

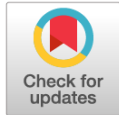


Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68

УДК 517+531.01

Дата: поступления статьи: 17.01.2020  
после рецензирования: 18.02.2020  
принятия статьи: 28.02.2020



*М.В. Шамолин*

Институт механики Московского государственного университета  
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация  
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru. ORCID:  
<http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

## ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ. ЧАСТЬ 4. ЗАДАЧА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ (СЛУЧАЙ ТОЧНЫХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ)

### АННОТАЦИЯ

Данная статья является четвертой работой цикла, при этом для случая точных траекторных измерений формулируются постановка задачи диагностирования, теорема диагностирования и, как следствие теоремы, два алгоритма диагностирования. Рассмотрена методика априорного счета констант, которые в случае использования первого алгоритма диагностирования требуется запоминать в программе диагностирования на компьютере, и других параметров алгоритма. Второй алгоритм не требует запоминания констант, а основан на поиске минимального значения функционала диагностирования из его значений, полученных в процессе диагностирования для априори выбранного набора опорных неисправностей. Обсуждаются различные обобщения теоремы диагностирования: вопросы применимости полученных алгоритмов диагностики при использовании вектора диагностирования меньшей, чем вектор состояния, размерности, и в случае непрерывной экспресс-диагностики без применения поверхности контроля, задача о выборе “минимального” времени диагностирования, задача диагностирования неисправностей, происшедших в окрестностях опорных невырожденных неисправностей и непредусмотренных априорным списком, рассмотрены другие функционалы, решающие задачу диагностирования. Сформулирована расширенная постановка задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

**Ключевые слова:** задача диагностирования, алгоритмы диагностирования, расширенная постановка задачи диагностирования.

**Цитирование.** Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 1. С. 52–68. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Информация об авторе:** © Шамолин Максим Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики, академик РАЕН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

## 1. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений)

Рассмотрим динамическую систему, движение которой может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_0(x, t), \quad (1.1)$$

где  $x(t)$ ,  $f_0(x, t)$  —  $n$ -мерные вектор-функции. Начальные условия уравнения (1.1) будем считать принадлежащими некоторой ограниченной области. Будем полагать, кроме того, что функция  $f_0(x, t)$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения уравнений (1.1) в некоторой области пространства  $R^{n+1}\{x, t\}$ .

Пусть осуществлен синтез управления и его структуры, и параметры выбраны таким образом, что уравнения (1.1) описывают желаемое движение, то есть движение  $x(t)$ , близкое к некоторой программной траектории  $x_*(t)$ . Такую схему принято называть *исправной*.

Конечному набору опорных невырожденных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^l \quad (1.2)$$

из класса возможных, введенного в предыдущих работах [1–3] данного цикла, поставим в соответствие набор обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.3)$$

Здесь  $f_j(x, t)$  — известные вектор-функции, отличающиеся друг от друга той или иной неисправностью (1.2). Модели (1.3) будем называть *невырожденными*. Таким образом, на выбор правых частей уравнений (1.3) вводятся некоторые ограничения.

Модели (1.1) и (1.3) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь своей структурой. Если в заранее неизвестный момент времени происходит одна из возможных неисправностей, то траектория системы (1.1) изменяется и непрерывно продолжается траекторией одной из систем (1.3). Набор моделей (1.1) и (1.3) невырожден, и их можно рассматривать объединенными

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.4)$$

В системе (1.1) могут происходить неисправности, не предусмотренные априорным набором (1.3). Такие неисправности могут возникнуть, например, в окрестностях опорных неисправностей. Это значит, что функции в правых частях уравнений (1.4) могут содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (1.4) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

Для описания систем, содержащих элементы с неполной информацией, используют дифференциальные включения [3; 4]:

$$x' \in F(x, t), \quad (1.5)$$

где вектор  $x$  характеризует отклонение системы (1.1) от состояния, предписанного целью управления, а через  $F(x, t)$  обозначено множество скоростей (1.4)

$$F(x, t) \in f_j(x, t), \quad f = 0, \dots, l, \quad (1.6)$$

и, в частности, таких, которые априори неизвестны, но могут возникнуть и принадлежать, например, сферам влияния скоростей опорных систем (1.4).

Множество  $F(x, t)$  функций  $f_j(x, t)$  дифференциального включения (1.5), (1.6), например, для систем (см. предыдущие работы [1–3] данного цикла)

$$\begin{aligned} x' &= A(x) + B(x)\xi, \\ \xi' &= \Phi(\delta), \\ \delta &= C(t)u + \phi(\sigma), \\ \sigma &= E(t)s, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $x$  — фазовый  $n$ -мерный вектор состояния,  $A(x)$  и  $B(x)$  — определенные, непрерывные матрицы-функции,  $\xi$  — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) рулей высоты, элеронов, направления, составляющие трехмерных векторов  $u$  и  $s$  в (1.7) могут быть приборно измерены или алгоритмически вычислены, формируются с помощью вектора  $\xi(t)$ , моделирующего воздействие управляющего устройства, в соответствии с рассмотренной в [1; 5–7] классификацией неисправностей.

Под решением дифференциального включения (1.5), (1.6) [3; 8; 9] будем понимать абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую соотношению  $x' \in F(x(t), t)$  при всех  $t$  на рассматриваемом интервале времени и соотношению  $x(t_0) \in \Xi$ .

Достаточные условия существования и единственности таких решений для систем с фазовыми ограничениями приводятся в [10–12].

Заметим, наконец, что если в рассматриваемой системе (1.1) произойдет неисправность, не предусмотренная априорным списком опорных неисправностей (1.3), то эта неисправность также должна быть обнаружена как одна из опорных неисправностей, или сообщение о такой ситуации будет являться одним из возможных выходов работы алгоритма, решающего задачу диагностирования.

В принципиальном плане важнее знать, в каком датчике произошла неисправность, чем какая конкретная неисправность произошла в данном датчике.

Процесс анализа траекторий систем (1.4) после выхода фазовой траектории вектора контроля  $y(t)$  на поверхность контроля  $\pi_k$ , то есть процесс, решающий задачу диагностирования, назовем *алгоритмом диагностирования*.

Перейдем к постановке задачи и построению алгоритмов диагностирования.

## 2. Построение алгоритмов диагностирования

В дальнейшем будем считать, что время диагностирования  $\tau$  задано и такое, что  $\tau_0 < \tau < T_0$ . Для этого случая сформулируем и докажем теорему, которая дает возможность построить алгоритмы диагностирования.

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) = (z_1, \dots, z_q), \quad q = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

компоненты которого являются подмножеством компонент фазового вектора состояния  $x(t)$ , причем размерность множества компонент вектора контроля  $y(t)$  не превышает размерность подмножества компонент вектора  $z(t)$ , то есть  $m \leq q$ . Будем предполагать, что вектор  $z(t)$  является таким, что характер функции  $f_j(x, t)$  проявляется в поведении компонент вектора  $z(t)$ . Вектор  $z(t)$  назовем *вектором диагностирования*.

Задача диагностирования может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны невырожденные дифференциальные уравнения (1.4), поверхность контроля  $\pi_k$ , момент времени  $\tau_0$  выхода вектора контроля на  $\pi_k$  и значение фазового вектора  $x(\tau_0)$ . Требуется по измерению фазового вектора  $x(t)$  в некоторые последующие после выхода на  $\pi_k$  моменты времени  $t_k$  на интервале  $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$  с помощью вектора диагностирования  $z(t)$  однозначно определить номер  $j$  функции  $f_j(x, t)$  из (1.4);  $\tau$  — малый промежуток времени,  $\tau_0 + \tau < T_0$ .

Таким образом, по информации о выходе системы на поверхность контроля и в результате слежения за последующей траекторией объекта необходимо определить номер  $j$  возникшей в системе управления объектом неисправности из априорного списка в  $l$  неисправностей.

Перейдем теперь к более детальной формализованной постановке задачи и результатам, которые следуют из этой постановки. При этом начнем с рассмотрения случая  $q = n$ .

Введем следующие обозначения. Через  $x_j(t)$  будет обозначаться точка траектории  $j$ -й системы (1.4). Обозначение  $x(t)$  будет применяться нами в рассуждениях, относящихся ко всем системам, или как общее обозначение точки траектории, когда ее принадлежность той или иной системе (1.4) не установлена, то есть при описании действительного состояния рассматриваемой системы.

Примем за начало отсчета времени момент выхода  $x(t)$  на поверхность  $\pi_k$ . Введем некоторое натуральное число  $N$ . Будем производить траекторные измерения в следующие моменты времени:

$$\tau_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\tau}{N}, \quad t_2 = \frac{2\tau}{N}, \dots, \quad t_N = \tau.$$

Введем также естественные обозначения:

$$x_{0j} = x_j(0), \quad x_{1j} = x_j\left(\frac{\tau}{N}\right), \quad x_{2j} = x_j\left(\frac{2\tau}{N}\right), \dots, \quad x_{Nj} = x_j(\tau),$$

$$x_0 = x(0), \quad x_1 = x\left(\frac{\tau}{N}\right), \quad x_2 = x\left(\frac{2\tau}{N}\right), \dots, \quad x_N = x(\tau).$$

Предположим, что произошла неисправность, траектория системы вышла на поверхность контроля  $\pi_k$  и далее, в течение времени  $\tau$ , мы получили значения  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Нам надо проверить полную систему  $l$  гипотез:  $j$ -я гипотеза,  $j = 0, \dots, l$ , — это утверждение о том, что траектория  $x(t)$  есть траектория  $j$ -й системы (1.4), то есть  $x \equiv x_j$  при условии  $x_{0j} = x_0$ .

Рассмотрим ключевой для нас функционал от  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{1j}, \dots, x_{Nj}$ :

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^n (x_{is} - x_{ijs})^2, \quad j = 0, \dots, l. \quad (2.2)$$

Здесь  $x_{is}$  —  $s$ -я компонента вектора состояния  $x(t)$ , измеренная в момент времени  $t_i, i = 1, \dots, N$ ;  $x_{ijs}$  —  $s$ -я компонента вектора состояния в момент времени  $t_i$ , полученная в результате интегрирования системы (1.4) с  $f_j$  в правой части.

Для каждого  $j$  и  $N$  на интервале  $[0, \tau]$  величина  $S_j^N$  имеет свое значение, то есть является переменной величиной, заданной на множестве функций и зависящей от выбора одной или нескольких функций.

Сформулируем теперь предельную теорему для случая точных траекторных измерений.

**Теорема 2.1.** Для невырожденного конечного набора систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x, t), x(t_0) = x_0 \in X^0, j = 0, \dots, l, \quad (2.3)$$

дифференциального включения  $x' \in F(x, t) \in f_j(x, t)$  и всех  $j$  найдутся такие наборы чисел  $S_j^N, M_j, S_j$  и  $\bar{N}$ , что для  $N > \bar{N}$  с помощью функционала  $S_j^N$  из (2.2), который запишем в виде

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N (x_i - x_{ij})^2, j = 0, \dots, l, \quad (2.4)$$

возникшая в процессе движения в неизвестный момент времени на интервале  $[t_0, T_0]$  неисправность, удовлетворяющая критерию контроля, будет диагностирована однозначно как одна из систем (2.3) с номером  $j$ , если

1.

$$S_j^N \leq M_j : M_j(N) = \frac{\max S_j^N}{\{x_0 \in X^0 : x_0 \in \pi_k\}} = \bar{\sigma} \left( \frac{1}{N} \right) \quad (2.5)$$

или если

2.

$$S_j^N = S_j : S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N. \quad (2.6)$$

*Доказательство теоремы.* Функционал (2.4) запишем, сохраняя для него прежнее обозначение, в приращениях

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N (\Delta_i x - \Delta_i x_j)^2, \quad (2.7)$$

где  $\Delta_i x = |x_i - x_{i-1}|$  — измеренное приращение действительной траектории рассматриваемой системы,  $\Delta_i x_j = |x_{ij} - x_{i-1j}|$  — вычисленное приращение ожидаемой траектории  $j$ -й системы (1.4) от начального значения  $x_{i-1j}$ .

Предположим сначала, что величины  $\Delta_i x_j, i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, l$ , представляются своими точными значениями. Тогда, если  $j$ -я гипотеза верна, то, как нетрудно видеть,  $S_j^N \equiv 0$ , поэтому мы отбрасываем все гипотезы с номерами  $\mu$  такими, что  $S_{\mu}^N \neq 0$ . Очевидно, что мы не можем отбросить в этом случае верную гипотезу.

Но предположение о том, что в нашем распоряжении могут быть точные значения  $\Delta_i x_{jk}$ , не оправдано. Мы располагаем только величинами  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , а также правыми частями систем (1.4). Следовательно, мы можем организовать лишь приближенное нахождение величин  $\Delta_i x_{jk}$  путем численного интегрирования систем (1.4). Мы располагаем на  $i$ -м шаге начальным условием  $x_{i-1}$  и ищем приращения решения  $j$ -й системы за один шаг.

В теории численных решений дифференциальных уравнений рассматриваются одношаговые процессы и даются приближенные формулы для  $\Delta_i x_{jk}$  с оценками погрешностей. Общая одношаговая формула для  $j$ -й системы (1.4) [13; 14] имеет вид

$$\Delta_i x_j = x_{ij} - x_{i-1j} \cong h \Phi_j(x_{i-1j}, h) \quad (2.8)$$

с точностью до  $\bar{\sigma}(h^p)$ , где  $h$  — длина шага (в нашем случае  $h = \tau/N$ ), а  $\Phi_j(x_{i-1j}, h)$  — вектор-функция от  $x_{i-1j}$  и  $h$ , зависящая, кроме того, от правой части  $f_j$  системы;  $p$  — натуральное число, зависящее от вида  $\Phi_j$ .

Подставим в (2.7) приближенные выражения (2.8) для  $\Delta_i x_{jk}$ , полагая  $h = \tau/N$ , и получим, что

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \left( \Delta_i x - \frac{\tau}{N} \left| \Phi_j \left( x_{i-1j}, \frac{\tau}{N} \right) \right| \right)^2, j = 0, \dots, l. \quad (2.9)$$

Пусть  $x \equiv x_j$ , тогда (2.9) будет иметь следующий вид:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \left( \Delta_i x_j - \frac{\tau}{N} \left| \Phi_j \left( x_{i-1j}, \frac{\tau}{N} \right) \right| \right)^2, j = 0, \dots, l. \quad (2.10)$$

Заметим, что величины  $S_j^N$  в этом случае будут функциями точек выхода  $x_{0j}$  на поверхность контроля  $\pi_k$ . Действительно, все  $x_{ij}, i = 1, \dots, N$ , принадлежат траектории  $x_j(t), t \in [0, T]$ , которая определяется начальным условием  $x_{0j}$ .

Предположим, что  $\Phi_j, j = 0, \dots, l$  ограничены и непрерывны по совокупности координат  $x$  и  $h$ , что затем будет выполняться при конкретных  $\Phi_j$ . Предположим также, что функции в (2.10), а именно  $S_j^N = S_j^N(x_0), j = 0, \dots, l$ , монотонно сходятся к нулю при  $N \rightarrow +\infty$  в каждой фиксированной точке поверхности контроля  $\pi_k$ . Это предположение также будет выполняться, когда мы рассмотрим конкретные  $\Phi_j$ .

Из этих предположений сразу следует ограниченность и непрерывность  $S_j^N(x_0)$  на поверхности контроля  $\pi_k$ . Отсюда следует, что существует конечное значение

$$M_j(N) = \max_{x_0 \in \pi_k} S_j^N(x_0). \quad (2.11)$$

А из монотонной сходимости к нулю величины  $S_j^N(x_0)$  при  $N \rightarrow +\infty$  в каждой точке поверхности контроля и непрерывности величины  $S_j^N(x_0)$  на этой поверхности следует сходимость  $M_j(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty, j = 0, \dots, l$ .

Зададимся теперь определенным номером  $N$ . Пусть траектория  $x$  вышла на поверхность контроля, то есть произошла неисправность. Проверяем  $j$ -ю гипотезу,  $j = 1, \dots, l$ , формируя величины (2.9).

Очевидно, если  $j$ -я гипотеза верна, то  $S_j^N \leq M_j$ , поэтому отбрасываем все гипотезы с номерами  $\mu$  такими, для которых  $S_\mu^N > M_\mu$ . В этом случае мы не можем отбросить верную гипотезу.

Таким образом, за счет того, что отбрасываются гипотезы о возможности некоторых неисправностей, мы, вообще говоря, сужаем априорный набор возможных неисправностей до апостериорного набора. При условии  $j$ -й неисправности величина  $S_j^N$  есть функция точек поверхности контроля, а величины  $M_j$  — константы, поэтому в каждой точке поверхности контроля определен размер апостериорного набора. Обозначим его через  $l_j(x), x \in \pi_k$ .

После того как в общем случае построен алгоритм диагностирования при точных траекторных измерениях, приведем обычно применяемые на практике одношаговые формулы Эйлера

$$\Phi_j \left( x_{i-1j}, \frac{\tau}{N} \right) = f_j(x_{i-1}), p = 1. \quad (2.12)$$

Если подставить формулы Эйлера (2.12) в (2.9), то величины  $S_j^N$  будут характеризовать равномерно вдоль всей траектории  $j$ -й системы то, насколько разнятся поля направлений  $j$ -й и  $\mu$ -й систем.

Наконец, получим некоторые промежуточные результаты, необходимые для доказательства предельной теоремы.

Вновь рассмотрим выражения (2.10). Из (2.8) следует, что

$$S_j^N(x_{0j}) = \sum_{i=1}^N \left( \bar{\sigma} \left( \left( \frac{\tau}{N} \right)^p \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^N \bar{\sigma} \left( \left( \frac{\tau}{N} \right)^{2p} \right) = \bar{\sigma} \left( \frac{1}{N^{2p-1}} \right).$$

Обозначим  $2p - 1 = \nu$ , тогда

$$S_j^N(x_{0j}) = \bar{\sigma} \left( \frac{1}{N^\nu} \right)$$

для любой точки  $x_{0j} \in \pi_k$  при  $N \rightarrow +\infty$ .

Это значит, что

$$N^\nu S_j^N(x_{0j}) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow +\infty.$$

При доказательстве сходимости  $M_j(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$  мы требовали, чтобы в каждой точке поверхности контроля была сходимость  $S_j^N(x_{0j}) \rightarrow 0$ , причем монотонная при  $N \rightarrow +\infty$ . Сейчас мы потребуем, чтобы в каждой точке поверхности контроля последовательность  $\{N^\nu S_j^N(x_{0j})\}, N = 1, 2, \dots$ , начиная с некоторого номера  $N > N_0$ , одного для всей поверхности контроля, сходилась к нулю монотонно при  $N \rightarrow +\infty$ . Заметим, что величины  $N^\nu S_j^N(x_{0j})$  непрерывны на поверхности контроля.

Известно, что последовательность непрерывных на компактном множестве функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке, сходится к нулю равномерно на этом компакте.

Заметим, что рассмотренные в предыдущих работах [1–3] данного цикла поверхность контроля  $\pi_k$ , сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля являются ограниченными замкнутыми множествами (в евклидовом пространстве), то есть они являются компактными.

Итак,  $\{N^\nu S_j^N(x_{0j})\}, N = 1, 2, \dots$ , есть последовательность непрерывных на поверхности контроля функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке поверхности. По указанной выше теореме  $N^\nu M_j(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$ , и, так как

$$N^\nu M_j(N) = \max_{x_{0j} \in \pi_k} (N^\nu S_j^N(x_{0j})),$$

то стремление  $N^\nu M_j(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$  означает, что

$$M_j(N) = \bar{\delta} \left( \frac{1}{N^\nu} \right),$$

где  $\nu = 2p - 1$ ;  $p \geq 1$ . Поэтому условие (2.5) теоремы

$$M_j(N) = \bar{\delta} \left( \frac{1}{N} \right)$$

всегда выполнено.

Заметим далее, что на траектории  $\mu$ -й ( $\mu = 0, \dots, l$ ) системы (1.4) при  $j \neq \mu$  выполнены равенства

$$\begin{aligned} \Delta_i x_\mu &= \frac{\tau}{N} f_\mu(x_{i-1\mu}) + \bar{\delta} \left( \frac{\tau}{N} \right), \\ \frac{\tau}{N} \Phi_j \left( x_{i-1\mu}, \frac{\tau}{N} \right) &= \frac{\tau}{N} f_j(x_{i-1\mu}) + \bar{\delta} \left( \frac{\tau}{N} \right). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (2.10). Получим:

$$\begin{aligned} S_j^N &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tau}{N} |f_\mu(x_{i-1\mu})| - \frac{\tau}{N} |f_j(x_{i-1\mu})| + \bar{\delta} \left( \frac{\tau}{N} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N (|f_\mu(x_{i-1\mu})| - |f_j(x_{i-1\mu})| + \bar{\delta}(1))^2 \frac{\tau}{N}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Суммы

$$\sum_{i=1}^N (|f_\mu(x_{i-1\mu})| - |f_j(x_{i-1\mu})| + \bar{\delta}(1))^2 \frac{\tau}{N}$$

сходятся при  $N \rightarrow +\infty$  к интегралам

$$I_{\mu,j}(x_{0\mu}) = \int_{x_{0\mu}}^{x_\mu(\tau)} (|f_\mu(x_\mu)| - |f_j(x_\mu)|)^2 dx_\mu,$$

для которых, в силу невырожденности уравнений (1.4), найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что  $I_{\mu,j}(x_{0\mu}) > \varepsilon$  для любых  $\mu, j = 0, \dots, l$ ,  $\mu \neq j$ , при любом  $x_{0\mu} \in \pi_k$ .

Таким образом, мы показали, что

$$S_j^N(x_{0\mu}) \cong \frac{c_{\mu j}}{N},$$

где  $c_{\mu j}$  — некоторые константы такие, что  $c_{\mu j} > \varepsilon \tau$ , то есть

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N S_j^N(x_{0\mu}) = c_{\mu j} > \varepsilon \tau$$

для всех  $x_{0\mu} \in \pi_k$ .

Так как справедлива оценка

$$M_j(N) = \bar{\delta} \left( \frac{1}{N} \right),$$

то найдется  $N_1$  такое, что будет выполняться для всех номерах  $N > N_1$  неравенство

$$S_j^N(x_{0\mu}) > \frac{\varepsilon \tau}{N} > M_j(N) \quad (2.14)$$

для всех  $\mu \neq j$  и для всех  $x_{0\mu} \in \pi_k$ .

Это означает, что будут отбрасываться все  $j$ -е гипотезы при  $j \neq \mu$  и будет выполняться только неравенство

$$S_\mu^N(x_{0\mu}) \leq M_\mu, \quad (\mu = j),$$

то есть  $l_\mu(x_{0\mu}) = 1$ .

Таким образом, в случае точных траекторных измерений возникшая в системе неисправность из априорного списка неисправностей будет однозначно отфильтровываться.

Процедура диагностирования неисправности сводится к следующему.

**Алгоритм 2.1.** В процессе функционирования объекта после выхода его траектории на поверхность контроля  $\pi_k$  формируются, в соответствии с функционалом диагностирования (2.2), (2.4), числа  $S_j^N$ , и каждое  $S_j^N$  сравнивается с заранее подобранными константами  $M_j$ . Если  $S_j^N \leq M_j$ , то  $j$ -я система (1.4) включается в апостериорный набор  $l_j$ , в противном случае — исключается. Теорема утверждает,

что, таким образом, номер функционального состояния объекта (неисправности) из известного списка может быть диагностирован однозначно, то есть  $l_j = 1$ .

Прежде чем изложить методику априорного счета параметров алгоритма 2.1, рассмотрим доказательство второй части (2.6) теоремы. В силу непрерывности функционала  $S_j^N$ , оно очевидно вытекает из доказательства первой части теоремы.

Действительно, пусть функционал  $S_j^N$  удовлетворяет условию (2.6). Возьмем

$$\bar{N} = \max_j N_j,$$

где  $N_j$  — число траекторных измерений для  $j$ -й системы (1.4) и такое, что для всех  $N > N_j$  выполняется оценка (2.14).

Тогда при любых  $N > \bar{N}$  условия

$$S_j^N > \frac{\varepsilon\tau}{N} > M_j(N)$$

выполняются для всех упомянутых  $j$ .

Пусть произошла  $\mu$ -я неисправность, то есть действительная траектория является одной из списочных и  $S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_j &> M_{\mu} \quad \text{для } \mu \neq j, \\ S_j &\leq M_{\mu} \quad \text{для } \mu = j. \end{aligned}$$

Таким образом, и в случае  $S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N$  теорема верна, и в пределе на интервале  $[0, \tau]$  можно диагностировать все системы (1.4) из априорного списка.

На этапе проектирования процесс предварительного выбора  $N$  на уровне математических моделей и программ может быть осуществлен следующим образом (см. далее алгоритм 2.2).

**Алгоритм 2.2.** После выхода траектории объекта на поверхность контроля  $\pi_k$  для всевозможных  $j$  из списка заранее известных неисправностей объекта (1.4) и  $N = 1$  составляются числа  $S_j^N$ , из которых выбирается наименьшее  $S_{j_1}$ . Номер  $j_1$ , соответствующий наименьшему  $S_j$ , указывает номер случившейся неисправности. Затем вычисляется  $S_j^N$  для  $N = 2$  и определяется  $j_2$ . При равенстве  $j_1 = j_2$  неисправность в объекте считается правильно определенной, и алгоритм заканчивает работу. В противном случае, то есть если  $j_1 \neq j_2$ , вычисляется  $S_j^N$  для  $N = 3$  и производится сравнение  $j_2$  и  $j_3$  и т.д.

Если  $\tau$  не ограничено заранее сверху, то при осуществлении этого процесса может быть определен момент времени  $\tau$ ,  $\tau = Nh$ , окончания диагностирования.

Таким образом, теорема 2.1 доказана.

Строго говоря, доказана теорема, и сформулированы алгоритмы, позволяющие диагностировать неисправности, предусмотренные априорным списком неисправностей. Однако в силу непрерывности происходящих процессов при работе алгоритмов и в силу определений окрестностей влияния, введенные в предыдущих работах [1–3] данного цикла, удовлетворяющие критерию контроля неисправности, возникшие и развивающиеся в окрестностях списочных неисправностей, то есть неисправностей, близких списочным, возможно, ведущих к ним, но не являющихся ими, будут диагностироваться с помощью предлагаемых алгоритмов как соответствующие списочные неисправности, близкие к происшедшим. Поэтому в этом смысле можно считать теорему доказанной полностью.

Теорема позволила сформулировать два алгоритма диагностирования (алгоритмы 2.1 и 2.2). Первый из этих алгоритмов требует запоминания констант.

Рассмотрим методику априорного счета этих констант и параметров алгоритма 2.1.

Параметрами алгоритма диагностирования являются величины  $M_j$ ,  $N$ ,  $l_j$ , а также вероятность отбросить верную гипотезу, то есть вероятность ложного срабатывания  $\lambda$ . Непосредственно для алгоритма диагностирования требуются только  $M_j$  и  $N$ . Эти параметры рассчитываются заранее и вносятся в вычислитель на объекте. Что же касается параметров  $\lambda$  и  $l_j$ , то они являются показателями эффективности алгоритма.

Заметим, что задача аналитического нахождения в общем виде приемлемых констант  $N$ ,  $M_j$ ,  $j = 0, \dots, l$ , обеспечивающих заданные величины  $\lambda$  и  $l_j$ , уже в случае линейных систем (1.4) крайне трудна. В то же время для конкретных классов систем (1.4) выбор  $N$ , нахождение  $M_j$ , счет оценок для  $\lambda$  и  $l_j$  с высокой заданной точностью можно проводить вычислительными средствами методом статистических испытаний Монте-Карло, то есть построением искусственной вероятностной модели, обладающей свойствами изучаемого процесса.

Очевидно, что функции (2.2)  $S_j^N$ ,  $j = 0, \dots, l$ , зависят от реализации начального положения  $x_0 \in X^0$ , то есть являются неотрицательными случайными величинами. Величины  $l_j(x_0)$ ,  $x_0 \in \pi_k$  также можно рассматривать как функции случайных точек выхода траектории  $j$ -й системы на поверхность контроля,

то есть  $l_j(x_0)$  также являются случайными величинами. Если ввести функцию плотности  $P_j(\zeta)$ ,  $\zeta \geq 0$  случайных величин  $S_j^N$ , то  $M_j$  будет параметром этой функции (см. также [15; 16]):

$$\int_{M_j}^{+\infty} P_j(\zeta) d\zeta = \lambda.$$

Имея это в виду, сформулируем задачу *априорного определения параметров*  $M_j$  и  $N$  [17; 18].

Пусть даны  $j$ -я система вида (1.4), поверхность контроля  $\pi_k$  и вероятность ложного срабатывания  $\lambda$ . Требуется для любых случайным образом выбранных начальных условий  $x_0 \in X^0$  определить такие параметры  $M_j$  и  $N$ , чтобы с вероятностью, не превышающей  $\lambda$ , выполнялось неравенство  $S_j^N > M_j$ , то есть вероятность противоположного события

$$P\{S_j^N \leq M_j\} > 1 - \lambda$$

и при этом  $l_j = 1$ .

Будем моделировать численными средствами  $j$ -ю неисправность ( $j = 1, \dots, l$ ) следующим образом. С помощью датчика случайных чисел реализуем начальную точку траектории  $j$ -й системы. Далее, интегрируя эту систему до поверхности контроля  $\pi_k$  и на отрезке времени  $[0, \tau]$  за поверхностью, получим точки  $x_{0j}, x_{1j}, \dots, x_{Nj}$ . Накладывая на эти точки некоторый нормально распределенный шум, получим требуемые нам точки для формирования чисел  $S_j^N$ .

Производя независимую выборку  $j$ -х неисправностей, мы будем получать и независимую выборку чисел  $S_j^N$ .

Объем выборки чисел  $S_j^N$  обозначим через  $\gamma$ , а оценку  $M_j$  по выборке объема  $\gamma$  обозначим через  $\bar{M}_j$ .

Проводя очередную реализацию, будем полагать  $\bar{M}_j$  равным такому значению  $S_j^N$  из получившейся выборки, при котором отношение

$$\frac{\delta}{\gamma},$$

где  $\delta$  — количество точек, для которых выполнено неравенство  $S_j^N > M_j$ , наименее уклонялось бы от  $\lambda$ .

Оценкой  $\bar{\lambda}$  для  $\lambda$  примем  $\delta/\gamma$ . Асимптотически, по теореме Бернулли, при  $\gamma \rightarrow +\infty$  оценка удовлетворяет свойству

$$\bar{\lambda} = \frac{\delta}{\gamma} \rightarrow \lambda,$$

а также для оценок выполнено  $\bar{M}_j \rightarrow M_j$ .

По интегральной теореме Муавра–Лапласа вероятность  $\beta$  того, что частота  $\delta/\gamma$  отклонится от вероятности  $\lambda$  не более чем на  $\alpha$ , приближенно [19–21] равна

$$\beta = P \left\{ \left| \frac{\delta}{\gamma} - \lambda \right| \leq \alpha \right\} \cong \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda(1-\lambda)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.15)$$

Задавшись приемлемыми величинами  $\alpha$  и  $\beta$  из (2.15), можно найти соответствующий объем выборки  $\gamma$ . При этом оценка  $\bar{M}_j$  будет удовлетворять требуемой от  $\bar{\lambda} = \delta/\gamma$  точности.

Итак, с требуемой к  $\bar{\lambda}$  точностью найдем оценку  $\bar{M}_j$ . В алгоритме в качестве параметров  $\lambda$  и  $M_j$  будем применять их оценки  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{M}_j$ .

Определяя, таким образом, величины  $M_j$  и имея вместо  $\lambda$  близкую к ней вероятность  $\bar{\lambda}$ , отбросим верную гипотезу, возьмем выборку  $j$ -х неисправностей объема  $\gamma_1$ . Она даст нам выборку  $l_j(x_0)$ . Обозначим через  $l_j^k(x_{0j})$ ,  $k = 1, \dots, \gamma_1$   $k$ -ю реализацию  $l_j(x_{0j})$ .

За оценку  $\bar{l}_j$  среднего  $l_j$  примем

$$\bar{l}_j = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{\gamma_1} l_j^k(x_{0j}),$$

а за оценку  $\bar{\sigma}_j$  среднеквадратического отклонения  $\sigma_j$  примем

$$\bar{\sigma}_j = \left[ \frac{1}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{\gamma_1} (\bar{l}_j - l_j^k(x_{0j}))^2 \right]^{1/2},$$

при этом  $\bar{l}_j$  является случайной величиной.

Известно, что математическое ожидание оценки  $\bar{l}_j$  удовлетворяет уравнению  $M(\bar{l}_j) = l_j$ , а дисперсия оценки  $\bar{l}_j$  [22; 23] такова:

$$M((\bar{l}_j - l_j)^2) = \frac{\sigma_j^2}{\gamma_1}.$$



Согласно центральной предельной теореме, если  $\gamma_1$  велико (достаточно  $\gamma_1 > 30$ ) и величины  $l_j^k(x_0)$ ,  $k = 1, \dots, \gamma_1$ , не коррелированы, то  $\bar{l}_j$  подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием  $l_j$  и среднеквадратическим отклонением

$$\frac{\bar{\sigma}_j}{\sqrt{\gamma_1}}.$$

Следует заметить, что величина  $\sigma_i$  нам неизвестна, но приближенно (при больших  $\gamma_1$ ) заменим его оценкой  $\bar{\sigma}_j$  и будем считать среднеквадратическое отклонение оценки  $\bar{l}_j$  равным  $\bar{\sigma}_j/\sqrt{\gamma_1}$ . Таким образом, можно записать оценку для  $l_j$  в виде [24; 25]

$$\bar{l}_j \pm \frac{\bar{\sigma}_j}{\sqrt{\gamma_1}}.$$

Итак, задавшись некоторым  $N$  (например,  $N = 1$ ) и  $\lambda$ , с требуемой точностью можно найти величины  $M_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ),  $\lambda$  и  $l_j$ . Если найденные  $l_j$  нас не устраивают, то можно увеличить  $N$  и произвести подсчет сначала. Продолжая процесс и опираясь на тот факт, что  $l_j = 1$  при  $N \rightarrow +\infty$ , можно найти такое  $N$ , при котором  $l_j = 1$ .

Можно поступить несколько иначе. Для каждой из систем (1.4) найти свои величины  $N_j$  и  $M_j$  такие, что  $l_j = 1$ . Тогда для любого  $N > \max_j N_j$  будет обеспечено условие  $l_j = 1$ .

Таким образом, для случая точных траекторных измерений теорема полностью доказана.

Рассмотрим далее обобщения, для которых условия теоремы не нарушаются.

**1.** Пусть заданы уравнения (2.3) и вектор диагностирования (2.1)  $z(t)$ . В этом случае вместо функционала (2.2) можно использовать функционал

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad q < n. \quad (2.16)$$

В поведении компонент вектора диагностирования  $z(t)$  проявляется характер функций  $f_j(x, t)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , поэтому, очевидно, что теорема и обусловленные ею алгоритмы диагностирования остаются справедливыми и при диагностике с помощью функционала (2.16). Доказательство теоремы для этого случая легко продублировать.

В связи с доказательством этой части теоремы сделаем два уточняющих замечания.

**Замечание 2.1.** Рассмотрим функционал (2.16), который запишем в следующем виде (индекс  $N$  для простоты записи опускаем):

$$S_j^d = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2, \quad j = 1, \dots, l, \quad q < n,$$

и аналогичный функционал

$$S_j^\Delta = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (\Delta_{ijk} - \Delta_{ik})^2,$$

в котором, подобно теореме,  $\Delta_{ik} = |z_{ik} - z_{i-1k}|$ ,  $\Delta_{ijk} = |z_{ijk} - z_{i-1jk}|$ .

После возведения в квадрат и элементарных преобразований получим следующее:

$$S_j^\Delta = S_j^d + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}| - z_{i-1jk} + z_{i-1k}|.$$

При этом вторая и третья суммы в выражении для  $S_j^\Delta$  положительны, и из сходимости  $S_j^d$  следует сходимость  $S_j^\Delta$ .

**Замечание 2.2.** Пусть  $j$ -я неисправность может быть диагностирована с помощью функционала  $S_j^d$ , то есть существует число  $M_j$  такое, что  $S_j^d \leq M_j$  и  $S_j^d > M_j$  для некоторого номера  $J \neq j$ .

Покажем, что тогда эта неисправность может быть диагностирована и с помощью функционала  $S_j^\Delta$ , в котором теперь  $\Delta_{ik} = z_{ik} - z_{i-1k}$ , с числом  $\bar{M}_j = 4M_j$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} S_j^\Delta &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{i-1jk} - (z_{ik} - z_{i-1k}))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik} - (z_{i-1jk} - z_{i-1k}))^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 - \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})(z_{i-1jk} - z_{i-1k}) \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}| |z_{i-1jk} - z_{i-1k}| \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 = 4S_j^d. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Таким образом, из сходимости  $S_j^d$  к числу, меньшему  $M_j$ , следует сходимость  $S_j^{\Delta}$  к числу, меньшему  $4M_j$ , и тем самым диагностирование  $j$ -й неисправности.

**2.** Если время диагностирования  $\tau$  заранее не задано, то для каждой из систем (1.4) по изложенной процедуре можно выбрать свои величины  $N_j$ ,  $M_j$  и  $\tau_j$  такие, при которых  $l_j = 1$ .

В этом случае для любых  $N > \max_j N_j$  и  $\tau > \max_j \tau_j$  будет выполнено условие  $l_j = 1$ , то есть диагностирование неисправностей при выбранных  $N$  и  $\tau$  будет осуществляться однозначно.

Можно ставить задачу о выборе минимального  $\tau$ .

**3.** За исходную точку начала процесса диагностирования в предыдущих подходах выбиралась точка выхода траектории вектора контроля на поверхность контроля, то есть сначала решалась задача о наличии неисправности, а затем задача диагностирования. Алгоритм диагностирования включался только на поверхности контроля. Нас не интересовало поведение системы внутри поверхности контроля.

Траектории систем с неисправностями из априорного списка на рассматриваемом интервале времени встречаются с поверхностью контроля. Такой подход не всегда бывает эффективным способом решения задачи о наличии неисправности в системе. Это проявляется в тех случаях, когда необходимо рассматриваются неисправности, не ведущие к нарушению устойчивости системы. Траектории систем с такими неисправностями могут не выходить на поверхность контроля достаточно длительное время или не выходить на нее вообще.

Поэтому в некоторых случаях целесообразно отказаться от использования поверхности контроля и строить алгоритмы так называемой *непрерывной экспресс-диагностики*. Суть такой диагностики состоит в том, что алгоритм диагностирования периодически включается в определенные моменты времени и работает на определенном временном интервале. Моменты включения алгоритма диагностирования и интервалы времени его работы могут вырабатываться заранее или в процессе движения объекта.

Рассмотренные выше алгоритмы диагностирования решают задачу диагностики систем управления и при непрерывной экспресс-диагностике как в случае диагностики только опорных неисправностей, так и таких, которые могут возникнуть в их окрестностях и не предусмотрены априорным списком.

**4.** Как уже отмечалось, набор функций  $f_j(x, t)$  в (1.4) может содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (1.4) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

Напомним, что в предыдущих работах [1–3] данного цикла даны определение и математическое моделирование окрестностей опорных неисправностей. Эти окрестности являются областями влияния опорных неисправностей в том смысле, что будут близкими траектории вектора состояния объекта с опорной неисправностью и с неисправностью, происшедшей в окрестности опорной неисправности. Если окрестности опорных неисправностей для данного датчика пересекаются, то большее влияние на неисправность, происшедшую в области пересечения окрестностей, будет у той опорной неисправности, у которой наблюдается большая близость траекторий [26–28].

В этом смысле не предусмотренные опорным списком неисправности, происшедшие в окрестностях опорных неисправностей, можно с помощью рассмотренных алгоритмов диагностировать как опорные неисправности. Алгоритмы не выявят конкретно происшедшую неисправность, а диагностируют одну из опорных неисправностей, в достаточно малой окрестности которой произошла конкретная неисправность.

5. Рассмотрим другие функционалы, близкие к (2.2) и решающие задачу диагностирования динамических управляемых систем в аналогичных или несколько отличных от уже рассмотренных условиях [29; 30].

Предположим, что произошла неисправность, траектория вышла на поверхность контроля  $\pi_k$  и далее в течение времени  $\tau$  получены значения  $x_0, x_1, \dots, x_N$ . Надо проверить полную систему  $l$  возможных ситуаций:  $j$ -я ситуация ( $j = 1, \dots, l$ ) — это утверждение о том, что траектория  $x(t)$  есть траектория  $j$ -й системы (1.3), то есть  $x \equiv x_j$  при условии  $x_{0j} = x_0$ .

Рассмотрим следующие  $l$  функционалов (см. (2.6)) от  $x_0, x_1, \dots, x_N, \Delta_1 x_j, \dots, \Delta_N x_j$ :

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |x_{ik} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}|^2, \quad j = 1, \dots, l, \quad (2.18)$$

где  $\Delta_i x_{jk}$  — приращение решения  $j$ -й системы (1.3) от начального значения  $x_{i-1}$  на отрезке времени

$$\frac{(i-1)\tau}{N} \leq t \leq \frac{i\tau}{N}.$$

Смысл функционала (2.18) состоит в следующем. Проверая  $j$ -ю возможную ситуацию на каждом шаге, происходит (в смысле квадратического отклонения) сравнение действительных и ожидаемых приращений  $x$ , то есть  $S_j^N$  характеризует среднеквадратическое отклонение ожидаемой траектории от траектории, реализующейся в действительности. Иначе говоря, с помощью функционала (2.18) осуществляется сравнение полей направления действительной и ожидаемых траекторий динамической управляемой системы (1.1).

Функционалы (2.2), (2.7) и (2.18) близки между собой, удовлетворяют условиям предельной теоремы диагностирования и с помощью вытекающих из нее алгоритмов конструктивно решают задачу диагностики динамических управляемых систем в случае достаточной малости ошибок траекторных измерений.

Сказанное распространяется и на случай меньшей размерности вектора диагностирования (2.1), то есть на случай, когда

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}|^2, \quad q < n, \quad (2.19)$$

или

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ik} - z_{i-1k} - \Delta_i z_{jk}|^2, \quad q < n, \quad (2.20)$$

поскольку компоненты вектора диагностирования несут достаточную информацию о характере функций  $f_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) в правых частях уравнений (1.3).

Суммируемые разности в функционалах (2.2), (2.7) и (2.18)–(2.20) в случае достаточно малых расхождений действительной и ожидаемой траекторий могут оказаться малыми. Это усиливается квадратичной формой рассматриваемых функционалов. В некоторых случаях поэтому целесообразно иметь дело с видоизмененным функционалом [31; 32].

Выпишем такой функционал, сохранив прежние обозначения, для случая (2.18):

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |x_{ijk} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}|^2, \quad j = 1, \dots, l. \quad (2.21)$$

Для функционала (2.21) также справедлива теорема диагностирования предыдущего раздела и алгоритмы, которые из нее получаются.

Отметим, однако, следующее. В (2.21) фактически осуществляется численное дифференцирование измеренных значений на каждом шаге и суммирование модулей отклонений. Даже если ошибки измерений (шумы) малы, при суммировании модулей отклонений может получиться значительная случайная ошибка.

Вместо сумм (2.21), в которых производится суммирование модулей полей направлений, рассмотрим суммы самих отклонений

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n (\bar{x}_{ik} - \bar{x}_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}), \quad (2.22)$$

где  $\bar{x}$  — измеренные значения действительной (в дальнейшем обозначается индексом “g”) траектории динамической управляемой системы.

Функционал (2.22), как будет показано далее, с точностью до малых ошибок сводится к интегралу по траекториям

$$J_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t))) dt, \quad (2.23)$$

и разделение траекторий с помощью функционала (2.22) будет осуществляться однозначно.

В дальнейшем перейдем к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

В заключение данного материала отметим, что можно в функционалах использовать нормированные величины. Например (см. (2.24) далее и (2.16)),

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}|^2 \frac{1}{z_{ik}^2}.$$

Напомним, что здесь имеется в виду система

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \quad (2.24)$$

где  $x(t)$  и  $X(t)$  —  $n$ -мерные вектор-функции, каждая из которых содержит по набору  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  и  $X_1(x, t), \dots, X_n(x, t)$ , соответственно. Функцию  $X(x, t)$  в дальнейшем будем считать непрерывной в некоторой открытой области  $D$ . Система (2.24) задает закон движения некоторой начальной точки  $x_0(t_0)$  из  $(n + 1)$ -мерного расширенного фазового пространства по траектории

$$x(t) = x(t, x_0(t_0)).$$

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать расширенную постановку задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

### 3. Расширенная постановка задачи диагностирования

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = F(x, u, t) = f_0(x, t), \quad x_0 \in X^0, \quad (3.1)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор, характеризующий отклонение системы от режима, предписанного целью управления,  $X^0$  — ограниченное множество начальных условий. Относительно управлений

$$u(t) = \|u_\nu(t)\|_{\nu=1}^m$$

будем предполагать, что они принимают значения из ограниченной замкнутой области  $U$ , то есть

$$u(t) \in U. \quad (3.2)$$

Цель управления будет формализоваться тождеством

$$x(t) \equiv 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим далее функцию Ляпунова  $\nu(x, t) > 0$  и пару

$$\{\nu(x, t); u(x, t)\}. \quad (3.4)$$

Пара (3.4) позволяет синтезировать допустимое управление (3.2), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (3.3) нелинейной системы (3.1).

Пусть известен конечный набор

$$H = \|H_j\|_{j=1}^l \quad (3.5)$$

возможных опорных невырожденных неисправностей в системе управления объектом (3.1) и, значит, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \|u_j\|_{j=1}^l. \quad (3.6)$$

Функции (3.6) не изменяют фазового пространства системы (3.1), отличаются той или иной неисправностью (3.5) и необязательно удовлетворяют в области параметров системы (3.1) условиям асимптотической устойчивости решения (3.3), определяемым функцией  $\nu(x, t)$  в (3.4). Управления (3.6) могут не принадлежать (3.2).

Конечному набору управлений (3.6) поставим в соответствие набор систем дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x, t), j = 1, \dots, l, \quad (3.7)$$

где  $f_j(x, t)$  — соответствующие неисправностям (3.5) известные вектор-функции размерности  $(n \times 1)$ , отличные друг от друга и от функции  $f_0(x, t)$  в (3.1). Модели (3.1) и (3.7) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь структурой. Если в заранее неизвестный момент времени функция  $f_0(x, t)$  в правой части уравнения (3.1) заменяется на одну из функций  $f_j(x, t)$  из (3.7), то траектория системы (3.1) непрерывно продолжается одной из траекторий систем (3.7).

Объединим уравнения (3.1) и (3.7):

$$x' = f_j(x, t), x_0 \in X^0, j = 0, \dots, l. \quad (3.8)$$

Введем далее в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) \equiv (z_1, \dots, z_q), q = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

компоненты которого являются измеряемым подмножеством компонент фазового вектора состояния системы  $x(t)$  и, в соответствии с (3.9), функционал

$$S^j = \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, q = 1, \dots, n, j = 0, \dots, l, \quad (3.10)$$

где  $z_{ijs}$  — значение  $s$ -й компоненты вектора  $z(t)$  в момент  $t_i = 1, \dots, N_j$ , полученное в результате интегрирования системы (3.8) с  $f_j$  в правой части,  $z_{is}$  — значение  $s$ -й компоненты вектора  $z(t)$ , измеренное в момент времени  $t_i$ ,  $N_j$  — минимальное число измерений компонент вектора  $z(t)$ , необходимое и достаточное (для данного шага  $h$  интегрирования  $j$ -й системы (3.8) для диагностирования  $j$ -й неисправности).

Расширенную задачу диагностирования можно сформулировать следующим образом.

Пусть известны невырожденные уравнения (3.7), поверхность контроля  $\pi_k$ , некоторое функциональное состояние системы  $x(\tau_0)$  в момент  $\tau_0$  выхода ее траектории на поверхность контроля, структура вектора (3.9) и функционала (3.10).

Требуется выбрать вектор  $z(t)$ , содержащий минимальное подмножество измеряемых компонент фазового вектора состояния  $x(t)$ , и такой, чтобы с помощью функционала

$$S_j = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, N = \max_j N_j \quad (3.11)$$

любая возникшая неисправность из априорного опорного списка (3.5) или происшедшая в ее окрестности

$$O = \|O_j\|_{j=1}^l$$

и обусловившая выход вектора контроля  $z(t)$  на поверхность контроля  $\pi_k$ , была однозначно диагностирована как одна из функций  $f_j$  в (3.7), то есть номер  $j$  функции  $f_j$  в правой части уравнений (3.5) (вне зависимости от того, какая неисправность произошла: предусмотренная опорным списком или в его окрестности) был однозначно определен за минимально возможное время  $\tau - \tau_0$ .

Иначе говоря, после выхода фазовой траектории системы в момент времени  $\tau_0$  на поверхность контроля  $\pi_k$  путем последующего слежения за внешней траекторией системы с помощью функционала (3.11) возникшие неисправности из заданного списка и их окрестностей должны быть однозначно диагностированы за минимально возможное время  $\tau$ .

При реализации непрерывной экспресс-диагностики необходимо вместо уравнений (3.7) рассматривать уравнения (3.8).

В проведенном ниже вычислительном эксперименте показана реализация решения расширенной задачи диагностирования.

В дальнейшей работе данного цикла перейдем теперь к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

## Литература

- [1] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 32–43. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>.

- [2] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 2. Задача дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 22–31. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>.
- [3] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 3. Задача контроля // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 4. С. 36–47. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>.
- [4] Борисенко И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. Вып. 3. С. 775–790. URL: <http://www.mathnet.ru/links/92b69f39cfc9002a826e61f04d0bc94c/fpm401.pdf>.
- [5] Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Издание 2-е, перераб. и доп. Москва: Экзамен, 2007. 320 с. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf>.
- [6] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics // J. Math. Sci., 2003, vol. 114, pp. 976–1024. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [7] Пархоменко П.П., Сагомоян Е.С. Основы технической диагностики. Москва: Энергия, 1981. 464 с.
- [8] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 96–121. URL: <http://www.mathnet.ru/links/f4741cfe0bbf274a63aa4ad5e9196c9c/at7158.pdf>.
- [9] Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. Москва: Изд-во МГУ, 1983.
- [10] Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 38–46. URL: <http://www.mathnet.ru/links/577f6e880fb6d6097ec12fd04313e6c5/at4566.pdf>.
- [11] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 24–36. URL: <http://www.mathnet.ru/links/7e087fb544c478536b0d10aa25d6fdee/at3855.pdf>.
- [12] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 30–38. URL: <http://www.mathnet.ru/links/354284ef985788a3cabb4e309255e262/at587.pdf>.
- [13] Жуков В.П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 51–64. URL: <http://www.mathnet.ru/links/130e1a160e990c548264563a10c3fdde/at1475.pdf>.
- [14] Борисенко И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 29–31. URL: <http://www.mathnet.ru/links/1b1908d9f757fb2aee83d5f5e382feb0/vmumm1441.pdf>.
- [15] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization. *Oper. Res. Lett.*, 2003, vol. 31, no. 3, pp. 167–175. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](http://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6).
- [16] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, vol. 12, no. 1, pp. 79–108. DOI: <http://doi.org/10.1137/S1052623499354564>.
- [17] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. *J. Machine Learning Res.*, 2016, no. 17 (153), pp. 1–43. URL: <https://arxiv.org/pdf/1503.01243.pdf>.
- [18] Шамолин М.В. Диагностика гиросtabilизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // Электронное моделирование, 33:3 (2011), 121–126. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61768/10-Shamolin.pdf?sequence=1>.
- [19] Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // Электронное моделирование, 32:5 (2010), 31–44. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61677/04-Shamolin1.pdf?sequence=1>.
- [20] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions. *SIAM Journal on Control*, 1968, Vol. 6, № 2, pp. 194–214.
- [21] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, Vol. 50, No. 3, pp. 2119–2326. DOI: <http://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [22] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2015, Vol. 78, No. 1, pp. 159–179. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [23] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2002, Vol. 74, No. 2, pp. 155–175. DOI: <http://doi.org/10.1023/A:1020669212384>.
- [24] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. *Mathematical Methods of Operational Research*, 2009, Vol. 70, pp. 567–596. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.

- [25] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks. *Foundation and Trends in Networking*, 2008, Vol. 2, No. 4, pp. 381–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1561/1300000009>.
- [26] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, no. 10, pp. 2328–2340.
- [27] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, Vol. 29, No. 6, pp. 1251–1287. DOI: <http://doi.org/10.1137/0329065>.
- [28] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, vol. 122–124, pp. 23–64. DOI: [http://doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).
- [29] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues. *Systems & Control Letters*, 2002, vol. 46, pp. 323–342. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00147-0](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00147-0).
- [30] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms, *International Journal of Control*, 1985, Vol. 42, pp. 65–70. DOI: <http://doi.org/10.1080/00207178508933346>.
- [31] Anderson B.D. O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems. *International Journal of Control*, 1976, vol. 3, pp. 1–16. DOI: <http://doi.org/10.1080/00207177608922133>.
- [32] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, vol. 425, no. 2–3, pp. 404–433. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.laa.2006.09.029>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68

Submitted: 17.01.2020

Revised: 18.02.2020

Accepted: 28.02.2020

**M. V. Shamolin**

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation.

E-mail: [shamolin@rambler.ru](mailto:shamolin@rambler.ru), [shamolin@imec.msu.ru](mailto:shamolin@imec.msu.ru). ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

## PROBLEMS OF DIFFERENTIAL AND TOPOLOGICAL DIAGNOSTICS. PART 4. THE CASE OF EXACT TRAJECTORIAL MEASUREMENTS

### ABSTRACT

Proposed work is the fourth in the cycle, therefore, the diagnostic problem is formulated for the case of exact trajectorial measurements, the diagnostic theorem is stated and proved, and two diagnostic algorithms that follow from this theorem are presented. Techniques for an a priori counting of constants, which should be stored in a program for the computer-aided diagnostics whenever the first diagnostic algorithm is used, and other algorithmic parameters are considered. If the second algorithm is applied, the constants should not be stored; this algorithm is based on the search for the minimum value of the diagnostic functional among the values of this functional that were obtained in the process of diagnostics for the a priori chosen set of reference malfunctions. Various extensions of the diagnostic theorem are considered, namely, the problem of whether the diagnostic algorithms thus obtained are applicable when the dimension of the diagnostic vector being used is lower than that of the state vector or when the uninterrupted express-diagnostics with no checking surface is carried out, the problem of selecting the “minimum” diagnostic time, the diagnostics of malfunctions occurring in the neighborhoods of reference non-degenerate malfunctions and not envisaged in the a priori list. We consider other functionals solving the diagnostic problem. Finally, we state the extended diagnostic problem that is solved by using the proposed algorithms.

**Key words:** diagnostic problem, diagnostic algorithms, extended diagnostic problem.

**Citation.** Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 4. The case of exact trajectorial measurements. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 52–68. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

**Information about the author:** © Shamolin Maxim Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, academic of the Russian Academy of Natural Sciences, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.

## References

- [1] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 1. Motion equations and classification of malfunctions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 32–43. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>. (In Russ.)
- [2] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 2. Problem of differential diagnostics. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 22–31. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>. (In Russ.)
- [3] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 3. The checking problem. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 36–47. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>. (In Russ.)
- [4] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Resolving a problem of differential diagnostics. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika = Fundamental and Applied Mathematics*, 1999, vol. 5, no. 3, pp. 775–790. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/92b69f39cfc9002a826e61f04d0bc94c/fpm401.pdf>. (In Russ.)
- [5] Shamolin M.V. Certain problems of differential and topological diagnostics. 2nd edition, revised and enlarged. Moscow: Ekzamen, 2007, 320 p. Available at: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf>. (in Russ.)
- [6] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 114, pp. 976–1024. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [7] Parkhomenko P.P., Sagomonian E.S. Foundations of technical diagnostics. Moscow: Energiia, 1981, 464 p. (In Russ.)
- [8] Mironovskii L.A. Functional diagnosis of dynamic systems. *Automation and Remote Control*, 1980, no. 8, pp. 96–121. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/f4741cfe0bbf274a63aa4ad5e9196c9c/at7158.pdf>. (in Russ.)
- [9] Okunev Yu.M., Parusnikov N.A. Structural and algorithmic aspects of modeling for control problems. Moscow: Izd-vo MGU, 1983. (In Russ.)
- [10] Chikin M.G. Phase-constrained systems. *Automation and Remote Control*, 1987, no. 10, pp. 38–46. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/577f6e880fb6d6097ec12fd04313e6c5/at4566.pdf>. (In Russ.)
- [11] Zhukov V.P. Sufficient and necessary conditions for the asymptotic stability of nonlinear dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 1994, vol. 55, no. 3, pp. 321–330. Available at: <https://zbmath.org/?q=an:0847.93053>. (In Russ.)
- [12] Zhukov V.P. On the sufficient and necessary conditions for robustness of the nonlinear dynamic systems in terms of stability retention. *Automation and Remote Control*, 2008, no. 69, pp. 27–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117908010037>. (In Russ.)
- [13] Zhukov V.P. Reduction of Stability Study of Nonlinear Dynamic Systems by the Second Lyapunov Method. *Automation and Remote Control*, 2005, no. 66, pp. 1916–1928. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9>. (In Russ.)
- [14] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Solving the problem of differential diagnostics by the method of statistical tests. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2001, no. 1, pp. 29–31. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/1b1908d9f757fb2aee83d5f5e382feb0/vmumm1441.pdf>. (In Russ.)
- [15] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization. *Oper. Res. Lett.*, 2003, vol. 31, no. 3, pp. 167–175. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](http://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6).
- [16] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, vol. 12, no. 1, pp. 79–108. DOI: <http://doi.org/10.1137/S1052623499354564>.
- [17] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. *J. Machine Learning Res.*, 2016, No. 17(153), pp. 1–43. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1503.01243.pdf>.
- [18] Shamolin M.V. Diagnostics of Gyro-Stabilized Platform, Included in the Aircraft Motion Control System. *Electronic Modeling*, 2011, vol. 33, no. 3, pp. 121–126. Available at: <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61768/10-Shamolin.pdf?sequence=1>. (In Russ.)
- [19] Shamolin M.V. Diagnostics of Aircraft Motion in Planning Descent Mode. *Electronic Modeling*, 2010, vol. 32, no. 5, pp. 31–44. Available at: <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61677/04-Shamolin1.pdf?sequence=1>. (In Russ.)
- [20] Fleming W.H. Optimal control of partially observable diffusions. *SIAM Journal on Control*, 1968, vol. 6, no. 2, pp. 194–214.



- [21] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 2119–2326. DOI: <http://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [22] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2015, vol. 78, no. 1, pp. 159–179. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [23] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2002, vol. 74, no. 2, pp. 155–175. DOI: <http://doi.org/10.1023/A:1020669212384>.
- [24] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. *Mathematical Methods of Operational Research*, 2009, vol. 70, pp. 567–596. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.
- [25] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks. *Foundations and Trends in Networking*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 381–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1561/1300000009>.
- [26] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, no. 10, pp. 2328–2340.
- [27] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 1251–1287. DOI: <http://doi.org/10.1137/0329065>.
- [28] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, vol. 122-124, pp. 23–64. DOI: [http://doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).
- [29] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues. *Systems & Control Letters*, 2002, vol. 46, pp. 323–342. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00147-0](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00147-0).
- [30] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms. *International Journal of Control*, 1985, vol. 42, pp. 65–70. DOI: <http://doi.org/10.1080/00207178508933346>.
- [31] Anderson B.D. O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz matrix properties for continuous and discrete time systems. *International Journal of Control*, 1976, vol. 3, pp. 1–16. DOI: <http://doi.org/10.1080/00207177608922133>.
- [32] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, vol. 425, no. 2-3, pp. 404–433. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.laa.2006.09.029>.