УДК 629.7.05

DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-48-73

Дата поступления статьи: 7/X/2019

Дата принятия статьи: 21/X/2019

П.С. Бычков, С.А. Лычев, Д.К. Бут

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ФОРМЫ ИЗГИБА ТОНКОЙ ПОДЛОЖКИ ПРИ ЭЛЕКТРОКРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕДИ В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ¹

© *Бычков Павел Сергеевич* — младший научный сотрудник, лаборатория моделирования в МДТТ, ИПМех РАН, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

E-mail: bychkov@ipmnet.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-2251-1699>

Лычев Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, в.н.с., лаборатория технологических процессов, ИПМех РАН, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

E-mail: lychevsa@mail.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

Бут Дмитрий Константинович — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1.

E-mail: dmitry.but96@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8390-7684>

АННОТАЦИЯ

Развивается экспериментальная методика идентификации локальных несовместных деформаций в тонких слоях, получаемых в результате электрокристаллизации. В ходе эксперимента регистрируется изменение во времени формы поверхности тонкой подложки, на которой осуществляется электрокристаллизация. Идентификация параметров локально несовместных деформаций осуществляется из условия наименьшего отклонения экспериментально определенных смещений и смещений, найденных по теоретической зависимости. В качестве такой зависимости используется решение краевой задачи для послойно наращиваемой пластины. Существенное отличие предлагаемой методики от известных способов состоит в том, что в ходе эксперимента электрокристаллизация осуществляется в областях различной формы. Это, в частности, позволяет осуществить анализ влияния угловых точек контура области осаждения на несовместные деформации, вызванные электрохимическим процессом.

Ключевые слова: электрокристаллизация, пластина, мембрана, остаточные напряжения, искажение формы, несовместные деформации, экспериментальная идентификация, голографическая интерферометрия.

Цитирование. Бычков П.С., Лычев С.А., Бут Д.К. Экспериментальная методика определения эволюции формы изгиба тонкой подложки при электрокристаллизации меди в областях сложной формы // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 4. С. 48–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-48-73>.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

¹Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при финансовой поддержке РФФИ, проекты №18-38-00235 мол_а и №18-08-01346.

UDC 629.7.05
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-48-73

Submitted: 7/X/2019
Accepted: 21/X/2019

P.S. Bychkov, S.A. Lychev, D.K. Bout

EXPERIMENTAL TECHNIQUE FOR DETERMINING THE EVOLUTION OF THE BENDING SHAPE OF THIN SUBSTRATE BY THE COPPER ELECTROCRYSTALLIZATION IN AREAS OF COMPLEX SHAPES²

© *Bychkov Pavel Sergeevich* — junior researcher, Laboratory of modelling in solid mechanics, IPMech RAS, 101-1, Prospect Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

E-mail: bychkov@ipmnet.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-2251-1699>

Lychev Sergey Alexandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Laboratory of Mechanics of Technological Processes, IPMech RAS, 101-1, Prospect Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

E-mail: lychevsa@mail.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

Bout Dmitry Konstantinovich — student of Bauman Moscow State Technical University, specializing in the design and operation of rockets and space-rocket complexes, 5/1, ul. Baumanskaya 2-ya, Moscow, 105005, Moscow, ul. Baumanskaya 2-ya, 5/1.

E-mail: dmitry.but96@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8390-7684>

ABSTRACT

The present paper is aimed of experimental technique of local incompatible deformations' identification in thin layers obtained as a result of electrocrystallization. The process of electrocrystallization is carried on thin substrates. Changes in time of form of these thin substrates are registered during the experiment. Identification of local incompatible deformations' parameters is carried out from the condition of the minimum deflection of experimentally detected displacements and displacements that were determined by theoretical relations. As such a relationship the solution of a boundary value problem for a layer by layer growing plate is used in the paper. Significant difference of suggested technique from known methods is that testing electrocrystallization is carried out in areas of various forms. It allows to provide analysis of the influence that corner points of deposition area's boundary have on incompatible deformations caused by electrochemical process.

Key words: electrocrystallization, thin substrate, residual stresses, distortion of shape, elasticity, incompatible deformations, experimental identification, holographic interferometry.

Citation. Bychkov P.S., Lychev S.A., Bout D.K. *Eksperimental'naya metodika opredeleniya evolyutsii formy izgiba tonkoi podlozhki pri elektrokristallizatsii medi v oblastiakh slozhnoi formy* [Experimental technique for determining the evolution of the bending shape of thin substrate by the copper electrocrystallization in areas of complex shapes]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 4, pp. 48–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-4-48-73> [in Russian].

Введение

В настоящей статье развивается экспериментальная методика определения остаточных напряжений и изгиба тонких подложек при электрокристаллизации металлических слоев на них. Проблемы, затрагиваемые в работе, давно стали классическими, и им посвящены обширные исследования. В этой связи в начале статьи приведен краткий обзор и анализ известных методов, после чего излагается оригинальная часть.

Распространенная точка зрения на физический эксперимент, которую разделяют авторы, состоит в следующем. Экспериментатор, еще до проведения первых опытов, уже в общих чертах предвидит результат, поскольку он вытекает из общих теоретических положений, подтолкнувших его к проведению эксперимента. В этой связи при разработке идеологии и техники эксперимента чрезвычайно важной

²The work was carried out on the topic of state assignment (state registration number AAAA-A20-120011690132-4) and with financial support from the Russian Federal Property Fund, projects No. 18-38-00235 mol_a and No. 18-08-01346.

является теоретическая проработка ожидаемых результатов и формулировка их связи с условиями проведения эксперимента. Этим вопросам посвящена вторая часть статьи.

В третьей части описываются детали техники проведения эксперимента, обработки результатов и их обсуждение.

1. Формула Д. Стони и ее обобщения

Вопросам, связанным с возникновением остаточных напряжений при электрокристаллизации, посвящены многочисленные исследования, проводимые с середины XIX века. Их результаты отражены в большом объеме публикаций, среди которых отметим монографии [1–5]. Несмотря на столь серьезное внимание к проблеме остаточных напряжений, неизбежно возникающих в ходе электролитического процесса, причины их появления до сих пор являются дискуссионным вопросом в теоретической электрохимии [1; 3]. Вместе с тем методы математического моделирования остаточных напряжений оказываются востребованными при разработке и оптимизации технологий создания покрытий и многослойных структур, в частности, в ходе аддитивных технологических процессов [6]. Это, в первую очередь, связано с тем, что остаточные напряжения оказываются весьма значительными и могут привести к искажению геометрической формы создаваемой детали и даже к ее разрушению.

В пионерских работах по теории и практике электроосаждения описывались эмпирические приемы, позволяющие уменьшить остаточные напряжения, например, за счет повышения температуры электролита [7]. Первая количественная оценка напряженного состояния осажденного слоя была дана в работе [8], а первая теоретическая модель самонапряженной системы «подложка — осажденный слой» была предложена Д. Стони в 1909 году [9]. Эта работа Д. Стони, замечательная во многих отношениях, использует инкрементальный подход, который имеет много общего с подходом, развиваемым в настоящей статье. В связи с этим остановимся на анализе результатов Д. Стони подробнее.

Для идентификации остаточных напряжений Д. Стони исследовал изгиб консольно закрепленной стальной полосы при осаждении на нее никеля. Поскольку модуль Юнга никеля близок к модулю Юнга железа ($E_{\text{Ni}} = 210$ ГПа, $E_{\text{Fe}} = 180$ ГПа), Д. Стони предполагал, что механические свойства подложки и осажденного слоя одинаковы, и представил процесс осаждения как последовательность актов присоединения бесконечно тонких (элементарных) слоев, следующих друг за другом.

Для моделирования приращений напряжений и деформаций, вызванных усилиями в элементарном слое, Д. Стони использовал балочную теорию изгиба Бернулли-Эйлера, согласно которой жестко закрепленная на одном конце и нагруженная сосредоточенным моментом на другом конце балка длиной l изгибается таким образом, что её нейтральная ось становится частью окружности радиуса r , причём нормальные к плоскости сечения компоненты напряжений σ и перемещение концевой точки консоли z связаны с r следующими зависимостями:

$$\sigma = \frac{E}{r}(b - y), \quad r = \frac{l^2}{8z},$$

где b – расстояние от лицевой поверхности балки до нейтральной оси (рис. 1, *a*).

Исходя из условий статического равновесия для отсеченной части полосы единичной ширины и толщины h

$$\mathcal{F} = \int_0^h \sigma dy - Pt = 0, \quad \mathcal{M} = \int_0^h \sigma y dy = 0,$$

где P – напряжения элементарного присоединенного слоя толщиной t , которая считается пренебрежимо малой в сравнении с h (рис. 1в), Д. Стони получил формулу для напряжений в тонком слое, которая в наши дни называется «первой формулой Стони» [9; 10]:

$$P = \frac{Eh^2}{6rt} = \frac{4}{3} \frac{Eh^2z}{l^2t}. \quad (1)$$

Заменяя в (1) переменную z на ее дифференциал dz , переменную t на dt и величину h на $h+t$, приходим к дифференциальному уравнению

$$P = \frac{4}{3} \frac{E(h+t)^2 dz}{l^2 dt}. \quad (2)$$

Если считать P величиной постоянной (как и полагал Д. Стони), то в уравнении (2) переменные z , t разделяются. Интеграл этого уравнения, удовлетворяющий начальному условию

$$z|_{t=0} = 0,$$

Рис. 1. Расчетная схема для полосы, используемой в эксперименте Д. Стони, и распределения напряжений при различных условиях присоединения слоя

Figure 1. Calculation scheme for the strip used in the D. Stoney experiment and stress distribution under various conditions of layer attachment

которое означает, что в начале процесса осаждения перемещение концевое сечения балки отсутствует, может быть записан следующим образом:

$$P = \frac{4}{3} \frac{E(h^2 + th)z}{l^2 t}. \quad (3)$$

Именно в таком виде решение приведено в оригинальной статье Д. Стони [9]. Вместе с тем более удачной, на наш взгляд, представляется формулировка

$$z = \frac{3}{4} \frac{Ptl^2}{E(h^2 + th)},$$

которая явным образом определяет зависимость наблюдаемого параметра – перемещения консольного конца полосы z от толщины t – параметра, характеризующего темп процесса электрокристаллизации.

Решение (3), называемое «второй формулой Стони» [10], не было до конца понято инженерным сообществом. После публикации статьи [9] обе «формулы Стони» многократно выводились вновь различными способами [10–12]. Однако результаты, полученные другими авторами, отличаются лишь в представлении «первой формулы Стони», причем отличие состоит в членах того же порядка малости, что и толщина присоединенного слоя, то есть, строго говоря, пренебрежимо малыми слагаемыми (см. сравнительную таблицу в [10]).

«Вторая формула Стони», помимо своего прикладного значения, замечательна тем, что представляет собой решение задачи роста, в которой рост представляется инкрементальным процессом, описываемым уравнениями в терминах приращений толщин, напряжений и смещений.

Особенности напряженно-деформированного состояния растущего тела проявляются уже при сопоставлении формулы (3) с соотношением (1), в котором вместо h взято $h + t$:

$$P = \frac{4}{3} \frac{(h + t)^2 z}{l^2 t}.$$

Они отличаются на величину $th + t^2$, и, если не предполагать t бесконечно малым, то можно отметить различие не только в значении, но и в форме распределения напряжений в присоединенном слое. Детальный анализ напряженного состояния при осаждении слоев конечной толщины приведен в [10]. В качестве иллюстрации на рис. 1, z приведена эпюра нормальных напряжений в полосе и мгновенно присоединенном конечном слое, а на рис. 1, d – аналогичная эпюра для непрерывного наращивания бесконечно тонкими слоями.

В настоящее время теория роста (объемного и поверхностного) интенсивно развивается, свидетельство чему – возрастающее число публикаций [13–21]. В них, как правило, в качестве пионерской работы по механике роста указывается монография Саусвелла [22], в которой рассмотрена задача о намотке в

приращениях. Вместе с тем этот подход был использован Д. Стони за 32 года до выхода книги Саусвелла.

За прошедшие сто лет формулы Стони были подвергнуты нескольким корректировкам. Наиболее существенные из них – учет различных упругих модулей для подложки и осаждаемого слоя и использование для слоя так называемого двухосного (или приведенного) модуля Юнга E_2 (рис. 2, б), связанного с классическим модулем Юнга E соотношением

$$E_2 = \frac{E}{1 - \nu},$$

где ν – коэффициент Пуассона материала.

«Формулы Стони» предполагают цилиндрический изгиб, при котором одна из главных кривизн поверхности равна нулю. Обобщения этой модели на двумерный изгиб пластины, при котором обе главных кривизны были бы отличны от нуля, было осуществлено в ряде работ середины XX века [23–25]. В значительной части работ использовался полумпирический подход, в рамках которого кривизна полосы заменялась средней кривизной поверхности. Подробный обзор этих моделей дан в монографии Фроинда [24]. Следует отметить, что при переходе от модели Стони к двумерной модели возникает необходимость в учете условий закрепления на границе пластины и влияния нелинейных эффектов, вызванных натяжением пластины усилиями на границе. В этой связи двумерные обобщения «формулы Стони» оказываются принципиально более сложными и должны быть основаны уже не на линейных моделях типа модели балки Бернулли – Эйлера, а на моделях гибких пластин, учитывающих конечные деформации, вызванные изгибом. Обсуждение различных вариантов подобных моделей можно найти в [26]. Исторически первой и наиболее простой является модель Фёппля–фон Кармана [27]. Несмотря на критические замечания об асимптотической непоследовательности построений, осуществляемых при ее обосновании [26], она широко используется для расчетов гибких пластин, максимальный прогиб которых достаточно мал в сравнении с их характерным размером в плане. Но даже такая относительно простая модель приводит к квазилинейным дифференциальным уравнениям, решение которых представляет очевидную сложность как в аналитическом, так и в вычислительном планах. Один из способов упрощения задачи состоит в использовании дополнительных кинематических гипотез. Именно такой путь избран в работах Фроинда, а именно предполагается, что изгиб пластины происходит по сферической поверхности, т. е. главные кривизны равны и постоянны (рис. 2, а), а учет нелинейных эффектов может быть осуществлен дополнительным квадратичным членом в выражении для радиальной компоненты деформации.

Рассмотрим вначале подход Фроинда в линейном приближении, т. е. без учета квадратичных слагаемых в выражении для деформаций. В результате присоединения напряженного элементарного слоя ко всей лицевой поверхности пластины (его напряженное состояние предполагается однородным) она испытывает изгиб. Изгиб вызван деформацией слоя, несовместной с деформацией подложки. В предположении об однородности распределения этих деформаций в слое они будут проявляться в форме «краевого эффекта» – некоторого фиктивного усилия, распределенного вдоль границы осаждаемого слоя (т. е. вдоль границы подложки). Линейная плотность этого усилия на рис. 2 обозначена символом f . Если допустить суперпозицию напряженных состояний, то состояние системы «подложка–слой» может быть представлено как наложение стесненного плоского напряженного состояния (слой напряжен, но перемещения его точек отсутствуют из-за удерживающего действия f) и изгиба, возникающего при снятии удерживающего усилия f (рис. 2, а). При этом плотность запасенной энергии при деформировании определяется соотношением

$$U = \frac{\mu}{1 - \nu} (\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + 2\nu \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\theta\theta}),$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ε_{rr} и $\varepsilon_{\theta\theta}$ – радиальные и окружные компоненты тензора малых деформаций, которые связаны с радиальными смещениями $u = u(r)$ и прогибами $w = w(r)$ следующими зависимостями [4]:

$$\varepsilon_{rr} = u' - zw'', \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}u - \frac{z}{r}w'.$$

С учетом гипотезы о сферическом изгибе перемещения u , w определяются двухпараметрическим семейством функций:

$$u = \epsilon_0 r, \quad w = \kappa \frac{r^2}{2}.$$

Использование параметрического задания деформаций преобразует задачу из класса континуальных в класс задач с конечным числом параметров, что существенно упрощает ее решение. Для построения решения задается энергетический функционал $\mathcal{I}$ в виде

$$\mathcal{I} = 2\pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} U r dr dz + 2\pi R f u|_{r=R, z=h/2}, \quad (4)$$

Рис. 2. Расчетная схема пластины при использовании гипотезы сферичности поверхности изгиба
Figure 2. Design scheme of the plate using the hypothesis of sphericity of the bending surface

где f – линейная плотность усилий, приложенных к границе элементарного осажденного слоя, характеризующих остаточные напряжения (2). Заметим, что величина f/t имеет смысл, аналогичный P в формуле Д. Стони.

Условия стационарности функционала $\delta\mathcal{I} = 0$ эквивалентны уравнениям относительно параметров ϵ_0 и $\varkappa$:

$$\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial\epsilon_0} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{I}}{\partial\varkappa} = 0.$$

Решение этих уравнений приводит к простым алгебраическим соотношениям

$$\epsilon_0 = \frac{f}{E_2 t}, \quad \varkappa = \frac{6f}{E_2 h^2}.$$

Полученные соотношения – двумерный аналог «первой формулы Стони» (1)³.

Перейдем теперь к нелинейному анализу. Для учёта нелинейных эффектов к радиальной компоненте тензора малых деформаций добавляется квадратичный член

$$\varepsilon_{rr} = u' - zw'' + \frac{(w')^2}{2}, \quad (5)$$

а в параметрическом представлении радиальных перемещений учитывается кубический член

$$u = \epsilon_0 r + \epsilon_1 r^3. \quad (6)$$

В результате подстановки параметрических представлений (5), (6) в действие (4) и определения условий его стационарности может быть получено следующее соотношение:

$$S = K [1 + (1 - \nu)K^2],$$

где S , K – нормализованные усилия и кривизна [24],

$$S = \frac{3}{2} \frac{fR^2}{h^3 E_2}, \quad K = R^2 \frac{\varkappa}{4h}. \quad (7)$$

Если пренебречь K^2 , то из (7) после элементарных преобразований получается аналог формулы Стони (с точностью до замены кривизны цилиндрической поверхности на кривизну сферы). С учетом K^2 они характеризуют нелинейную и неоднозначную связь усилий и перемещений. Неоднозначность предполагает возможность ветвления решений, что с позиций механики означает потерю устойчивости. Как показано в [24], ветвление решений возникает в точках бифуркации

$$K_{\text{bif}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \nu}}, \quad S_{\text{bif}} = \frac{2}{(1 + \nu)^{3/2}},$$

³ Действительно, так как величина z в формуле (1) может быть выражена через кривизну $\varkappa_0$: $z = \frac{l^2 \varkappa_0}{8}$, $\varkappa_0 = \frac{1}{r}$, то $Pt = \frac{1}{6Eh^2 \varkappa_0}$. С другой стороны, $f = Pt$, и формула Д. Стони принимает вид $\varkappa_0 = \frac{6f}{Eh^2}$. Конечно следует иметь в виду, что $\varkappa_0$ характеризует кривизну цилиндрической поверхности, в то время как $\varkappa$ – сферической.

где ν – коэффициент Пуассона, K_{bif} , S_{bif} – предельные значения нормированных кривизны и напряжений.

В качестве итога этого краткого обзора отметим следующее.

1. Обобщение формулы Д. Стони на случай двумерного изгиба тонкой подложки предполагает учет нелинейных эффектов, связанных с конечными деформациями изгиба.
2. Учёт нелинейности, как правило, осуществляется при предположении о сферической форме изгиба. В этом случае условия закрепления подложки не принимаются во внимание, а область осаждения полагается совпадающей со всей лицевой поверхностью подложки.
3. При моделировании конечных деформаций и разработке методов экспериментальной идентификации параметров следует иметь в виду возможность бифуркации решений (потери устойчивости).

2. Расчетные соотношения, используемые для идентификации параметров по результатам экспериментов

Как уже отмечалось выше, идеи, лежащие в основе экспериментальной методики, требуют предварительной теоретической проработки, результаты которой определяют ожидаемые взаимосвязи измеряемых и идентифицируемых параметров. По ним, хотя бы с точностью до порядка, можно оценить соотношения между величинами и оценить требуемую точность измерений. Применительно к исследуемой проблеме – определению напряжений, вызванных электрокристаллизацией, – таковыми являются соотношения Д. Стони и Л. Фроинда. Однако они не позволяют учитывать условия закрепления подложки и форму области осаждения. В этой связи предлагается использовать иные соотношения, обобщающие формулу Стони и позволяющие более детально учесть краевой эффект, чем это позволяет подход Фроинда⁴.

Для описания изгиба подложки будем использовать систему уравнений Фёшля–фон Кармана [28; 29]:

$$\{ D \nabla^2 \nabla^2 w = q + h L[w, \Phi], \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{E}{2} L[w, w] = 0. \quad (8)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость пластины,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

E – модуль Юнга материала, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина пластины, q – интенсивность поперечной нагрузки, Φ – функция напряжений Эри для «мембранной составляющей» напряжений, ∇^2 – оператор Лапласа, а $L[\cdot, \cdot]$ – нелинейный дифференциальный оператор:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L[u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$W|_{\Gamma} = W'_n|_{\Gamma} = 0, \quad \sigma(\Phi) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = p\mathbf{n}, \quad \Gamma = \{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} = R\}.$$

Здесь R – радиус подложки в плане, $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к границе Γ , $\sigma(\Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{i})$, p – натяжение на границе.

В соответствии с условиями проведения эксперимента подложка жестко закреплена на круговом опорном контуре.

Для исследования изгиба круглых в плане подложек эти дифференциальные соотношения удобнее рассматривать в полярных координатах $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(x/y)$:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$L[u, v] = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} \right) + \frac{2}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Способам построения решений квазилинейной системы уравнений (8) посвящены многочисленные работы [30–32]. В них, как правило, используются численные приближения. Однако, если ввести дополнительные предположения о форме решения, оказывается возможным упростить систему (8) и даже преобразовать ее к линейному уравнению.

⁴Следует отметить, что предполагаемый подход не столь деликатно определяет напряженное состояние в плоскости осреднения: предполагается, что оно однородно. В рамках подхода Фроинда оно характеризуется кубическим двучленом.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, в работе [24] вводились предположения о сферической форме изгиба подложки. Это предположение не позволяет исследовать влияние условий закрепления и формы области осаждения, хотя и приводит к весьма простым инженерным формулам. В настоящей статье принимаются иные дополнительные предположения о характере напряженно-деформированного состояния системы «подложка-слой», а именно, что «плоская составляющая» напряженного состояния на нейтральной относительно изгиба поверхности определяется компонентами σ_{rr}^0 и $\sigma_{\varphi\varphi}^0$, которые оказываются постоянными и равными, т.е. $\sigma_{rr}^0 = \sigma_{\varphi\varphi}^0 = p = \text{const}$. Для этого функция напряжений Φ должна квадратично зависеть от r :

$$\Phi = p \frac{r^2}{2}.$$

При таком предположении математическая постановка задачи существенно упрощается, поскольку первое уравнение (8) преобразуется к линейному:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q + h p \nabla^2 w, \quad (9)$$

а второе уравнение (8) может быть использовано для оценки погрешности, вызванной принятой статической гипотезой.

Для дальнейших преобразований удобно записать уравнение (9) в безразмерной форме:

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{w} - \tilde{\kappa}^2 \nabla^2 \tilde{w} = Q,$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$r = R\tilde{r}, \quad w = h\tilde{w},$$

$$\tilde{\kappa}^2 = \frac{hpR^2}{D} = 12(1-\nu^2) \frac{pR^2}{Eh^2}, \quad Q = \frac{qR^4}{Dh} = 12(1-\nu^2) \frac{qR^4}{Eh^4}.$$

Краевые условия, характеризующие жесткое закрепление подложки на опорном контуре,

$$\tilde{w}|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \tilde{w} = O(1), \quad (10)$$

в совокупности с уравнениями (8) определяют постановку исследуемой краевой задачи. Последнее условие (10) означает ограниченность искомых решений в полюсе полярной системы координат (центре пластины).

В дальнейшем тильды при обозначении безразмерных величин опускаются, поскольку это не приведет к путанице.

В случае центральной симметрии $w = w(r)$ математическая постановка задачи становится еще более простой, т. к. в этом случае приходим к двухточечной краевой задаче, определяемой дифференциальным уравнением

$$w^{(4)} + \frac{2}{r} w^{(3)} - \frac{1 + \kappa^2 r^2}{r^2} w'' + \frac{1 - \kappa^2 r^2}{r^3} w' = Q, \quad (11)$$

и краевыми условиями

$$w|_{r=1} = 0, \quad w'|_{r=1} = 0, \quad w = O(1).$$

Решение поставленной таким образом краевой задачи не представляет сложности. Действительно, элементы фундаментальной системы решений однородного уравнения, соответствующего (11), могут быть выражены через элементарные функции и функции Бесселя Y_0 , I_0 [33]:

$$Y_0(-ir\kappa), \log(r), I_0(r\kappa), 1. \quad (12)$$

Располагая ими, можно найти частное решение для произвольной правой части (11) методом вариации постоянных интегрирования Лагранжа [33]:

$$w^* = \frac{1}{2\kappa^2} \int \xi \left(2 \ln \frac{\xi}{r} + \pi [Y_0(-ir\kappa)I_0(\xi\kappa) - I_0(r\kappa)Y_0(-ir\kappa)] \right) Q(\xi) d\xi \Big|_{\xi=r}. \quad (13)$$

Учитывая, что первые два решения (и их вторые производные) в системе (12) не ограничены в нуле, и выбирая оставшиеся две постоянных в решении однородного уравнения так, чтобы его сумма с частным решением (13) удовлетворяла краевым условиям (10), получим искомое решение краевой задачи

$$w = w^* - (w^*|_{r=1}) - \frac{I_0(r\kappa) - I_0(\kappa)}{\kappa I_1(\kappa)} (w^{*'}|_{r=1}). \quad (14)$$

Из этого решения при $Q = 1 = \text{const}$ следует формула для изгиба подложки при действии равномерно распределенной единичной нагрузки

$$w_1 = \frac{(1 - r^2) \kappa I_1(\kappa) + 2I_0(r\kappa) - 2I_0(\kappa)}{4\kappa^3 I_1(\kappa)}.$$

Такое нагружение реализуется в эксперименте для идентификации натяга подложки, возникающего в силу гидростатического давления электролита. В размерной форме для $Q = \rho g \Delta$, где ρ – плотность жидкости (электролита), $g = 9.81$ м/с², Δ – высота столба жидкости, соотношение (14) может быть задано в виде

$$w_1 = \frac{\varkappa (R^2 - r^2) I_1(R\varkappa) + 2RI_0(r\varkappa) - 2RI_0(R\varkappa)}{4d\varkappa^3 I_1(R\varkappa)} \rho g \Delta, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{hp}{D}}. \quad (15)$$

Зависимость (15) далее будет использована для идентификации параметров натяжения p .

Рис. 3. Зависимость прогиба пластины от параметров натяжения p

Figure 3. Dependence of plate deflection on tension parameters p

Для иллюстрации зависимости изгиба w_1 от параметра натяжения p произведем вычисления для круглой пластины, параметры которой соответствуют используемым в эксперименте: $R = 40$ мм, $h = 0.3$ мм, $E = 110$ ГПа, $\nu = 0.3$. На рис. 3 приведены графики прогибов для различных значений p : 1, 10, 60 Н/мм². На этом же графике показаны прогибы для пластины без натяжения (полужирная кривая), определяемая элементарной зависимостью для равномерно нагруженной жестко закрепленной пластины

$$w_0 = \frac{\rho g \Delta}{64D} (R^2 - r^2)^2,$$

и прогибы мембраны, натянутой усилием $p = 60$ Н/мм² (пунктирная линия)

$$w_{00} = \frac{R^2 - r^2}{4} \frac{\rho g \Delta}{h p}.$$

Изгиб подложки при осаждении элементарного начального слоя также может быть получен из (13), (14), если в качестве $Q(\xi)$ взять $\frac{fh}{2} \delta'(\xi - a)$, где f – постоянная плотность усилий, распределенных вдоль границы осаждения (рис. 2), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, a – радиус области осаждения. После преобразования приходим к следующему соотношению в безразмерной форме:

$$w_2 = -\frac{1}{\varkappa^2} \left[\frac{I_0(\alpha\varkappa) - I_0(\varkappa) + \varkappa(\alpha I_1(\alpha\varkappa) - (\log \alpha + 1) I_1(\varkappa))}{\varkappa I_1(\varkappa)} + \right. \\ \left. + \theta(r - \alpha) \left((K_0(\alpha\varkappa) - \alpha\varkappa K_1(\alpha\varkappa)) I_0(r\varkappa) - (I_0(\alpha\varkappa) + \alpha\varkappa I_1(\alpha\varkappa)) K_0(r\varkappa) + \log \frac{\alpha}{r} + 1 \right) + \right. \\ \left. + I_0(r\varkappa) \left(\alpha\varkappa K_1(\alpha\varkappa) + \frac{1 - \varkappa K_1(\varkappa)(I_0(\alpha\varkappa) + \alpha\varkappa I_1(\alpha\varkappa))}{\varkappa I_1(\varkappa)} - K_0(\alpha\varkappa) \right) \right] \quad (16)$$

Его размерный аналог дает зависимость, которая далее будет использоваться для идентификации f :

$$w_2 = -\frac{f}{2p} \left[\theta(r - a) \left((K_0(a\varkappa) - a\varkappa K_1(a\varkappa)) I_0(\varkappa r) - \right. \right. \\ \left. \left. - (I_0(a\varkappa) + a\varkappa I_1(a\varkappa)) K_0(\varkappa r) + \log \frac{a}{r} + 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{I_0(\varkappa r)}{R\varkappa I_1(\varkappa R)} (1 - R\varkappa (I_0(a\varkappa) + a\varkappa I_1(a\varkappa)) K_1(\varkappa R)) + \right. \\ \left. + I_0(\varkappa r) (a\varkappa K_1(a\varkappa) - K_0(a\varkappa)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{R\varkappa I_1(\varkappa R)} (\varkappa (R (\log(R/a) - 1) I_1(\varkappa R) + a I_1(a\varkappa)) + I_0(a\varkappa) - I_0(\varkappa R)) \right]. \quad (17)$$

Здесь $\theta(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ 1, & r \geq 1 \end{cases}$ – функция Хевисайда, K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода.

Иллюстрация зависимости (17) для различных значений p при нагрузке $f = 1$ кН/м, распределенной по круговой границе осаждения радиусом $a = 25$ мм, и тех же физико-геометрических параметрах подложки, что были использованы в расчетах ранее, приведены на рис. 4. График, выделенный полужирной кривой, соответствует случаю $p = 0$, решение для которого может быть получено из классических уравнений теории изгиба пластины

$$w_{20} = \frac{1}{4} \left[\frac{(r^2 - R^2)(3a^2 + R^2)}{2R^2} - (3a^2 + r^2) \ln \frac{r}{R} + \theta(a - r) \left((3a^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} - 2(r^2 - a^2) \right) \right].$$

Рис. 4. Зависимость прогиба пластины от параметра a
Figure 4. Dependence of the deflection of the plate on the parameter a

Следует отметить, что, согласно этой формуле, во внутренних точках области осаждения кривизна поверхности изгиба постоянна, что соответствует гипотезе, принимаемой Фроиндом.

Для определения изгиба подложки при осаждении последующих элементарных слоев в соотношениях (16), (17) следует заменить изгибную жесткость подложки на эффективную жесткость $\tilde{D}$ системы «подложка–осажденный слой» для исследуемого момента эволюции процесса осаждения. Эффективная жесткость $\tilde{D}$ может быть определена следующим образом [34]:

$$\tilde{D} = D_2 \frac{\frac{D_1}{D_2} - 1 - \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{D_1(\nu-1)}{D_2(\nu+1)} - 1 \right)}{4 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{D_2}{D_1} \right) \ln \frac{a}{b} + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{D_1}{D_2} - 1 \right) \right) \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{D_2}{D_1} + \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{D_2}{D_1} \right) \right)}, \quad (18)$$

где D_1 и D_2 – цилиндрические жесткости пластины с присоединенным слоем и подложки соответственно.

Для прямоугольной области осаждения решения уравнения (9) уже не могут быть получены как решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае предлагается представить функцию прогиба w в форме тригонометрического ряда по угловой переменной φ

$$w = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(4n\varphi). \quad (19)$$

Использование в разложении только слагаемых с аргументами $4n\varphi$ связано с симметрией квадратной области осаждения. После подстановки представления (19) и отделения угловой координаты φ приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{\kappa r^2 + 2n^2 + 1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2n^2 + 1 - \kappa r^2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{n^2}{r^4} (\kappa r^2 + n^2 - 4) w = q_n,$$

где $q_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, \varphi) d\varphi$, $q_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi$, $n = 1, 2, \dots$

Фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения при $n \geq 0$ может быть представлена через функции Бесселя и степенные функции:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{0,1} &= 1, \quad \mathcal{Y}_{0,2} = \log r, \quad \mathcal{Y}_{0,3} = I_0(r\kappa), \quad \mathcal{Y}_{0,4} = Y_0(-ir\kappa), \\ \mathcal{Y}_{n,1} &= r^n, \quad \mathcal{Y}_{n,2} = r^{-n}, \quad \mathcal{Y}_{n,3} = I_n(r\kappa), \quad \mathcal{Y}_{n,4} = Y_n(-ir\kappa).\end{aligned}$$

Частное решение может быть получено методом Лагранжа. Интегралы, определяющие варьируемые коэффициенты Лагранжа, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{0,k}(r) &= 8f \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a, \\ \int_0^{\arccos(a/r)} \Psi_{0,k}(\varphi) d\varphi, & a \leq r \leq a\sqrt{2}, \\ \int_0^{\pi/4} \Psi_{0,k}(\varphi) d\varphi, & a\sqrt{2} < r \leq 1, \end{cases} \\ \mathcal{I}_{n,k}(r) &= 8f \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a, \\ \int_0^{\arccos(a/r)} \Psi_{n,k}(\varphi) \cos(4n\varphi) d\varphi, & a \leq r \leq a\sqrt{2}, \\ \int_0^{\pi/4} \Psi_{n,k}(\varphi) \cos(4n\varphi) d\varphi, & a\sqrt{2} < r \leq 1, \end{cases}\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_{0,1}(\varphi) &= \frac{1}{\kappa^2} \log(a \sec \varphi) + 1, \quad \Psi_{0,2}(\varphi) = -\frac{1}{\kappa^2}, \\ \Psi_{0,3}(\varphi) &= \frac{\pi}{2\kappa^2} (Y_0(-ia\kappa \sec \varphi) + ia\kappa \sec \varphi Y_1(-ia\kappa \sec \varphi)), \\ \Psi_{0,4}(\varphi) &= \frac{\pi}{2\kappa^2} (I_0(a\kappa \sec \varphi) + a\kappa \sec \varphi I_1(a\kappa \sec \varphi)), \\ \Psi_{n,1}(\varphi) &= \frac{1}{8n\kappa^2} (4n-1)(a \sec \varphi)^{-4n}, \quad \Psi_{n,2}(\varphi) = \frac{1}{8n\kappa^2} (4n+1)(a \sec \varphi)^{4n}, \\ \Psi_{n,3}(\varphi) &= \frac{\pi}{2\kappa^2} (-ia \sec \varphi)^{4n} (a \sec \varphi)^{-4n} ((4n-1)Y_{4n}(-ia\kappa \sec \varphi) + ia\kappa \sec \varphi Y_{4n-1}(-ia\kappa \sec \varphi)), \\ \Psi_{n,4}(\varphi) &= \frac{\pi}{2\kappa^2} (-ia \sec \varphi)^{4n} (a \sec \varphi)^{-4n} (a\kappa \sec \varphi I_{4n-1}(a\kappa \sec \varphi) - (4n-1)I_{4n}(a\kappa \sec \varphi)).\end{aligned}$$

Коэффициенты A_0 и A_n из разложения (19) могут быть найдены по следующим зависимостям

$$\begin{aligned}A_0 &= \sum_{k=1}^4 \mathcal{Y}_{0,k} \mathcal{I}_{0,k}(r) - \left(\mathcal{I}_{0,1}(r) + I_0(r\kappa) \left(\mathcal{I}_{0,3}(r) + \frac{\mathcal{I}_{0,2}(r) + i\mathcal{I}_{0,4}(r)Y_1(-i\kappa)}{I_1(\kappa)} \right) \right), \\ A_n &= \sum_{k=1}^4 \mathcal{Y}_{n,k} \mathcal{I}_{n,k}(r) - \left(\frac{1}{\kappa I_{4n+1}(\kappa)} \left(\kappa r^{4n} I_{4n-1}(\kappa) (\mathcal{I}_{n,1}(r) + \mathcal{I}_{n,2}(r) + \mathcal{I}_{n,4}(r) Y_{4n}(-i\kappa)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r^{4n} I_{4n}(\kappa) (8n\mathcal{I}_{n,1}(r) - i\mathcal{I}_{n,4}(r) \kappa Y_{4n-1}(-i\kappa)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_{4n}(r\kappa) (-8n\mathcal{I}_{n,2}(r) + \kappa (\mathcal{I}_{n,3}(r) I_{4n+1}(\kappa) + i\mathcal{I}_{n,4}(r) Y_{4n+1}(-i\kappa)) \right) \right)\end{aligned}$$

Иллюстрация построенного решения приведена на рис. 5. На рис. 5, а показаны поверхность изгиба и сечения, соответствующие угловым координатам $\varphi = 0$ и $\varphi = 5/4 \pi$. Эти сечения проходят через середину стороны и вершину прямоугольной области осаждения. На рис. 5, б, в, г показаны сечения поверхности изгиба для $\varphi = 0$ при различных размерах стороны квадратной области осаждения ($a = 24, 32, 40, 48$ мм) и различных натяжений ($p = 1, 10, 100$ Н/мм²).

3. Экспериментальная часть

Для идентификации параметров p и f , входящих в соотношения (15) и (17), по экспериментально определенной поверхности изгиба подложки использовался метод голографической интерферометрии. Этот метод позволяет определить полное поле (full field) смещений подложки с высокой точностью. Метод измерений реализован в режиме реального времени, что дает возможность фиксировать на CCD-камеру (charge-coupled device) изменение интерференционных полос в течение процесса осаждения и по ним восстановить эволюцию полного поля смещения подложки. Эти экспериментальные данные дают весьма полную информацию о кинетике процесса деформирования и накопления несовместных деформаций в осаждаемом слое [34–37].

Измерения осуществляются по схеме Лейта-Упатниекса, для идентификации смещений используется метод нулевой полосы [38–40]. Принципиальная схема экспериментальной установки приведена на рис. 6, на рис. 7 — фотография ее реализации на виброизолированном столе. На схеме числами обозначены: 1 — твердотельный лазер, генерирующий монохроматическое когерентное излучение с длиной волны $\lambda = 532$ нм; 2 — делительный кубик с регулируемым отношением интенсивностей входящих пучков; 3 — непрозрачное зеркало; 4 — переменный нейтральный фильтр; 5 — расширители пучков; 6 — полупрозрачное (диэлектрическое) зеркало; 7 — электрохимическая ячейка; 8 — фотопластина высокого разрешения; 9 — CCD-камера.

Эксперимент производится в следующей последовательности.

1. Вначале осуществляется съемка голограммы отсчетной формы подложки (без осажженного слоя и при гидростатическом давлении электролита, соответствующему выбранному для осаждения уровню

Рис. 5. Прогобы круглой подложки при осаждении в прямоугольной области для различных значений параметров натяжения

Figure 5. Deflections of a round substrate during deposition in a rectangular region for different values of the tension parameters

Рис. 6. Схема установки

Figure 6. Installation diagram

столба жидкости). Голограмма фиксируется на фотопластинку, которая затем проявляется на месте с помощью специального приспособления. После проявки и сушки фотопластина приобретает свойства дифракционной решетки, восстанавливающей волновой фронт, отраженный от отсчетной формы подложки.

II. Уровень столба электролита изменяется по шагам 5 мм по циклической программе. На каждом шаге с помощью CCD-камеры фиксируется изображение, отраженное от деформированной вследствие приращения давления подложки, накладываемое на восстановленное фотопластиной изображение отсчетной формы. В виду когерентности излучения, пучки, определяющие эти два изображения, интерферируют, и на фиксируемом CCD-камерой поле появляются темные полосы (fringes). Из теории когерентного излучения известно, что темные полосы располагаются на изолиниях смещений отражаю-

Рис. 7. Фотография установки
Figure 7. Installation photo

щей поверхности по направлению оси падающего на нее пучка [38]. Таким образом, совокупность полос определяет систему изолиний, по которым можно восстановить лицевую поверхность (противоположной поверхности осаждения) изгиба подложки. Шаг изолиний соответствует половине длины волны лазера $\frac{\lambda}{2} = 266$ нм, а отсчитывать перемещения следует от так называемой нулевой полосы, совпадающей с контуром закрепления.

После завершения циклической программы «нагрузка–разгрузка» уровень столба электролита возвращается к исходному состоянию. В случае идеально упругой системы «подложка–закрепление» поверхность подложки должна возвращаться в исходное состояние, и восстановленный по голограмме волновой фронт, соответствующий отсчетной форме подложки, должен полностью совпасть с отраженным актуальным фронтом. В результате на изображении должны исчезнуть темные полосы. В реальном эксперименте нельзя добиться идеальных условий закрепления и идеального упругого отклика, в связи с чем не следует ожидать полного исчезновения темных полос после завершения циклической программы. Однако следует стремиться к уменьшению их количества, которое косвенно определяет качество технической стороны проведения эксперимента.

Таким образом, второй этап эксперимента — циклическое нагружение до начала осаждения — позволяет определить форму изгиба в зависимости от уровня нагружения и остаточные искажения, характеризующие влияние неупругих деформаций и технических погрешностей в реализации системы «подложка–закрепление». Кроме того, в случае круглой жестко заземленной подложки отклонения темных полос от окружностей характеризует отличие условий закрепления от идеальных и также рассматривается как оценка качества эксперимента.

III. В цепи электрохимической ячейки включается ток, величиной которого управляет программируемый источник. В момент включения начинается запись изображения на CCD-камеру (либо запись последовательных снимков с заданным шагом по времени). В ходе процесса электрокристаллизации, в силу несовместных деформаций в осажденном слое, подложка искажается, что приводит к изменению отраженного от ее поверхности волнового фронта. Последний, интерферируя с восстановленным по голограмме фронтом отсчетной формы, дает на изображении, фиксируемом CCD-камерой, нарастающее количество темных полос. По ним, в предположении, что нулевая полоса соответствует опорному контуру, восстанавливается полное поле (full field) смещений в зависимости от времени.

IV. Ток в цепи электрохимической ячейки выключается, однако съемка на CCD-камеру продолжается. Изменение положения и количества темных полос характеризует релаксационные процессы, происходящие после завершения основной фазы электрохимического процесса.

V. Производится циклическое нагружение за счет изменения уровня электролита с шагом 5 мм, как в п. II. На CCD-камеру фиксируется изменяющаяся при этом картина темных полос. По ней определяется изгиб подложки с осажденным слоем в зависимости от величины гидростатического нагружения.

Полученные данные позволяют вычислить по (18) приведенную жесткость системы: «пластина–осажденный слой».

VI. В цепи электрохимической ячейки включается ток в обратном направлении. Начинается процесс растворения осажденного слоя. Изменение картины полос фиксируется на CCD-камеру. Время продолжения обратного процесса то же, что и прямого. По полученной видеозаписи эволюции системы темных полос реконструируется полное поле перемещений. В случае идеальной обратимости процессов осаждения/растворения и упругости системы «подложка–слой» в конце обратного процесса все темные полосы должны исчезать. В действительности этого не происходит, и финальный рисунок полос является оценкой неидеальности (необратимости) реального процесса.

Остановимся подробнее на описании электрохимической ячейки. Ячейка представляет собой полый цилиндр, выполненный из фторопласта (рис. 8). Основания цилиндра съемные, закрепленные фланцевым соединением. Одно из оснований — диск с прикрепленным анодом, который представляет собой круглую медную пластину. Другое основание образуется тонкой медной пластиной — катодом (подложкой), которая прижимается к телу ячейки прижимным кольцом, выполненным из нержавеющей стали толщиной 5 мм. Внутренний диаметр цилиндрической ячейки — 80 мм, высота — 50 мм.

Рис. 8. Схема электрохимической камеры
Figure 8. Scheme of the electrochemical chamber

Деликатным вопросом является практическое обеспечение условий жесткого закрепления, принятых в теоретической модели. Пробные эксперименты показали невозможность удовлетворительного обеспечения этих условий прижимным кольцом, даже при весьма плотном распределении фланцевых болтовых соединителей (что можно легко оценить по отклонениям темных полос на голограмме вблизи опорного контура от окружностей). В этой связи в качестве подложки-катада использовались пластины ступенчатого радиального сечения. Для их изготовления вначале из катаной медной фольги толщиной 0.5 мм изготавливалась круглая пластина радиусом, равным внешнему радиусу цилиндрической ячейки. Затем на полученную таким образом заготовку наносилась фоторезистивная маска, оставляющая открытым круговое окно, радиус которого принимается равным внутреннему радиусу электрохимической ячейки, и осуществлялось травление открытой части до толщины 0.3 мм. Таким образом, подложка получала ступенчатое увеличение толщины в области обжатия прижимным кольцом. Это позволило получить закрепление ближе к идеальному.

Область осаждения выделяется фоторезистивной маской. Исследовались круговые и прямоугольные области осаждения, центры которых совпадали с центрами круглой подложки. Радиус круговой области принимался равным 25 мм, а сторона квадратной области — 40 мм (рис. 9).

В электрохимическом процессе использовался сернокислый электролит (сульфат меди — 220 г/л, серная кислота — 50 г/л) [1]. Осаждение производилось при температуре 20 °С без перемешивания и плотности тока 2 А/дм². Перед началом осаждения осуществлялась активация области электрокристаллизации в растворе серной кислоты. Результаты экспериментов приведены на рис. 10–12. На рис. 10 показаны голограммы с полосами вторичной интерференции, соответствующие двум шагам из циклической программы нагружения перед процессом осаждения. На рис. 11 изображены голограммы, соответствующие четырем моментам процесса осаждения в круговой области, а на рис. 12 — в прямоугольной области.

Изображения, приведенные на рисунках, представляют собой растеризации значений матриц интенсивностей зеленого канала CCD-камеры, которые были подвергнуты предварительной цифровой обра-

Рис. 9. Экспериментальные образцы
Figure 9. Experimental samples

Рис. 10. Голограммы циклического нагружения
Figure 10. Holograms of cyclic loading

ботке. Поскольку подобная обработка является важным этапом процесса идентификации результатов, опишем ее более подробно.

Прежде всего отметим, что значения интенсивности зеленого канала, выделенные из цифровой фотографии, обладают следующими свойствами, осложняющими идентификацию полос вторичной интерференции:

1. Крупномасштабная неравномерность, вызванная неоднородностями и бликами в плечах оптической системы.
2. Мелкомасштабная неравномерность, связанная со спекл-структурой любого изображения в когерентном свете.
3. Дисторсия изображения, связанная с погрешностями в конструктивной реализации оптической схемы.

Для устранения мелкомасштабной неравномерности использовалось преобразование свертки (конволюции) с гауссовым ядром, производимым над матрицей значений интенсивности, непосредственно выделенной из цифрового снимка. При этом по исходным значениям матрицы $M_{i,j}^{(0)}$ вычисляются преобразованные значения $M_{i,j}^{(1)}$:

$$M_{ij}^{(1)} = \sum_{n=-r}^r \sum_{m=-r}^r K_{n,m} M_{i+n,j+m}^{(0)}, \quad K_{n,m} e^{-\frac{n^2+m^2}{2\sigma^2}},$$

где значения σ выбираются по характерному размеру спекл-структуры. На рис. 13, а приведено исходное изображение, полученное непосредственно с CCD-камеры, под которым показан график интенсивности по среднему сечению. Размерность матрицы интенсивности — 1240×1240 пикселей. На рис. 13, б приведено растеризованное изображение преобразованной матрицы для $\sigma = 5$. Под ним также показан график интенсивности по среднему сечению. Из сопоставления графиков видно, что преобразование свертки сглаживает неравномерность, порождаемую спекл-структурой изображения, оставляя глобальные экстремумы на своих местах.

Рис. 11. Осаждение в круговой области
Figure 11. Precipitation in a circular area

Для устранения крупномасштабной неравномерности производится построение вспомогательной матрицы $M_{i,j}^{(2)}$, которая представляет собой свертку исходной матрицы $M_{i,j}^{(0)}$ с гауссовым ядром для большего значения σ . Эта матрица характеризует осреднение по областям, сопоставимым с размером всего изображения. В конкретных вычислениях принималось $\sigma = 100$. В результате строится матрица $M_{i,j}^{(3)}$ разностей интенсивности

$$M_{i,j}^{(3)} = M_{i,j}^{(1)} - M_{i,j}^{(2)},$$

в которой выровнены интенсивности по мелкому и крупному масштабам. Рис. 13, в иллюстрирует это преобразование.

Для устранения дисторсии производится масштабирование вдоль вертикальной оси, приводящее изображение опорного контура к окружности.

Для реконструкции поля смещений в форме аналитической зависимости от поверхностных координат подложки следует вначале представить полосы вторичной интерференции как зависимости от координат изображения, т. е. от пар (i, j) , указывающих строку и столбец матрицы $M^{(2)}$. Для этой цели предлагается использовать параметрические представления кривых, близких по форме к полосам, возникающим в ходе экспериментов. В случае равномерного гидростатического нагружения и осаждения в круговой области в качестве таких кривых предлагается использовать «искаженные» окружности, задаваемые координатами в плоскости изображения следующим образом:

$$x = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi \right) \cos \varphi, \quad y = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi \right) \sin \varphi. \quad (20)$$

Здесь $(a_n)_{n=1}^N$, $(b_n)_{n=1}^N$ — параметры «искажения», a_0 — радиус базовой окружности, $\varphi \in [0, 2\pi[$ — параметр кривой.

Растреризация кривых, задаваемых соотношениями (20), определяет на матрице изображения последовательность элементов (пикселей), лежащих в непосредственной близости от кривой, и последовательность соседних с ними элементов. На рис. 14, а приведен пример такой растреризации: темным цветом выделены элементы кривой, серым — соседние элементы. На рис. 14, б в формате столбчатой диаграммы показаны значения интенсивностей, определенные в элементах, соответствующих заданной кривой.

Рис. 12. Осаждение в квадратной области
Figure 12. Precipitation in a square area

Средняя интенсивность вдоль кривой определяется зависимостью:

$$J = \frac{1}{n_1} \sum_{n,\gamma}^{n_1} M_{i_\gamma, j_\gamma}^2 + \frac{1}{2n_2} \sum_{\gamma=1}^{n_2} M_{i'_\gamma, j'_\gamma}^2, \quad (21)$$

где i_γ, j_γ — номера строк и столбцов элементов растеризации, n_1 — число элементов растеризации, i'_γ, j'_γ — номера строк и столбцов элементов, соседних к растеризации, n_2 — число таких элементов. Зависимость (21) предполагает, что значения интенсивности в соседних элементах учитываются с весом $1/2$. За счет изменения радиуса базовой окружности a_0 и параметров искажения a_n, b_n в (20) можно изменять элементы растеризации и, как следствие, значение J в (21).

Для определения темной полосы требуется найти такие значения параметров кривой, при которых J достигает локального минимума:

$$J(a_0; a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \rightarrow \min.$$

Поиск минимума осуществляется методом градиентного спуска. При этом в качестве начальных значений для первой полосы используется набор параметров

$$a_0 = r_0, \quad a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0,$$

где r_0 — радиус начальной окружности. Центр начальной окружности и ее радиус r_0 выбираются по изображению голограммы приближенно. При определении второй и последующих полос используется квазиподобие соседних полос (что является специфичным для обсуждаемых в работе экспериментов). В этой связи в качестве начальных значений для поиска минимума, соответствующего n -й полосе, используются значения параметров, найденных для $(n-1)$ -й полосы.

На рис. 15, а, г приведены растровые изображения матриц интенсивности для двух ступеней гидростатического нагружения (высота столба электролита $\Delta=5$ и $\Delta=10$ мм). На рис. 15, б, д изображены кривые, полученные в результате распознавания полос вторичной интерференции, а на рис. 15, в, е — поверхности, построенные по аналитическим соотношениям, полученным в результате сплайн-интерполяции коэффициентов разложения.

Рис. 13. Предварительная обработка изображения полос вторичной интерференции. В первой строке показана растеризация матрицы интенсивности (ее части). Во второй строке показаны распределения интенсивности по сечению (строка матрицы):

a — значения, взятые из цифрового снимка голограммы; *б* — результаты осреднения мелкомасштабной неравномерности; *в* — результат осреднения крупномасштабной неравномерности

Figure 13. Pre-processing the image of the secondary interference bands. The first line shows the rasterization of the intensity matrix (its part). The second line shows the intensity distribution over the cross section (matrix row):

a — values taken from the digital image of the hologram; *б* — results of averaging of small-scale irregularity; *с* — result of averaging large-scale unevenness

Рис. 14. Интенсивность элементов кривой, растеризация кривой и вычисление суммарной интенсивности
Figure 14. Intensity of curve elements, rasterization of the curve and calculation of the total intensity

Для идентификации значения p составляются теоретические и экспериментальные распределения прогибов пластины. Величина p находится из условия их наименьшего квадратичного отклонения. Вычисление среднеквадратичных отклонений осуществляется на множестве контрольных точек, равномерно

Рис. 15. Построение экспериментальной поверхности изгиба
Figure 15. Construction of an experimental bending surface

распределенных по круговой области и определяемых зависимостью

$$\begin{aligned} x &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{100}{4K} \cos \left[\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{2(2n-1)} \right], \\ y &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{100}{4K} \sin \left[\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{2(2n-1)} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$n \in 1, 2, \dots, K$, $m \in 1, 2, \dots, 3(n-1)$. Здесь параметр K характеризует общее число точек. На рис. 16 приведено их распределение при $K = 6$ и $K = 10$.

Идентификация p производилась по различным ступеням нагружения. Распределение относительных погрешностей в контрольных точках для двух первых ступеней приведено на гистограммах, показанных на рис. 17, б. Максимальные относительные погрешности составили 5 %, что свидетельствует о хорошем согласовании теории и эксперимента. Относительные погрешности по всему полю измерений показаны на рис. 17, а.

Таким образом, в условиях, воспроизводимых в эксперименте, натяжение, вызванное действием столба жидкости (электролита), оказалось равным

$$p = 25 \text{ МПа.}$$

Рис. 16. Распределение точек сравнения
Figure 16. Distribution of comparison points

Рис. 17. Оценка погрешностей
Figure 17. Error Estimation

Следующая серия голограмм (рис. 11) характеризует изгиб подложки при осаждении в круговой области. Результаты предварительной обработки матрицы значений интенсивностей показаны на рис. 18. В качестве функций, аппроксимирующих полосы вторичной интерференции, использовались зависимости (20).

Результаты распознавания полос интерференции показаны на рис. 19. Точки сравнения определялись зависимостью (22). Теоретическое распределение для идентификации ϵ задавалось формулой (17). В результате получено, что

$$f/t = 92 \text{ МПа.}$$

Последняя серия голограмм (рис. 12) соответствует изгибу подложки при осаждении в прямоугольной области. Для аппроксимаций полос вторичной интерференции использовались замкнутые сплайны на основе многочленов Бернштейна [41]

$$C(\varphi) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(\varphi),$$

Рис. 18. Результаты предварительной обработки матрицы значений интенсивностей
Figure 18. Results of preprocessing a matrix of intensity values

Рис. 19. Поверхности, построенные по полосам интерференции для круглой области осаждения (толщины слоев: 0.5, 2, 3, 4 мкм)
Figure 19. Surfaces constructed from interference fringes for a circular deposition region (layer thicknesses: 0.5, 2, 3, 4 microns)

где $B_{i,n}(\varphi) = \binom{n}{i} \varphi^i (1 - \varphi)^{n-i}$ — многочлен Бернштейна, $\binom{n}{i}$ — биномиальные коэффициенты, P_i — варьируемые узловые точки. Результаты распознавания полос показаны на рис. 20.

Рис. 20. Поверхности, построенные по полосам интерференции для квадратной области осаждения (толщины слоев: 1, 2, 3, 4 мкм)

Figure 20. Surfaces constructed from interference fringes for a square deposition region (layer thickness: 1, 2, 3, 4 microns)

Рис. 21. Наложение теоретического и экспериментального распределений

Figure 21. Overlay of theoretical and experimental distributions

В результате идентификации параметра ϵ из сопоставления теоретической зависимости (19) и экспериментально полученных результатов (при условии наименьшего квадратичного отклонения в контрольных точках) получено, что

$$f/t = 114 \text{ МПа.}$$

Следует отметить, что, несмотря на качественное согласование теоретических и экспериментальных распределений (формы поверхностей подобны, имеются характерные угловые особенности), эти распределения имеют существенные количественные различия. На рис. 21 приведено их графическое наложение. Это, видимо, связано с особыми характеристиками электрохимического процесса в окрестностях угловых точек. Исследование этих особенностей будет осуществлено в дальнейших работах.

Выводы

1. При моделировании процесса осаждения на тонкую подложку необходимо учитывать ее натяжение усилиями, возникающими на опорном контуре.
2. При осаждении в круговой области несовместные деформации, вызванные электрохимическим процессом, распределены равномерно в области осаждения, и их влияние на подложку может быть представлено моментной постоянной нагрузкой, распределенной вдоль границы осаждения.

3. При осаждении в прямоугольной области выделяются окрестности угловых точек, особенность НДС в которых требует дополнительного исследования.
4. Влияние прямоугольной области осаждения на изгиб подложки в грубом приближении может быть представлено как результат действия моментной постоянной нагрузки, распределенной вдоль прямоугольной границы зоны осаждения.
5. Величины интенсивности фиктивных моментных нагрузок для процесса осаждения в круглой и прямоугольной областях близки, что свидетельствует об объективности используемого подхода к моделированию искажений как результата накопления несовместных деформаций.

Литература

- [1] Gamburg Yuliy D., Zangari G. Theory and practice of metal electrodeposition. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] Fischer H. Elektrolytische Abscheidung und Elektrokristallisation von Metallen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1954.
- [3] Bockris J.O'M., Razumney G.A. Fundamental aspects of electrocrystallization. Springer US, 1967.
- [4] Freund L.B., Suresh S. Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution. Cambridge University Press, 2004.
- [5] Варгамян А.Т., Петрова Ю.С. Физико-химические свойства электролитических осадков. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 206 с.
- [6] Additive Manufacturing Technologies / I. Gibson [et al.]. Berlin: Springer. 2015. DOI: 10.1007/978-1-4939-2113-3.
- [7] Blount B. Practical Electro-chemistry. A. Constable & Company, Limited, 1901.
- [8] Mills Edmund J. On Electrostriction // Proceedings of the Royal Society of London. 1877. Vol. 26. P. 504–512.
- [9] Stoney G.G. The tension of metallic films deposited by electrolysis // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1909. 82(553). P. 172–175.
- [10] Brenner A., Senderoff S. Calculation of stress in electrodeposits from the curvature of a plated strip // J. Res. Natl. Bur. Stand. 1949. Vol. 42. P. 105.
- [11] Soderberg K.G., Graham A.K. Stress in electrodeposits — its significance // Metallurgia. 1947. Vol. 34. P. 74.
- [12] Barklie R.H.D., Davies H.I. The effect of surface conditions and electrodeposited metal on the resistance of materials to repeated stresses // Proc. Inst. Mech. Eng. 1930. P. 731.
- [13] Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т. 77. № 4. С. 585–604.
- [14] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of surface growth for cylindrical and spherical elastic bodies // J. Mech. Phys. Solids. 2017. Vol. 98. P. 12–48.
- [15] Zurlo G., Truskinovsky L. Printing Non-Euclidean Solids // Phys. Rev. Lett. 2017. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.048001.
- [16] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Vol. 94(1–2). P. 118–129. DOI: 10.1002/zamm.201200231.
- [17] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for laminated inhomogeneous spherical shell // Acta Mech. 2019. Vol. 230. P. 3989–4020. DOI: 10.1007/s00707-019-02399-7.
- [18] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с. ISBN 5-02-006752-0.
- [19] Drozdov A. Viscoelastic Structures. Academic Press, 1997. 596 p.
- [20] Метлов В.В. О наращивании неоднородных вязкоупругих тел при конечных деформациях // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 637–647.
- [21] Тринчер В.К. Расчет наращиваемых тел. М.: Изд-во МГУ, 1989. 154 с.
- [22] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости: Для инженеров и физиков. Москва: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 676 с. URL: <https://booksc.org/book/47467176/d6d30a>.
- [23] Feng X., Huang Y., Rosakis A.J. On the Stoney formula for a thin film/substrate system with nonuniform substrate thickness // J. Appl. Mech. Nov. 2007. Vol. 74. № 6. P. 1276–1281. Available at: <http://www.rosakis.caltech.edu/downloads/pubs/2007/160%20On%20the%20Stoney%20formula%20for%20a%20thin%20film%20substrate.pdf>.

- [24] Freund L.B., Floro J.A., Chason E. Extensions of the Stoney formula for substrate curvature to configurations with thin substrates or large deformations // *Applied Physics Letters*. 1999. Vol. 74. № 14. P. 1987–1989. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.123722>.
- [25] Celebrating the 100th anniversary of the Stoney equation for film stress: Developments from polycrystalline steel strips to single crystal silicon wafers / G.C. Janssen [et al.]. // *Thin Solid Films*. 2009. Vol. 517. № 6. P. 1858–1867. DOI: 10.1016/j.tsf.2008.07.014.
- [26] Ciarlet P. *Mathematical Elasticity Volume II: Theory of Plates*. Elsevier Science B.V. 1997. lxi+497 p. ISBN 0 444 82570 3. URL: <https://b-ok.cc/book/963731/2d0288>.
- [27] *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften* / F. Klein [et al.] // Springer fachmedien wiesbaden. 1914. P. 874. Available at: <https://archive.org/details/encyklomath1202encyrich>.
- [28] *Vorlesungen Uber Technische Mechannik*, Dr Aug. Foppl, B.G. Teubner, Bd. 5., Leipzig, Germany, 1907, 132 p.
- [29] *Festigkeitsproblem im Maschinenbau*. T. von Karman, Vieweg+ Teubner Verlag, Wiesbaden., 1910. P. 311–385.
- [30] Coman C.D., Bassom A.P. On the mathematical structure of Eigen-deformations in a Föppl-von Kármán Bifurcation system / *Journal of Elasticity*. 2018. Vol. 131. Issue 2. P. 183–205. DOI:10.1007/s10659-017-9652-3.
- [31] Janczewska J. Description of the solution set of the von Kármán equations for a circular plate in a small neighbourhood of a simple bifurcation point // *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*. 2006. Vol. 13. Issue 3. P. 337–348. DOI: 10.1007/s00030-006-4007-y.
- [32] Yu Q., Hang X., Shijun L. Coiflets solutions for Föppl-von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach // *Numerical Algorithms*. 2018. Vol. 79. Issue 4. P. 993–1020. DOI: 10.1007/s11075-018-0470-x.
- [33] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа Т. 1–2. М.: ГИФМЛ, 1963.
- [34] Бут Д.К., Бычков П.С., Лычев С.А. Теоретическое и экспериментальное исследование изгиба тонкой подложки при электролитическом осаждении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика*, 2020 (в печати). DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.02.
- [35] Lychev S., Bychkov P., Saifutdinov I. Holographic Interferometry of Thin-walled Structure Distortion During the Stereolithography Process // *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 23. P. 101–107. DOI: 10.1016/j.piutam.2017.06.009.
- [36] Бычков П. С. Экспериментальное исследование прогиба растущей по толщине сферической оболочки // *Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIX Международной конференции*. 2018. С. 53–57.
- [37] Collins M.C., Watterson C.E. Surface-strain measurements on a hemispherical shell using holographic interferometry // *Experimental Mechanics*. 1975. Vol. 15. Issue 4. P. 128–132. DOI: 10.1007/BF02318848.
- [38] Вест Ч. Голографическая интерферометрия. М.: Мир, 1982. 540 с.
- [39] Malacara D., Servin M., Malacara Z. *Interferogram Analysis For Optical Testing* // CRC Press. 2005. P. 568. URL: <https://b-ok.cc/book/526483/6acefc>.
- [40] Briers J.D. The interpretation of holographic interferograms // *Opt Quant Electron*. 1976. Vol. 8. Issue 6. P. 469–501. doi: 10.1007/BF00620139.
- [41] Bartels R., Beatty J., Barsky B. An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling // Morgan Kaufmann. 1995. 485 p. URL: <https://b-ok.cc/book/437372/4f1b59>.

References

- [1] Gamburg Yuliy D., Zangari G. *Theory and practice of metal electrodeposition*. New York: Springer Science & Business Media, 2011. Available at: <https://b-ok.cc/book/1234360/f760b6>.
- [2] Fischer H. *Elektrolytische Abscheidung und Elektrokristallisation von Metallen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1954. DOI: 10.1007/978-3-642-86549-7.
- [3] Bockris J. O'M., Razumney G.A. *Fundamental aspects of electrocrystallization*. Springer US, 1967. DOI: 10.1007/978-1-4684-0697-9.
- [4] Freund L.B., Suresh S. *Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. Available at: <https://b-ok.cc/book/438690/7306b4>.
- [5] Vagramyan A.T., Petrova Yu.S. *Fiziko-khimicheskie svoystva elektroliticheskikh osadkov* [Physical and chemical properties of electrolytic deposition]. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1960, 206 p. [in Russian]
- [6] Gibson I., Rosen D., Stucker B., et al. *Additive Manufacturing Technologies*. Berlin: Springer. 2015. DOI: 10.1007/978-1-4939-2113-3.
- [7] Blount B. *Practical electro-chemistry*. New York: A. Constable & Company, Limited, 1901. Available at: <https://archive.org/details/practicalelectro00blourich>.

- [8] Mills Edmund J. On Electrostriction. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1877, Vol. 26, pp. 504–512. Available at: https://archive.org/details/paper-doi-10_1098_rspl_1877_0070/mode/2up.
- [9] Stoney G.G. The tension of metallic films deposited by electrolysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 1909, 82(553), pp. 172–175. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1909.0021>.
- [10] Brenner A., Senderoff S. Calculation of Stress in Electrodeposits from the Curvature of a Plated Strip. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 1949, Vol.42, p. 105. URL: <https://archive.org/details/jresv42n2p105>.
- [11] Soderberg K.G., Graham A.K. Stress in electrodeposits - its significance. *Metallurgia*, 1947, Vol. 34, p. 74.
- [12] Barklie R.H.D., Davies H.I. The effect of surface conditions and electrodeposited metal on the resistance of materials to repeated stresses. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1930, p. 731. DOI: https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1930_118_024_02.
- [13] Lychev S.A., Manzhirov A.V. *Matematicheskaya teoriya rastushchikh tel. Konechnye deformatsii* [The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations]. *PMM* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2013, vol. 77, no. 4, pp. 421–432. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011.
- [14] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of surface growth for cylindrical and spherical elastic bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, vol. 98, pp. 12–48. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.08.012.
- [15] Zurlo G., Truskinovsky L. Printing Non-Euclidean Solids. *Physical Review Letters*, 2017. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.048001.
- [16] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94 (1-2), pp. 118–129. DOI: 10.1002/zamm.201200231.
- [17] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for laminated inhomogeneous spherical shell. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, pp. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [18] Arutyunyan N.Kh., Manzhirov A.V., Naumov V.E. *Kontaknye zadachi mekhaniki rastushchikh tel* [Contact problems in mechanics of growing solids]. Moscow: Nauka, 1996, 176 p. Available at: <http://bookre.org/reader?file=789569> [in Russian].
- [19] Drozdov A. Viscoelastic Structures: Mechanics of Growth and Aging. San Diego: Academic Press, 1997, 596 p. URL: <http://bookre.org/reader?file=789555&pg=1>.
- [20] Metlov V.V. *O narashchivanii neodnorodnykh vyazkoprugikh tel pri konechnykh deformatsiyakh* [On the buildup of inhomogeneous viscoelastic bodies at finite strains]. *PMM* [Journal of Applied Mathematics and Mathematics], 1985, vol. 49, no. 4, pp. 637–647. [in Russian].
- [21] Trinchler V.K. *Raschet narashchivaemykh tel* [Calculation of stackable bodies]. Moscow: Izd-vo MGU, 1989, 154 p. [in Russian].
- [22] Southwell R.V. An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Oxford: Oxford University Press, 1941, 509 p. Available at: <https://booksc.org/book/47467176/d6d30a> [in Russian].
- [23] Feng X., Huang Y., Rosakis A.J. On the Stoney formula for a thin film/substrate system with nonuniform substrate thickness. *Journal of Applied Mechanics*, November, 2007, vol. 74, no. 6, pp. 1276–1281. Available at: <http://www.rosakis.caltech.edu/downloads/pubs/2007/160%20On%20the%20Stoney%20formula%20for%20a%20thin%20film%20substrate.pdf>.
- [24] Freund L.B., Floro J.A., Chason E. Extensions of the Stoney Formula for Substrate Curvature to Configurations with Thin Substrates or Large Deformations. *Applied Physics Letters*, 1999, vol. 74, no. 14, pp. 1987–1989. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.123722>.
- [25] Janssen G.C., Abdalla M.M., Van Keulen F., Pujada B.R., Van Venrooy B. Celebrating the 100th anniversary of the Stoney equation for film stress: Developments from polycrystalline steel strips to single crystal silicon wafers. *Thin Solid Films*, 2009, Vol. 517, no. 6, pp. 1858–1867. DOI: 10.1016/j.tsf.2008.07.014.
- [26] Ciarlet P. Mathematical Elasticity Volume II: Theory of Plates. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997, lxi+497 p. ISBN 0 444 82570 3. Available at: <https://b-ok.cc/book/963731/2d0288>.
- [27] Klein F. [et al.] *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften*. Leipzig: Springer fachmedien wiesbaden, 1914, 874 p. Available at: <https://archive.org/details/encyklomath1202encyrich>.
- [28] *Vorlesungen Über Technische Mechannik*, Dr Aug. Foppl, B.G. Teubner, Bd. 5., Leipzig, Germany, 1907, 132 p.
- [29] *Festigkeitsproblem im Maschinenbau*. T. von Karman, Vieweg+ Teubner Verlag, Wiesbaden, 1910, pp 311–385.
- [30] Coman C.D., Bassom A.P. On the Mathematical Structure of Eigen-Deformations in a Föppl-von Kármán Bifurcation System. *Journal of Elasticity*, 2018, vol. 131, issue 2, pp. 183–205. DOI: 10.1007/s10659-017-9652-3.
- [31] Janczewska J. Description of the solution set of the von Kármán equations for a circular plate in a small neighbourhood of a simple bifurcation point. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 2006, vol. 13, issue 3, pp. 337–348. DOI: 10.1007/s00030-006-4007-y.

- [32] Yu Q., Hang X., Shijun L. Coiflets solutions for Föppl-von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach. *Numerical Algorithms*, 2018, vol. 79, issue 4, pp. 993–1020. DOI: 10.1007/s11075-018-0470-x.
- [33] Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1962, 616 p. Available at: <https://archive.org/details/ACourseOfModernAnalysis>.
- [34] Bout D., Bychkov P., Lychev S. *Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie izgiba tonkoi podlozhki pri elektroliticheskom osazhdenii* [Theoretical and experimental study of the bending of a thin substrate during electrolytic deposition]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, in print. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.02 [in Russian].
- [35] Lychev S., Bychkov P., Saifutdinov I. Holographic Interferometry of Thin-walled Structure Distortion During the Stereolithography Process. *Procedia IUTAM*, 2017, vol. 23, pp. 101–107. DOI: 10.1016/j.piutam.2017.06.009.
- [36] Bychkov P.S. *Eksperimental'noe issledovanie progiba rastushchei po tolshchine sfericheskoi obolochki* [An experimental study of the deflection of a thickness growing spherical shell]. In: *Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoi sredy: trudy XIX Mezhdunarodnoi konferentsii* [Modern problems of continuum mechanics: proceedings of the XIX International Conference], 2018, pp. 53–57 [in Russian].
- [37] Collins M.C., Watterson C.E. Surface-strain measurements on a hemispherical shell using holographic interferometry. *Experimental Mechanics*, 1975, vol. 15, issue 4, pp. 128–132. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02318848>.
- [38] Vest C.M. Holographic Interferometry. John Wiley, New York, 1979. URL: <http://bookre.org/reader?file=730721>.
- [39] Malacara D., Servin M., Malacara Z. Interferogram Analysis For Optical Testing. *CRC Press*, 2005, 568 p. Available at: <https://b-ok.cc/book/526483/6acefc>.
- [40] Briers J.D. The interpretation of holographic interferograms. *Optical and Quantum Electronics*, 1976, vol. 8, issue 6, pp. 469–501. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00620139>.
- [41] Bartels R., Beatty J., Barsky B. An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling. Burlington: Morgan Kaufmann, 1995, 485 p. URL: <https://b-ok.cc/book/437372/4f1b59>.