Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69

УДК 534.113

Дата: поступления статьи: 15.01.2020
после рецензирования: 30.01.2020
принятия статьи: 25.05.2020

Е.Н. Элекина
Самарский государственный технический университет
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: elekina-e1@yandex.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9516-7644
Е.С. Вронская
Самарский государственный технический университет
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: es.vronskaja@yandex.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1304-0138

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ МОНОСИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ

АННОТАЦИЯ

В статье приводится аналитическое решение динамической задачи для тонкостенного упругого стержня, поперечное сечение которого имеет одну ось симметрии. Решение построено для произвольной динамической нагрузки и двух типов граничных условий: шарнирного опирания при стесненном кручении и свободной депланации концевых сечений стержня; жесткого закрепления при стесненном кручении и отсутствии депланации. Особенность математической модели заключается в том, что дифференциальные уравнения движения содержат полную систему инерционных членов. Эффективным приемом решения линейных нестационарных задач механики представляются спектральные разложения, получаемые в результате применения метода интегральных преобразований. Используется структурный алгоритм метода конечных многокомпонентных интегральных преобразований, предложенный Ю.Э. Сеницким

Ключевые слова: тонкостенный стержень, симметричный профиль, краевая задача, динамическая нагрузка, собственные колебания, собственная частота колебаний, вынужденные колебания, интегральные преобразования.

Цитирование. Элекина Е.Н., Вронская Е.С. Динамическая задача для тонкостенного стержня моносимметричного профиля // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 63–69. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © *Элекина Елена Николаевна* — старший преподаватель кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

© *Вронская Елена Сергеевна* — кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Введение

Тонкостенные стрежни широко применяются в качестве конструктивных элементов, поэтому задачи о колебаниях и устойчивости стрежневых систем возникают в различных областях техники [1]. Большое число работ посвящено выводу и уточнению уравнений, описывающих движения, их анализу и способам решения [2–5]. Эффективный прием решения линейных нестационарных задач механики представляют спектральные разложения, получаемые в результате применения метода интегральных преобразований с конечными пределами (КИП) [6; 7].

1. Постановка задачи

Пусть тонкостенный стержень моносимметричного профиля (x-ось симметрии поперечника) подвержен действию произвольной динамической нагрузки $q(z,t)$, приложенной с эксцентриситетом $(e+a_x)$ относительно центра изгиба. При этом стержень будет совершать изгибно-крутильные колебания, описываемые связанной системой дифференциальных уравнений движения [8]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4}+a^2\frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2}+a^2 a_x\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=-q\frac{1}{EI_x},\\ \frac{\partial^4\Theta}{\partial z^4}-k^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}+(c^2+n^2{a_x}^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}+n^2{a_x}^2\frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2}=-q\frac{e+a_x}{EI_x},\\ a^2=\frac{\rho A}{EI_x},\ n^2=a^2\frac{I_x}{I_\omega},\ k^2=\frac{GI_\alpha}{EI_\omega},\ c^2=\frac{\rho I_\rho}{EI_\omega},\end{gathered}\tag{1.1}$$

где $U_c(z,t)$, $\Theta(z,t)$ — искомые функции линейных перемещений и углов закручивания, $(e+a_x)$ — эксцентриситет приложения нагрузки относительно центра изгиба, A — площадь поперечного сечения; I_x, I_α, I_ρ, I_ω — соответственнно моменты инерции: осевой, при чистом кручении, полярный, секториальный. Далее рассматривается общий случай начальных условий, когда считаются известными начальные перемещения и скорости перемещений:

$$U_c\left(z,0\right)=U_0\left(z\right),\quad \frac{\partial U_c}{\partial t}=\dot{U}_0\left(z\right),\qquad \Theta(z,0)=\Theta_0(z),\quad \frac{\partial\Theta}{\partial t}=\dot{\Theta}_0(z).\tag{1.2}$$

Исследуются два случая граничных условий, а именно шарнирное опирание при стесненном кручении и свободной депланации концевых сечений стержня:

$$\begin{gathered}U_c\left(z,t\right)=\frac{\partial^2 U_c\left(z,t\right)}{\partial z^2}\Big|_{z=0,l}=0,\\ \Theta\left(z,t\right)=\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\Big|_{z=0,l}=0,\end{gathered}\tag{1.3}$$

и жесткое закрепление стержня при стесненном кручении и отсутствии депланации:

$$U_c\left(z,t\right)=\frac{\partial U_c}{\partial z}\Big|_{z=0,l}=0,\Theta\left(z,t\right)=\frac{\partial\Theta}{\partial z}\Big|_{z=0,l}=0.\tag{1.4}$$

Соотношения (1.1)–(1.4) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи. Уравнения (1.1) удобнее представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{1}{a^2}\frac{\partial^4 U_c}{\partial z^4}+I_1\frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2}+I_3\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=-\frac{q}{\rho A},\\ \frac{1}{n^2}\frac{\partial^4\Theta}{\partial z^4}-\frac{k^2}{n^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}+I_2\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}+I_3\frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2}=-\frac{q(e+a_x)}{\rho A},\end{gathered}\tag{1.5}$$

где

$$I_1=1,I_2=\frac{c^2}{n^2}+{a_x}^2=\frac{a^2}{k^2}+{I_3}^2,\ \ I_3=a_x.$$

Особенность математической модели (1.2)–(1.5) заключается в том, что дифференциальные уравнения движения (1.5) содержат полную систему инерционных членов. Это определяет специфику дальнейшего решения задачи методом КИП.

2. Решение динамической задачи для стержня

Вводим на сегменте $[0,l]$ многокомпонентное КИП [6]. Имеем

$$\begin{gathered}F(\lambda_i,t)=\int_0^l\Big\{\Big[U_c\Big(z,t\Big)K_1\Big(\lambda_i,z\Big)+I_2\Theta(z,t)K_2\Big(\lambda_i,z\Big)\Big]+\\ +I_3\Big[U_c\Big(z,t\Big)K_2\Big(\lambda_i,z\Big)+\Theta(z,t)K_1\Big(\lambda_i,z\Big)\Big]dz,\end{gathered}\tag{2.1}$$

$$U_c\left(z,t\right)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}F\left(\lambda_i,t\right)K_1\left(\lambda_i,z\right)}{\parallel K_1\parallel^2};\quad \Theta(z,t)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}F\left(\lambda_i,t\right)K_2\left(\lambda_i,z\right)}{\parallel K_2\parallel^2}.\tag{2.2}$$

Здесь $\{K_1,K_2\}$, $F(\lambda_i,t)$ — определяемые в процессе решения компоненты вектор-функции ядра и трансформанта преобразования (2.1), (2.2), а λ_i — положительные параметры, образующие счетное множество $i=\overline{1,\infty}$. Равенство (2.1) представляет прямое преобразование, а (2.2) — формулы обращения, которые справедливы при таком обобщенном соотношении ортогональности [6]:

$$\begin{gathered}\int_0^l\Big\{K_1(\lambda_i,z)\,K_1(\lambda_j,z)+I_2K_2(\lambda_i,z)\,K_2(\lambda_j,z)+\\+I_3\left[K_1(\lambda_i,z)\,K_2(\lambda_j,z)+K_2(\lambda_i,z)\,K_1(\lambda_j,z)\right]\Big\}dz=\delta_{ij}\parallel K_i\parallel^2,\end{gathered}\tag{2.3}$$

$$\parallel K_i\parallel^2=\int_0^l\left[K_1^2(\lambda_i,z)+I_2K_2^2(\lambda_i,z)+2I_3K_1(\lambda_i,z)\,K_2(\lambda_i,z)\right]dz.\tag{2.4}$$

Выражение (2.3) отличается от известного соотношения ортогональности [9] наличием второстепенных членов (последние слагаемые левой части (2.3)). Следует отметить, что при условии ограниченности трансформанты $F(\lambda_i,t), i=\overline{1,\infty}$ обеспечиваются единственность и среднеквадратичная сходимость разложений (2.2) [7]. Применяем к системе дифференциальных уравнений (1.5) и начальным условиям (1.2) многокомпонентное КИП по пространственной переменной z. Для этой цели умножим первое уравнение (1.5) на $K_1(\lambda_i,z)\,dz$ и второе соответственно на $K_2(\lambda_i,z)\,dz$ и проинтегрируем в интервале $[0,l]$. Имеем:

$$\begin{gathered}\frac{1}{a^2}\int_0^l\frac{\partial^4U_c}{\partial z^4}K_1dz+I_1\int_0^l\frac{\partial^2U_c}{\partial t^2}K_1dz+I_3\int_0^l\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}K_1dz=-\frac{1}{\rho A}\int_0^l qK_1dz,\\ \frac{1}{n^2}\int_0^l\frac{\partial^4\Theta}{\partial z^4}K_2dz-\frac{k^2}{n^2}\int_0^l\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}K_2dz+I_2\int_0^l\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}K_2dz+\\+I_3\int_0^l\frac{\partial^2U_c}{\partial t^2}K_2dz=-\frac{(e+a_x)}{\rho A}\int_0^l qK_2dz.\end{gathered}\tag{2.5}$$

Одновременно аналогичную тождественную процедуру осуществляем по отношению к равенствам (1.2). При $t=0:$

$$\begin{aligned}I_1\int_0^l U_c(z,0)\,K_1dz&=I_1\int_0^l U_0(z)\,K_1dz,\\ I_2\int_0^l\Theta(z,0)\,K_2dz&=I_2\int_0^l\Theta_0(z)\,K_2dz,\\ I_3\int_0^l U_c(z,0)\,K_2dz&=I_3\int_0^l U_0(z)\,K_2dz,\\ I_3\int_0^l\Theta(z,0)\,K_1dz&=I_3\int_0^l\Theta_0(z)\,K_1dz.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Соответственно

$$\begin{aligned}I_1\int_0^l\frac{d}{dt}U_c(z,0)\,K_1dz&=I_1\int_0^l\dot U_0(z)\,K_1dz,\\ I_2\int_0^l\frac{d}{dt}\Theta(z,0)\,K_2dz&=I_2\int_0^l\dot\Theta_0(z)\,K_2dz,\\ I_3\int_0^l\frac{d}{dt}U_c(z,0)\,K_2dz&=I_3\int_0^l\dot U_0(z)\,K_2dz,\\ I_3\int_0^l\frac{d}{dt}\Theta(z,0)\,K_1dz&=I_3\int_0^l\dot\Theta_0(z)\,K_1dz.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Складывая уравнения (2.5), а также равенства (2.6) и (2.7) находим

$$\begin{gathered}\int_0^l\Big[\ \frac{1}{a^2}\frac{\partial^4U_c}{\partial z^4}K_1+\Big(\frac{1}{n^2}I_{\ 1}\frac{\partial^4\Theta}{\partial z^4}-\frac{k^2}{n^2}\Big)K_2\ \Big]dz+\\+\frac{d^2}{dt^2}\int_0^l\Big[I_1U_cK_1+I_2\Theta K_2+I_3\Big(U_cK_2+\Theta K_1\Big)\Big]dz=\\=-\int_0^l\frac{\ddot q}{\rho A}\Big[K_1+\Big(e+a_x\Big)K_2\Big]dz,\end{gathered}\tag{2.8}$$

$$\int_0^l[I_1U_cK_1+I_2\Theta K_2+I_3(U_cK_2+\Theta K_1)]dz=\int_0^l[I_1U_0K_1+I_2\Theta_0K_2+I_3(U_0K_2+\Theta K_1)]dz,\tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^l \left[I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3 (U_c K_2 + \Theta K_1)\right] dz = \int_0^l \left[I_1 \dot{U}_0 K_1 + I_2 \dot{\Theta}_0 K_2 + I_3 (\dot{U}_0 K_2 + \dot{\Theta} K_1)\right] dz. \qquad (2.10)$$

Интегрируя по частям члены, содержащие производные по z в полученном равенстве, и имея в виду обозначение трансформанты (2.1), получим:

$$\Phi\left(U_c, \Theta, K_1, K_2\right)\Big|_0^l + \int_0^l \left[\frac{1}{a^2} U_c K_1^{IV} + \frac{1}{n^2}\Theta K_2^{IV} - \frac{k^2}{n^2} K_2^{''}\right] dz + \frac{d^2}{dt^2} F(\lambda_i, t) = \frac{1}{\rho A} P(\lambda_i, t), \qquad (2.11)$$

где $P\left(\lambda_i, t\right)$ — трансформанта нагрузки, а штрих обозначает дифференцирование по z.

$$P\left(\lambda_i, t\right) = \int_0^l q(z,t)\left[K_1\left(\lambda_i, z\right) + (e + a_x) K_2\left(\lambda_i, z\right)\right] dz,$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(U_c, \Theta, K_1, K_2\right) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3} K_1 - \frac{\partial^2 U_c}{\partial z^2} K_1^{'} + \frac{\partial U_c}{\partial z} K_1^{''} - U_c K_1^{'''}\right) + \\ + \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial z^3} K_2 - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} K_2^{'} + \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2^{''} - \Theta K_2^{'''}\right) - \frac{k^2}{n^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} K_2 - \Theta K'_2\right). \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Используем два условия структурного алгоритма метода конечных интегральных преобразований [9]

$$\Phi\left(U_c, \Theta, K_1, K_2\right) = 0, \qquad (2.13)$$

$$\frac{1}{a^2}\int_0^l \left[U_c K_1^{IV} + \frac{a^2}{n^2}\Theta\left(K_2^{IV} - k^2 K_2^{''}\right)\right] dz = \frac{\lambda_i^4}{a^2}\int_0^l \left[I_1 U_c K_1 + I_2 \Theta K_2 + I_3\left(\Theta K_1 + U_c K_2\right)\right] dz. \qquad (2.14)$$

Равенство (2.13) представляет обращение в нуль полилинейной формы (2.12) на концах интервала $[0, l]$, а (2.14) — операционное свойство. С учетом (2.13), (2.14) дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 F\left(\lambda_i, t\right)}{dt^2} + \omega_i^2 \; F\left(\lambda_i, t\right) = \frac{1}{\rho A} P\left(\lambda_i, t\right), \qquad i = \overline{1, \infty}, \qquad (2.15)$$

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{a} = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{E I_x}{\rho A}}.$$

Здесь ω_i представляют круговые частоты собственных совместных изгибно-крутильных колебаний стержня. Имея в виду обозначения, введенные в (1.1) для a, n, круговые частоты собственных совместных изгибно-крутильных колебаний стержня могут быть определены также по тождественной формуле:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{a}\sqrt{\frac{I_x}{I_\omega}}\,, \qquad i = \overline{1, \infty}. \qquad (2.16)$$

Очевидно, что равенства (2.9), (2.10) представляют начальные условия для трансформанты $F\left(\lambda_i, t\right)$

$$F\left(\lambda_i, 0\right) = \; F_0\left(\lambda_i\right), \qquad \frac{d}{dt} F\left(\lambda_i, t\right) = \dot{F}\left(\lambda_i\right). \qquad (2.17)$$

Таким образом, для трансформанты сформировалась задача Коши (2.15), (2.17). Для произвольной правой части (функции $P\left(\lambda_i, t\right)$) неоднородного дифференциального уравнения (2.15) разыскивая его частное решение методом вариации произвольных постоянных, находим:

$$F\left(\lambda_i, t\right) = F\left(\lambda_i\right)\cos\omega_i t + \dot{F}\left(\lambda_i\right)\frac{\sin\omega_i t}{\omega_i} - \frac{1}{\rho A \omega_i}\int_0^t P\left(\lambda_i, \tau\right)\sin\omega_i\left(t - \tau\right) d\tau. \qquad (2.18)$$

Возвращаясь к условиям (2.13), (2.14), сформулируем краевую задачу для компонентов K_1, K_2 ядра многокомпонентного конечного интегрального преобразования (2.1), (2.2). Из операционного свойства (2.14) следует такое соотношение:

$$\frac{U_c}{a^2}\left[K_1^{IV} - \lambda_i^4\left(K_1 + a_x K_2\right)\right] + \Theta\left\{\frac{1}{n^2} K_2^{IV} + \frac{k^2}{n^2} K_2^{''} - \frac{\lambda_i^4}{a^2}\left[\left(\frac{c^2}{n^2} + {a_x}^2\right) K_2 + a_x K_1\right]\right\} = 0. \qquad (2.19)$$

Поскольку $U_c\left(z, t\right)$, $\Theta\left(z, t\right)$ — независимые функции, то из последнего равенства получаем однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для K_1, K_2. Имеем

$$K_1^{IV} - \lambda_i^4 K_1 - \lambda_i^4 a_x K_2 = 0, \frac{1}{n^2} K_2^{IV} - \frac{1}{n^2} k^2 K_2^{''} - \lambda_i^4 \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{c^2}{n^2} + a_x^2\right) K_2 + a_x K_1\right] = 0. \qquad (2.20)$$

Воспользуемся соотношением (2.13), принимая во внимание первое уравнение системы (2.20), которое получено после умножения всех членов на a^2, при этом учитывая выражение (2.12) и граничные условия (1.3) и (1.4). Равенство (2.13) для условий (1.3) и (1.4) записывается соответственно в следующем виде:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3}K_1+\quad\frac{\partial U_c}{\partial z}\ddot{K_1}\right)+\ \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial z^3}K_2+\frac{\partial\Theta}{\partial z}\ddot{K_2}\right)-\frac{k^2}{n^2}\ \frac{\partial\Theta}{\partial z}K_2=0, \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^3 U_c}{\partial z^3}K_1-\frac{\partial^2 U_c}{\partial z^2}K_1^{'}\right)+\ \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial z^3}K_2-\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}K_2^{'}\right)=0. \tag{2.22}$$

Поскольку производные функций $U_c(z,t)$, $\Theta(z,t)$, содержащиеся в равенствах (2.21) и (2.22), не определены на концах интервала $[0,l]$, то (2.21) и (2.22) удовлетворяются, если выполняются такие граничные условия для $K_1,\ K_2$:

$$K_{1,2}(\lambda_i,z)\mid_{z=0,l}=K_{1,2}^{''}(\lambda_i,0)\mid_{z=0,l}=0, \tag{2.23}$$

$$K_{1,2}(\lambda_i,z)\mid_{z=0,l}=K_{1,2}^{'}(\lambda_i,0)\mid_{z=0,l}=0. \tag{2.24}$$

Замечание. Краевые условия (1.3) и (1.4) для искомых функций тождественны (2.23) и (2.24) для компонентов ядра преобразования, а при соответствиях $U_c\sim K_1$, $\Theta\sim K_2$, $\frac{d}{dt}\sim a^{-2}\lambda_i^4$ система уравнений (2.20) инвариантна левой части (1.5). Инвариантность этих систем относительно преобразования (2.1) и тождественность краевых условий указывает на самосопряженность рассматриваемой краевой задачи (1.2)–(1.5). Это значит, что выполняется условие обобщенной ортогональности (2.3) и справедливы формулы обращения (2.2) [9; 10].

Таким образом, в результате применения структурного алгоритма обобщенного метода конечных интегральных преобразований сформулирована однородная краевая задача на собственные значения для компонентов ядра K_1,K_2 интегрального преобразования (2.20), (2.23) или (2.24).

Выражая из второго уравнения (2.20)

$$K_1=e_1K_2^{IV}-e_2K_2^{''}-e_3K_2, \tag{2.25}$$

$$e_1=a^2\left(a_xn^2\lambda_i^4\right)^{-1},e_2=k^2a^2,e_3=\left(a_x^2+c^2n^{-2}\right)a_x^{-1},$$

приходим к такому дифференциальному уравнению восьмого порядка

$$K_2^{VIII}(\lambda_i,z)-b_1K_2^{VI}(\lambda_i,z)-b_2K_2^{IV}(\lambda_i,z)+b_3K_2^{II}(\lambda_i,z)+b_4K_2(\lambda_i,z). \tag{2.26}$$

Здесь

$$b_1=k^2,\ \ b_2=b_2^i=\lambda_i^4\left(1+c^2a^{-2}+a_x^2n^2a^{-2}\right),\ \ b_3=b_3^i=\lambda_i^4k^2,\ \ b_4=b_4^i=\lambda_i^8c^2a^{-2}.$$

Таким образом, компоненты ядра конечного интегрального преобразования $K_1(\lambda_i,z)$, $K_2(\lambda_i,z)$ являются компонентами собственной вектор-функции, а λ_i — собственными значениями однородной краевой задачи (2.25), (2.26), (2.23) или (2.24).

Определив корни $r_1,\ r_2,\ \dots r_8$ соответствующего (2.26) характеристического уравнения

$$r^8-b_1r^6-b_2r^4+b_3r^2+b_4r=0,$$

находим общие решения дифференциальных уравнений (2.25), (2.26):

$$K_2(\lambda_i,z)=\sum_{j=1}^{8}\left(-e_1r_k^4-e_2r_k^2-e_3\right)C_{ij}\exp^{r_kz},$$

$$K_1(\lambda_i,z)=\sum_{j=1}^{8}C_{ij}\exp^{r_kz}.$$

Располагая выражениями $K_1(\lambda_i,z)$, $K_2(\lambda_i,z)$ и их производными, после подстановки этих соотношений в граничные условия (2.23) или (2.24) получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{i1},\ C_{i2},\ \dots C_{i8}$. Разыскивая нетривиальные решения последней, приравниваем определитель системы нулю. В результате получаем трансцендентное уравнение для определения параметров (собственных значений) λ_i, а затем из оставшихся семи уравнений находятся постоянные $C_{i1},\ C_{i2},\ \dots C_{i7}$, с точностью до константы C_{i8}. Принимая для нее подходящее выражение, получаем окончательно все восемь постоянных $C_{i1},\ C_{i2},\ \dots C_{i8}$.

Таким образом, опеределив компоненты ядра преобразования $K_1(\lambda_i,z)$, $K_2(\lambda_i,z)$, собственные значения λ_i, а затем по формуле (2.16) круговые частоты, а также квадрат нормы ядровой функции (2.4), для принятого воздействия (закона $q(z,t)$) и заданных начальных и краевых условий (1.2), (1.3), (1.4) вычисляются интеграл Дюамеля и трансформанта (2.18). Располагая функцией $F(\lambda_i,t)$ по формуле обращения (2.2), определяются линейные перемещения и углы закручивания.

Выводы

Таким образом, в статье получено аналитическое решение динамической задачи для стержня при произвольных условиях его закрепления и загружения с помощью многокомпонентного конечного интегрального преобразования.

Литература

[1] Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. и перераб. Ленинград: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1976, 320 с. URL: https://studizba.com/files/show/pdf/16226-1-panovko-ya-g–osnovy-prikladnoy-teorii.html.

[2] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным условием его закрепления на части границы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23. № 2. С. 7–14. DOI: http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14.

[3] Богатов А.В. Задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. № 4. С. 7–12. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12.

[4] Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р. Собственные изгибные колебания естественно закрученного стержня // Вестник УГАТУ. 2019. Т. 23. № 4(86). С. 33–41. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41827630; http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/download/2888/2561/.

[5] Каган-Розенцвейг Л.М. Метод вычисления частот собственных колебаний упругих стержней прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1 (72). С. 61–66. DOI: http://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-61-66.

[6] Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Известия вузов. Сер.: Математика. 1991. № 4. С. 27–63. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23476952.

[7] Сеницкий Ю.Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования // Известия вузов. Сер.: Математика. 1991. № 9. С. 53–56. URL: http://www.mathnet.ru/links/0a26e96fecf70f1717b0b1df0cb8e472/ivm5150.pdf.

[8] Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1971. 380 с. URL: https://dwg.ru/dnl/9881.

[9] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: СГУ, 1985, 176 с.

[10] Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований — обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 3(1). С. 61–98. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-63-69

Submited: 15.01.2020
Revised: 30.01.2020
Accepted: 25.05.2020

E.N. Elekina
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
E-mail: elekina-e1@yandex.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9516-7644
E.S. Vronskaja
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
E-mail: es.vronskaja@yandex.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1304-0138

DYNAMIC PROBLEM FOR A THIN-WALLED BAR WITH A MONOSYMMETRIC PROFILE

ABSTRACT
The paper presents an analytical solution to the dynamic problem for a thin-walled elastic rod, the cross-section of which has one axis of symmetry. The solution is constructed for an arbitrary dynamic load and two types of boundary conditions: hinged support in constrained torsion and free warping of the end

sections of the rod; rigid fastening with constrained torsion and absence of warping. The peculiarity of the mathematical model lies in the fact that the differential equations of motion contain a complete system of inertial terms. Spectral expansions obtained as a result of using the method of integral transformations are represented as an effective method for solving linear non-stationary problems in mechanics. The structural algorithm of the method of finite multicomponent integral transformations proposed by Yu.E. Senitsky is used.

Key words: thin-walled bar, symmetric profile, boundary value problem, dynamic load, natural vibrations, natural vibration frequency, forced vibrations, integral transformations.

Citation. Elekina E.N., Vronskaja E.S. Dynamic problem for a thin-walled bar with a monosymmetric profile. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 63–69. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-63-69. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Elekina Elena Nikolaevna* — senior lecturer of the Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russian Federation.

© *Vronskaja Elena Sergeevna* — Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Structural Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

[1] Panovko Ia.G. Foundations of the applied theory of vibrations and impact. 3rd edition, enlarged and revised. Leningrad: «Mashinostroenie» (Leningr. otd-nie), 1976, 320 p. Available at: https://studizba.com/files/show/pdf/16226-1-panovko-ya-g–osnovy-prikladnoy-teorii.html. (In Russ.)

[2] Beylin A.B., Pulkina L.S. A problem on vibration of a bar with unknown boundary condition on a part of the boundary. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 7—14. DOI: http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-2-7-14. (In Russ.)

[3] Bogatov A.V. Problem with an integral condition for one-dimensional hyperbolic equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 7—12. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-7-12. (In Russ.)

[4] Pavlov V.P., Nusratullina L.R. Natural bending vibrations of naturally twisted rod. *Vestnik USATU*, 2019, vol. 23, no. 4 (86), pp. 33–41. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41827630; http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/download/2888/2561/.

[5] Kagan-Rosenzweig L.M. The method for calculating the natural frequencies of elastic rods by application of direct integration of differential bending equation. *Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 1 (72), pp. 61–66. DOI: http://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-61-66. (In Russ.)

[6] Senitskii Yu.E. A multicomponent generalized finite integral transformation and its application to nonstationary problems in mechanics. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika*, 1991, vol. 35, no. 4, pp. 55–61. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23476952. (In Russ.)

[7] Senitskii Yu.E. Convergence and uniqueness of representations defined by a formula for the inversion of a multicomponent generalized finite integral transformation. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika*, 1991, vol. 35, no. 9, pp. 52—54. Available at: http://www.mathnet.ru/links/0a26e96fecf70f1717b0b1df0cb8e472/ivm5150.pdf. (In Russ.)

[8] Vlasov V.Z. Thin-walled elastic rods. Moscow: Gos. izdat. fiz.-mat. literatury, 1971, 380 p. Available at: https://dwg.ru/dnl/9881. (In Russ.)

[9] Senitskii Yu.E. Studying the elastic deformation of structural elements under dynamic loads using the finite transform method. Saratov: SGU, 1985, 176 p. Available at: https://dwg.ru/lib/864. (In Russ.)

[10] Senitsky Yu.E. Finite integral transformations method: generalization of classic procedure for eigenvector decomposition. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, vol. 11, no. 3 (1), pp. 61–98. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-61-89. (In Russ.)