УДК 629.7.05
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-29-35

Дата поступления статьи: $8/X/2019$
Дата принятия статьи: $22/X/2019$

Д.А. Рогач

О СИСТЕМАХ С ПОЛНЫМ СПАРКОМ

© *Рогач Дарья Александровна* — аспирант третьего года обучения кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
E-mail: ida@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8857-9325

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены фреймы конечномерного евклидова и унитарного пространств, образованных с использованием матриц дискретного преобразования Фурье. Представлена взаимосвязь восстанавливающих без фаз систем со свойством альтернативной полноты. В комплексном случае альтернативная полнота является лишь необходимым условием для восстанавливающих без фаз систем. Построена такая система векторов, что каждая ее подсистема объемом, равным размерности пространства, линейно независима. Такие системы называются системами с полным спарком. Интерес к ним обоснован, в частности, тем, что они позволяют восстановить сигнал по модулям измерений с минимальным количеством измерительных векторов.

Ключевые слова: фрейм, оператор анализа, оператор синтеза, фреймовый оператор, дискретное преобразование Фурье, альтернативная полнота, спарк, матрица Вандермонда.

Цитирование. Рогач Д.А. О системах с полным спарком // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 4. С. 29–35. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-29-35.

UDC 629.7.05
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-29-35

Submitted: 8/X/2019
Accepted: 22/X/2019

D.A. Rogach

ABOUT THE SYSTEMS WITH FULL SPARK

© *Rogach Daria Aleksandrovna* — third year post-graduate student of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.
E-mail: ida@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8857-9325

ABSTRACT
Frames of a finite-dimensional Euclidean and unitary spaces composed of discrete Fourier transform matrices are considered. The relationship of phaseless reconstruction systems with the alternative completeness property is presented. In the complex case, alternative completeness is only a necessary condition for phaseless reconstruction. A system of vectors is constructed such that each of its subsystems with a volume equal to the dimension of space is linearly independent. These systems are called systems with full spark. In particular, such systems are optimal for phase retrieval.

Key words: frame, synthesis operator, frame operator, discrete Fourier transform, alternative completeness, spark, Vandermonde matrix.

Citation. Rogach D.A. *O sistemakh s polnym sparkom* [About the systems with full spark]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, vol. 25, no. 4, pp. 29–35. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-4-29-35 [in Russian].

1. Предварительные сведения

Современная связь, будь то Интернет или какая-либо локальная сеть, предоставляет возможности для передачи данных с одного устройства на другое. Эти пакеты данных — последовательность из битов определенной длины. Помимо этого есть информация об ошибках, адресация, информация о времени — данные, которые помогают компьютеру считать всю информацию и проанализировать поврежденность поступившего файла. Для большинства пользователей передача данных характеризуется не количеством потерь, а временем транспортировки информации. Это связано с действиями, которые остаются невидимыми для пользователя. Если данные оказываются поврежденными, компьютер действует по протоколу и начинает повторно передавать информацию. Все действия по отладке ошибок занимают время, а в современном мире это неприемлемо. В последнее время для представления цифрового сигнала широко используется избыточный набор векторов — фрейм. Но методы построения данных систем с определенными задачей свойствами до сих пор являются актуальной темой для исследования.

Определение 1.1. Система векторов $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ называется фреймом пространства $\mathbb{H}^M$ (евклидово или унитарное пространство), если существуют константы $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^M$

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2. \tag{1}$$

Если

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 = A\|x\|^2, \tag{2}$$

то (2) будем называть *жестким фреймом.*
Если в (2) $A = 1$, то

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 = \|x\|^2, \tag{3}$$

это *фрейм Парсеваля.*

На $\mathbb{H}^M$ вводится отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует постоянная z, $|z| = 1$, такая, что $y = zx$. Пусть $\hat{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^M / \sim$ — фактор-пространство. Таким образом, класс эквивалентности имеет вид $\hat{x} = \{e^{i\phi}x, \phi \in [0, 2\pi)\}$ (в вещественном случае $\hat{x} = \{\pm x\}$).

Рассмотрим следующее нелинейное отображение

$$\beta : \hat{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}^N, (\beta(\hat{x}))_n = |\langle x, \phi_n\rangle|^2, 1 \leqslant n \leqslant N,$$

которое корректно определено на классах $\hat{x}$, поскольку из $x \sim y$ следует $|\langle x, \phi_n\rangle|^2 = |\langle y, \phi_n\rangle|^2$.

Определение 1.2. Будем говорить, фрейм $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_N\}$ восстанавливает без фаз (ВБФ-фрейм), если нелинейное отображение β инъективно.

Свойство *альтернативной полноты* позволяет определить, является ли система в $\mathbb{R}^M$ ВБФ, поскольку данные свойства эквивалентны.

Определение 1.3. Набор векторов $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{H}^M$ альтернативно полон (АП), если для любого $P \subseteq \{1, \ldots, N\}$ либо $\{\phi_n\}_{n\in P}$, либо $\{\phi_n\}_{n\in P^c}$ полно в $\mathbb{H}^M$.

Теорема 1.1. [1] Фрейм $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ является ВБФ-системой тогда и только тогда, когда он обладает свойством альтернативной полноты.

Доказательство. 1) Дана система векторов $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$. Ф- фрейм. Проведем доказательство "от противного". Предположим, что Φ не обладает свойством альтернативной полноты. Следовательно, найдется $P \subseteq \{1, \ldots, N\}$ такое, что ни $\{\phi_n\}_{n\in P}$, ни $\{\phi_n\}_{n\in P^c}$ не полно в $\mathbb{R}^M$.

Возьмем ненулевые векторы $u, v \in \mathbb{R}^M$ так, что $\langle u, \phi_n\rangle = 0$ для всех $n \in P$ и $\langle v, \phi_n\rangle = 0$ для всех $n \in P^c$.

Для каждого n получим

$$|\langle u + v, \phi_n\rangle|^2 = |\langle u, \phi_n\rangle|^2 + 2\langle u, \phi_n\rangle\langle v, \phi_n\rangle + |\langle v, \phi_n\rangle|^2 = |\langle u, \phi_n\rangle|^2 + |\langle v, \phi_n\rangle|^2.$$

$$|\langle u - v, \phi_n\rangle|^2 = |\langle u, \phi_n\rangle|^2 - 2\langle u, \phi_n\rangle\langle v, \phi_n\rangle + |\langle v, \phi_n\rangle|^2 = |\langle u, \phi_n\rangle|^2 + |\langle v, \phi_n\rangle|^2.$$

Отсюда следует, что $|\langle u+v, \phi_n\rangle|^2 = |\langle u-v, \phi_n\rangle|^2$ для каждого n, и для отображения $\mathcal{A}$ справедливо

$$\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u - v).$$

По предположению u и v не нулевые, значит,

$$u + v \neq \pm(u - v).$$

Таким образом, отображение $\mathcal{A}$ не инъективно.

2) Φ — альтернативно полная система. Предположим, что $\mathcal{A}$ не инъективно. Это означает, что существуют векторы $x, y \in \mathbb{R}^M$ такие, что $x \neq \pm y$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$.

Обозначим $P := \{n : \langle x, \phi_n\rangle = -\langle y, \phi_n\rangle\}$. Имеем $\langle x + y, \phi_n\rangle = 0$ для каждого $n \in P$, и $\langle x - y, \phi_n\rangle = 0$ для каждого $n \in P^c$.

По предположению, $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Таким образом, и $\{\phi_n\}_{n\in P}$, и $\{\phi_n\}_{n\in P^c}$ не полны в $\mathbb{R}^M$, что противоречит определению альтернативной полноты.

В $\mathbb{C}^M$ альтернативная полнота является лишь необходимым условием для ВБФ-систем [2], то есть, если фрейм $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{C}^M$ является ВБФ-системой, то он обладает свойством альтернативной полноты.

Определение 1.4. Фреймовый оператор — положительный, самосопряженный обратимый оператор

$$S : H^M \to H^M, S = V^*V,$$

где V— оператор анализа

$$V : x \in H^M \to \{\langle x, \phi_n\rangle\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N.$$

V^*— оператор синтеза, сопряженный оператор к V, который удовлетворяет

$$V^* : \{z_n\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N \to \sum_{n=1}^N z_n\phi_n \in H^M.$$

В пространстве $\mathbb{H}^M$ рассмотрим оператор синтеза V^*, представимый в виде матрицы, в которой столбцы — векторы из фрейма Φ.

Введем понятие спарка

$$spark(\Phi) = min\{\|x\|_0 : V^*x = 0, x \neq 0\}, \tag{4}$$

где $\|x\|_0$ — обозначение количества ненулевых координат вектора x. Иными словами, спарк — это размер минимальной линейно зависимой системы в $M \times N$- матрице V^*. В некоторых работах такие системы получили другие названия.

Из определения получим:
$spark(\{e_m\}_{m=1}^M) = 0$, где $\{e_m\}_{m=1}^M$— базис в $\mathbb{H}^M$;
если в матрице V^* содержится ноль-столбец, то $spark(\Phi) \geqslant 1$;
для любой $M \times N$ матрицы Φ $0 \leqslant spark(\Phi) \leqslant M+1$;
если $spark(\Phi) = M+1$, то говорят, что система $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ имеет полный спарк.

Теорема 1.2. Всякий фрейм $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ с полным спарком в $\mathbb{R}^M$, где $N \geqslant 2M-1$, удовлетворяет свойству альтернативной полноты, а значит, является ВБФ-фреймом.

Доказательство. Будем вести доказательство от противного. Пусть существует $P \subseteq \{1,2,3,...,N\}$ такое, что ни $\{\phi_n\}_{n\in P}$, ни $\{\phi_n\}_{n\in P^c}$ не полны в $\mathbb{R}^M$.

По определению полного спарка это означает, что

$$|P| < M, \ \ |P^c| < M,$$

то есть $N < 2M$, что противоречит условию.

Таким образом, мы получили, что фрейм с полным спарком, содержащий, по крайней мере, $2M-1$ векторов, является ВБФ-фреймом. Если $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ является ВБФ-системой в $\mathbb{R}^M$, то $N \geqslant 2M-1$, никакое подмножество из $2M-2$ элементов не может быть ВБФ-фреймом.

2. Дискретное преобразование Фурье

В теории фреймов часто находят применение матрицы Вандермонда и матрицы дискретного преобразования Фурье. Мы рассмотрим построение фреймов из матриц F размера $N \times N$. Фрейм Φ будет состоять только из тех столбцов исходной системы F, индексы которых принадлежат множеству $I \subset \{i_0..., i_{M-1}\}$. Для удобства записи будем писать: $\Phi = F[I]$.

Определение 2.1. Матрицей Вандермонда называется матрица $W \in \mathbb{H}^N$, имеющая вид

$$W = \begin{pmatrix} 1 & w_0 & w_0^2 & \dots & w_0^{N-1} \\ 1 & w_1 & w_1^2 & \dots & w_1^{N-1} \\ 1 & w_2 & w_2^2 & \dots & w_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w_{N-1} & w_{N-1}^2 & \dots & w_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix},$$

где $\{w_0, w_1, ..., w_{N-1}\} \in \mathbb{H}$.

Определитель матрицы Вандермонда вычисляется по следующей формуле:

$$detW = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant M-1} (w_j - w_i). \tag{5}$$

Поэтому матрица Вандермонда не вырождена тогда и только тогда, когда все числа $w_0, w_1, ..., w_{M-1}$ попарно различны.

Частным случаем матрицы Вандермонда можно считать матрицу дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

$$DFT_N = [\omega_N^{kl}]_{0 \leqslant k,l < N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(M-1)(M-1)} \end{pmatrix},$$

где $\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$.

Для дальнейшего исследования важно выделить результат, полученный в [3].

3. Построение фреймов с полным спарком

Используя матрицы дискретного преобразования Фурье, мы можем образовать семейство фреймов с векторами $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{C}^M$ такими, что

$$(\phi_{k+1})_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{M}} \omega_N^{ki}, \tag{6}$$

где $i = 0, ..., M-1$ и $k = 0, ..., N-1$, а $\omega_N = e^{2j\pi/N}$.

Аналогично строятся фреймы в $\mathbb{R}^M$.

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^N$ — фрейм в $\mathbb{R}^M$:

$$\psi_{k+1} = \sqrt{\frac{2}{M}}[cos\frac{k\pi}{N}, cos\frac{3k\pi}{N}, ..., cos\frac{(M-1)k\pi}{N}, \tag{7}$$

$$sin\frac{k\pi}{N}, sin\frac{3k\pi}{N}, ..., sin\frac{(M-1)k\pi}{N}]^T,$$

где $k = 0, ..., N-1$ и M — четное.

$$\psi_{k+1} = \sqrt{\frac{2}{M}}[\frac{1}{\sqrt{2}}, cos\frac{2k\pi}{N}, cos\frac{4k\pi}{N}, ..., cos\frac{(M-1)k\pi}{N}, \tag{8}$$

$$sin\frac{2k\pi}{N}, sin\frac{4k\pi}{N}, ..., sin\frac{(M-1)k\pi}{N}]^T,$$

где $k = 0, ..., N-1$ и M — нечетное.

Теорема 3.1. Пусть выполняются (6)–(8). Тогда любое подмножество из M и более векторов образуют фрейм. Другими словами, Φ и Ψ — фреймы с полным спарком.

Доказательство. Отметим, что если конечное множество векторов имеет подмножество, являющееся фреймом, то исходное множество тоже фрейм. Достаточно доказать, что произвольное подмножество из M векторов линейно независимо.

Рассмотрим сначала комплексный случай. Выберем произвольное подмножество фрейма Φ, состоящее из $\{k_1, ..., k_M\}$ векторов, где $k_l \in \{1, 2, ..., M\}$ для $l = 1, ..., M$. Обозначим выбранное подмножество как $\Phi_{N,M}$. Получим

$$\Phi_{N,M} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{pmatrix} 1 & \omega_N^{k_1-1} & \dots & \omega_N^{(M-1)(k_1-1)} \\ 1 & \omega_N^{k_2-1} & \dots & \omega_N^{(M-1)(k_2-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{k_M-1} & \dots & \omega_N^{(M-1)(k_M-1)} \end{pmatrix}.$$

Матрица имеет сходство с матрицей Вандермонда. Вычислим ее определитель

$$det\Phi_{M,N} = N^{-N/2} \prod_{i,j=1;i>j}^{N} (\omega_N^{k_i-1} - \omega_N^{k_j-1}).$$

Определитель в данном случае будет отличен от нуля тогда и только тогда, когда все ω_m^{ki} имеют разные значения. Так как ω_m^{ki} — различные корни единицы, то $det\Phi_{M,N} \neq 0$. Получаем, что выбранное множество из M векторов не вырождено.

Перейдем к вещественному случаю. Пусть M — нечетное. Выберем произвольное подмножество, состоящее из $\{k_1, ..., k_M\}$ векторов, где $k_l \in \{0, 1, ..., M-1\}$ для $l = 1, ..., M$. Обозначим выбранное подмножество как $\Psi_{M,N} = [\phi_{k_1+1}, \phi_{k_2+1}, ..., \phi_{k_M+1}]^T$. Покажем, что $det\Psi \neq 0$. Для начала проведем ряд элементарных преобразований с j-й строкой $\Psi_{M,N}$. Для простоты записи опустим нормирующий коэффициент $\sqrt{2/M}$.

Запишем j-ю строку с применением формулы Эйлера

$$[\frac{1}{\sqrt{2}}, cos\frac{2k_j\pi}{N}, cos\frac{4k_j\pi}{N}, ..., cos\frac{(M-1)k_j\pi}{N},$$

$$sin\frac{2k_j\pi}{N}, sin\frac{4k_j\pi}{N}, ..., sin\frac{(M-1)k-J\pi}{N}] =$$

$$\tag{9}$$

$$= [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\omega_{2N}^{2k_j} + \omega_{2N}^{-2k_j}}{2}, \frac{\omega_{2N}^{4k_j} + \omega_{2N}^{-4k_j}}{2}, ..., \frac{\omega_{2N}^{(M-1)k_j} + \omega_{2N}^{-(M-1)k_j}}{2},$$

$$\frac{\omega_{2N}^{2k_j} - \omega_{2N}^{-2k_j}}{2i}, \frac{\omega_{2N}^{4k_j} - \omega_{2N}^{-4k_j}}{2i}, .., \frac{\omega_{2N}^{(M-1)k_j} - \omega_{2N}^{-(M-1)k_j}}{2i}].$$

Произведем следующие элементарные преобразования:

1) умножим столбцы с номерами $\frac{M+3}{2}, \frac{M+5}{2}, ..., M$ на i;

2) вычтем столбцы с номерами $\frac{M+3}{2}, \frac{M+5}{2}, ..., M$ из столбцов с номерами $2, 3, ..., \frac{M+1}{2}$;

3) умножим столбцы с номерами $2, 3, ..., \frac{M+1}{2}$ на $\frac{1}{2}$ и сложим со столбцами $\frac{M+3}{2}, \frac{M+5}{2}, ..., M$;

4) умножим столбцы с номерами $\frac{M+3}{2}, \frac{M+5}{2}, ..., M$ на 2;

5) умножим первый столбец на $\sqrt{2}$.

Перепишем (9):

$$[1, \omega_{2N}^{2k_j}, \omega_{2N}^{4k_j}, ..., \omega_{2N}^{(M-1)k_j}, \omega_{2N}^{-2k_j}, ..., \omega_{2N}^{-(M-1)k_j}].$$

Умножим все столбцы на $\omega_{2N}^{(M-1)k_j}$. Получим,

$$[\omega_{2N}^{(M-1)k_j}, \omega_{2N}^{(N+1)k_j}, \omega_{2N}^{(N+3)k_j}, ..., \omega_{2N}^{2(N-1)k_j}, \omega_{2N}^{(N-3)k_j}, ..., \omega_{2N}^{0}].$$

Переставим столбцы, чтобы образовать матрицу Вандермонда.

Используя формулу (5), рассмотрим подробнее часть, стоящую под знаком произведения

$$\prod_{0\leqslant i<j\leqslant M-1} (\omega_{2M}^{2j} - \omega_{2M}^{2i}) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant M-1} \omega_{2M}^{i+j}(\omega_{2M}^{j-i} - \omega_{2M}^{-(j-i)}) =$$

$$= \prod_{0\leqslant i<j\leqslant M-1} \omega_{2M}^{i+j} \prod_{0\leqslant i<j\leqslant M-1} (\omega_{2M}^{j-i} - \omega_{2M}^{-(j-i)}) =$$

$$= \omega_{2M}^{\sum\limits_{0\leqslant i<j\leqslant M-1}(i+j)} \cdot \prod_{0\leqslant i<j\leqslant M-1} (\omega_{2M}^{j-i} - \omega_{2M}^{-(j-i)}).$$

Применим полученный результат для нашей матрицы, добавив аргумент комплексного числа и коэффициент.

$$det\Psi = \mathbf{i}^{M(M-1)/2} 2^{M/2} M^{-M/2} \omega_{2M}^{\sum\limits_{l}(l)} \prod_{0\leqslant l\leqslant M-1} (\omega_{2M}^{l} - \omega_{2M}^{-l)}),$$

где $l = j - i$, а $\mathbf{i}$ — мнимая единица. Под знаком произведения мы опять получаем корни из единицы, которые по условию не совпадают.

Рассмотрим фрейм из $\mathbb{R}^M$, где M — четное. Как в случае с нечетным M, выберем произвольное подмножество, состоящее из $\{k_1, ..., k_M\}$ векторов, где $k_l \in \{0, 1, ..., M-1\}$ для $l = 1, ..., M$. Обозначим выбранное подмножество как $\Psi^*_{M,N} = [\phi_{k_1+1}, \phi_{k_2+1}, ..., \phi_{k_M+1}]^T$. Проведем ряд элементарных преобразований с j-й строкой $\Psi^*_{M,N}$. Для простоты записи опустим нормирующий коэффициент $\sqrt{2/M}$

$$\begin{gathered}[cos\frac{k_j\pi}{N}, cos\frac{3k_j\pi}{N}, ..., cos\frac{(M-1)k_j\pi}{N}, \\ sin\frac{k_j\pi}{N}, sin\frac{3k_j\pi}{N}, ..., sin\frac{(M-1)k_j\pi}{N}] = \\ = [\frac{\omega_{2N}^{k_j} + \omega_{2N}^{-k_j}}{2}, \frac{\omega_{2N}^{3k_j} + \omega_{2N}^{-3k_j}}{2}, ..., \frac{\omega_{2N}^{(M-1)k_j} + \omega_{2N}^{-(M-1)k_j}}{2}, \\ \frac{\omega_{2N}^{k_j} - \omega_{2N}^{-k_j}}{2i}, \frac{\omega_{2N}^{3k_j} - \omega_{2N}^{-3k_j}}{2i}, .., \frac{\omega_{2N}^{(M-1)k_j} - \omega_{2N}^{-(M-1)k_j}}{2i}].\end{gathered} \tag{10}$$

Произведем следующие элементарные преобразования:

1) умножим столбцы с номерами $\frac{M}{2}+1, \frac{M}{2}+2, ..., M$ на i;
2) вычтем столбцы с номерами $\frac{M}{2}+1, \frac{M}{2}+2, ..., M$ из столбцов с номерами $1, 2, ..., \frac{M}{2}$;
3) умножим столбцы с номерами $1, 2, ..., \frac{M}{2}$ на $\frac{1}{2}$ и сложим со столбцами $\frac{M}{2}+1, \frac{M}{2}+2, ..., M$;
4) умножим столбцы с номерами $\frac{M}{2}+1, \frac{M}{2}+2, ..., M$ на 2.

Запишем j-ю строку после преобразований

$$[\omega_{2N}^{k_j}, \omega_{2N}^{3k_j}, ..., \omega_{2N}^{(M-1)k_j}, \omega_{2N}^{-k_j}, ..., \omega_{2N}^{-(M-1)k_j}].$$

Умножим все столбцы на $\omega_{2N}^{(M-1)k_j}$. Получим

$$[\omega_{2N}^{Mk_j}, \omega_{2N}^{(M+2)k_j}, ..., \omega_{2N}^{2(M-1)k_j}, \omega_{2N}^{(M-2)k_j}, ..., \omega_{2N}^{0}].$$

Если переставить столбцы, мы получим матрицу Вандермонда, определитель которой был высчитан для нечетного случая.

Получаем, что матрицы Φ, Ψ — фреймы с полным спарком, так как любая их подматрица размера $M \times M$ имеет определитель, не равный нулю.

Литература

[1] Новиков С.Я. Фреймы конечномерных пространств и дискретная фазовая проблема. Самара: Изд-во ”Самарский университет”, 2016. С. 25–35.

[2] Bandeira A.S. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval / A.S. Bandeira [et al.] // Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2014. V. 37. I. 1. P. 106–125. DOI:10.1016/j.acha.2013.10.002.

[3] Puschel M., Kovacevic J. Real, tight frames with maximal robustness to erasures // Data Compression Conference Proceedings, 2005. P. 63–72. DOI:10.1109/DCC.2005.77.

[4] Alexeev B., Cahill J., Mixon D.J. Full spark frames // Journal of Fourier Analysis and Application 18. 2012. № 6. P. 1167–1194. DOI:10.1007/s00041-012-9235-4.

[5] Mixon D.J. Sparse Signal Processing with Frame Theory // PhD. Princeton University. 2012. arXiv:1204.5958vl [math.FA].

[6] Новиков С.Я., Лихобабенко М.А. Фреймы конечномерных пространств. Самара: УОП СамГУ, 2013. С. 5–24. URL: http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobiya/Freimy-konechnomernyh-prostranstv-Elektronnyi-resurs-ucheb-posobie-dlya-vuzov-68531/1/Новиков%20С.%20А.%20Фреймы%20конечномерных%20пространств.pdf.

[7] Balan R., Casazza P., Edidin D. On signal reconstruction without phase // Appl. Comput. Harmon. Anal. 20. 2006. P. 345–356. DOI:10.1016/j.acha.2005.07.001.

[8] Goyal V.K., Kovacevic J. Quantized Frame Expansions with Erasures // Appl. Comput. Harmon. Anal. 10. 2001. P. 203–233. DOI: https://doi.org/10.1006/acha.2000.0340.

[9] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / пер. с англ. М.: Мир, 1989. С. 43–44. URL: https://b-ok.cc/book/2412248/ba76e6.

[10] Phase retrieval from very few measurements / M. Fickus [et al.] // Linear Algebra and Its Applications. 2014 V. 449. P. 475–499. DOI:10.1016/j.laa.2014.02.011.

References

[1] Novikov S.Ya. *Freimy konechnomernykh prostranstv i diskretnaya fazovaya problema* [Frames of finite dimensional spaces and discrete phase problem]. Samara: Samarskii gosuniversitet, 2016, pp. 25–35 [in Russian].

[2] Bandeira A.S., Cahill J., Mixon D.G., Nelson A.A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. *Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA)*, 2014, Vol. 37, I. 1, pp. 106–125. DOI:10.1016/j.acha.2013.10.002 [in English].

[3] Puschel, M., Kovacevic, J. Real, tight frames with maximal robustness to erasures. In: *Data Compression Conference Proceedings*, 2005, pp. 63–72. DOI: 10.1109/DCC.2005.77. [in English].

[4] Alexeev B., Cahill J., Mixon D.J. Full spark frames. *Journal of Fourier Analysis and Application*, 2012, no. 6, pp. 1167–1194. DOI:10.1007/s00041-012-9235-4 [in English].

[5] Mixon D.J. Sparse Signal Processing with Frame Theory. PhD. Princeton University, 2012. arXiv:1204.5958vl [math.FA]. [in English].

[6] Novikov S.Ya., Likhobabenko M.A. *(*Freimy konechnomernykh prostranstv) [Frames of finite dimensional spaces]. Samara: Izdatel’stvo "Samarskii universitet 2013, pp. 5–24. Available at: http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobiya/Freimy-konechnomernyh-prostranstv-Elektronnyi-resurs-ucheb-posobie-dlya-vuzov-68531/1/Новиков%20С.%20А.%20Фреймы%20конечномерных%20пространств.pdf [in Russian].

[7] Balan R., Casazza P., Edidin D. On signal reconstruction without phase. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2006, vol. 20, issue 3, pp. 345–356. DOI:10.1016/j.acha.2005.07.001. [in English].

[8] Goyal V.K., Kovacevic J. Quantized Frame Expansions with Erasures. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2001, vol. 10, issue 3, pp. 203–233. DOI: https://doi.org/10.1006/acha.2000.0340.

[9] Horn R.A., Johnson C.R. *Matrichnyi analiz: Per. s angl.* [Matrix Analysis: translation from English]. Moscow: Mir, 1989, pp. 43–44. Available at: https://b-ok.cc/book/2412248/ba76e6. [in Russiam].

[10] Fickus M., Mixon D.G., Nelson A.A., Wang Ya. Phase retrieval from very few measurements. *Linear Algebra and Its Applications*, 2014, vol. 449, pp. 475–499. DOI: 10.1016/j.laa.2014.02.011.