

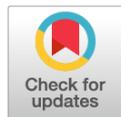


Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-1-78-94

УДК 539.4

Дата: поступления статьи: 25.12.2019
после рецензирования: 22.01.2020
принятия статьи: 28.02.2020



Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanovaLv@samsu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

Р.М. Жаббаров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: were-wolff@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

УТОЧНЕННЫЙ РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА И ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТОДОМ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ

АННОТАЦИЯ

В статье получены приближенные решения задач о ползучести вращающегося диска и о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести методом квазилинеаризации. Основной целью исследования был анализ поведения решений в зависимости от значения показателя ползучести. С помощью метода квазилинеаризации найдены четыре приближения решения задачи. Показано, что построенные приближения сходятся к предельному численному решению задачи. Интересной особенностью данной задачи является тот факт, что максимальное значение тангенциального напряжения достигается не на круговом контуре, а во внутренней точке пластины. Показано, что метод квазилинеаризации является эффективным методом решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: метод квазилинеаризации, установившаяся ползучесть вращающегося диска, всестороннее растяжение пластины в условиях ползучести, поле напряжений, нелинейные задачи, степенной закон Бейли — Норттона, аналитическое решение.

Благодарности: авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (проект 19-31-90100).

Цитирование. Степанова Л.В., Жаббаров Р.М. Уточненный расчет установившейся ползучести вращающегося диска и пластины с круговым отверстием в условиях ползучести методом квазилинеаризации // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 1. С. 78–94. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-78-94>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторах: © Степанова Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Жаббаров Рамиль Муритович — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Настоящая статья является естественным продолжением использования метода квазилинеаризации и расчетов, выполненных в [1]. Как отмечалось в [1], современные компьютерные технологии обеспечивают быстрое и точное численное решение сложных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и

уравнений в частных производных. Однако, проблема отыскания именно аналитических приближенных решений нелинейных задач становится еще более актуальной в настоящее время [1–10]. Очевидно, что правильное и подходящее сочетание современных компьютерных технологий и приближенных решений или редукций нелинейных систем дифференциальных уравнений дает многообещающий путь исследования физических, экономических, химических, биологических задач и других задач естествознания [2–4]. В этом отношении перспективным представляются метод квазилинеаризации и его модификации и усовершенствования, в рамках которых приближенное решение строится посредством искусственных комбинаций и суперпозиций методов линейного приближения и использования возможностей современных вычислительных программ и алгоритмов. Последовательность приближенных решений строится таким образом, чтобы добиться быстрой сходимости, а по возможности и монотонности процесса [5; 6]. Более того, зачастую принципиальный интерес для приложений представляют именно приближенные аналитические решения, а не численные решения [5–9]. Например, в работах [10–13] развит результативный метод идентификации параметров сферической полости или сферического включения (центра сферы и ее радиуса), основанный на использовании инвариантных интегралов. В [10–13] введены в рассмотрение инвариантные интегралы взаимодействия, рассматриваемые в механике разрушения, которые можно аналитически вычислить, ибо имеется аналитическое решение задачи об одноосном растяжении изотропного линейно-упругого пространства со сферической полостью. Инвариантные интегралы сохраняют свое свойство независимости от пути интегрирования и для нелинейных сред, например, для сред со степенными определяющими уравнениями, и, следовательно, развитый в [10; 11] метод может быть распространен и на среды с нелинейными определяющими соотношениями при наличии приближенного, но аналитического решения задачи о растяжении пространства со сферической полостью или сферическим включением. Поэтому особенно важными и актуальными являются методы построения аналитических решений нелинейных задач [7–9].

В работе Ватульяна с соавторами [14] представлен новый эффективный способ реконструкции свойств слоистых функционально-градиентных материалов, базирующийся на методе квазилинеаризации [5], для ряда нелинейных задач. Возможности применения данного метода в работе продемонстрированы на модельном примере решения обратной коэффициентной задачи о реконструкции свойств неоднородного изотропного слоя в классе квадратичных функций. Исследована возможность применения метода квазилинеаризации при решении обратных коэффициентных задач теории упругости на модельном примере идентификации неоднородных свойств упругого изотропного слоя (в классе квадратичных функций) по данным акустического зондирования. Проведен анализ численных результатов для различных законов изменения восстанавливаемой функции.

В [15] излагается математическая технология решения линейных и нелинейных краевых задач. На базе методов квазилинеаризации, операционного исчисления и расщепления по пространственным переменным получены точные и приближенные аналитические решения уравнений в частных производных первого и второго порядка. Найдены условия однозначной разрешимости нелинейной краевой задачи и даётся оценка скорости сходимости итерационного процесса. На примере пробных функций приведены результаты сравнения аналитических решений, полученных по предложенной математической технологии, с точным решением краевых задач и с численными решениями по известным методам.

Метод вейвлет-квазилинеаризации рассмотрен в [16]. Целью данной статьи является приложение метода Хаара вейвлет-квазилинеаризации для решения одномерной нелинейной задачи теплопроводности. Для различных типов краевых условий показана эффективность данного метода.

В работе [17] предложен двухсеточный метод квазилинеаризации для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Численные решения, полученные данным методом, показывают, что для широкого класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, включая уравнения Фишера — Колмогорова, Блазиуса, Эмдена — Фаулера, не будут более сложными, чем решения соответствующих линеаризованных уравнений. Авторы отмечают, что предложенный ими двухсеточный метод квазилинеаризации при том же затрачиваемом времени обеспечивает существенно меньшее количество вычислений и приводит к более быстрой сходимости метода.

В статье [18] получены аналитические приближенные решения физических задач, сводящихся к граничным задачам для уравнений Блазиуса, Дюффинга, Лейна — Эмдена и Томаса — Ферми. Показано, что метод квазилинеаризации позволяет получить приближенные решения с хорошей точностью. Всего несколько итераций дают возможность получить аналитические решения, совпадающие с численными оценками.

В целом теория метода квазилинеаризации в настоящее время продолжает активно развиваться [19–24]. Различные варианты данного метода и его обобщения предложены в [19–24], где рассмотрены как различные уточнения данного подхода, так и расширения областей приложения рассматриваемой техники.

В книге [4] отмечается, что вопросы, связанные с существованием и единственностью решений нелинейных дифференциальных уравнений, весьма сложны и тонки, и в этой области есть много белых пятен. Для того чтобы иметь аналитический фундамент для построения решения нелинейного дифференциального уравнения (например, двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения) и разработать алгоритмы численного решения, необходимо прибегнуть к методике аппроксимаций. В этом отношении метод квазилинеаризации позволяет получить решение нелинейного дифференциального уравнения как предел последовательности решений линейных дифференциальных уравнений. Каждое из этих уравнений нетрудно решить численно.

Поэтому целью настоящей статьи является приближенное решение задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести и уточненное решение задачи об установившейся ползучести вращающегося диска с помощью метода квазилинеаризации.

1. Установившаяся ползучесть вращающегося диска и высшие приближения

В первой части статьи обратимся к классической задаче о ползучести вращающегося диска. Оригинальная постановка задачи приведена в [6]. Задача о ползучести вращающегося диска является удобной модельной задачей, на примере которой можно рассмотреть влияние значения показателя нелинейности на количество необходимых приближений.

Поэтому приведем уравнения краевой задачи о ползучести вращающегося диска. Рассматривается круглый диск постоянной толщины с круговым отверстием радиуса a и внешним радиусом b . Пусть диск вращается с угловой скоростью ω , при этом возникает центробежная сила, пропорциональная $Q = \rho\omega^2$, где ρ – плотность материала диска. Геометрия задачи диктует выбор цилиндрической системы координат r, θ, z . Поскольку нагрузка является осесимметричной, то искомые механические величины не зависят от полярного угла θ . В рамках предположения о реализации плоского напряженного состояния отсутствует зависимость от координаты z . Пусть $u = u(r)$ – радиальное перемещение. Соотношения Коши принимают простой вид

$$\varepsilon_r = du/dr, \quad \varepsilon_\theta = u/r. \quad (1.1)$$

Условие совместности деформаций имеет вид:

$$d\varepsilon_\theta/dr = (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)/r. \quad (1.2)$$

Решение задачи должно удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r} (\sigma_\theta - \sigma_r) - Qr. \quad (1.3)$$

Краевые условия задачи требуют, чтобы внешний и внутренний края диска были свободны от напряжений:

$$\sigma_r(r = a) = 0, \quad \sigma_r(r = b) = 0. \quad (1.4)$$

Определяющие уравнения задачи для плоского напряженного состояния имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} (2\sigma_r - \sigma_\theta) = F_r(\sigma_r, \sigma_\theta), \quad (1.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} (2\sigma_\theta - \sigma_r) = F_\theta(\sigma_r, \sigma_\theta), \quad (1.6)$$

$$\sigma_e^2 = \sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2. \quad (1.7)$$

В соответствии с методом квазилинеаризации требуется провести линеаризацию определяющих соотношений (1.5),(1.6) путем их разложения в ряд Тейлора в окрестности $(k-1)$ -го приближения и определяющие уравнения заменяются на:

$$\dot{\varepsilon}_r = a_r + b_{rr}\sigma_r + b_{r\theta}\sigma_\theta, \quad (1.8)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = a_\theta + b_{\theta r}\sigma_r + b_{\theta\theta}\sigma_\theta, \quad (1.9)$$

где $b_{ij}(i, j = r, \theta)$ – коэффициенты разложения, $a_i(i = r, \theta)$ – свободные члены. При этом значения коэффициентов вычисляются по формулам, где компоненты тензора напряжений берутся из $(k-1)$ -го приближения. Коэффициенты a_i, b_{ij} вычисляются по текущему приближению:

$$a_r = F_r - \sigma_r \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$a_\theta = F_\theta - \sigma_r \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{rr} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r}, \quad b_{r\theta} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{\theta r} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r}, \quad b_{\theta\theta} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta}.$$

Уравнения (1.8) и (1.9) могут быть представлены в следующей форме:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{b_{\theta\theta}}(\dot{\epsilon}_\theta - b_{\theta r}\sigma_r - a_\theta),$$

$$\dot{\epsilon}_r = a_r - \frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}a_\theta + \frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}\dot{\epsilon}_\theta + \left(b_{rr} - \frac{b_{r\theta}b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\right)\sigma_r.$$

Комбинация последних уравнений с условием совместности и уравнением равновесия приводит к системе двух линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r}(1 + \frac{b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}) & \frac{1}{r} \frac{1}{b_{\theta\theta}} \\ \frac{1}{r} \left(b_{rr} - \frac{b_{r\theta}b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\right) & \frac{1}{r} \frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -Qr - \frac{a_\theta}{b_{\theta\theta}} \\ \frac{1}{r} \left(a_r - \frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}a_\theta\right) \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Результаты вычислений представлены на рис. 1.1–1.8. Здесь приведены распределения компонент тензора напряжений и скоростей деформаций ползучести во вращающемся диске для различных значений показателя ползучести. Из рис. 1.1–1.8 видно, что с ростом значения показателя нелинейности материала возрастает и число итераций, необходимых для достижения предельного решения задачи. Так, на рис. 1.1, 1.2 приведены результаты использования метода квазилинеаризации для $n = 7$. На рис. 1.3, 1.4 приведены результаты использования метода квазилинеаризации для $n = 9$. Видно, что для достижения предельного численного решения задачи при $n = 7$ необходимы лишь 5 итераций, тогда как для $n = 9$ нужно построить 6 итераций. На рис. 1.5–1.8 показаны скорости деформаций ползучести, построенные для $n = 7$ и $n = 9$. Результаты решения линейной задачи на рисунках отсутствуют, ибо кривые существенно отличаются от решения нелинейных задач. Показано, что для $n = 9$ только шестая итерация позволяет получить предельное численное решение.

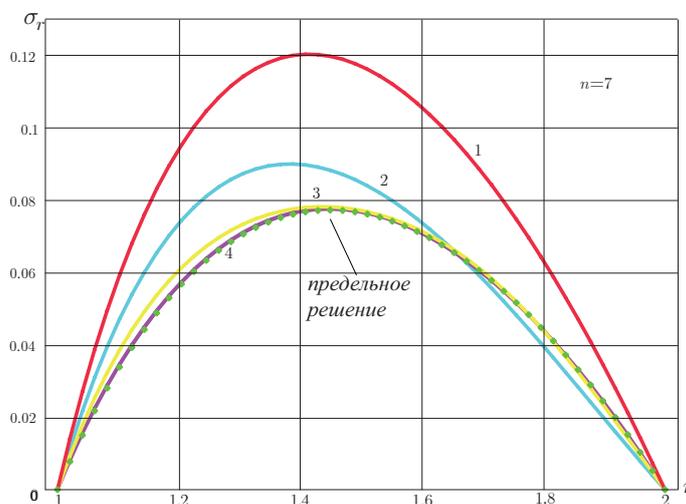


Рис. 1.1. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r для $n = 7$
 Figure 1.1. Distribution of the stress tensor component σ_r for $n = 7$

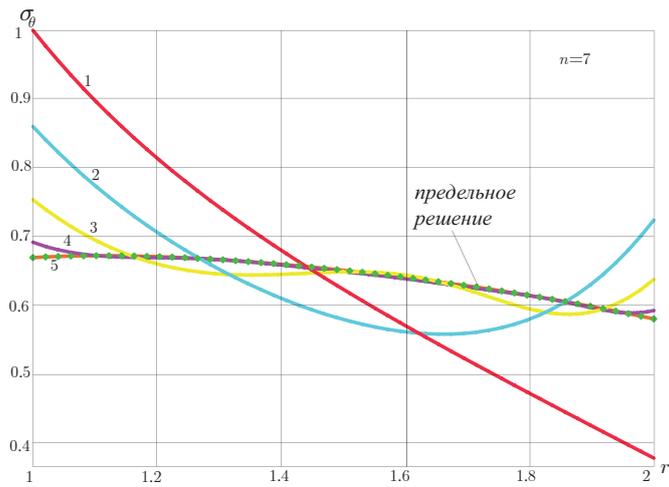


Рис. 1.2. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ для $n = 7$
 Figure 1.2. Distribution of the stress tensor component σ_θ for $n = 7$

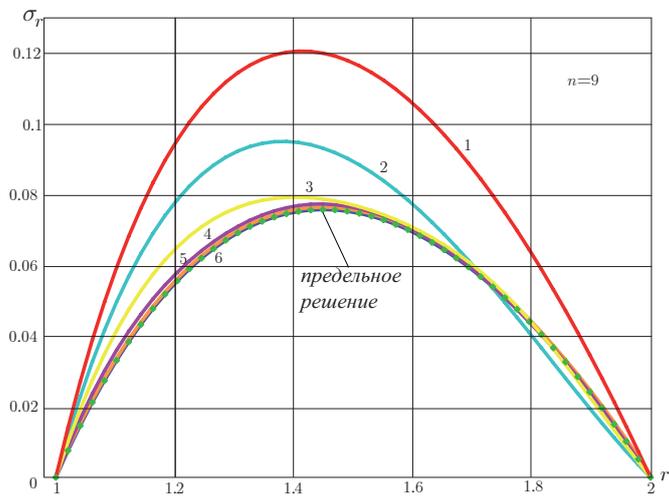


Рис. 1.3. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r для $n = 9$
 Figure 1.3. Distribution of the stress tensor component σ_r for $n = 9$

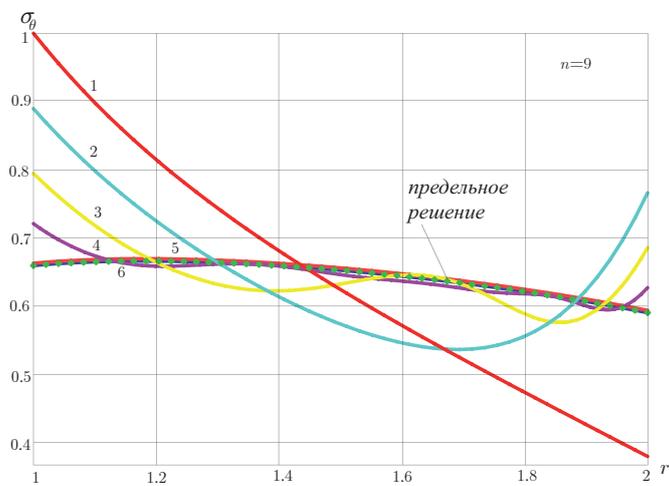


Рис. 1.4. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ для $n = 9$
 Figure 1.4. Distribution of the stress tensor component σ_θ для $n = 9$

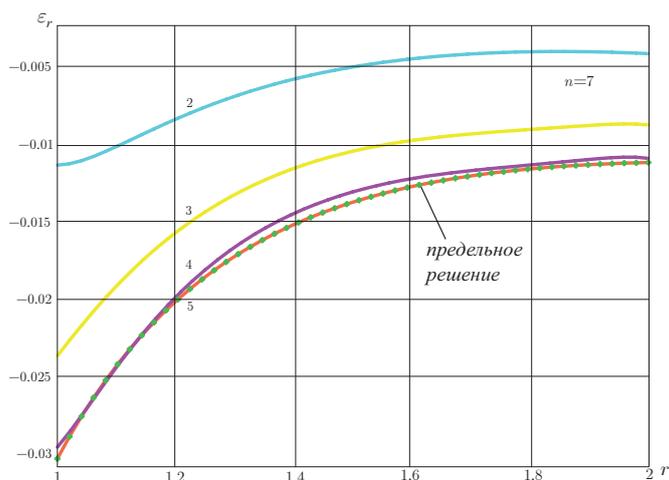


Рис. 1.5. Распределение компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_r$ для $n = 7$
Figure 1.5. Distribution of the strain rate tensor component $\dot{\epsilon}_r$ for $n = 7$

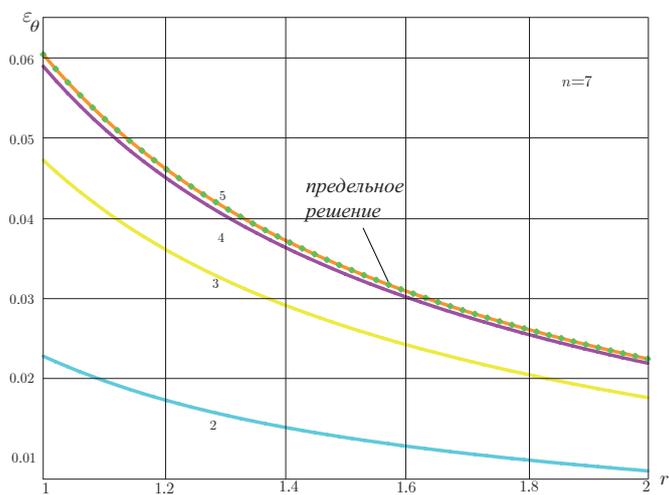


Рис. 1.6. Распределение компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_\theta$ для $n = 7$
Figure 1.6. Distribution of the strain rate tensor component $\dot{\epsilon}_\theta$ for $n = 7$

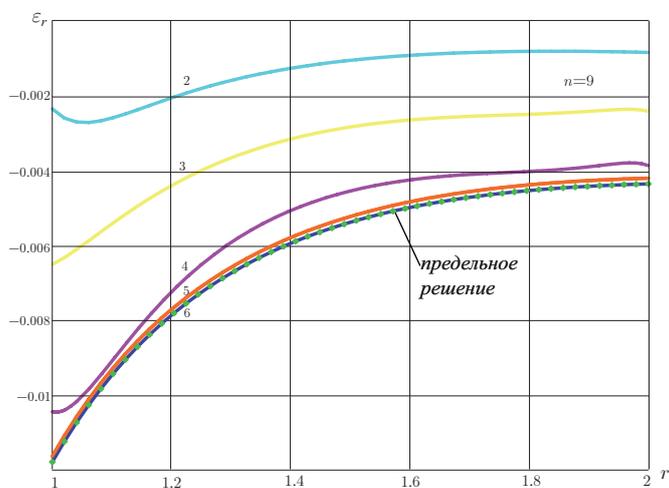


Рис. 1.7. Распределение компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_r$ для $n = 9$
Figure 1.7. Distribution of the strain rate tensor component $\dot{\epsilon}_r$ for $n = 9$

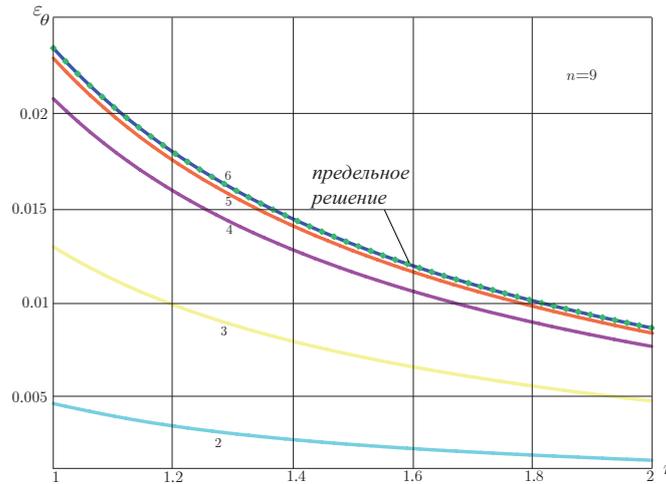


Рис. 1.8. Распределение компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_\theta$ для $n = 9$
 Figure 1.8. Distribution of the strain rate tensor component $\dot{\epsilon}_\theta$ for $n = 9$

2. Физическая постановка задачи о всестороннем растяжении пластины с круговым отверстием в условиях ползучести и метод квазилинеаризации

Рассматривается пластина с круговым отверстием (2.1), поведение материала которой характеризуется степенным законом Бейли — Нортон

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \sigma_e^{n-1} S_{ij},$$

где $\sigma_e^2 = \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2$ — интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ — компоненты девиатора тензора напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера. Целью задачи является определение напряженно-деформированного состояния в пластине с центральным круговым отверстием в условиях ползучести. Систему уравнений данной задачи формируют уравнение равновесия, условие совместности

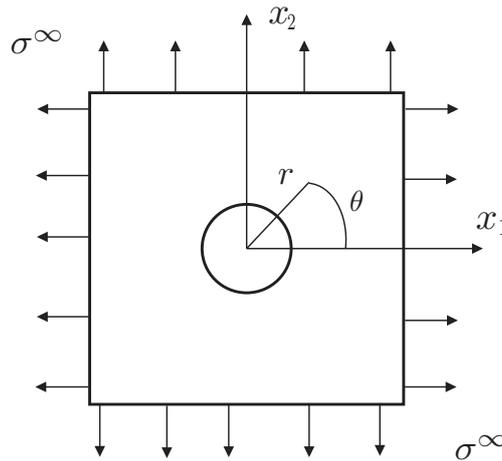


Рис. 2.1. Пластина с центральным круговым отверстием
 Figure 2.1. Center circular hole plate

деформаций и определяющие уравнения степенного закона ползучести. Уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r} (\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (2.1)$$

Условие совместности деформаций принимает форму:

$$\frac{d\dot{\epsilon}_\theta}{dr} = \frac{1}{r} (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta). \quad (2.2)$$

Определяющие уравнения задачи для рассматриваемого нагружения принимают вид:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) = F_r(\sigma_r, \sigma_\theta), \quad (2.3)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) = F_\theta(\sigma_r, \sigma_\theta). \quad (2.4)$$

Граничные условия для данной задачи выглядят следующим образом:

$$\sigma_r(r = a) = 0, \quad \sigma_r(r = \infty) = \sigma^\infty,$$

где σ^∞ — приложенные напряжения.

Система из уравнений (2.1)–(2.4) представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta, \sigma_r, \sigma_\theta$. Найти аналитическое решение сформулированной системы не удастся. Однако можно построить приближенное аналитическое решение задачи с помощью метода квазилинеаризации. Данный метод является итерационным и на каждой итерации вычисляется приближенное решение $(\sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)})$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации. В соответствии с методом требуется провести линеаризацию определяющих соотношений (2.3), (2.4) путем их разложения в ряд Тейлора в окрестности $(k-1)$ -го приближения, и определяющие уравнения заменяются на:

$$\dot{\epsilon}_r = a_r + b_{rr}\sigma_r + b_{r\theta}\sigma_\theta, \quad (2.5)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = a_\theta + b_{\theta r}\sigma_r + b_{\theta\theta}\sigma_\theta, \quad (2.6)$$

где $b_{ij}(i, j = r, \theta)$ — коэффициенты разложения, $a_i(i = r, \theta)$ — свободные члены. При этом значения коэффициентов вычисляются по формулам, где компоненты тензора напряжений берутся из $(k-1)$ -го приближения. Коэффициенты a_i, b_{ij} вычисляются по текущему приближению:

$$a_r = F_r - \sigma_r \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$a_\theta = F_\theta - \sigma_r \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r} - \sigma_\theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{rr} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_r}, \quad b_{r\theta} = \frac{\partial F_r}{\partial \sigma_\theta},$$

$$b_{\theta r} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r}, \quad b_{\theta\theta} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta}.$$

Уравнения (2.5)–(2.6) могут быть представлены в форме (2.7) – (2.8):

$$\sigma_\theta = \frac{1}{b_{\theta\theta}} (\dot{\epsilon}_\theta - b_{\theta r}\sigma_r - a_\theta), \quad (2.7)$$

$$\dot{\epsilon}_r = a_r - \frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}} a_\theta + \frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}} \dot{\epsilon}_\theta + \left(b_{rr} - \frac{b_{r\theta} b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}} \right) \sigma_r. \quad (2.8)$$

В качестве примера было приведено решение для степенного закона $f(\sigma_e) = B\sigma^n$, где B, n — константы материала, определяемые экспериментально. Предварительно был осуществлен переход к безразмерным величинам. Скомбинировав уравнения (2.1), (2.2) с (2.7) и (2.8), получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для получения k -го приближения:

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} - \frac{b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{1}{b_{\theta\theta}} \\ \frac{1}{r} \left(b_{rr} - \frac{b_{r\theta} b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}} \right) & -\frac{1}{r} + \frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}} \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{a_\theta}{b_{\theta\theta}} \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \left(a_r - \frac{b_{r\theta} a_\theta}{b_{\theta\theta}} \right) \end{pmatrix}.$$

Результаты решения

С помощью метода квазилинеаризации получено приближенное решение задачи о всестороннем растяжении неупругой пластины с центральным круговым отверстием. Целью решения являлось получение распределений компонент тензора напряжений и компонент тензора скоростей деформаций ползучести. Результаты решения для $n = 5$ представлены на графиках (рис. 2.2–2.11). На рис. 2.2 и 2.3 проиллюстрированы графики компонент тензора напряжений σ_r и σ_θ , полученных с помощью метода квазилинеаризации для $k = 1.4$, где k – номер итерации, а также нулевые приближения. На рис. 2.4 и 2.5 изображены сравнения 4-го приближения компонент тензора напряжений с решениями, полученными с помощью метода Рунге – Кутты – Фельберга и пакета Simulia ABAQUS. Можно отметить интересную особенность распределения компоненты σ_θ . Максимальное значение компоненты достигается не на контуре кругового отверстия, а на некотором расстоянии от него.

Для $n = 2$ удалось найти аналитическое представление напряжений на первой итерации:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3r^2} + \frac{C_1 r^{1-3\sqrt{5}/5}}{(r^2 + 1/3 + 3\sqrt{5}/5)^{1/2(1-3\sqrt{5}/5)}} + \\ &+ \frac{C_2 r^{1+3\sqrt{5}/5}}{(r^2 + 1/3 + 3\sqrt{5}/5)^{1/2(1+3\sqrt{5}/5)}}, \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3r^2} + \frac{C_1 r^{1-3\sqrt{5}/5} (1/3 + 3\sqrt{5}/5 + 3r^2 \sqrt{5}/5)}{(r^2 + 1/3 + 3\sqrt{5}/5)^{3/2(1-\sqrt{5}/5)}} + \\ &+ \frac{C_2 r^{1+3\sqrt{5}/5} (1/3 + 3\sqrt{5}/5 - 3r^2 \sqrt{5}/5)}{(r^2 + 1/3 + 3\sqrt{5}/5)^{3/2(1+\sqrt{5}/5)}}, \\ C_1 &= \frac{15^{3\sqrt{5}/10} (20 + 9\sqrt{5})^{-3\sqrt{5}/10}}{3 \left[15^{-3\sqrt{5}/10} (20 + 9\sqrt{5})^{3\sqrt{5}/10} - 15^{3\sqrt{5}/10} (20 + 9\sqrt{5})^{-3\sqrt{5}/10} \right]}, \\ C_2 &= \frac{15^{-3\sqrt{5}/10} (20 + 9\sqrt{5})^{3\sqrt{5}/10}}{3 \left[15^{-3\sqrt{5}/10} (20 + 9\sqrt{5})^{3\sqrt{5}/10} - 15^{3\sqrt{5}/10} (20 + 9\sqrt{5})^{-3\sqrt{5}/10} \right]}. \end{aligned}$$

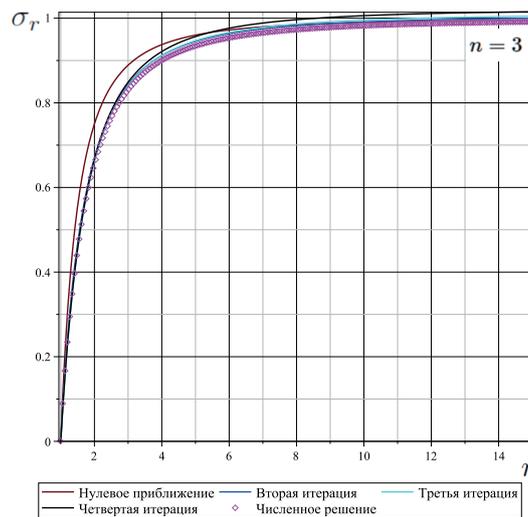


Рис. 2.2. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r для $n = 3$
 Figure 2.2. Distribution of the stress tensor component σ_r for $n = 3$

Результаты решения в пакете Simulia abaqus

В многоцелевом программном комплексе Simulia abaqus с целью проверки достоверности полученного приближенного решения было получено численное решение задачи методом конечного элемента. На рис. 2.12–2.15 показаны результаты конечно-элементного решения.

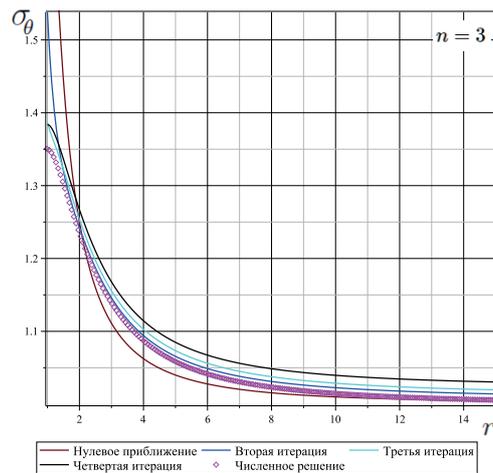


Рис. 2.3. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ для $n = 3$
Figure 2.3. Distribution of the stress tensor component σ_θ for $n = 3$

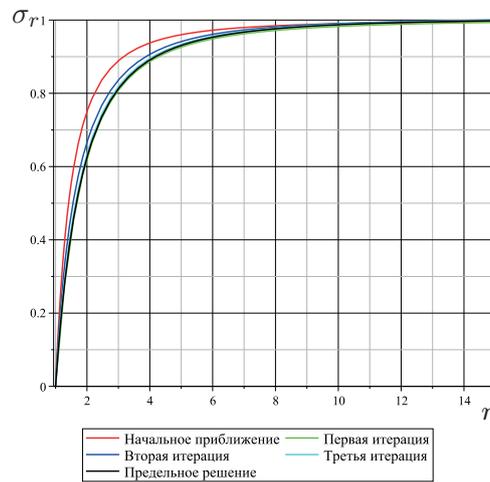


Рис. 2.4. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r для $n = 5$
Figure 2.4. Distribution of the stress tensor component σ_r for $n = 5$

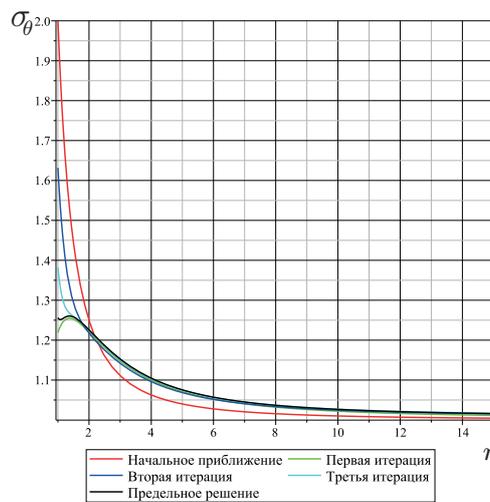


Рис. 2.5. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ для $n = 5$
Figure 2.5. Distribution of the stress tensor component σ_θ for $n = 5$

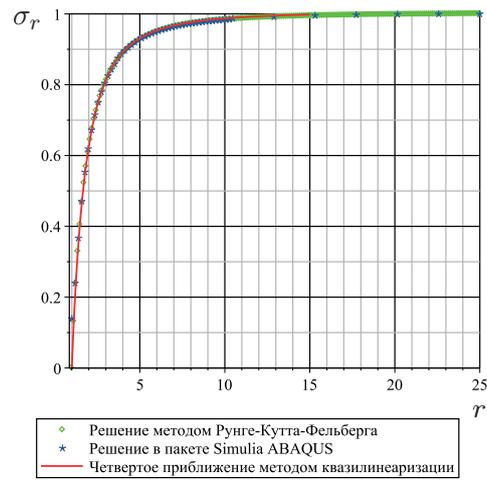


Рис. 2.6. Численное решение. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r .
 Figure 2.6. Numerical solution. Distribution of the stress tensor component σ_r .

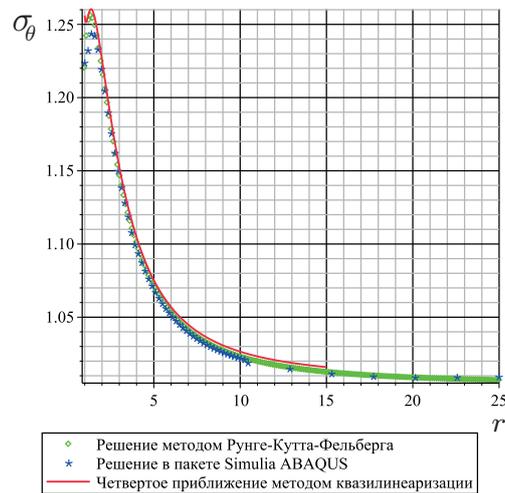


Рис. 2.7. Численное решение. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ .
 Figure 2.7. Numerical solution. Distribution of the stress tensor component σ_θ .

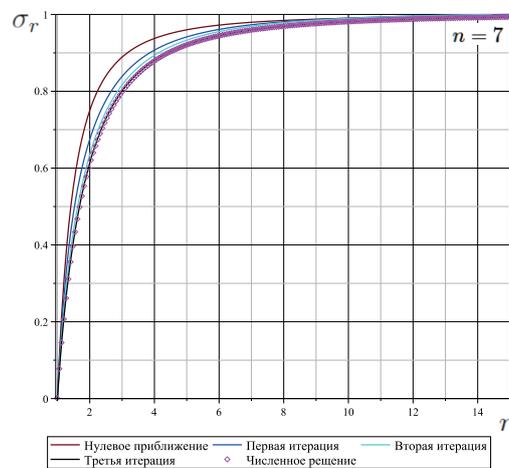


Рис. 2.8. Распределение компоненты тензора напряжений σ_r для $n = 7$.
 Figure 2.8. Distribution of the stress tensor component σ_r for $n = 7$.

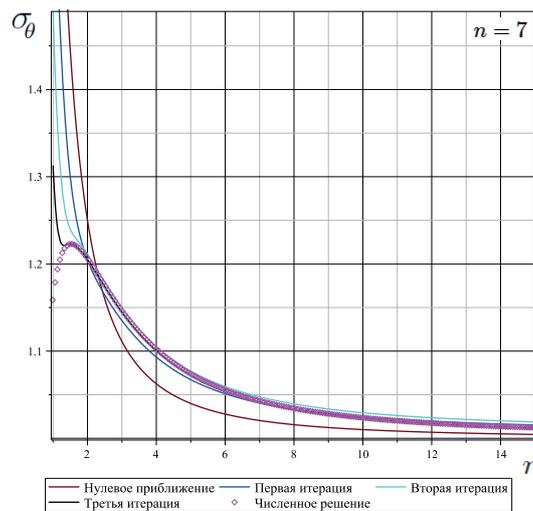


Рис. 2.9. Распределение компоненты тензора напряжений σ_θ для $n = 7$
Figure 2.9. Distribution of the stress tensor component σ_θ for $n = 7$

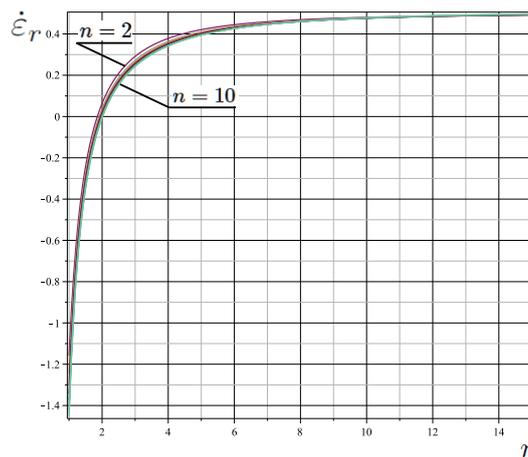


Рис. 2.10. Распределение компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_r$ для $n = 7$
Figure 2.10. Distribution of the strain rate tensor component $\dot{\varepsilon}_r$ for $n = 7$

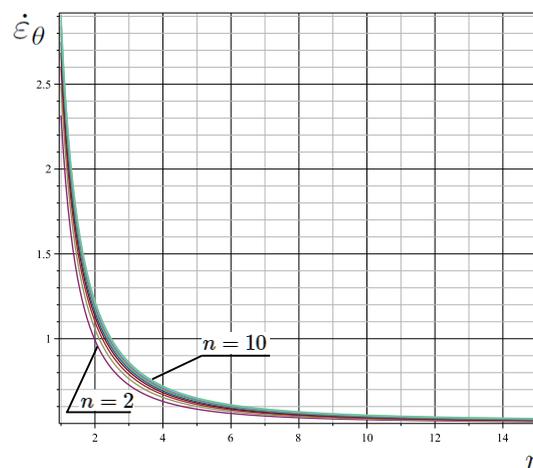


Рис. 2.11. Распределение компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_\theta$ для $n = 7$
Figure 2.11. Distribution of the strain rate tensor component $\dot{\varepsilon}_\theta$ for $n = 7$

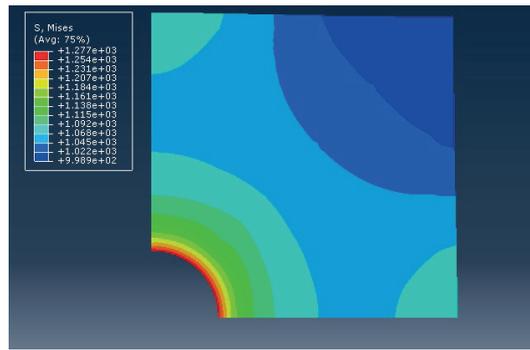


Рис. 2.12. Распределение интенсивности напряжений
 Figure 2.12. Distribution of stress intensity

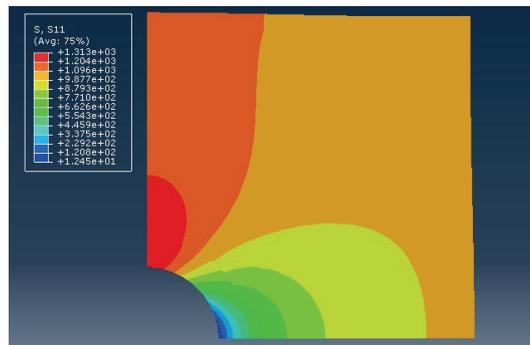


Рис. 2.13. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{11}
 Figure 2.13. Distribution of the stress tensor component σ_{11}

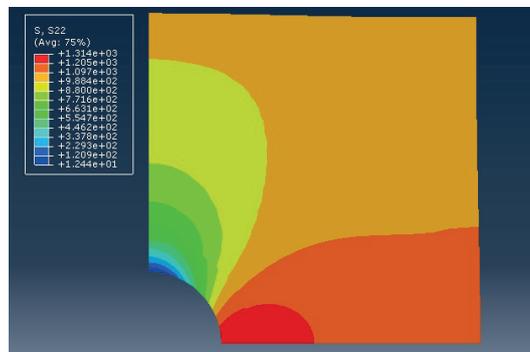


Рис. 2.14. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{22}
 Figure 2.14. Distribution of the stress tensor component σ_{22}

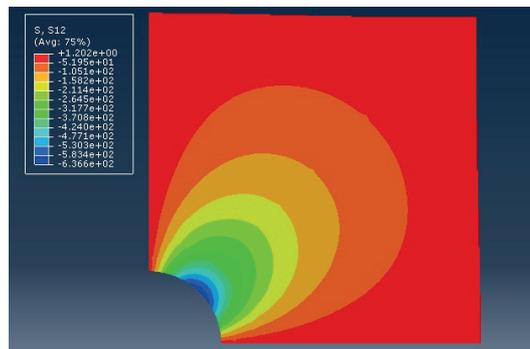


Рис. 2.15. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{12}
 Figure 2.15. Distribution of the stress tensor component σ_{12}

Выводы

• На примере модельной задачи об установившейся ползучести диска рассмотрена техника метода квазилинеаризации для больших значений показателя нелинейности материала: как и следовало ожидать, тем выше показатель нелинейности материала, тем больше итераций необходимо для достижения предельного решения.

• На примере задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием рассмотрена процедура метода квазилинеаризации. Данная задача является удобным примером, ибо для нее можно построить численное решение методом Рунге — Кутты — Фельберга.

• Показано, что четыре итерации сходятся к предельному решению задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести.

• Для $n = 2$ найдено аналитическое решение задачи о ползучести пластины с круговым отверстием под действием всестороннего растяжения.

• Показано, что метод квазилинеаризации является эффективным методом решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Литература

- [1] Степанова Л.В., Жаббаров Р.М. Метод квазилинеаризации для решения задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23. № 2. С. 44–50. URL: <http://www.mathnet.ru/links/1db9d2261df031e22def80a68f677e73/vsgu541.pdf>.
- [2] Nonlinear Mechanics and Physics of Materials / I.V. Andrianov [et al.]. Cham: Springer, 2019. 530 p. URL: <https://b-ok.global/book/3562550/0c6c6f>.
- [3] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010. 368 с. URL: <https://b-ok.global/book/1229828/dd5892>.
- [4] Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. Москва, 2013. 276 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23833140>.
- [5] Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Москва: Мир, 1968. 184 с. URL: <https://b-ok.global/book/4987758/66a517>.
- [6] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир, 1986. 360 с. URL: <https://b-ok.global/book/3095860/ad3ebc>.
- [7] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2006. 242 с.
- [8] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит, 2009. 336 с.
- [9] Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power – low medium // Comptes Rendus – Mechanique. 2008. № 1–2. P. 232–237.
- [10] Shifrin E.I. Symmetry properties of the reciprocity gap functional in the linear elasticity // International Journal of Fracture. 2009. Т. 159. № 2. С. 209–218. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10704-009-9395-7>.
- [11] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // Inverse problems. 2010. Т. 26. № 5. С. 055001. DOI: <http://doi.org/10.1088/0266-5611/26/5/055001>.
- [12] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // International Journal of Solids and Structures. 2013. Т. 50. № 22–23. С. 3707–3716. DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654415040081>.
- [13] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Reconstruction of an ellipsoidal defect an anisotropic elastic solid, using results of one static test // Inverse Problems in Science and Engineering. 2013. Т. 21. № 5. С. 781–800. DOI: <http://doi.org/10.1080/17415977.2012.738677>.
- [14] Ватульян А.О., Явруян О.В., Жаворонкова И.В. Идентификация неоднородных свойств слоя с использованием метода квазилинеаризации // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2014. № 3(181). С. 27–32. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21727152>.
- [15] Якимов А.С. Аналитический метод решения краевых задач. Томск: Национальный исследовательский Томский государственный университет. 2011. 199 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22026519>.
- [16] Aznam S.M., Ghani N.A.C., Chowdhury M.S.H. A numerical solution for nonlinear heat transfer of fin problems using the Haar wavelet quasilinearization method // Results in Physics. 2019. V. 14. P. 102393. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102393>.

- [17] Koleva M., Vulkov L.G. Two-grid quasilinearization approach to ODEs with applications to model problems in physics and mechanics // Computer Physics Communications. 2010. V. 181. P. 663–670. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2009.11.015>.
- [18] Mandelzweig V.B., Tabakin F. Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear ODEs // Computer Physics Communications. 2001. V. 141. P. 268–281. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0010-4655\(01\)00415-5](http://doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00415-5).
- [19] Mkhathshwa M.P., Motsa S.S., Sibanda P. Numerical solution of time-dependent Emden-Fowler equations using bivariate spectral collocation method on overlapping grid // Nonlinear Engineering. 2020. V. 9. P. 299–318. DOI: <http://doi.org/10.1515/nleng-2020-0017>.
- [20] Ibrahim W. Spectral quasilinearisation method for solution of convective heating condition // Engineering Transactions. 2020. V. 68(1). P. 69–87. DOI: <http://doi.org/10.24423/EngTrans.1062.20200102>
- [21] Motsa S.S., Animasaun I.L. Bivariate spectral quasi-linearisation exploration of heat transfer in the boundary layer flow of micropolar fluid with strongly concentrated particles over a surface at absolute zero due to impulsive // International Journal of Computing Science and Mathematics, 2018, issue 9, pp. 455–473. DOI: <http://doi.org/10.1504/IJCSM.2018.095499>.
- [22] Verma A.K., Tiwari D. Higher resolution methods based on quasilinearization and Haar wavelets on Lane–Emden equations // International Journal of Wavelets // Multiresolution and Information Processing. 2019. V. 17(3). 1950005.
- [23] Rani D., Mishra V. Numerical inverse Laplace transform based on Bernoulli polynomials operational matrix for solving nonlinear differential equations // Results in Physics. 2020. V. 16. P. 102836. DOI: <http://doi.org/10.3390/sym11040530>.
- [24] Mkhathshwa M.P., Motsa S.S., Sibanda P. Overlapping multi-domain bivariate spectral method for systems of nonlinear PDEs with fluid mechanics applications // In: Advances in Fluid Dynamics. Chapter 54. P. 685–699. DOI: http://doi.org/10.1007/978-981-15-4308-1_54.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-1-78-94

Submitted: 25.12.2019

Revised: 22.01.2020

Accepted: 28.02.2020

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanovlv@samsu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

R.M. Zhabbarov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: were-wolff@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

REFINED ANALYSIS OF STEADY STATE CREEP OF A ROTATING DISK AND A PLATE WITH A CENTRAL HOLE UNDER UNIFORM TENSILE LOAD BY THE QUAZILINEARIZATION METHOD

ABSTRACT

Refined analysis of the steady state creep of a rotating disk and a plate with a central hole under uniform tensile load by the quasilinearization method is presented. It is shown that the high values of the creep exponent in power law constitutive equations require more iterations in the framework of the quasilinearization method in each problem. The approximation solution of the problem for an infinite plate with the circular hole under creep regime is obtained by the quazilinearization method. Four approximations of the solution of the nonlinear problems are found. It is shown that with increasing the number of approximations the solution converges to the limit numerical solution. It is worth to note that the tangential stress reaches its maximum value not at the circular hole but at the internal point of the plate. It is also shown that quazilinearization method is an effective method for nonlinear problems.

Key words: quazilinearization method, plate comprehensively stretching, stress field in the neighborhood of crack tips, nonlinear problems, Beyley-Norton's power law, analytical solution.

Citation. Stepanova L.V., Zhabbarov R.M. Refined analysis of steady state creep of a rotating disk and a plate with a central hole under uniform tensile load by the quazilinearization method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 78–94. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-78-94>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the authors: © Stepanova Larisa Valentinovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Zhabbarov Ramil Muritovich — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Stepanova L.V., Zhabbarov R.M. Quasilinearization method for the solution to the problem of plate with central circular hole under creep regime. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriiia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, №2, pp. 44–50. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/1db9d2261df031e22def80a68f677e73/vsgu541.pdf>. (In Russ.)
- [2] Andrianov I.V., Manevich A.I., Mikhlin Y.V., Gendelman O.V. *Nonlinear Mechanics and Physics of Materials*. Cham: Springer, 2019, 530 p. Available at: <https://b-ok.global/book/3562550/0c6c6f>.
- [3] Kudryashov N.A. *Methods of nonlinear mathematical physics*. Dolgoprudny: Izdatel'skii dom «Intellect», 2010, 368 p. Available at: <https://b-ok.global/book/1229828/dd5892>. (In Russ.)
- [4] Andrianov I., Avreytsevich Ya. *Methods of asymptotic analysis and synthesis in nonlinear dynamics and mechanics of a deformable rigid body*. Moscow, 2013, 276 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23833140>. (In Russ.)
- [5] Bellman R.E., Kalaba R.E. *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems*. New-York: American Elsevier Publishing Company, 1965. 184 p. Available at: <https://b-ok.global/book/4987758/66a517>. (In Russ.)
- [6] Boyle J.T., Spence J. *Stress analysis for creep*. London: Butterworth, 1983, 360 p. Available at: <https://b-ok.global/book/3095860/ad3ebc>. (In Russ.)
- [7] Stepanova L.V. *Mathematical methods of fracture mechanics*. Samara: Samarskii universitet, 2006, 242 p. (In Russ.)
- [8] Stepanova L.V. *Mathematical methods of fracture mechanics*. Moscow: Fizmatlit, 2009. 336 c. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15213973>. (In Russ.)
- [9] Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power – low medium. (*Comptes Rendus – Mécanique*), 2008, №1–2, pp. 232–237.
- [10] Shifrin E.I. Symmetry properties of the reciprocity gap functional in the linear elasticity. *International Journal of Fracture*, 2009, vol. 159, no. 2, p. 209–218. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10704-009-9395-7>.
- [11] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional. *Inverse problems*, 2010, vol. 26, no. 5, pp. 055001. DOI: <http://doi.org/10.1088/0266-5611/26/5/055001>.
- [12] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 22–23, pp. 3707–3716. DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654415040081>.
- [13] Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Reconstruction of an ellipsoidal defect an anisotropic elastic solid, using results of one static test. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2013, vol. 21, no. 5, pp. 781–800. DOI: <http://doi.org/10.1080/17415977.2012.738677>.
- [14] Vatulyan A.O., Yavryan O.V., Zhavoronkova I.V. Identifying the inhomogeneous properties of an elastic layer using the method of quasilinearization. *zvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science*, 2014, no. 3(181), pp. 27–32. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21727152>.
- [15] Yakimov A.S. Analytical method of solution of boundary value problems. Tomsk: Natsional'nyi issledovatel'skii Tomskii gosudarstvennyi universitet, 2011, 199 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22026519>. (In Russ.)
- [16] Aznam S.M., Ghani N.A.C., Chowdhury M.S.H. A numerical solution for nonlinear heat transfer of fin problems using the Haar wavelet quasilinearization method. *Results in Physics*, 2019, vol. 14, p. 102393. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102393>.
- [17] Koleva M., Vulkov L.G. Two-grid quasilinearization approach to ODEs with applications to model problems in physics and mechanics. *Computer Physics Communications*, 2010, vol. 181, issue 3, pp. 663–670. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2009.11.015>.
- [18] Mandelzweig V.B., Tabakin F. Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear ODEs. *Computer Physics Communications*, 2001, vol. 141, pp. 268–281. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0010-4655\(01\)00415-5](http://doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00415-5).

- [19] Mkhathshwa M.P., Motsa S.S., Sibanda P. Numerical solution of time-dependent Emden-Fowler equations using bivariate spectral collocation method on overlapping grid. *Nonlinear Engineering*, 2020, vol. 9, pp. 299–318. DOI: <http://doi.org/10.1515/nleng-2020-0017>.
- [20] Ibrahim W. Spectral quasilinearisation method for solution of convective heating condition. *Engineering Transactions*, 2020, vol. 68 (1), pp. 69–87. DOI: [10.24423/EngTrans.1062.20200102](https://doi.org/10.24423/EngTrans.1062.20200102).
- [21] Motsa S.S., Animasaun I.L. Bivariate spectral quasi-linearisation exploration of heat transfer in the boundary layer flow of micropolar fluid with strongly concentrated particles over a surface at absolute zero due to impulsive. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 2018, issue 9, pp. 455–473. DOI: <http://doi.org/10.1504/IJCSM.2018.095499>.
- [22] Verma A.K., Tiwari D. Higher resolution methods based on quasilinearization and Haar wavelets on Lane–Emden equations. *International Journal of Wavelets. Multiresolution and Information Processing*, 2019, vol. 17(3), p. 1950005.
- [23] Rani D., Mishra V. Numerical inverse Laplace transform based on Bernoulli polynomials operational matrix for solving nonlinear differential equations. *Results in Physics*, 2020, vol. 16, p. 102836. DOI: <http://doi.org/10.3390/sym11040530>.
- [24] Mkhathshwa M.P., Motsa S.S., Sibanda P. Overlapping multi-domain bivariate spectral method for systems of nonlinear PDEs with fluid mechanics applications. In: *Advances in Fluid Dynamics*, Chapter 54, pp. 685–699. DOI: http://doi.org/10.1007/978-981-15-4308-1_54.