frac{b}{a^2-b^2}\psi(-x)=$$
$$=\frac{a}{a^2-b^2}\left[a\phi(x)+b\phi(-x)\right]-\frac{b}{a^2-b^2}\left[a\phi(-x)+b\phi(x)\right]=\phi(x).$$

Далее, так как $v(x)\in C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar\Omega_m\right)$, то $v(-x)\in C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar\Omega_m\right)$, и поэтому функция $u(x)$ из равенства (15) также принадлежит классу $v(x)\in C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar\Omega_m\right)$. Теорема доказана.

Следующее утверждение показывает, что полученный в теореме 5 показатель гладкости решения задачи 1 нельзя улучшить.

Теорема 6. Пусть $a\neq\pm b,\ f(x),\phi(x)=0,\ \lambda>0$, причем число $\lambda+\frac{1}{m}$ нецелое. Тогда существует функция $g(x)\in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$ такая, что решение задачи 1 при любом $\varepsilon>0$ не принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}+\varepsilon}\left(\bar\Omega_m\right)$.

Доказательство. Пусть $\phi(x)\equiv 0$. Тогда $\psi(x)=a\phi(-x)+b\phi(x)\equiv 0$. В задаче 1 выберем функцию $g(x)\in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$ таким образом, чтобы решение этой задачи для любого $\varepsilon>0$ не принадлежало классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\bar\Omega_m\right)$ (по теореме 2 такая функция существует). Тогда функция $u(x)$, построенная по формуле (15), является гармонической, удовлетворяет краевым условиям (2),(3), принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar\Omega_m\right)$ и $u(x)\notin C^{\lambda+\frac{1}{m}+\varepsilon}\left(\bar\Omega_m\right)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $a\neq\pm b, f(x)=0, 0<\lambda<1$ и $\phi(x)\in C^{\lambda+1}(\Gamma)$. Предположим, что $g(x)=x_n^{m-1}\times$ $\times g_0(x)$, где $g_0(x)\in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$. Тогда существует решение задачи 1, принадлежащее классу $C^{\lambda+1}\left(\bar\Omega_m\right)$.

3. Исследования задачи 2

Переходим к изучению задачи 2. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $a\neq\pm b$. Если решение задачи 2 существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что $u(x)$ — решение однородной задачи 2. Обозначим $v(x)=$ $=au(x)-bu(-x), x\in\Omega_m$. Очевидно, что функция $v(x)$ гармоническая в области Ω_m и $\left.v(x)\right|_{\Gamma}=\left.au(x)\right|_{\Gamma}-$ $-\left.bu(-x)\right|_{\Gamma}=0$. Далее, так как $\frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}\overset{def}{\equiv}I_S\frac{\partial}{\partial x_n}u(x)=-\frac{\partial}{\partial x_n}I_Su(x)$, то

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_n} = a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} - b\frac{\partial}{\partial x_n}I_S u(x) = a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + b\frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}. \tag{16}$$

Тогда из однородного краевого условия (5) следует

$$\left.\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + b\left.\frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = 0.$$

Итак, если $u(x)$ — решение однородной задачи 2, то функция $v(x) = au(x) - bu(-x), x \in \Omega_m$ будет решением однородной задачи (10),(11). В силу утверждения теоремы 1 решение этой задачи единственно, и, следовательно, $v(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m$. Отсюда

$$au(x) - bu(-x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m, au(-x) - bu(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m.$$

Из последней системы следует $\left(a^2 - b^2\right)u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m$. Тогда, если выполняется условие $a \neq \pm b$, то $u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}_m$. Теорема доказана.

Теперь переходим к исследованию существования и гладкости решения задачи 2. Справедливо утверждение.

Теорема 9. Пусть $a \neq \pm b$, $\lambda > 1 - \frac{1}{m}$, причем число $\lambda + \frac{1}{m}$ нецелое, $f(x) \in C^{\lambda + \frac{1}{m} - 1}\left(\bar{\Omega}_m\right)$, $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$, $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$. Тогда решение задачи 2 существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — решение задачи 2. Обозначим $v(x) = au(x) - bu(-x)$, $x \in \Omega_m$. Тогда с учетом равенства (16) для функции $v(x)$ получаем краевую задачу

$$\Delta v(x) = af(x) - bf(-x), \quad x \in \Omega_m, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = g(x), \tag{18}$$

$$v(x)\Big|_{\Gamma} = a\phi(x) - b\phi(-x) \equiv \psi(x). \tag{19}$$

Решение задачи (17)–(19) будем искать в виде $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$, где функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ являются решениями следующих задач:

$$\Delta v_1(x) = f(x), \quad x \in \Omega_m, v_1(x)|_{\partial\Omega_m} = 0, \tag{20}$$

$$\Delta v_2(x) = 0, \quad x \in \Omega_m; \left.\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = g(x) - \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n}, v_2(x)\Big|_{\Gamma} = \psi(x), \tag{21}$$

По условию теоремы $f(x) \in C^{\lambda+\frac{1}{m}-1}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Тогда решение задачи (20) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}+1}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Следовательно, $\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \in C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Далее, если $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma), g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$, то $\psi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$, а функция $g(x) - \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n}$, по крайней мере, принадлежит классу $C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$. Тогда по теореме 1 решение задачи (21) существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$.

Значит, функция $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ удовлетворяет условиям задачи (10)–(12) и, по крайней мере, принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. В равенстве $v(x) = au(x) - bu(-x)$, $x \in \Omega_m$, меняя x на $-x$, получим, $v(-x) = au(-x) - bu(x)$. Отсюда, если $a \neq \pm b$, то

$$u(x) = \frac{a}{a^2 - b^2}v(x) + \frac{b}{a^2 - b^2}v(-x), x \in \bar{\Omega}_m. \tag{22}$$

Покажем, что если функция $v(x)$ является решением задачи (17)–(19), то при выполнении условии $a \neq \pm b$ функция $u(x)$ из (22) удовлетворяет всем условиям задачи 2. Действительно, применяя к равенству (22) оператор Δ, для точек $x \in \Omega_m$ имеем

$$\Delta u(x) = \frac{a}{a^2 - b^2}\Delta v(x) + \frac{b}{a^2 - b^2}\Delta v(-x) =$$

$$= \frac{a}{a^2 - b^2}\left[af(x) - bf(-x)\right] + \frac{b}{a^2 - b^2}\left[af(-x) - bf(x)\right] =$$

$$= \frac{a^2 f(x)}{a^2 - b^2} - \frac{b^2 f(x)}{a^2 - b^2} = f(x).$$

Значит, функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (4). Далее для точек $x \in \partial\Omega_m$ из граничного условия (18) имеем

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = \frac{a}{a^2-b^2}\left.\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} - \frac{b}{a^2-b^2}\left.\frac{\partial v(-x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = \frac{a}{a^2-b^2}g(x) - \frac{b}{a^2-b^2}g(-x).$$

Меняя в последнем равенстве x на $-x$, получим

$$\left.\frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = \frac{a}{a^2-b^2}g(-x) - \frac{b}{a^2-b^2}g(x).$$

Тогда

$$a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + b\left.\frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = \frac{a^2}{a^2-b^2}g(x) - \frac{ab}{a^2-b^2}g(-x) + \frac{ab}{a^2-b^2}g(-x) - \frac{b^2}{a^2-b^2}g(x) =$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}g(x) = g(x).$$

Аналогично для точек $x \in \Gamma$, используя условие (19), получим

$$u(x)\Big|_{\Gamma} = \frac{a}{a^2-b^2}v(x)\Big|_{\Gamma} + \frac{b}{a^2-b^2}v(-x)\Big|_{\Gamma} = \frac{a}{a^2-b^2}\psi(x) + \frac{b}{a^2-b^2}\psi(-x) =$$

$$= \frac{a}{a^2-b^2}\left[a\phi(x) - b\phi(-x)\right] + \frac{b}{a^2-b^2}\left[a\phi(-x) - b\phi(x)\right] = \phi(x).$$

Далее, так как $v(x) \in C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$, то $v(-x) \in C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$, и поэтому функция $u(x)$ из равенства (22) также принадлежит классу $v(x) \in C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Теорема доказана.

Покажем, что показатель гладкости решения задачи 2, полученный в теореме 9, нельзя улучшить. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. Пусть $f(x) = 0, \lambda > 0$, причем число $\lambda + \frac{1}{m}$ нецелое. Существует функция $g(x) \in$ $\in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$ такая, что решение задачи 2 при любом $\varepsilon > 0$ не принадлежит классу $C^{\lambda+1/m+\varepsilon}(\bar{\Omega}_m)$.

Доказательство. Предположим, что функция $v(\tilde{x})$ является решением задачи

$$\Delta v(\tilde{x}) = 0, |x| < 1;\ v(\tilde{x})|_{\Gamma} = \phi(\tilde{x}). \tag{23}$$

Выберем функцию $\phi(\tilde{x}) \in C^{\lambda}(\Gamma)$ так, чтобы $v(\tilde{x}) \in C^{\lambda}(|x| \leqslant 1)$ и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие $v(\tilde{x}) \notin C^{\lambda+\varepsilon}(|x| \leqslant 1)$. Далее, если рассмотрим функцию $u(x) = x_n v(\tilde{x})$, то она будет удовлетворять условиям следующей задачи:

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega_m;\ \ \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = \phi,\ u(x)\Big|_{\Gamma} = 0.$$

В силу утверждения теоремы 3 при выборе такой функции $v(\tilde{x})$ функция $u(x)$ принадлежит классу $C^{\lambda+1/m}(\bar{\Omega}_m)$ и $u(x) \notin C^{\lambda+1/m+\varepsilon}(\bar{\Omega}_m), \varepsilon > 0$.

Далее имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = v(\tilde{x}), \frac{\partial u(-x)}{\partial x_n} = v(-\tilde{x}).$$

Тогда

$$a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + b\frac{\partial u(-x)}{\partial x_n} = av(\tilde{x}) + bv(-\tilde{x})\Big|_{\Gamma} = a\phi(\tilde{x}) + b\phi(-\tilde{x}) \equiv g(x).$$

Таким образом, функция $u(x) = x_n v(\tilde{x})$ принадлежит классу $C^{\lambda+1/m}(\bar{\Omega}_m)$ и $u(x) \notin C^{\lambda+1/m+\varepsilon}(\bar{\Omega}), \varepsilon > 0$, а также удовлетворяет условиям

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega;\ a\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + b\left.\frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega} = g(x),\ u(x)\Big|_{\Gamma} = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если в задаче 2 выполняется один из условий $a = \pm b$, то можно показать, что однородная задача имеют ненулевые решения. Например, если рассмотрим функцию $u\left(x\right) = x_n v\left(\tilde{x}\right)$, где $v\left(\tilde{x}\right)$ — решение задачи (23), то $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega; u(x)\Big|_{\Gamma} = 0$. Если функция $v\left(\tilde{x}\right)$ дополнительно обладает свойством четности $v\left(\tilde{x}\right) = v\left(-\tilde{x}\right)$ или нечетности $v\left(-\tilde{x}\right) = -v\left(\tilde{x}\right)$, то функция $u\left(x\right) = x_n v\left(\tilde{x}\right)$ будет удовлетворять граничному условию

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} - \frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = 0, a = -b$$

или

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(-x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_m} = 0, a = b.$$

Литература

[1] Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresse Zurich. 1932. Vol. 1. P. 132–151. URL: https://studylibfr.com/doc/1054399/sur-la-th%C3%A9orie-des-%C3%A9quations-int%C3%A9grales-et-ses-applications.

[2] Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators. Boston: Birkhäuser, 2001. 427 p. DOI: http://doi.org/10.1007/978-1-4612-0183-0

[3] Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. Москва: Наука, 1977. 448 с. URL: https://booksee.org/book/578151.

[4] Андреев А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 8. С. 1126–1128. URL: http://www.mathnet.ru/links/84f04cf1cbc2cfa20e42c2d0e4da812c/de11126.pdf.

[5] Андреев А.А., Огородников Е.Н. К постановке и обоснованию корректности начальной краевой задачи для одного класса нелокальных вырождающихся уравнений гиперболического типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физико-математические науки. 2006. № 43. С. 44–51. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu452.

[6] Баскаков А.Г., Ускова Н.Б. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10, № 3. С. 11–34. URL: http://www.mathnet.ru/links/a8d354bb845125c6ec03b3fef20e3a6c/ufa433.pdf.

[7] Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Доклады Академии наук. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154. URL: https://istina.ipmnet.ru/publications/article/224014071/

[8] Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, №. 4. С. 3–12. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-4-3-12.

[9] Линьков А.В. Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 1999. Т. 12, № 2. С. 60–65. URL: https://studylib.ru/doc/2719636/obosnovanie-metoda-fur._e-dlya-kraevyh-zadach-s-involyutivnym.

[10] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740. URL: http://www.mathnet.ru/links/082eaf65360bc8ae00527123d59756ba/dan34529.pdf.

[11] Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132. URL: http://www.mathnet.ru/links/729dedc4db3fb10a104bedd2e96a4e1a/cmfd116.pdf.

[12] Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. II // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 33. С. 3–179. URL: http://www.mathnet.ru/links/27bb7dc74e7aa9bc0c9b560f7070f6a3/cmfd133.pdf

[13] Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation // Turkish Journal of Mathematics. 2019. Vol. 43, No. 3. P. 1604–1625. DOI: http://doi.org/10.3906/mat-1901-71.

[14] Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. 2020. Vol. 50, № 1. P. 67–88. DOI: http://doi.org/10.30755/NSJOM.08942.

[15] Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentationes Mathematicae. 1974. Vol. 17. P. 451–457. URL: http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.ojs-doi-10_14708_cm_v17i2_5790/c/5790-5331.pdf.

[16] Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation // Kazakh Mathematical Journal. 2019. Vol. 19, № 1. P. 39–49. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39528389.

[17] Алимов Ш.А. Об одной задаче с наклонной производной // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1738–1751. URL: http://www.mathnet.ru/links/13fbcb22f29f7e709f94c414c81ba104/de4370.pdf.

[18] Алимов Ш.А. Об одной краевой задаче // Доклады АН СССР. 1980. Т. 252, № 5. С. 1033–1034.

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-3-7-16

Submited: 13.03.2020
Revised: 27.03.2020
Accepted: 25.05.2020

K.Zh. Nazarova
Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
E-mail: gjnazarova@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879
B.Kh. Turmetov
Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
E-mail: turmetovbh@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7735-6484
K.I. Usmanov
Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
E-mail: y_kairat@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1377-4633

ON THE SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INVOLUTION[2]

ABSTRACT

This article is devoted to the study of the solvability of some boundary value problems with involution. In the space R^n, the map $Sx = -x$ is introduced. Using this mapping, a nonlocal analogue of the Laplace operator is introduced, as well as a boundary operator with an inclined derivative. Boundary-value problems are studied that generalize the well-known problem with an inclined derivative. Theorems on the existence and uniqueness of the solution of the problems under study are proved. In the Helder class, the smoothness of the solution is also studied. Using well-known statements about solutions of a boundary value problem with an inclined derivative for the classical Poisson equation, exact orders of smoothness of a solution to the problem under study are found.

Key words: involution, nonlocal equation, nonlocal problem, oblique derivative, Poisson equation, smoothness, existence, uniqueness.

Citation. Nazarova K.Zh., Turmetov B.Kh., Usmanov K.I. On the solvability of some boundary value problems with involution. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 7–16. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-7-16. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Nazarova Kulzina Zharkimbekovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, 29, B. Sattarkhanov Avenue, Turkistan, 161200, Kazakhstan.

Turmetov Batirkhan Khudaibergenovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematics, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, 29, B. Sattarkhanov Avenue, Turkistan, 161200, Kazakhstan.

Usmanov Kairat Idrisovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, 29, B. Sattarkhanov Avenue, Turkistan, 161200, Kazakhstan.

References

[1] Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications. *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresse Zurich*, 1932, vol. 1, pp. 132–151. Available at: https://studylibfr.com/doc/1054399/sur-la-th%C3%A9orie-des-%C3%A9quations-int%C3%A9grales-et-ses-applications.

[2]The work is carried out with financial support from the grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakstan, grant № AP08855810.

[2] Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators. Boston: Birkh?user, 2001, 427 p. DOI: http://doi.org/10.1007/978-1-4612-0183-0.

[3] Litvinchuk G.S. Boundary value problems and singular integral equations with shift. Moscow: Nauka, 1977, 448 p. Available at: https://booksee.org/book/578151. (In Russ.)

[4] Andreev A.A. Analogs of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, pp. 1192–1194. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f (In Russ.)

[5] Andreev A.A., Ogorodnikov E.N. On the formulation and substantiation of the well-posedness of the initial boundary value problem for a class of nonlocal degenerate equations of hyperbolic type. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriia "Fiziko-matematicheskie nauki"* [*Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*], 2006, no. 43, pp. 44–51. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu452. (In Russ.)

[6] Baskakov A.G., Uskova N.B. Fourier method for first order differential equations with involution and groups of operators. *Ufimskii matematicheskii zhurnal* [*Ufa Mathematical Journal*], 2018, vol. 10, no. 3, pp. 11–34. DOI: http://dx.doi.org/10.13108/2018-10-3-11. (In Russ.)

[7] Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Classical solution of a mixed problem with involution. *Doklady Mathematics*], 2010, vol. 82, pp. 865–868. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562410060074. (In Russ.)

[8] Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Substantiation of Fourier method in mixed problem with involution. *Izvestiia Saratovskogo universiteta. Novaia seriia. Seriia Matematika. Mekhanika. Informatika* [*Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*], 2011, vol. 11, no. 4, pp. 3–12. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-4-3-12. (In Russ.)

[9] Linkov A.V. Substantiation of a method the Fourier for boundary value problems with an involute deviation. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [*Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*], 1999, vol. 12, no. 2, pp. 60–65. Available at: https://studylib.ru/doc/2719636/obosnovanie-metoda-fur._e-dlya-kraevyh-zadach-s-involyutivnym. (In Russ.)

[10] Bitsadze A.V., Samarskii A.A. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, vol. 185, no. 4, pp. 739–740. Available at: http://www.mathnet.ru/links/082eaf65360bc8ae00527123d59756ba/dan34529.pdf. (In Russ.)

[11] Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary value problems. I. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 155, article number: 199. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-008-9218-9.

[12] Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary value problems. II. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 166, no. 4, pp. 377–561.

[13] Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation. *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, no. 3, pp. 1604–1625. DOI: http://doi.org/10.3906/mat-1901-71.

[14] Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 2020, vol. 50, no. 1, pp. 67–88. DOI: http://doi.org/10.30755/NSJOM.08942.

[15] Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument. *Commentationes Mathematicae*, 1974, vol. 17, no. 2, pp. 451–457. Available at: http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.ojs-doi-10_14708_cm_v17i2_5790/c/5790-5331.pdf.

[16] Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation. *Kazakh Mathematical Journal*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 39–49. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39528389.

[17] Alimov Sh.A. On a problem with an oblique derivative. *Differentsial'nye upravleniia* [*Differential Equations*], 1981, vol. 17, no. 10, pp. 1738–1751. Available at: http://www.mathnet.ru/links/13fbcb22f29f7e709f94c414c81ba104/de4370.pdf. (In Russ.)

[18] Alimov Sh.A. On a boundary value problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [*Doklady Mathematics*], 1980, vol. 252, no. 5, pp. 1033–1034. (In Russ.)