МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 4.03.2020
после рецензирования: 18.03.2020
принятия статьи: 25.05.2020

С.Х. Геккиева
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
г. Нальчик, Российская Федерация
E-mail: gekkieva_s@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2135-2115

М.М. Кармоков
Кабардино-Балкарский государственный университет
имени Х.М. Бербекова
г. Нальчик, Российская Федерация
E-mail: mkarmokov@yandex.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5189-6538

М.А. Керефов
Кабардино-Балкарский государственный университет
имени Х.М. Бербекова
г. Нальчик, Российская Федерация
E-mail: kerefov@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7442-5402

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

АННОТАЦИЯ

В основе математических моделей процессов фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой и памятью лежат дифференциальные уравнения дробного порядка как по временной, так и по пространственной переменной. Зависимость фрактальной размерности почвы от влажности может существенно влиять на процесс движения влаги в этой капиллярно-пористой среде.

В статье исследуется обобщенное уравнение Аллера, которое широко используется при математическом моделировании процессов, связанных с динамикой влаги и грунтовых вод в почвах с фрактальной организацией.

В качестве математической модели уравнения Аллера с дробными производными Римана – Лиувилля при определенных условиях предлагается нагруженное уравнение дробного порядка, для которого в явном виде выписано решение задачи Гурса.

Ключевые слова: уравнение Аллера, задача Гурса, оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, уравнение влагопереноса, обобщенная формула Ньютона – Лейбница, нагруженное уравнение, уравнение Вольтерра второго рода, свертка Лапласа.

Цитирование. Геккиева С.Х., Кармоков М.М., Керефов М.А. Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 2. С. 7–14. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторе: © *Геккиева Сакинат Хасановна* — кандидат физико-математических наук, ученый секретарь, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

© *Кармоков Мухамед Мацевич* — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

© *Керефов Марат Асланбиевич* — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Введение

При математическом моделировании различных физических и биологических процессов, связанных с динамикой почвенной влаги и грунтовых вод, широкое применение получило уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right). \tag{1}$$

Уравнение Аллера (1) принято называть уравнением псевдопараболического типа, хотя оно является уравнением гиперболического типа. При различных краевых условиях псевдопарабалическим уравнениям и уравнению (1), в частности, посвящено много работ, например [1–10].

Входящее в уравнение (1) выражение

$$\Pi(x,y) = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

как правило, интерпретируется как поток влаги $u(x,y)$, протекающий в одномерной среде $0 \leqslant x \leqslant l$ во все моменты времени y от начального $y = 0$ до расчетного $y = T$; $a = const > 0$, $b = const \geqslant 0$.

Если известен поток влаги на поверхности почвы $x = 0$:

$$\left.\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right|_{x=0} = f(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T,$$

то уравнение (1) можно заменить нагруженным уравнением гиперболического типа, [3, с. 60]:

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi + f(y). \tag{2}$$

Предложенный А.М. Нахушевым в работе [11] метод редукции к нагруженным интегро-дифференциальным уравнениям, является одним из эффективных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений. В связи с этим вызывает интерес постановка и исследование проблемно ориентированных краевых задач для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений [3].

В работе [12] доказаны существование и единственность решения задачи Гурса и нелокальной краевой задачи для уравнения, частным случаем которого является уравнение (1). Там же доказана однозначная разрешимость задачи Гурса для нагруженного гиперболического уравнения с характеристическим вырождением порядка при $x = 0$.

Для уравнения (2) при $b \neq 0$ в работе [9] выписано решение задачи Гурса в явном виде, там же можно посмотреть библиографию работ по краевым задачам для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + bD_{0y}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

где D_{0t}^{ν} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка ν, который определяется следующим образом при $\nu < 0$ [13, с. 9]:

$$D_{at}^{\nu} g(t) = \frac{sign(t-a)}{\Gamma(-\nu)}\int\limits_a^t \frac{g(\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\nu+1}},$$

при $\nu \geqslant 0$ можно определить рекурсивным соотношением

$$D_{at}^{\nu} g(t) = sign(t-a)\frac{d}{dt}D_{at}^{\nu-1} g(t).$$

Уравнение (3) было получено на основе уравнения (1) как пример «качественно нового уравнения влагопереноса», исходя из коллоидной капиллярно-пористой структуры почвы [13, с. 197]. При $\alpha = 1$ это уравнение совпадает с уравнением влагопереноса Аллера (1). Методом Фурье и методом априорных оценок уравнение влагопереноса Аллера с дробной производной Римана – Лиувилля (3) исследовалось в [14, гл. 3]. Единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнения (3) получена в [15].

В работе [16] для более общего уравнения с переменными коэффициентами исследованы локальные и нелокальные краевые задачи, в частности, первая краевая задача, для решения которой получена априорная оценка, из нее следует единственность решения и его устойчивость по правой части и начальному данному. Из последних работ отметим [17], где исследовано нагруженное модифицированное уравнение влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя.

В случае обобщенного уравнения Аллера (3) поток процесса, очевидно, характеризуется выражением $\Pi(x,y) = au_x + bD^{\alpha}_{0y}u_x$, и при известном потоке $\Pi(0,y) = f(y)$ в точке $x = 0$ для любого момента времени $y \in [0,y]$ уравнение (3) переписывается в виде

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + bD^{\alpha}_{0y}\frac{\partial u}{\partial x} = D^{\alpha}_{0y}\int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi + f(y). \tag{4}$$

В данной работе рассматривается задача Гурса для уравнения (4).

1. Основные результаты

Задача 1.1. Найти в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < y \leqslant T\}$ решение $u(x,t)$ уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y}u(x,y) = \tau(x),\\ u(0,y) = \varphi_0.\end{gathered} \tag{5}$$

Пусть $b \neq 0$. Введем обозначения $\mu = -\frac{a}{b}$, $h(x,y) = D^{\alpha}_{0y}\int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi + f(y)$, тогда из (4) имеем:

$$D^{\alpha}_{0y}u_x - \mu u_x = h(x,y). \tag{6}$$

Подействовав на обе части уравнения (6) оператором дробного интегрирования порядка α с учетом обобщенной формулы Ньютона – Лейбница [18, с. 18], получим

$$u_x - \mu D^{-\alpha}_{0y}u_x = D^{-\alpha}_{0y}h(x,\eta) + \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0y}u_x, \tag{7}$$

где

$$D^{-\alpha}_{0y}h(x,\eta) = D^{-\alpha}_{0y}\left[D^{\alpha}_{0y}\int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi + f(y)\right] =$$

$$= \int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0y}\int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi + D^{-\alpha}_{0y}f(y).$$

Проинтегрируем полученное равенство (7) по x от 0 до x :

$$u(x,y) - u(0,y) - \mu D^{-\alpha}_{0y}u(x,y) + \mu D^{-\alpha}_{0y}u(0,y) =$$

$$= \int\limits_0^x (x-\xi)u(\xi,y)d\xi - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0y}\int\limits_0^x (x-\xi)u(\xi,y)d\xi + xD^{-\alpha}_{0y}f(y)+$$

$$+\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0y}u(x,y) - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0y}u(0,y).$$

С учетом (5) последнее равенство перепишется в виде

$$u(x,y) - \int\limits_0^x (x-\xi)u(\xi,y)d\xi - \mu D^{-\alpha}_{0y}u(x,y) = \gamma(x,y), \tag{8}$$

где

$$\gamma(x,y) = \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x) - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(0) + \varphi_0(y) - \mu D^{-\alpha}_{0y}\varphi_0(y) - \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-\xi)\tau(\xi)d\xi + xD^{-\alpha}_{0y}f(y).$$

Перепишем уравнение (8), используя обозначение оператора дробного интегро-дифференцирования в виде

$$u(x,y) - D^{-2}_{0x}u(x,y) - \mu D^{-\alpha}_{0y}u(x,y) = \gamma(x,y). \tag{9}$$

Таким образом, получено нагруженное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с частными дробными интегралами, которое в общем случае было рассмотрено в [19].

Введем в рассмотрение новую функцию

$$w(x,y)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\phi\left(2,1;tx^2\right)\phi\left(\alpha,1;\mu t y^\alpha\right)dt,$$

где $\phi(\xi,\eta;z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\xi k+\eta)}$ — функция Райта [18, с. 23].

Для функции $\phi(\xi,\eta;z)$ справедливы следующие формулы [18; 20]:

$$\frac{d}{dt}\phi(\xi,\eta;z)=\phi(\xi,\eta+\xi;t), \tag{10}$$

$$D_{0z}^{-\epsilon}z^{\eta-1}\phi\left(\xi,\eta;tz^\xi\right)=z^{\eta+\epsilon-1}\phi\left(\xi,\eta+\epsilon;tz^\xi\right). \tag{11}$$

Рассмотрим выражение

$$\left(D_{0x}^{-2}+\mu D_{0y}^{-\alpha}\right)w(x,y).$$

С учетом (10), (11) получим

$$\left(D_{0x}^{-2}+\mu D_{0y}^{-\alpha}\right)w(x,y)=\left(D_{0x}^{-2}+\mu D_{0y}^{-\alpha}\right)\int\limits_0^\infty e^{-t}\phi\left(2,1;tx^2\right)\phi\left(\alpha,1;\mu t y^\alpha\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-t}\left[x^2\phi\left(2,3;tx^2\right)\phi\left(\alpha,1;\mu t y^\alpha\right)+\phi\left(2,1;tx^\alpha\right)\mu y^\alpha\phi\left(\alpha,1+\alpha;\mu t y^\alpha\right)\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(2,1;tx^2\right)\phi\left(\alpha,1;\mu t y^\alpha\right)+\phi\left(2,1;tx^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\alpha,1;\mu t y^\alpha\right)\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(2,1;tx^2\right)\phi\left(\alpha,1;\mu t y^\alpha\right)\right]dt=\int\limits_0^\infty e^{-t}\phi\left(2,1;tx^2\right)\phi\left(\alpha,1;\mu t y^\alpha\right)dt-1.$$

Таким образом, имеем

$$w(x,y)-D_{0x}^{-2}w(x,y)-\mu D_{0y}^{-\alpha}w(x,y)=1. \tag{12}$$

Далее рассмотрим свертку Лапласа для интегрируемых функций $\gamma(x,y)$ и $w(x,y)$:

$$(\gamma*w)(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y\gamma(\xi,\eta)w(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi.$$

Принимая во внимание определение оператора дробного интегрирования, свойства свертки, а также учитывая (8), (12), получим

$$(\gamma*w)(x,y)=\left(u(x,y)-D_{0x}^{-2}u(x,y)-\mu D_{0y}^{-\alpha}u(x,y)\right)w(x,y)=$$

$$=u*\left(w(x,y)-D_{0x}^{-2}w(x,y)-\mu D_{0y}^{-\alpha}w(x,y)\right)=u*1=\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(\xi,\eta)d\eta d\xi.$$

Продифференцируем последнее равенство дважды по переменным x и y, в результате получим:

$$u(x,y)=\frac{d^2}{dxdy}(\gamma*w)=\frac{d^2}{dxdy}\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(\xi,\eta)d\eta d\xi=$$

$$=\gamma(x,y)w(0,0)+\int\limits_0^x\gamma(\xi,\eta)w_x(x-\xi,0)d\xi+\int\limits_0^y\gamma(\xi,\eta)w_y(0,y-\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y\gamma(\xi,\eta)w_{xy}(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi.$$

Так как

$$w(0,0) = \int_0^\infty e^{-t}\phi(2,1;0)\phi(\alpha,1;0)dt = \int_0^\infty e^{-t}dt,$$

то окончательно приходим к равенству

$$u(x,y) = \gamma(x,y) + \int_0^x \gamma(\xi,y)w_x(x-\xi,0)d\xi + \int_0^y \gamma(\xi,\eta)w_y(0,y-\eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^x\int_0^y \gamma(\xi,\eta)w_{xy}(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi. \quad (13)$$

Таким образом, единственное решение задачи 1.1 задается формулой (13).

Существование единственного интегрируемого решения уравнения следует из общей теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Имеет место

Теорема 1.1. Пусть $b \neq 0$, $\tau(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$, $\varphi \in C[0,T] \cap^2 (0,T)$ и выполнено условие $\tau(0)\varphi(0)$. Тогда единственное решение $u(x,y) \in L(\Omega)$ задачи 1.1 для уравнения (4) представимо в виде (13).

Заключение

Таким образом, в данной работе в явном виде выписано решение задачи Гурса для нагруженного уравнения влагопереноса Аллера дробного порядка, предложенного в качестве математической модели процесса переноса влаги в почвах с учетом их фрактальной структуры.

Литература

[1] Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. Vol. 8. No. 1. P. 62–64. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00913245.

[2] Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 19. No. 2. P. 100–116. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00282277.

[3] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. Москва: Наука, 2012. 232 с. URL: https://b-ok.global/book/2605019/1641ff; https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619.

[4] Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 18. С. 280–285. URL: http://www.mathnet.ru/links/82362def804d3e3d488666fa1c4a86d6/de4442.pdf.

[5] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 507–511. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=41205662.

[6] Евдокимова Н.Н., Пулькина Л.С. Нелокальная задача для одного вырождающего гиперболического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета. 1999. № 2. С. 67–70.

[7] Карсанова Ж.Т., Нахушева Ф.М. Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Владикавказский математический журнал. 2002. Т. 4. № 2. С. 31–37. URL: http://www.mathnet.ru/links/64638f3f0a23c648c3b07b258a8970c4/vmj266.pdf; https://elibrary.ru/item.asp?id=11636376.

[8] Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 815–826. URL: http://www.mathnet.ru/links/f0aaa518cd876dfc034263a267f667c6/de11086.pdf.

[9] Хубиев К.У. О математической модели уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1 (16). С. 56–65. DOI: http://doi.org/10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-56-65.

[10] Бештоков М.Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041. DOI: https://www.libnauka.ru/item.php?doi=10.7868/S0044466917120092.

[11] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 72–81. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17962289.

[12] Нахушев А.М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. № 5. С. 1008–1011. URL: http://www.mathnet.ru/links/c07c76541883e2b7e88f73589c0c715b/dan42049.pdf.

[13] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с. URL: https://booksee.org/book/441848.

[14] Керефов М.А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 75 с. URL: https://www.dissercat.com/content/kraevye-zadachi-dlya-modifitsirovannogo-uravneniya-vlagoperenosa-s-drobnoi- po-vremeni-proizv.

[15] Керефов М.А., Геккиева С.Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Физика. Математика. 2017. № 2. С. 106–112. URL: http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2017/02/2017-02-11.pdf.

[16] Бештоков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана – Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778. DOI: http://doi.org/10.1134/S0374064118060055.

[17] Бештоков М.Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175. DOI: http://doi.org/10.35634/vm200202.

[18] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005. 199 с. URL: https://www.studmed.ru/pshu-av-uravneniya-v-chastnyh-proizvodnyh-drobnogo-poryadka_a69906cee95.html.

[19] Псху А.В. Решение двумерного интегрального уравнения Абеля второго рода // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 6 (74). С. 75–80. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28140855.

[20] Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. Vol. 8. No. 29. P. 71–79. DOI: http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14

Submited: 4.03.2020
Revised: 18.03.2020
Accepted: 25.05.2020

S.Kh. Gekkieva
Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation
E-mail: gekkieva_s@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2135-2115
M.M. Karmokov
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation
E-mail: mkarmokov@yandex.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5189-6538
M.A. Kerefov
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation
E-mail: kerefov@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7442-5402

ON BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALIZED ALLER EQUATION

ABSTRACT

The mathematical models of fluid filtration processes in porous media with a fractal structure and memory are based on differential equations of fractional order in both time and space variables. The dependence of the soil water content can significantly affect the moisture transport in capillary-porous media. The paper investigates the generalized Aller equation widely used in mathematical modeling of the processes related to water table dynamics in view of fractal structure. As a mathematical model of the Aller equation with Riemann — Liouville fractional derivatives, a loaded fractional order equation is proposed, and a solution to the Goursat problem has been written out for this model in explicit form.

Key words: Aller equation, Goursat problem, Riemann — Liouville fractional integrodifferential operator, moisture transfer equation, generalized Newton — Leibniz formula, loaded equation, Volterra equation of the second kind, Laplace convolution.

Citation. Gekkieva S.Kh., Karmokov M.M., Kerefov M.A. On boundary value problem for generalized Aller equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 7–14. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-7-14. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the author: © *Gekkieva Sakinat Khasanovna* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, scientific secretary, senior researcher of the Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 2, Shortanova street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

© *Karmokov Mukhamed Matsevich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, 173, Chernyshevsky street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

© *Kerefov Marat Aslanbievich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, 173, Chernyshevsky street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

References

[1] Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 62–64. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00913245.

[2] Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1965, vol. 19, no. 2, pp. 100–116. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00282277.

[3] Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. Available at: https://b-ok.global/book/2605019/1641ff; https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619. (In Russ.)

[4] Vogakhova V.A. A boundary value problem with A.M. Nakhushev's nonlocal condition for a pseudoparabolic equation of moisture transfer. *Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285. Available at: http://www.mathnet.ru/links/82362def804d3e3d488666fa1c4a86d6/de4442.pdf. (In Russ.)

[5] Soldatov A.P., Shhanukov M.H. Boundary value problems with A.A. Samarskii general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations. *Doklady Mathematics*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=41205662. (In Russ.)

[6] Evdokimova N.N., Pulkina L.S. Non-local problem for a single degenerate hyperbolic equation. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 1999, no. 2, pp. 67–70. (In Russ.)

[7] Karsanova Zh.T., Nakhusheva F.M. On a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2002, vol. 4, no. 2, pp. 31–37. Available at: http://www.mathnet.ru/links/64638f3f0a23c648c3b07b258a8970c4/vmj266.pdf; https://elibrary.ru/item.asp?id==11636376. (In Russ.)

[8] Kozhanov A.I. On a non-local boundary value problem with variable coefficients for the heat conduction and Aller equation. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 815–826. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0. (In Russ.)

[9] Khubiev K.U. On mathematical models of the Aller equation. *Vestnik KRAUNTS. Fiziko-matematicheskie nauki = Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2016, no. 4-1 (16), pp. 56–65. DOI: http://doi.org/10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-56-65. (In Russ.)

[10] Beshtokov M.Kh. Differential and Difference Boundary Value Problem for Loaded Third-Order Pseudo-Parabolic Differential Equations and Difference Methods for Their Numerical Solution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1973–1993. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542517120089. (In Russ.)

[11] Nakhushev A.M. An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its application to the dynamics of ground moisture and ground water. *Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 72–81. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=17962289. (In Russ.)

[12] Nakhushev A.M. A non-local problem and the Goursat problem for a loaded equation of hyperbolic type, and their applications to the prediction of ground moisture. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 242, no. 5, pp. 1008–1011. Available at: http://www.mathnet.ru/links/c07c76541883e2b7e88f73589c0c715b/dan42049.pdf. (In Russ.)

[13] Nakhushev A.M. Fractional calculation and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p. Available at: https://booksee.org/book/441848. (In Russ.)

[14] Kerefov M.A. Boundary value problems for a modified moisture transfer equation with a time-fractional derivative: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Nalchik, 2000, 75 p. Available at: https://www.dissercat.com/content/kraevye-zadachi-dlya-modifitsirovannogo-uravneniya-vlagoperenosa-s-drobnoi-po-vremeni-proizv. (In Russ.)

[15] Kerefov M.A., Gekkieva S.Kh. A nonlocal boundary value problem for the generalized equation of moisture transfer. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 2, pp. 106–112. Available at: http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2017/02/2017-02-11.pdf. (In Russ.)

[16] Beshtokov M.Kh. Local and non-local boundary value problems for degenerate and non-degenerate pseudo-parabolic equations with the Riemann – Liouville fractional derivative. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 763–778. DOI: http://doi.org/10.1134/S0374064118060055. (In Russ.)

[17] Beshtokov M.K. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 158–175. DOI: http://doi.org/10.35634/vm200202. (In Russ.)

[18] Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005, 199 p. Available at: https://www.studmed.ru/pshu-av-uravneniya-v-chastnyh-proizvodnyh-drobnogo-poryadka_a69906cee95.html. (In Russ.)

[19] Pskhu A.V. Solution of a two-dimensional Abel integral equation of the second kind. *News of the Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2016, no. 6 (74), pp. 75–80. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28140855. (In Russ.)

[20] Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities. *Journal of London Mathematical Society*, 1933, vol. 8, no. 29, pp. 71–79. DOI: http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71.