МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-1-7-13

УДК 517.968

Дата: поступления статьи: 25.12.2019
после рецензирования: 22.01.2020
принятия статьи: 28.02.2020

Г. Джангибеков
Таджикский национальный университет, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: gulkhoja@list.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8804-4400
Д.М. Одинабеков
Филиал Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: jasur_79@inbox.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

К ТЕОРИИ НЕТЕРА ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

Известно, что общая теория многомерных сингулярных интегральных операторов по всему пространству E_n построена С.Г. Михлиным. Показано, что в двумерном случае, если символ оператора не обращается в нуль, то имеет место теория Фредгольма. Что касается операторов по ограниченной области, то здесь граница области существенно влияет на разрешимость таких операторных уравнений. В статье рассматриваются двумерные сингулярные операторы с непрерывными коэффициентами по ограниченной области, которые широко применяются во многих задачах теории дифференциальных уравнений в частных производных. В связи с этим представляет интерес установление критериев нетеровости таких операторов в виде явных условий по их коэффициентам. В зависимости от $2m+1$ компонентов связанности определяются необходимые и достаточные условия нетеровости таких операторов и дается формула для вычисления индекса. Полученные результаты применяются к задаче Дирихле для общих эллиптических систем четвертого порядка.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, индекс, символ, нетеровость оператора, эллиптическая система.

Цитирование. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М. К теории Нетера двумерных сингулярных операторов и её приложения к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 1. С. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-7-13.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторах: © *Джангибеков Гулходжа* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений, Таджикский национальный университет, 734019, Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17.

© *Одинабеков Джасур Музофирович* — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой фундаментальных и естественных наук, Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 734003, Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35.

1. Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$; $a_n(z)$, $b_n(z)$ $(n = 0, \pm 1, \dots \pm m)$ — комплекснозначные непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функции. В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D), (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$

$$L^p_{\beta-2/p} = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$A \equiv \sum_{n=-m}^{m} \Big(a_n(z)I + b_n(z)K\Big) S^n, \tag{1}$$

где I – тождественный оператор, операторы K, S действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{e^{2i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

S^n – n-я степень оператора S.

$$S^{-n} = \overline{S}^n = KS^nK, \quad \theta = arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D},$$

здесь черта обозначает операцию комплексного сопряжения, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [1]. При этом, хотя функции, входящие в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, являются комплекснозначными, само пространство будем считать вещественным, т. е. рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда оператор A будет обычным линейным ограниченным оператором в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, что следует, например, из [2].

Интегральные операторы вида A широко применяются во многих задачах теории дифференциальных уравнений в частных производных [3–5]. В связи с этим представляет интерес установить критерии нетеровости таких операторов в виде явных условий на их коэффициенты. Некоторые частные случаи оператора A изучены в работах [6–9].

Поскольку символ оператора S^n [1] равен $(\frac{\sigma}{\overline{\sigma}})^n$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то согласно [10] свойства оператора U определяются свойствами матрицы

$$\mathscr{G}_A(z,t) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_{2m}(z,t) & \mathscr{Q}_{2m}(z,t) \\ \overline{\mathscr{Q}_{2m}(z,t)} & \overline{\mathscr{P}_{2m}(z,t)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t) = \bar{t}^m \sum_{n=-m}^{m} a_n(z) t^{m+n}, \quad \mathscr{Q}_{2m}(z,t) = \bar{t}^m \sum_{n=-m}^{m} b_n(z) t^{m-n},$$

и для нетеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ необходимо, чтобы

$$\det \mathscr{G}_A(z,t) \equiv |\mathscr{P}_{2m}(z,t)|^2 - |\mathscr{Q}_{2m}(z,t)|^2 \neq 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \overline{D}, |t| = 1. \tag{3}$$

Множество комплексных матричных полиномов второго порядка степени $2m$, удовлетворяющих условию (2), будем обозначать через $\mathscr{F}^2$. Два полинома $\mathscr{G}_1(t)$ и $\mathscr{G}_2(t)$ из $\mathscr{F}^2$ назовем гомотопными (пишется $\mathscr{G}_1(t) \sim \mathscr{G}_2(t)$), если существует семейство $\mathscr{G}(t;\tau)$ матричных полиномов из $\mathscr{F}^2$, непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1$, такое, что

$$\mathscr{G}(t;0) \equiv \mathscr{G}_1(t), \quad \mathscr{G}(t;1) \equiv \mathscr{G}_2(t).$$

Соотношение гомотопии [4] разбивает $\mathscr{F}^2$ на классы гомотопии — связные, открытые компоненты множества $\mathscr{F}^2$.

Соответственно неравенству (2) возможны два случая:

a) $\det \mathscr{G}_A(z,t) > 0$ т. е. $|P_{2m}(z,t)| > |Q_{2m}(z,t)|$ для всех $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$;

b) $\det \mathscr{G}_A(z,t) < 0$ т. е. $|P_{2m}(z,t)| < |Q_{2m}(z,t)|$ для всех $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$.

Множество матричных полиномов, удовлетворяющих условию (2), a), b), будем обозначать соответственно через $\mathscr{F}_+{}^2$, $\mathscr{F}_-{}^2$. Если $\mathscr{G}_1(t) \sim \mathscr{G}_2(t)$, то $\mathscr{G}_1(t)$ и $\mathscr{G}_2(t)$ принадлежат одному и тому же из этих множеств. В дальнейшем будем рассматривать лишь $\mathscr{F}_+{}^2$.

Итак, $P_{2m}(z,t)$ есть комплексный невырождающийся полином степени $2m$. Пусть q_k $(k = 1, 2, \dots 2m)$ — комплексные корни уравнения $P_{2m}(z,t) = 0$. Согласно (2), a) эти корни не лежат на окружности $|t| = 1$, т. е. $|q_k| \neq 1$. Возможно, априори $2m + 1$ случаев:

$$\begin{aligned} &j_0) \quad |q_k| > 1, \quad k = 1, 2, \dots, 2m, \quad \text{т. е. все корни лежат вне круга} \quad |t| = 1; \\ &j_\nu) \quad |q_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots \nu, \quad \text{т. е. внутри круга} \quad |t| = 1 \quad \text{лежат} \quad \nu \quad \text{корней.} \end{aligned} \tag{4}$$

Класс матричных полиномов из $\mathscr{F}_+{}^2$, для которого имеет место один из случаев (4), будем обозначать соответственно через $\mathscr{M}_{j_\nu}, \nu = 0, 1, 2, \ldots, 2m$. Далее в зависимости от класса $\mathscr{M}_{j_\nu}$ находятся условия, при выполнении которых матрица $\mathscr{G}_A(\tau, t), \tau \in \Gamma, |t| = 1$ факторизуется с нулевыми частными индексами. Тогда из [8] следует, что оператор A нетеров в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$.

Введем обозначения

$$\Delta_\nu = |a_\nu|^2 - |b_\nu|^2, \quad \lambda_{\nu n} = \overline{a}_\nu a_n - b_\nu \overline{b}_n, \quad \mu_{\nu n} = \overline{a}_\nu b_n - b_\nu \overline{a}_n,$$

$$\mathscr{M} = max_{|t|=1} Re\Big(\sum_{j=1}^{2m} \lambda_j t^j\Big), \;\; \nu = 0, \pm 1, \ldots \pm m, \;\; n = \pm 1, \ldots \pm m,$$

где функции λ_j явно выражаются через коэффициенты оператора A.

Теорема 1. *Для нетеровости оператора A в лебеговых пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_0(z) > \mathscr{M}(z) + \Big(\mathscr{M}^2(z) + \sum_{n=-m}^{m} (|\mu_{on}(z)|^2 - |\lambda_{on}(z)|^2)\Big)^{1/2} \quad \text{при} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \Delta_\nu(z) > \mathscr{M}(z) + \Big(\mathscr{M}^2(z) + \textstyle\sum_{n=-m}^{m} (|\mu_{\nu n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu n}(z)|^2)\Big)^{1/2}, \quad \nu = \pm 1, \ldots \pm m, 0, \\ \textstyle\prod_{k=1}^{\nu} \mathscr{Q}_{2m}(\tau, q_k(\tau)) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall\, z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad \tau \in \Gamma, \end{gathered} \tag{6}$$

где $q_k(\tau)$ – корни уравнения $P_{2m}(\tau, t) = 0$, $\tau \in \Gamma$, $|t| = 1$, такие, что $|q_k(\tau)| < 1$ для $\forall \tau \in \Gamma$. При этом, если выполнено (5), то индекс оператора A равен нулю; если выполнено (6), то

$$\varkappa = 2 \sum_{k=1}^{\nu} Ind_\Gamma \mathscr{Q}_{2m}(\tau, q_k(\tau)).$$

2. В качестве применения результатов теоремы 1 в $D = \{z : |z| < 1\}$ рассмотрим общую эллиптическую систему двух дифференциальных уравнений 4-го порядка

$$\begin{gathered} \sum_{j=0}^{4} \Bigg[a_{4-j,j}(z) \tfrac{\partial^4 \omega}{\partial \overline{z}^{4-j} \partial z^j} + b_{4-j,j}(z) \tfrac{\partial^4 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^{4-j} \partial z^j} \Bigg] + \\ + \sum_{k+j=0}^{3} \Bigg[a_{k,j}(z) \tfrac{\partial^{k+j} \omega}{\partial \overline{z}^k \partial z^j} + b_{k,j}(z) \tfrac{\partial^{k+j} \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^k \partial z^j} \Bigg] = g(z), \end{gathered} \tag{7}$$

где $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, коэффициенты уравнения $a_{k,j}(z)$, $b_{k,j}(z)\,(k, j = 0, \ldots, 4)$ будем считать непрерывными в $\overline{D}$, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

По главной части системы (7) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}_z(\sigma) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{4} a_{4-j,j}(z) \sigma^j \overline{\sigma}^{4-j} & \sum\limits_{j=0}^{4} b_{4-j,j}(z) \sigma^j \overline{\sigma}^{4-j} \\ \sum\limits_{j=0}^{4} \overline{b}_{4-j,j}(z) \overline{\sigma}^j \sigma^{4-j} & \sum\limits_{j=0}^{4} \overline{a}_{4-j,j}(z) \overline{\sigma}^j \sigma^{4-j} \end{pmatrix}.$$

Эллиптичность системы (7) означает, что для любой точки $z \in \overline{D}$ и любого неравного нулю комплексного числа $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ должно выполняться неравенство $\det \mathcal{G}_z(\sigma) \neq 0$,

Очевидно, что

$$\det \mathcal{G}_z(\sigma) = |\mathcal{P}_z(t)|^2 - |\mathcal{Q}_z(t)|^2 \neq 0,$$

где

$$\mathcal{P}_z(t) = \overline{t}^4 \sum_{j=0}^{4} a_{4-j,j}(z) t^{4+j}, \quad \mathcal{Q}_z(t) = \overline{t}^4 \sum_{j=0}^{4} b_{4-j,j}(z) t^{4-j}, |t| = 1.$$

Как и в п. **1**, разобьем эллиптические системы (7) на гомотопические классы $j_\nu (j = 0, 1, \ldots, 4)$. Две эллиптические системы из множества всех эллиптических систем (7) с одинаковой главной частью такой, что $\mathcal{G}_z(\sigma) \in \mathscr{F}^+$, можно тогда и только тогда соединить непрерывным путем в $\mathscr{F}^+$, если характеристические матричные полиномы этих систем гомотопны. Известно [4], что соотношение гомотопии разбивает $\mathscr{F}^+$ на пять классов гомотопии — связанные открытые компоненты:

класс j_0 : $Ind_{|t|=1} P_z(t) = 0$, т. е. полином $\mathscr{P}_z(t)$ внутри единичного круга $|t| = 1$ корней не имеет;

класс $j_\nu\,(1 \leqslant \nu \leqslant 4): Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_z(t) = \nu$, т. е. полином $\mathscr{P}_z(t)$ внутри единичного круга $|t| = 1$ имеет ровно ν корней.

Эти классы образуют полную систему множества $\mathscr{F}^+$, т. е. $\mathscr{F}_z^1$ и $\mathscr{F}_z^2$ из $\mathscr{F}^+$ принадлежат некоторому классу $j_\nu\,(\nu = 0, 1, 2, 3, 4)$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}_z^1 \sim \mathscr{F}_z^2$.

Задача Дирихле. Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^4(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри G уравнению (7), а на ее границе Γ двум краевым условиям

$$\omega(z)\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{8}$$

где $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ означает производную по направлению внешней нормали в точках контура Γ. Некоторые частные случаи задачи (8) для системы (7) изучены в работе [11].

Известно [3–5], что любая комплекснозначная функция класса $W_p^4(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющая на границе Γ однородным краевым условиям (8), представлена в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_4(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta \tag{9}$$

с произвольной комплекснозначной плотностью $f(z) \in L_p(D)$, $p > 1$, где $G_4(z,\zeta)$ — функция Грина бигармонического уравнения области D:

$$G_4(z,\zeta) = |\zeta - z|^2 \ln\left|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2).$$

Очевидно, что все производные от функции $\omega(z)$ по z и $\overline{z}$ до 3-го порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность, и, следовательно, являются вполне непрерывными в $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$ операторами.

Непосредственный подсчет показывает, что $\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^4}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^4} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D K_1(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \tag{10}$$

где

$$K_1(z,\zeta) = \frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^3} + \frac{3|\zeta - z|^2\zeta^4}{(1 - \overline{z}\zeta)^4} - \frac{4(\zeta - z)\zeta^3}{(1 - \overline{z}\zeta)^3}. \tag{11}$$

Следует отметить, что первое слагаемое ядра $K_1(z,\zeta)$ дает сингулярный интегральный оператор $(S^2 f)(z)$:

$$(S^2 f)(z) = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{4i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \qquad \theta = \arg(\zeta - z),\ z \in D,$$

а два других слагаемых имеют особенность лишь на границе Γ области D, поэтому они не дают вполне непрерывные операторы. Однако, если $\zeta \in \Gamma$, т. е. когда $|\zeta| = 1$, тогда $K_1(z,\zeta) = 0$, следовательно, в целом ядро $K_1(z,\zeta)$ имеет сингулярную особенность только внутри области D.

Аналогично вычислив производную $\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z}$, получим

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D K_2(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \tag{12}$$

где

$$K_2(z,\zeta) = -\frac{1}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} - \frac{2(\overline{\zeta} - \overline{z})\zeta^3}{(1 - \overline{z}\zeta)^3} + \frac{3\zeta^2}{(1 - \overline{z}\zeta)^2}. \tag{13}$$

Первое слагаемое ядра $K_2(z,\zeta)$ дает сингулярный интегральный оператор $(Sf)(z)$:

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{2i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \qquad \theta = \arg(\zeta - z),\ z \in D.$$

Отметим также, что $K_2(z,\zeta) = 0$ при $\zeta \in \Gamma$.

Вычислив производную $\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^2\partial z^2}$, получим

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^2\partial z^2} = f(z).$$

Далее, переходя в формулах (10), (12) к комплексно-сопряженным значениям, находим другие производные от искомой функции $\omega(z)$.

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение (1) значения производных функций $\omega(z)$, для определения функции $f(z)$ получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{gathered}(a_{2,2}I + b_{2,2}K)f + \big(a_{4,0}I + b_{0,4}K\big)S_*^2 f + \big(a_{0,4}I + b_{4,0}K\big)\overline{S}_*^2 f + \\ + \big(a_{3,1}I + b_{1,3}K\big)S_* f + \big(a_{1,3}I + b_{3,1}K\big)\overline{S}_* f + Tf = g,\end{gathered} \tag{14}$$

здесь $f(z)$ – искомая, $g(z)$ – заданная функции класса $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$, а $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$ – оператор перехода к комплексно-сопряженным значениям, T – вполне непрерывный оператор, а сингулярные операторы $S_*^2, \overline{S}_*^2, S_*, \overline{S}_*$ определяются по формулам

$$(S_*^2 f)(z) = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D K_1(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \quad \overline{S}_*^2 = KS_*^2K,$$

$$(S_* f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D K_2(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \quad \overline{S}_* = KS_*K.$$

Далее к сингулярным интегральным уравнениям (14) применяется теорема 1, и в зависимости от гомотопических классов $j_\nu(\nu = 0, 1, \ldots, 4)$ для задачи Дирихле (8) общей эллиптической системы (7) получены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса. Аналогичные результаты получены для задачи Неймана системы (7).

Результаты пункта **1** опубликованы в [12].

Литература

[1] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962, 254 с. URL: https://booksee.org/book/578442.

[2] Stein E.M. Note on singular integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 8. P. 250–254.

[3] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. Москва, 1959, 652 с. URL: http://bookfi.net/book/442081.

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничные задачи теории функции: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1960.

[5] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. Москва: Наука, 1987, 415 с. URL: https://b-ok.africa/book/2929918/866958.

[6] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук. 1988. Т. 43. Вып. 3(261). С. 171–172. URL: http://www.mathnet.ru/links/c9d015ca602ba3d3886162c512c53f16/rm1900.pdf.

[7] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // ДАН СССР. 1993. Т. 330. № 4. С. 415–419. URL: http://www.mathnet.ru/links/bd5695ff758d87d5a246093844b3dfdb/dan5168.pdf.

[8] Джангибеков Г., Худжаназарова Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области // ДАН России. 2004. Т. 396. № 4. С. 449–454. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17352487.

[9] Джангибеков Г., Одинабеков Д.М., Худжаназарова Г.Х. Об условиях нетеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 2019. № 2. С. 9–14. URL: http://mi.mathnet.ru/vmumm607.

[10] Duduchava R.V. On multidimensional singular integral operators II: The case of compact manifolds. *Journal of Operator Theory*, 1984, vol. 11, no. 1, pp. 41–76. URL: https://www.researchgate.net/publication/266063688_On_multidimensional_singular_integral_operators_I_The_half-space_case.

[11] Джангибеков Г., Худжаназарова Г. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости // ДАН России. 2004. Т. 398. № 2. С. 151–155. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17352913.

[12] Джангибеков Г., Одинабеков Д.М. К теории нетера двумерных сингулярных операторов с четной характеристикой по ограниченной области // Современные проблемы математики и механики: материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего. Москва: Изд-во МГУ, 2019, С. 50–53. DOI: 10.29003/m978-5-317-06111-1.

 Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-1-7-13

Submited: 25.12.2019
Revised: 22.01.2020
Accepted: 28.02.2020

G. Dzhangibekov
Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan
E-mail: gulkhoja@list.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8804-4400
J.M. Odinabekov
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan
E-mail: jasur_79@inbox.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

ON THE NOETHER THEORY OF TWO-DIMENSIONAL SINGULAR OPERATORS AND APPLICATIONS TO BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF FOURTH-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

ABSTRACT

It is known that the general theory of multidimensional singular integral operators over the entire space E_m was constructed by S. G. Mikhlin. It is shown that in the two-dimensional case, if the operator symbol does not turn into zero, then the Fredholm theory holds. As for operators over a bounded domain, in this case the boundary of the domain significantly affects the solvability of such operator equations. In this paper we consider two-dimensional singular operators with continuous coefficients over a bounded domain. Such operators are widely used in many problems of the theory of partial differential equations. In this regard, it would be interesting to find criteria of Noetherity of such operators as explicit conditions for its coefficients. Depending on the $2m + 1$ connected components, necessary and sufficient conditions of Noetherity for such operators are obtained and a formula for the evaluation of the index is given. The results are applied to the Dirichlet problem for general fourth-order elliptic systems.

Key words: singular integral operator, index, symbol, Noetherity of an operator, elliptic system.

Citation. Dzhangibekov G., Odinabekov J.M. On the Noether theory of two-dimensional singular operators and applications to boundary-value problems for systems of fourth-order elliptic equations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-7-13. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Information about the authors: © *Dzhangibekov Gulkhoja* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Department of Functional Analysis and Differential Equations, Tajik National University, 17, Rudaki Avenue, Dushanbe, 734019, Tajikistan.

© *Odinabekov Jasur Muzofirovich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Fundamental and Natural Sciences, Dushanbe MSU Campus, 35, Bokhtar Street, Dushanbe, 734003, Tajikistan.

References

[1] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 254 p. Available at: https://booksee.org/book/578442. (In Russ.)

[2] Stein E.M. Note on singular integrals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1957, vol. 8, pp. 250–254.

[3] Vekua I.N. Generalized analytic functions. Moscow: Nauka, 1959, 652 p. Available at: http://bookfi.net/book/442081. (In Russ.)

[4] Boyarsky B.V. Studies on elliptic equations in the plane and boundary problems of function theory: Doctoral of Physical and Mathematical Sciences thesis. Moscow, 1960. (In Russ.)

[5] Juraev A.D. Method of singular integral equations. Moscow: Nauka, 1987, 415 p. Available at: https://b-ok.africa/book/2929918/866958. (In Russ.)

[6] Boymatov K.Kh., Dzhangibekov G. On a singular integral operator. *Russian Mathematical Surveys*, 1988, vol. 43, number 3, pp. 199–200. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1988v043n03ABEH001746. (In Russ.)

[7] Dzhangibekov G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the plane. *Doklady Mathematics*, 1993, vol. 47, №. 3, pp. 498–503. Available at: https://zbmath.org/?q=an:0881.47026. (In Russ.)

[8] Jangibekov G., Khujanazarova G.Kh. On the Noether property and the index for some two-dimensional singular integral operators in a connected domain. *Doklady Mathematics*, 2004, vol. 396, №4, pp. 449–454. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17352487. (In Russ.)

[9] Dzhangibekov G., Odinabekov D.M., Khudzhanazarov G.Kh. The Noetherian Conditions and the Index of Some Class of Singular Integral Operators over a Bounded Simply Connected Domain. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, № 2, pp. 49–54. DOI: https://doi.org/10.3103/S0027132219020025. (In Russ.)

[10] Duduchava R.V. On multidimensional singular integral operators II: The case of compact manifolds. *Journal of Operator Theory*, 1984, vol. 11, no. 1, pp. 41–76. Available at: https://www.researchgate.net/publication/266063688_On_multidimensional_singular_integral_operators_I_The_half-space_case.

[11] Jangibekov G., Khujanazarova G.Kh. On the Dirichlet problem for elliptic systems of two equations of the fourth order on a plane. *Doklady Mathematics*, 2004, vol. 398, no. 2, pp. 151–155. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17352913. (In Russ.)

[12] Dzhangibekov G., Odinabekov D.M. On the theory of two-dimensional singular integral operators with even characteristic over a bounded domains. In: *Contemporary problems of mathematics and mechanics. Proceedings of the conference dedicated to the 80th anniversary of academician V.A. Sadovnichy*. Moscow: MGU, 2019, pp. 50–53. DOI: 10.29003/m978-5-317-06111-1. (In Russ.)