Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 13.03.2020
после рецензирования: 27.03.2020
принятия статьи: 25.05.2020

В.А. Киричек
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Vitalya29@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9817-863X

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается нелокальныя задача с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения. Условия задачи содержат производные первого порядка как по x, так и по t, что можно интерпретировать как упругое закрепление правого конца стержня при наличии некоего демпфера, а так как в условиях также присутствует интеграл от искомого решения, то это условие является нелокальным. Известно, что задачи с нелокальными интегральными условиями являются несамосопряженными, а, значит, исследование разрешимости сталкивается с трудностями, не свойственными самосопряженным задачам. Дополнительные трудности возникают и в силу того, что одно из условий является динамическим. Исследована гладкость решения нелокальной задачи. Введено понятие обобщенного решения и доказано существование производных второго порядка и принадлежность их пространству L_2. Доказательство основано на априорных оценках, полученных в статье.

Ключевые слова: нелокальные условия, динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, пространства Соболева, гладкость решения.

Цитирование. Киричек В.А. О гладкости решения одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 15–22. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © *Киричек Виталия Александровна* — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443011, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Рассмотрим в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

граничному условию

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$u_x(l,t) + \gamma u_t(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

Условие (4) содержит производные первого порядка как по x, так и по t, что можно интерпретировать как упругое закрепление правого конца стержня при наличии некоего демпфера [1, с. 44], а так как в (4) присутствует интеграл от искомого решения, то это условие является нелокальным. Известно, что задачи с нелокальными интегральными условиями являются несамосопряженными и, стало быть, исследование разрешимости сталкивается с трудностями, не свойственными самосопряженным задачам [2; 3]. Дополнительные трудности возникают и в силу того, что условие (4) является динамическим. Некоторые результаты в исследовании задач с краевыми условиями, содержащими призводную по времени первого порядка, для одномерных гиперболических уравнений получены в статьях [4; 5]. Заметим, что краевые задачи с динамическими условиями вызывают интерес не только как математический объект, но и в силу их прикладного значения [6–10; 12].

В [5] доказано существование единственного обобщенного решения поставленной задачи в пространстве $W(Q_T)$, т. е. решения, имеющего обобщенные производные первого порядка. Приведем здесь определение обобщенного решения задачи (1)–(4), используя обозначения, введенные в [5]:

$$\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in [0,T]\}, \quad \Gamma_l = \{(x,t) : x = l, t \in [0,T]\},$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l,$$

$$W(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^1(Q_T), u_t \in L_2(\Gamma_l)\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v(x,t) : v \in W(Q_T), v(x,T) = 0\}.$$

Определение. Функция $u \in W(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (1)–(4), если она удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt + \int_0^T \gamma a(l,t) u_t(l,t) v(l,t)dt+$$

$$+\int_0^T a(l,t)v(l,t) \int_0^l K(x)u(x,t)dtdx = \int_0^T \int_0^l fvdxdt \tag{5}$$

для любой $v \in \hat{W}(Q_T)$.
В упомянутой выше статье найдены условия на входные данные, при выполнении которых справедливо утверждение об обобщенной разрешимости поставленной задачи, что нашло отражение в теореме:

Теорема 1. Пусть выполняются следуюшие условия:

$$c(x,t) \in C(\bar{Q}_T), a(x,t), a_t(x,t) \in C(\bar{Q}_T), \gamma > 0, f(x,t) \in L_2(Q_T.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение поставленной задачи.

Дальнейшие исследования показали, что при выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты уравнения и его правую часть обобщенное решение имеют и производные второго порядка. Обоснование этого утверждения составляет основной результат статьи и изложено в следующем разделе.

Основной результат.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

$$c(x,t), a(x,t), a_t(x,t), a_{tt}(x,t) \in C(\bar{Q}_T), K(x) \in C^1[0,l], \gamma > 0, \;\; f_t(x,t) \in L_2(Q_T).$$

Тогда обобщенное решение задачи (1)–(4) принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением, которое позволило убедиться в существовании обобщенного решения из $W(Q_T)$, а именно

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j)dx + \gamma w_j(l) \int_0^l K(x)u^m(x,t)dx = \int_0^l f w_j dx, \tag{6}$$

где $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^m c_k(t) w_k(x)$, $\{w_k(x)\}$ — система функций, принадлежащая $C^2(0,l) \cap C^1[0,l]$ и образующая полную систему в $W_2^1(0,l)$. Продифференцируем (6) по t, затем умножим на $c_j''(t)$, просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем по $(0,\tau)$, где $\tau \in [0,T]$. Получим

$$\int_0^\tau \int_0^l [u_{ttt}^m u_{tt}^m + a u_{xt}^m u_{xtt}^m + a_t u_x^m u_{xtt}^m + c u_t^m u_{tt}^m + c_t u^m u_{tt}^m]dxdt + \int_0^\tau [\gamma a_t(l,t) u_t^m u_{tt}^m + \gamma a(l,t)(u_{tt}^m)^2]dt+$$

$$+\int_0^\tau a_t(l,t) u_{tt}^m(l,t) \int_0^l K(x)u^m dxdt + \int_0^\tau a(l,t)u_{tt}^m(l,t) \int_0^l K(x)u_t^m dx = \int_0^\tau \int_0^l f_t u_{tt}^m dx. \tag{7}$$

Перейдем к выводу оценок. Преобразуем два первых слагаемых левой части (7).

$$\int_0^\tau\int_0^l u^m_{ttt}u^m_{tt}dxdt=\frac{1}{2}\int_0^l(u^m_{tt}(x,\tau)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^l(u^m_{tt}(x,0))^2dx,$$

$$\int_0^\tau\int_0^l au^m_{xt}u^m_{xtt}dxdt=-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_{xt})^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^l a(u^m_{xt}(x,\tau))^2dx.$$

В силу этих преобразований (7) примет вид

$$\frac{1}{2}\int_0^l[(u^m_{tt}(x,\tau))^2+a(u^m_{xt}(x,\tau))^2]dx+\gamma\int_0^\tau a(l,t)(u^m_{tt}(l,t))^2dt=\frac{1}{2}\int_0^l(u^m_{tt}(x,0))^2dx+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_{xt})^2dxdt-$$
$$-\int_0^\tau\int_0^l[a_tu^m_xu^m_{xtt}+cu^m_tu^m_{tt}+c_tu^mu^m_{tt}]dxdt-\gamma\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_tu^m_{tt}dt-\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m(x,t)dxdt-$$
$$-\int_0^\tau a(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m_t(x,t)dxdt+\int_0^\tau\int_0^l f_tu^m_{tt}dxdt. \tag{8}$$

При выполнении условий теоремы левая часть (8) неотрицательна. Тогда из (8) вытекает неравенство

$$\int_0^l[(u^m_{tt}(x,\tau))^2+a(u^m_{xt}(x,\tau))^2]dx+2\gamma\int_0^\tau a(l,t)(u^m_{tt}(l,t))^2dt\leqslant|\int_0^l(u^m_{tt}(x,0))^2dx|+|\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_{xt})^2dxdt|+$$
$$+|2\int_0^\tau\int_0^l[a_tu^m_xu^m_{xtt}+cu^m_tu^m_{tt}+c_tu^mu^m_{tt}]dxdt|+|2\gamma\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_tu^m_{tt}dt|+|-2\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m(x,t)dxdt|+$$
$$+|-2\int_0^\tau a(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m_t(x,t)dxdt|+|2\int_0^\tau\int_0^l f_tu^m_{tt}dxdt|. \tag{9}$$

Оценим правую часть (9). Для этого сначала преобразуем некоторые слагаемые, интегрируя по частям

$$-2\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m(x,t)dxdt=2\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_t(l,t)\int_0^l K(x)u^m_{tt}(x,t)dxdt+$$
$$+2\int_0^\tau a_{tt}(l,t)u^m_t(l,t)\int_0^l K(x)u_t(x,t)dxdt-2a_t(l,\tau)u^m_t(l,\tau)\int_0^l K(x)u^m(x,\tau)dx,$$

$$-2\int_0^\tau a(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m_t(x,t)dxdt=2\int_0^\tau a(l,t)u^m_t(l,t)\int_0^l K(x)u^m_{tt}(x,t)dxdt+$$
$$+2\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_t(l,t)\int_0^l K(x)u^m_t(x,t)dxdt-2a(l,\tau)u^m_{tt}(l,\tau)\int_0^l K(x)u^m_t(x,\tau)dx.$$

Тогда неравенство (9) можно записать так:

$$\int_0^l[(u^m_{tt}(x,\tau))^2+a(u^m_{xt}(x,\tau))^2]dx+2\gamma\int_0^\tau a(l,t)(u^m_{tt}(l,t))^2dt\leqslant|\int_0^l(u^m_{tt}(x,0))^2dx|+|\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_{xt})^2dxdt|+$$
$$+|2\int_0^\tau\int_0^l cu^m_tu^m_{tt}dxdt|+|2\int_0^\tau\int_0^l a_tu^m_xu^m_{xtt}dxdt|+|2\int_0^\tau\int_0^l c_tu^mu^m_{tt}dxdt|+2\gamma|\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_tu^m_{tt}dt|+$$
$$+2|\int_0^\tau a(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m_t(x,t)dxdt|+2|\int_0^\tau a_t(l,t)u^m_{tt}(l,t)\int_0^l K(x)u^m(x,t)dxdt|+|2\int_0^\tau\int_0^l f_tu^m_{tt}dxdt|. \tag{10}$$

Проведем оценкии некоторых слагаемых

$$1)\quad 2|\int_0^\tau\int_0^l cu_t^m u_{tt}^m dxdt| \leqslant c_0\int_0^\tau\int_0^l [(u_t^m)^2+(u_{tt}^m)^2]dxdt,$$

$$2)\quad -\int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^m u_{xtt}^m dxdt = \int_0^\tau\int_0^l a_{tt}u_x^m u_{xt}^m dxdt + \int_0^\tau\int_0^l a_t (u_{xt}^m)^2 dxdt - \int_0^l a_t u_x^m(x,\tau)u_{xt}^m(x,\tau)dx.$$

Оценим последнее слагаемое в 2), применяя неравенство Коши с ε.

$$2|\int_0^l a_t u_x^m(x,\tau)u_{xt}^m(x,\tau)dx| \leqslant a_1\epsilon 223\int_0^l (u_{xt}^m(x,\tau))^2dx + a_1c(\epsilon)\int_0^l (u_x^m(x,\tau))^2dx,$$

так как $u_x^m = \int_0^\tau u_{xt}^m(x,t)dt$, то $\int_0^l (u_x^m(x,\tau))^2dx \leqslant \tau\int_0^\tau\int_0^l (u_{xt}^m(x,t))^2dxdt$, в результате 2) примет вид

$$2|\int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^m u_{xtt}^m dxdt| \leqslant a_1\int_0^\tau\int_0^l [(u_x^m)^2+(u_{xt}^m)^2]dxdt + a_1\int_0^\tau\int_0^l (u_{xt}^m)^2dxdt+$$

$$+a_1c(\epsilon)\tau\int_0^\tau\int_0^l (u_{xt}^m)^2dxdt + a_1\epsilon\int_0^l (u_{xt}^m(x,\tau))^2dx.$$

Оценим остальные слагаемые

$$3)\quad 2|\int_0^\tau\int_0^l c_t u^m u_{tt}^m dxdt| \leqslant c_1\int_0^\tau\int_0^l [(u^m)^2+(u_{tt}^m)^2]dxdt,$$

$$4)\quad 2\gamma|\int_0^\tau a_t(l,t)u_t^m u_{tt}^m dt| \leqslant a_1\delta\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2dt + c(\delta)a_1\gamma\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2dt,$$

$$5)\quad 2|\int_0^\tau a(l,t)u_{tt}^m(l,t)\int_0^l K(x)u_t^m(x,t)dxdt| \leqslant a_1\delta\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2dt + a_1c(\delta)K_0\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2dxdt,$$

$$6)\quad 2|\int_0^\tau a_t(l,t)u_{tt}^m(l,t)\int_0^l K(x)u^m(x,t)dxdt| \leqslant a_1\delta\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2dt + a_1c(\delta)K_0\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt,$$

$$7)\quad 2|\int_0^\tau\int_0^l f_t u_{tt}^m dxdt| \leqslant \int_0^\tau\int_0^l (u_{tt}^m)^2dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f_t^2 dxdt.$$

(Здесь δ играет ту же роль, что и ε в оценках выше). Рассмотрим слагаемое $\int_0^l (u_{tt}^m(x,0))^2dx$ и оценим его. Для этого вернемся к (6), умножим его на $c_j''(t)$, просуммируем по j от 1 до m и положим $t=0$

$$\int_0^l [(u_{tt}^m(x,0))^2 + au_x^m(x,0)u_{tt}^m(x,0) + cu^m(x,0)u_{tt}^m(x,0)]dx + \gamma a(l,0)u_t^m(l,0)u_{tt}^m(l,0)+$$

$$+a(l,0)u_{tt}^m(l,0)\int_0^l K(x)u^m(x,0)dx = \int_0^l f(x,0)u_{tt}^m(x,0)dx,$$

так как $u^m(x,0)=0$, то и $u_x^m(x,0)=0$, $\quad u_t^m(l,0)=0$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$\int_0^l (u_{tt}^m(x,0))^2dx = \int_0^l f(x,0)u_{tt}^m(x,0)dx,$$

откуда

$$\int_0^l (u_{tt}^m(x,0))^2 dx \leqslant \int_0^l f^2(x,0)dx. \tag{11}$$

В силу условий теоремы $|a|, |a_t|, |a_{tt}| \leqslant a_1$, $|c|, |c_t| \leqslant c_1$, $\int_0^l K^2(x)dx = K_0, a(x,t) \geqslant a_0$. С учетом приведенных выше оценок (10) примет вид

$$\int_0^l [(u_{tt}^m(x,\tau))^2 + a(u_{xt}^m(x,\tau))^2]dx + 2\gamma\int_0^\tau a(l,t)(u_{tt}^m(l,t))^2 dt \leqslant a_1\int_0^\tau\int_0^l (u_{xt}^m)^2 dxdt + c_0\int_0^\tau\int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_{tt}^m)^2]dxdt+$$

$$+a_1\int_0^\tau\int_0^l [(u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2]dxdt + a_1\int_0^\tau\int_0^l (u_{xt}^m)^2 dxdt + a_1 c(\epsilon)\tau\int_0^\tau\int_0^l (u_{xt}^m)^2 dxdt + a_1\epsilon\int_0^l (u_{xt}^m(x,\tau))^2 dx+$$

$$+c_1\int_0^\tau\int_0^l [(u^m)^2 + (u_{tt}^m)^2]dxdt + a_1\delta\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2 dt + \delta a_1\gamma\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt + a_1\delta\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2 dt+$$

$$+a_1 c(\delta)K_0\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt + a_1\delta\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2 dt + a_1 c(\delta)K_0\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2 dxdt+$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l (u_{tt}^m)^2 dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f_t^2 dxdt + \int_0^l f^2(x,0)dx.$$

Пусть $N_1 = max\{c_0 + a_1 c(\epsilon)K_0, a_1, c_1 + a_1 c(\delta)K_0\}$, $N_2 = max\{3a_1 + a_1 c(\epsilon)\tau, c_0 + c_1 + 1\}$, тогда полученное неравенство перепишется

$$\int_0^l [(u_{tt}^m(x,\tau))^2 + a_0(u_{xt}^m(x,\tau))^2]dx + 2\gamma a_0\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2 dt \leqslant N_1\int_0^\tau\int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^2)^2 + (u^m)^2)]dxdt+$$

$$+N_2\int_0^\tau\int_0^l [(u_{xt}^m)^2 + (u_{tt}^m)^2]dxdt + a_1\epsilon\int_0^l (u_{xt}^m(x,\tau))^2 dx + 3a_1\delta\int_0^\tau (u_{tt}^m(l,t))^2 dt + \int_0^\tau\int_0^l f_t^2 dxdt + \int_0^l f^2(x,0)dx.$$

Перенесем интегралы, содержащие $(u_{xt}^m(x,\tau))^2$, $(u_{tt}^m(l,t))^2$, в левую часть, выбрав ϵ, δ так, чтобы $a_0 - a_1\epsilon > 0$; $2\gamma - 3a_1\delta > 0$, например, $a_0 - a_1\epsilon \geqslant \frac{a_0}{2}$, то есть $\epsilon \leqslant \frac{a_0}{2a_1}$, и аналогично $2\gamma - 3a_1\delta \geqslant \gamma$, откуда $\delta \leqslant \frac{\gamma}{3a_1}$. Тогда

$$m_0\int_0^l [(u_{tt}^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2]dx \leqslant N_1\int_0^\tau\int_0^l [(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2)]dxdt+$$

$$+N_2\int_0^\tau\int_0^l [(u_{xt}^m)^2 + (u_{tt}^m)^2]dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f_t^2 dxdt + \int_0^l f^2(x,0)dx,$$

где $m_0 = min\{1 + 2\gamma a_0 + 3a_1\delta; a_0 - a_1\epsilon\}$. Первое слагаемое правой части ограничено, так как $u \in W_2^1(Q_T)$. В силу условий теоремы $\int_0^\tau\int_0^l f_t^2 dxdt + \int_0^l f^2(x,0)dx \leqslant N_3$, тогда

$$m_0\int_0^l [(u_{tt}^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2]dx \leqslant N_2\int_0^\tau\int_0^l [(u_{xt}^m)^2 + (u_{tt}^m)^2]dxdt + N_3. \tag{12}$$

Применим к неравенству (12) лемму Гронуолла, что приводит к неравенству

$$\int_0^l [(u_{tt}^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2]dx \leqslant e^{\frac{N_2}{m_0}\tau}\frac{N_3}{m_0}.$$

После интегрирования последнего неравенства по $(0,T)$ получим

$$||u_{tt}^m||^2_{L_2(Q_T)} + ||u_{xt}^m||^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{N_3}{N_2}(e^{\frac{N_2}{m_0}T} - 1).$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от m, то мы приходим к выводу, что при выполнении условий теоремы 2 обобщенное решение поставленной задачи имеет производные u_{tt}, u_{xt}, принадлежащие пространству $L_2(Q_T)$. Покажем, что решение имеет и $u_{xx} \in L_2(Q_T)$. Заметим, что обобщенное решение задачи (1)–(4), имеющее производные u_{tt}, u_{xt}, удовлетворяет тождеству (5) в форме

$$\int_0^T\int_0^l (u_{tt}v + au_xv_x + cuv)dxdt + \gamma\int_0^T a(l,t)u_t(l,t)v(l,t)dt + \int_0^T a(l,t)v(l,t)\int_0^l Kudxdt = \int_0^T\int_0^l fvdxdt. \qquad (13)$$

Положим в (13) $v(x,t) = \Phi(x)\Psi(t)$, где $\Psi \in L_2(0,T)$, $\quad \Psi(T) = 0$, $\quad \Phi \in W_2^1(0,l)$, $\quad \Phi(0) = 0$, тогда из (13) следует

$$\int_0^T \Psi(t)\int_0^l [u_{tt}\Phi(x) + au_x\Phi'(x) + cu\Phi]dxdt + \gamma\int_0^T a(l,t)\Psi(t)u_t(l,t)\Phi(l)dt + \int_0^T a(l,t)\Phi(l)\Psi(t)\int_0^l Kudxdt =$$

$$= \int_0^T\int_0^l f\Psi(t)\Phi(x)dxdt. \qquad (14)$$

Так как $\Psi(t)-$ любая функция из указанного класса, то для почти всех $t \in [0,T]$ из (14) следует выполнение соотношения

$$\int_0^l au_x\Phi'(x)dx = -\int_0^l [u_{tt} + cu - f]\Phi(x)dx - \gamma a(l,t)\Phi(l)u_t(l,t) - a(l,t)\Phi(l)\int_0^l Kudxdt. \qquad (15)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти $u_x(x,t)$ из соотношений:

$$(au_x)_x = \zeta(x,t), \quad u_x(l,t) = \nu(t). \qquad (16)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$au_x(x,t) = \int_0^x \zeta(\xi,t)d\xi + a(l,t)\nu(t) - \int_0^l \zeta(\xi,t)d\xi.$$

Можно также найти представление $u(x,t)$, удовлетворяющее (16)

$$u(x,t) = \int_0^x \frac{1}{a(\xi,t)}\int_0^\xi \zeta(\xi',t)d\xi'd\xi + [a(l,t)\nu(t) - \int_0^l \zeta(\xi,t)d\xi]\int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi,t)}.$$

Очевидно, что это решение имеет $u_{xx} \in L_2(0,l)$ для почти всех $t \in [0,T]$, если $\zeta \in L_2(Q_T)$. Легко видеть, что функция $u(x,t)$, являясь решением (16), удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l au_x\Phi'(x)dx = -\int_0^l \zeta(x,t)\Phi(x)dx - a(l,t)\nu(t)\Phi(l)$$

для любой $\Phi \in W_2^1(0,l)$, $\quad \Phi(0) = 0$, которое при $\zeta(x,t) = u_{tt} + cu - f$, $\quad \nu(t) = -[\gamma u_t(l,t) + \int_0^l Kudx]\frac{1}{a(l,t)}$ совпадает с (15).

Отсюда следует, что $u_{xx} \in L_2(Q_T)$, где $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи (1)–(4). Таким образом, $u \in W_2^2(Q_T)$.

Утверждение доказано.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 2004. 798 с. URL: http://volnogaz.math.msu.su/pages/books/Тихонов%20-%20%20Уравнения%20математической%20физики.pdf.

[2] Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР, 1991. Т. 321. Вып. 6. С. 1158–1163. URL: http://www.mathnet.ru/links/45f36a10c5f06a36e54d3c020efbc746/dan5707.pdf.

[3] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. Вып. 2. С. 294–304.

[4] Рогожников А.М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. 2013. Вып. 10. С. 188–214. URL: https://istina.msu.ru/download/4446927/1ktCIB:sjvtjvFuk4heV2GZd4Cw4OWVUF4/.

[5] Киричек В.А. Задача с нелокальным граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучная серия. 2017. Вып. 3. С. 26–33. URL: https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/5498; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32274170.

[6] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. Москва: URSS, 2010. 237 с. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607.

[7] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник Самарского ун-та. 2014. Вып. 3(114). С. 9–19. URL: http://vestnik-old.samsu.ru/articles/3-2014-1.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21608733.

[8] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. Issue 28. P. 1–10. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13287682.

[9] Andrews K.T., Kuttler K.L., Shillor M. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 1996. Vol. 197. Issue 3. P. 781–795. DOI: http://doi.org/10.1006/JMAA.1996.0053.

[10] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным динамическим условием для уравнения колебаний толстого стержня // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучная серия. 2017. Вып. 4. С. 7–18. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18.

[11] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian and Hendrik Viljoen. Forced wawe motion with internal and boundary damping // Journal of applied physics. 2012. V. 111. P. 014702–0147028. DOI: http://doi.org/10.1063/1.3674316.

[12] Pul'kina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation // Russian Mathematics. 2016. Vol. 60. Issue 9. P. 38–45. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X16090048.

[13] Pulkina L.S., Beylin A.B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // EJDE. 2019. Issue 29. P. 1–9. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38706537; https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22

Submited: 13.03.2020
Revised: 27.03.2020
Accepted: 25.05.2020

V.A. Kirichek
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: Vitalya29@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9817-863X

ON SMOOTHNESS OF SOLUTION OF ONE NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION

ABSTRACT

In this paper we consider a nonlocal problem with integral boundary condition for hyperbolic equation. The conditions of the problem contain derivatives of the first order with respect to both x and t,, which can be interpreted as an elastic fixation of the right end rod in the presence of a certain damper, and since the conditions also contain integral of the desired solution, this condition is nonlocal. It is known that problems with nonlocal integral conditions are non-self-adjoint and, therefore, the study of solvability encounters difficulties that are not characteristic of self-adjoint problems. Additional difficulties arise also due to the fact that one of the conditions is dynamic. The attention of the article is focused on studying the smoothness of the solution of the nonlocal problem. The concept of a generalized solution is introduced, and the existence of second-order derivatives and their belonging to the space L_2 are proved. The proof is based on apriori estimates obtained in this work.

Key words: nonlocal conditions, dynamic boundry conditions, hyperbolic equation, generalized solution, Sobolev spaces, smoothness of solution.

Citation. Kirichek V.A. On smoothness of solution of one nonlocal problem for hyperbolic equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 15–22. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-15-22. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Kirichek Vitaliya Alexandrovna* — postgraduate student, Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 2004, 798 p. Available at: http://volnogaz.math.msu.su/pages/books/Тихонов%20-%20%20Уравнения%20математической%20физики.pdf. (In Russ.)

[2] Skubachevskii A.L., Steblov G.M. On the spectrum of differential operators with a domain that is not dense in $L_2 0,1$. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1991, vol. 321, no. 6, pp. 1158–1163. Available at: http://www.mathnet.ru/links/45f36a10c5f06a36e54d3c020efbc746/dan5707.pdf. (In Russ.)

[3] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: http://www.mathnet.ru/links/c44146f313280b7b9e3890b4495b3965/de2993.pdf. (In Russ.)

[4] Rogozhnikov A.M. On various types of boundary conditions for the one-dimensional equation of oscillations. *Collection of articles of young scientists of the faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of MSU*, 2013, vol. 10, pp. 188–214. Available at: https://istina.msu.ru/download/4446927/1ktCIB:sjvtjvFuk4heV2GZd4Cw4OWVUF4/. (In Russ.)

[5] Kirichek V.A. Problem with nonlocal boundary condition for a hyperbolic equation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 3, pp. 26–33. Available at: https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/5498; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32274170. (In Russ.)

[6] Korpusov M.O. Destruction in nonclassical wave equations. Moscow: URSS, 2010, 240 p. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607. (In Russ.)

[7] Beylin A.B., Pulkina L.S. Task on longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions. *Vestnik of Samara State University*, 2014, no. 3 (114), pp. 9–19. Available at: http://vestnik-old.samsu.ru/articles/3-2014-1.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21608733. (In Russ.)

[8] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1998, vol. 28, pp. 1–10. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13287682.

[9] Andrews K.T., Kuttler K.L., Shillor M. Second Order Evolution Equations With Dynamic Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 197, issue 3, pp. 781–795. DOI: http://doi.org/10.1006/JMAA.1996.0053.

[10] Beilin A.B., Pulkin L.S. A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017. no. 4 (23). pp. 7–18. Available at: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18. (In Russ.)

[11] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian and Hendrik Viljoen. Forced wawe motion with internal and boundary damping. *Journal of Applied Physics*, 2012. vol. 111, no. 1, pp. 014702–0147028. DOI: http://doi.org/10.1063/1.3674316.

[12] Pul'kina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation. *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, issue 9, pp. 38–45. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X16090048.

[13] Pulkina L.S., Beylin A. B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2019, no. 29, pp. 1–9. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38706537; https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf.