Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69

УДК 534.113

Дата: поступления статьи: 15.01.2020
после рецензирования: 30.01.2020
принятия статьи: 25.05.2020

Е.Н. Элекина

Самарский государственный технический университет
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: elekina-e1@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9516-7644>

Е.С. Вронская

Самарский государственный технический университет
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: es.vronskaja@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1304-0138>

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ МОНОСИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ

АННОТАЦИЯ

В статье приводится аналитическое решение динамической задачи для тонкостенного упругого стержня, поперечное сечение которого имеет одну ось симметрии. Решение построено для произвольной динамической нагрузки и двух типов граничных условий: шарнирного опирания при стесненном кручении и свободной деформации концевых сечений стержня; жесткого закрепления при стесненном кручении и отсутствии деформации. Особенность математической модели заключается в том, что дифференциальные уравнения движения содержат полную систему инерционных членов. Эффективным приемом решения линейных нестационарных задач механики представляются спектральные разложения, получаемые в результате применения метода интегральных преобразований. Используется структурный алгоритм метода конечных многокомпонентных интегральных преобразований, предложенный Ю.Э. Сеницким

Ключевые слова: тонкостенный стержень, симметричный профиль, краевая задача, динамическая нагрузка, собственные колебания, собственная частота колебаний, вынужденные колебания, интегральные преобразования.

Цитирование. Элекина Е.Н., Вронская Е.С. Динамическая задача для тонкостенного стержня моносимметричного профиля // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 63–69. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © Элекина Елена Николаевна — старший преподаватель кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

© Вронская Елена Сергеевна — кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Введение

Тонкостенные стержни широко применяются в качестве конструктивных элементов, поэтому задачи о колебаниях и устойчивости стержневых систем возникают в различных областях техники [1]. Большое число работ посвящено выводу и уточнению уравнений, описывающих движения, их анализу и способам решения [2–5]. Эффективный прием решения линейных нестационарных задач механики представляют спектральные разложения, получаемые в результате применения метода интегральных преобразований с конечными пределами (КИП) [6; 7].

1. Постановка задачи

Пусть тонкостенный стержень моносимметричного профиля (x -ось симметрии поперечника) подвержен действию произвольной динамической нагрузки $q(z, t)$, приложенной с эксцентриситетом $(e + a_x)$ относительно центра изгиба. При этом стержень будет совершать изгибно-крутильные колебания, описываемые связанной системой дифференциальных уравнений движения [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} + a^2 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} + a^2 a_x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= -q \frac{1}{EI_x}, \\ \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} - k^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + (c^2 + n^2 a_x^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + n^2 a_x^2 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} &= -q \frac{e + a_x}{EI_x}, \\ a^2 &= \frac{\rho A}{EI_x}, \quad n^2 = a^2 \frac{I_x}{I_\omega}, \quad k^2 = \frac{GI_\alpha}{EI_\omega}, \quad c^2 = \frac{\rho I_\rho}{EI_\omega}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $U_c(z, t)$, $\Theta(z, t)$ — искомые функции линейных перемещений и углов закручивания, $(e + a_x)$ — эксцентриситет приложения нагрузки относительно центра изгиба, A — площадь поперечного сечения; I_x , I_α , I_ρ , I_ω — соответственно моменты инерции: осевой, при чистом кручении, полярный, секториальный. Далее рассматривается общий случай начальных условий, когда считаются известными начальные перемещения и скорости перемещений:

$$U_c(z, 0) = U_0(z), \quad \frac{\partial U_c}{\partial t} = \dot{U}_0(z), \quad \Theta(z, 0) = \Theta_0(z), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0(z). \quad (1.2)$$

Исследуются два случая граничных условий, а именно шарнирное опирание при стесненном кручении и свободной деформации концевых сечений стержня:

$$\begin{aligned} U_c(z, t) &= \frac{\partial^2 U_c(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=0, l} = 0, \\ \Theta(z, t) &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \Big|_{z=0, l} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и жесткое закрепление стержня при стесненном кручении и отсутствии деформации:

$$U_c(z, t) = \frac{\partial U_c}{\partial z} \Big|_{z=0, l} = 0, \quad \Theta(z, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=0, l} = 0. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1)–(1.4) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи. Уравнения (1.1) удобнее представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} + I_1 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= -\frac{q}{\rho A}, \\ \frac{1}{n^2} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} - \frac{k^2}{n^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + I_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} &= -\frac{q(e + a_x)}{\rho A}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{c^2}{n^2} + a_x^2 = \frac{a^2}{k^2} + I_3^2, \quad I_3 = a_x.$$

Особенность математической модели (1.2)–(1.5) заключается в том, что дифференциальные уравнения движения (1.5) содержат полную систему инерционных членов. Это определяет специфику дальнейшего решения задачи методом КИП.

2. Решение динамической задачи для стержня

Вводим на сегменте $[0, l]$ многокомпонентное КИП [6]. Имеем

$$\begin{aligned} F(\lambda_i, t) &= \int_0^l \left\{ \left[U_c(z, t) K_1(\lambda_i, z) + I_2 \Theta(z, t) K_2(\lambda_i, z) \right] + \right. \\ &\quad \left. + I_3 \left[U_c(z, t) K_2(\lambda_i, z) + \Theta(z, t) K_1(\lambda_i, z) \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U_c(z, t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} F(\lambda_i, t) K_1(\lambda_i, z)}{\|K_1\|^2}; \quad \Theta(z, t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} F(\lambda_i, t) K_2(\lambda_i, z)}{\|K_2\|^2}. \quad (2.2)$$

Здесь $\{K_1, K_2\}$, $F(\lambda_i, t)$ — определяемые в процессе решения компоненты вектор-функции ядра и трансформанта преобразования (2.1), (2.2), а λ_i — положительные параметры, образующие счетное

множество $i = \overline{1, \infty}$. Равенство (2.1) представляет прямое преобразование, а (2.2) — формулы обращения, которые справедливы при таком обобщенном соотношении ортогональности [6]:

$$\int_0^l \left\{ K_1(\lambda_i, z) K_1(\lambda_j, z) + I_2 K_2(\lambda_i, z) K_2(\lambda_j, z) + \right. \\ \left. + I_3 [K_1(\lambda_i, z) K_2(\lambda_j, z) + K_2(\lambda_i, z) K_1(\lambda_j, z)] \right\} dz = \delta_{ij} \|K_i\|^2, \quad (2.3)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_0^l [K_1^2(\lambda_i, z) + I_2 K_2^2(\lambda_i, z) + 2I_3 K_1(\lambda_i, z) K_2(\lambda_i, z)] dz. \quad (2.4)$$

Выражение (2.3) отличается от известного соотношения ортогональности [9] наличием второстепенных членов (последние слагаемые левой части (2.3)). Следует отметить, что при условии ограниченности трансформанты $F(\lambda_i, t)$, $i = \overline{1, \infty}$ обеспечиваются единственность и среднеквадратичная сходимость разложений (2.2) [7]. Применяем к системе дифференциальных уравнений (1.5) и начальным условиям (1.2) многокомпонентное КИП по пространственной переменной z . Для этой цели умножим первое уравнение (1.5) на $K_1(\lambda_i, z) dz$ и второе соответственно на $K_2(\lambda_i, z) dz$ и проинтегрируем в интервале $[0, l]$. Имеем:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^l \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} K_1 dz + I_1 \int_0^l \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} K_1 dz + I_3 \int_0^l \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} K_1 dz = -\frac{1}{\rho A} \int_0^l q K_1 dz, \\ \frac{1}{n^2} \int_0^l \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} K_2 dz - \frac{k^2}{n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2 dz + I_2 \int_0^l \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2 dz + \\ + I_3 \int_0^l \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} K_2 dz = -\frac{(e + a_x)}{\rho A} \int_0^l q K_2 dz. \quad (2.5)$$

Одновременно аналогичную тождественную процедуру осуществляем по отношению к равенствам (1.2). При $t = 0$:

$$I_1 \int_0^l U_c(z, 0) K_1 dz = I_1 \int_0^l U_0(z) K_1 dz, \\ I_2 \int_0^l \Theta(z, 0) K_2 dz = I_2 \int_0^l \Theta_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l U_c(z, 0) K_2 dz = I_3 \int_0^l U_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l \Theta(z, 0) K_1 dz = I_3 \int_0^l \Theta_0(z) K_1 dz. \quad (2.6)$$

Соответственно

$$I_1 \int_0^l \frac{d}{dt} U_c(z, 0) K_1 dz = I_1 \int_0^l \dot{U}_0(z) K_1 dz, \\ I_2 \int_0^l \frac{d}{dt} \Theta(z, 0) K_2 dz = I_2 \int_0^l \dot{\Theta}_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l \frac{d}{dt} U_c(z, 0) K_2 dz = I_3 \int_0^l \dot{U}_0(z) K_2 dz, \\ I_3 \int_0^l \frac{d}{dt} \Theta(z, 0) K_1 dz = I_3 \int_0^l \dot{\Theta}_0(z) K_1 dz. \quad (2.7)$$

Складывая уравнения (2.5), а также равенства (2.6) и (2.7) находим

$$\int_0^l \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4} K_1 + \left(\frac{1}{n^2} I_1 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z^4} - \frac{k^2}{n^2} \right) K_2 \right] dz + \\ + \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (U_c K_2 + \Theta K_1)] dz = \\ = - \int_0^l \frac{\ddot{q}}{\rho A} [K_1 + (e + a_x) K_2] dz, \quad (2.8)$$

$$\int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (U_c K_2 + \Theta K_1)] dz = \int_0^l [I_1 U_0 K_1 + I_2 \Theta_0 K_2 + I_3 (U_0 K_2 + \Theta_0 K_1)] dz, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (U_c K_2 + \Theta K_1)] dz = \int_0^l [I_1 \dot{U}_0 K_1 + I_2 \dot{\Theta}_0 K_2 + I_3 (\dot{U}_0 K_2 + \dot{\Theta}_0 K_1)] dz. \quad (2.10)$$

Интегрируя по частям члены, содержащие производные по z в полученном равенстве, и имея в виду обозначение трансформанты (2.1), получим:

$$\Phi(U_c, \Theta, K_1, K_2)|_0^l + \int_0^l \left[\frac{1}{a^2} U_c K_1^{IV} + \frac{1}{n^2} \Theta K_2^{IV} - \frac{k^2}{n^2} K_2'' \right] dz + \frac{d^2}{dt^2} F(\lambda_i, t) = \frac{1}{\rho A} P(\lambda_i, t), \quad (2.11)$$

где $P(\lambda_i, t)$ — трансформанта нагрузки, а штрих обозначает дифференцирование по z .

$$P(\lambda_i, t) = \int_0^l q(z, t) [K_1(\lambda_i, z) + (e + a_x) K_2(\lambda_i, z)] dz,$$

$$\begin{aligned} \Phi(U_c, \Theta, K_1, K_2) = & \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3} K_1 - \frac{\partial^2 U_c}{\partial z^2} K_1' + \frac{\partial U_c}{\partial z} K_1'' - U_c K_1''' \right) + \\ & + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial z^3} K_2 - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2' + \frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2'' - \Theta K_2''' \right) - \frac{k^2}{n^2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2 - \Theta K_2' \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Используем два условия структурного алгоритма метода конечных интегральных преобразований [9]

$$\Phi(U_c, \Theta, K_1, K_2) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{a^2} \int_0^l \left[U_c K_1^{IV} + \frac{a^2}{n^2} \Theta (K_2^{IV} - k^2 K_2'') \right] dz = \frac{\lambda_i^4}{a^2} \int_0^l [I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (\Theta K_1 + U_c K_2)] dz. \quad (2.14)$$

Равенство (2.13) представляет обращение в нуль полилинейной формы (2.12) на концах интервала $[0, l]$, а (2.14) — операционное свойство. С учетом (2.13), (2.14) дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 F(\lambda_i, t)}{dt^2} + \omega_i^2 F(\lambda_i, t) = \frac{1}{\rho A} P(\lambda_i, t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (2.15)$$

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{a} = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}}.$$

Здесь ω_i представляют круговые частоты собственных совместных изгибно-крутильных колебаний стержня. Имея в виду обозначения, введенные в (1.1) для a , n , круговые частоты собственных совместных изгибно-крутильных колебаний стержня могут быть определены также по тождественной формуле:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{a} \sqrt{\frac{I_x}{I_\omega}}, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (2.16)$$

Очевидно, что равенства (2.9), (2.10) представляют начальные условия для трансформанты $F(\lambda_i, t)$

$$F(\lambda_i, 0) = F_0(\lambda_i), \quad \frac{d}{dt} F(\lambda_i, t) = \dot{F}(\lambda_i). \quad (2.17)$$

Таким образом, для трансформанты сформировалась задача Коши (2.15), (2.17). Для произвольной правой части (функции $P(\lambda_i, t)$) неоднородного дифференциального уравнения (2.15) разыскивая его частное решение методом вариации произвольных постоянных, находим:

$$F(\lambda_i, t) = F(\lambda_i) \cos \omega_i t + \dot{F}(\lambda_i) \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i} - \frac{1}{\rho A \omega_i} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Возвращаясь к условиям (2.13), (2.14), сформулируем краевую задачу для компонентов K_1 , K_2 ядра многокомпонентного конечного интегрального преобразования (2.1), (2.2). Из операционного свойства (2.14) следует такое соотношение:

$$\frac{U_c}{a^2} [K_1^{IV} - \lambda_i^4 (K_1 + a_x K_2)] + \Theta \left\{ \frac{1}{n^2} K_2^{IV} + \frac{k^2}{n^2} K_2'' - \frac{\lambda_i^4}{a^2} \left[\left(\frac{c^2}{n^2} + a_x^2 \right) K_2 + a_x K_1 \right] \right\} = 0. \quad (2.19)$$

Поскольку $U_c(z, t)$, $\Theta(z, t)$ — независимые функции, то из последнего равенства получаем однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для K_1 , K_2 . Имеем

$$K_1^{IV} - \lambda_i^4 K_1 - \lambda_i^4 a_x K_2 = 0, \quad \frac{1}{n^2} K_2^{IV} - \frac{1}{n^2} k^2 K_2'' - \lambda_i^4 \frac{1}{a^2} \left[\left(\frac{c^2}{n^2} + a_x^2 \right) K_2 + a_x K_1 \right] = 0. \quad (2.20)$$

Воспользуемся соотношением (2.13), принимая во внимание первое уравнение системы (2.20), которое получено после умножения всех членов на a^2 , при этом учитывая выражение (2.12) и граничные условия (1.3) и (1.4). Равенство (2.13) для условий (1.3) и (1.4) записывается соответственно в следующем виде:

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3} K_1 + \frac{\partial U_c}{\partial z} \ddot{K}_1 \right) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial z^3} K_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \ddot{K}_2 \right) - \frac{k^2}{n^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2 = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3} K_1 - \frac{\partial^2 U_c}{\partial z^2} K_1' \right) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial z^3} K_2 - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2' \right) = 0. \quad (2.22)$$

Поскольку производные функций $U_c(z, t)$, $\Theta(z, t)$, содержащиеся в равенствах (2.21) и (2.22), не определены на концах интервала $[0, l]$, то (2.21) и (2.22) удовлетворяются, если выполняются такие граничные условия для K_1 , K_2 :

$$K_{1,2}(\lambda_i, z) |_{z=0, l} = K_{1,2}''(\lambda_i, 0) |_{z=0, l} = 0, \quad (2.23)$$

$$K_{1,2}(\lambda_i, z) |_{z=0, l} = K_{1,2}'(\lambda_i, 0) |_{z=0, l} = 0. \quad (2.24)$$

Замечание. Краевые условия (1.3) и (1.4) для искомых функций тождественны (2.23) и (2.24) для компонентов ядра преобразования, а при соответствиях $U_c \sim K_1$, $\Theta \sim K_2$, $\frac{d}{dt} \sim a^{-2} \lambda_i^4$ система уравнений (2.20) инвариантна левой части (1.5). Инвариантность этих систем относительно преобразования (2.1) и тождественность краевых условий указывает на самосопряженность рассматриваемой краевой задачи (1.2)–(1.5). Это значит, что выполняется условие обобщенной ортогональности (2.3) и справедливы формулы обращения (2.2) [9; 10].

Таким образом, в результате применения структурного алгоритма обобщенного метода конечных интегральных преобразований сформулирована однородная краевая задача на собственные значения для компонентов ядра K_1, K_2 интегрального преобразования (2.20), (2.23) или (2.24).

Выражая из второго уравнения (2.20)

$$K_1 = e_1 K_2^{IV} - e_2 K_2'' - e_3 K_2, \quad (2.25)$$

$$e_1 = a^2 (a_x n^2 \lambda_i^4)^{-1}, e_2 = k^2 a^2, e_3 = (a_x^2 + c^2 n^{-2}) a_x^{-1},$$

приходим к такому дифференциальному уравнению восьмого порядка

$$K_2^{VIII}(\lambda_i, z) - b_1 K_2^{VI}(\lambda_i, z) - b_2 K_2^{IV}(\lambda_i, z) + b_3 K_2^{II}(\lambda_i, z) + b_4 K_2(\lambda_i, z) = 0. \quad (2.26)$$

Здесь

$$b_1 = k^2, \quad b_2 = b_2^i = \lambda_i^4 (1 + c^2 a^{-2} + a_x^2 n^2 a^{-2}), \quad b_3 = b_3^i = \lambda_i^4 k^2, \quad b_4 = b_4^i = \lambda_i^8 c^2 a^{-2}.$$

Таким образом, компоненты ядра конечного интегрального преобразования $K_1(\lambda_i, z)$, $K_2(\lambda_i, z)$ являются компонентами собственной вектор-функции, а λ_i — собственными значениями однородной краевой задачи (2.25), (2.26), (2.23) или (2.24).

Определив корни $r_1, r_2, \dots, r_8$ соответствующего (2.26) характеристического уравнения

$$r^8 - b_1 r^6 - b_2 r^4 + b_3 r^2 + b_4 r = 0,$$

находим общие решения дифференциальных уравнений (2.25), (2.26):

$$K_2(\lambda_i, z) = \sum_{j=1}^8 (-e_1 r_k^4 - e_2 r_k^2 - e_3) C_{ij} \exp^{r_k z},$$

$$K_1(\lambda_i, z) = \sum_{j=1}^8 C_{ij} \exp^{r_k z}.$$

Располагая выражениями $K_1(\lambda_i, z)$, $K_2(\lambda_i, z)$ и их производными, после подстановки этих соотношений в граничные условия (2.23) или (2.24) получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i8}$. Разыскивая нетривиальные решения последней, приравняем определитель системы нулю. В результате получаем трансцендентное уравнение для определения параметров (собственных значений) λ_i , а затем из оставшихся семи уравнений находят постоянные $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i7}$, с точностью до константы C_{i8} . Принимая для нее подходящее выражение, получаем окончательно все восемь постоянных $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i8}$.

Таким образом, определив компоненты ядра преобразования $K_1(\lambda_i, z)$, $K_2(\lambda_i, z)$, собственные значения λ_i , а затем по формуле (2.16) круговые частоты, а также квадрат нормы ядровой функции (2.4), для принятого воздействия (закона $q(z, t)$) и заданных начальных и краевых условий (1.2), (1.3), (1.4) вычисляются интеграл Дюамеля и трансформанта (2.18). Располагая функцией $F(\lambda_i, t)$ по формуле обращения (2.2), определяются линейные перемещения и углы закручивания.

Выводы

Таким образом, в статье получено аналитическое решение динамической задачи для стержня при произвольных условиях его закрепления и загрузки с помощью многокомпонентного конечного интегрального преобразования.

Литература

- [1] Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. и перераб. Ленинград: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1976, 320 с. URL: <https://studizba.com/files/show/pdf/16226-1-panovko-ya-g-osnovy-prikladnoy-teorii.html>.
- [2] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным условием его закрепления на части границы // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2017. Т. 23. № 2. С. 7–14. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14>.
- [3] Богатов А.В. Задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 7–12. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12>.
- [4] Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р. Собственные изгибные колебания естественно закрученного стержня // Вестник УГАТУ. 2019. Т. 23. № 4(86). С. 33–41. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41827630>; <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/download/2888/2561/>.
- [5] Каган-Розенцвейг Л.М. Метод вычисления частот собственных колебаний упругих стержней прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1 (72). С. 61–66. DOI: <http://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-61-66>.
- [6] Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Известия вузов. Сер.: Математика. 1991. № 4. С. 27–63. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23476952>.
- [7] Сеницкий Ю.Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования // Известия вузов. Сер.: Математика. 1991. № 9. С. 53–56. URL: <http://www.mathnet.ru/links/0a26e96fecf70f1717b0b1df0cb8e472/ivm5150.pdf>.
- [8] Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1971. 380 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/9881>.
- [9] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: СГУ, 1985, 176 с.
- [10] Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований — обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 3(1). С. 61–98. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89>.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69

Submitted: 15.01.2020

Revised: 30.01.2020

Accepted: 25.05.2020

E.N. Elekina

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: elekina-el@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9516-7644>

E.S. Vronskaja

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: es.vronskaja@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1304-0138>

DYNAMIC PROBLEM FOR A THIN-WALLED BAR WITH A MONOSYMMETRIC PROFILE

ABSTRACT

The paper presents an analytical solution to the dynamic problem for a thin-walled elastic rod, the cross-section of which has one axis of symmetry. The solution is constructed for an arbitrary dynamic load and two types of boundary conditions: hinged support in constrained torsion and free warping of the end

sections of the rod; rigid fastening with constrained torsion and absence of warping. The peculiarity of the mathematical model lies in the fact that the differential equations of motion contain a complete system of inertial terms. Spectral expansions obtained as a result of using the method of integral transformations are represented as an effective method for solving linear non-stationary problems in mechanics. The structural algorithm of the method of finite multicomponent integral transformations proposed by Yu.E. Senitsky is used.

Key words: thin-walled bar, symmetric profile, boundary value problem, dynamic load, natural vibrations, natural vibration frequency, forced vibrations, integral transformations.

Citation. Elekina E.N., Vronskaja E.S. Dynamic problem for a thin-walled bar with a monosymmetric profile. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 63–69. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-63-69>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Elekina Elena Nikolaevna* — senior lecturer of the Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russian Federation.

© *Vronskaja Elena Sergeevna* — Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

- [1] Panovko Ia.G. Foundations of the applied theory of vibrations and impact. 3rd edition, enlarged and revised. Leningrad: «Mashinostroenie» (Leningr. otd-nie), 1976, 320 p. Available at: <https://studizba.com/files/show/pdf/16226-1-panovko-ya-g-osnovy-prikladnoy-teorii.html>. (In Russ.)
- [2] Beylin A.B., Pulkina L.S. A problem on vibration of a bar with unknown boundary condition on a part of the boundary. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 7–14. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14>. (In Russ.)
- [3] Bogatov A.V. Problem with an integral condition for one-dimensional hyperbolic equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 7–12. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12>. (In Russ.)
- [4] Pavlov V.P., Nusratullina L.R. Natural bending vibrations of naturally twisted rod. *Vestnik USATU*, 2019, vol. 23, no. 4 (86), pp. 33–41. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41827630>; <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/download/2888/2561/>.
- [5] Kagan-Rosenzweig L.M. The method for calculating the natural frequencies of elastic rods by application of direct integration of differential bending equation. *Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 1 (72), pp. 61–66. DOI: <http://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-61-66>. (In Russ.)
- [6] Senitskii Yu.E. A multicomponent generalized finite integral transformation and its application to nonstationary problems in mechanics. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1991, vol. 35, no. 4, pp. 55–61. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23476952>. (In Russ.)
- [7] Senitskii Yu.E. Convergence and uniqueness of representations defined by a formula for the inversion of a multicomponent generalized finite integral transformation. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1991, vol. 35, no. 9, pp. 52–54. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/0a26e96fecf70f1717b0b1df0cb8e472/ivm5150.pdf>. (In Russ.)
- [8] Vlasov V.Z. Thin-walled elastic rods. Moscow: Gos. izdat. fiz.-mat. literatury, 1971, 380 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/9881>. (In Russ.)
- [9] Senitskii Yu.E. Studying the elastic deformation of structural elements under dynamic loads using the finite transform method. Saratov: SGU, 1985, 176 p. Available at: <https://dwg.ru/lib/864>. (In Russ.)
- [10] Senitsky Yu.E. Finite integral transformations method: generalization of classic procedure for eigenvector decomposition. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, vol. 11, no. 3 (1), pp. 61–98. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89>. (In Russ.)