УДК 517.95
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-22-28

Дата поступления статьи: 2/X/2019
Дата принятия статьи: 16/X/2019

В.А. Киричек

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© *Киричек Виталия Александровна* — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
E-mail: Vitalya29@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9817-863X

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для одномерного гиперболического уравнения. Нелокальные условия второго рода различаются видом внеинтегральных слагаемых, которые могут содержать как следы искомого решения, так и следы производных. Это различие оказывается существенным при выборе метода исследования разрешимости задачи. В статье рассматривается тот случай нелокальных условий, когда внеинтегральные слагаемые представляют собой следы искомой функции на границе области. Для исследования разрешимости задачи был использован метод сведения к краевой задаче для нагруженного уравнения. Этот метод позволил ввести понятие обобщенного решения, получить априорные оценки и доказать однозначную разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия второго рода, нагруженное уравнение, обобщенное решение.

Цитирование. Киричек В.А. Разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями второго рода для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 25. № 4. С. 22–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-22-28.

UDC 517.95 Submitted: 2/X/2019
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-22-28 Accepted: 16/X/2019

V.A. Kirichek

SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS OF THE II KIND FOR ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

© *Kirichek Vitaliya Alexandrovna* — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
E-mail: Vitalya29@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9817-863X

ABSTRACT

In this paper we consider a nonlocal problem with integral conditions of the II kind for one-dimensional hyperbolic equation. Nonlocal conditions of the second kind differ in type of non-integral terms, that may contain traces of required solution and traces of derivatives. This difference turns out to be significant for choosing a method for investigating the solvability of the problem. In this work we consider the case when nonintegral terms are traces of required solution on boundary of the domain. To investigate the solvability of the problem we use method of reduction to the boundary problem for loaded equation. This method allowed us to define a generalized solution, to obtaim apriori estimates and to prove existence of unique generalized solution of the given problem.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral condition of the II kind, loaded equation, generalized solution.

Citation. Kirichek V.A. *Razreshimost' nelokal'noi zadachi s integral'nymi usloviyami vtorogo roda dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya* [Solvability of a nonlocal problem with integral conditions of the II kind for one-dimensional hyperbolic equation]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, vol. 25, no. 4, pp. 22–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-4-22-28 [in Russian].

Введение

В статье рассматривается задача с нелокальными интегральными условиями второго рода для одномерного гиперболического уравнения. Активное исследование задач с интегральными условиями началось в середине прошлого столетия со статей, в которых рассматривалось уравнение теплопроводности [1; 2]. И лишь в конце XX века специалисты пришли к изучению нелокальных задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений [3; 4]. Актуальность подобных задач обусловлена тем, что нелокальные условия возникают при исследовании различных физических явлений, когда невозможно провести по каким-то причинам непосредственные измерения на границах области.

Особенность исследования нелокальных задач заключается в том, что применение классических методов для разрешимости начально-краевых задач оказывается неэффективным или требует значительных доработок, которые обычно сопровождаются громоздким решением и побочными трудностями. В настоящее время разработаны некоторые методы, позволяющие исследовать нелокальные задачи [5–8].

В данной статье приведено исследование разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения. Как известно, выбор метода исследования нелокальных задач зависит от вида интегральных условий [9]. На данный момент существует несколько эффективных методов исследования нелокальных задач: вспомогательных задач, компактности, сведения к нагруженному уравнению. Отметим здесь статьи [10–12]. В работе [10] используется идея метода сведения к нагруженному уравнению. Однако метод доказательства разрешимости задачи существенно отличается от приведенного в указанной статье.

1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу:

Задача 1. Найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$u(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0, \quad u(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0. \tag{3}$$

Условия (3) являются интегральными условиями 2 рода с внеинтегральными слагаемыми, которые представляет собой следы функции на границе. Для исследования разрешимости подобных задач можно применить метод вспомогательных задач, а также метод сведения к нагруженному уравнению с однородными граничными условиями. Мы применим второй из этих методов, воспользовавшись приемом, предложенным в статье [10] при исследовании нелокальной задачи для многомерного гиперболического уравнения. Заметим, что мы используем лишь способ введения новой неизвестной функции, тогда как метод доказательства разрешимости задачи полностью отличается от примененного в упомянутой статье.

Введем новую неизвестную функцию, положив

$$v(x,t) = u(x,t) + \int_0^l H(x,\xi)u(\xi,t)d\xi, \tag{4}$$

где $H(x,\xi) = \frac{1}{l}((l-x)K_1(\xi) + xK_2(\xi))$. Считая u решением задачи (1)–(3), а также полагая $K_i(0) = K_i(l) = 0$, приходим к начально-краевой задаче для нагруженного уравнения

$$v_{tt} - (av_x)_x + cv + \int_0^l P(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi = f(x,t), \tag{5}$$

где

$$P(x,\xi,t) = (a(x,t)H_x(x,\xi)_x - [c(x,t) - c(\xi,t)]H(x,\xi) - (H_\xi(x,\xi)a(\xi,t))_\xi -$$
$$-H_\xi(x,0)a(0,t)K_1(\xi) + H_\xi x, l.a(l,t)K_2(\xi).$$

Заметим, что новая неизвестная функция удовлетворяет однородными краевым и начальным условиям

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \tag{6}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, мы пришли к следующей задаче:

Задача 2.

Найти в области Q_T решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным данным $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$ и краевым условиям (6).

Обозначим

$$W(Q_T) = \{v(x,t) : v \in W_2^1(Q_T), v(0,t) = v(l,t) = 0\},$$
$$\hat{W}(Q_T) = \{\eta(x,t) : \eta \in W(Q_T), \eta(x,T) = 0\}.$$

Используя стандартную процедуру введения понятия обобщенного решения, выпишем тождество, на котором оно будет базироваться

$$\int_0^T \int_0^l (-v_t\eta_t + av_x\eta_x + cv\eta)dxdt + \int_0^T \int_0^l \eta \int_0^l Pud\xi dxdt = \int_0^T \int_0^l f\eta dxdt. \tag{8}$$

Определение. Функцию $v \in W(Q_T)$ будем называть обобщенным решением задачи (5)–(7), если она удовлетворяет начальному условию $v(x,0) = 0$ и интегральному тождеству (8) для всех функций $\eta \in \hat{W}(Q_T)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

$$a,\ \ a_t, a_x\ \ c,\ \ c_t \in C(\bar{Q}_T),\ \ a(x,t) > 0\ \ \forall (x,t) \in \bar{Q}_T;$$
$$f, f_t \in L_2(Q_T),\ \ H, H_\xi, H_{\xi\xi} \in C(\bar{Q}_T).$$

Тогда существует единственное решение задачи 2.

Доказательство

Будем искать приближенное решение из соотношений

$$\int_0^T\int_0^l (-v_t^n\eta_t + av_x^n\eta_x + cv^n\eta)dxdt + \int_0^T\int_0^l \eta\int_0^l Pu^{n-1}d\xi dxdt = \int_0^T\int_0^l f\eta dxdt, \tag{9}$$

$$u^n = \int_0^l Hu^n d\xi = v^n. \tag{10}$$

Положим $u^0 = 0$. При $n = 1$ получаем из (9) равенство

$$\int_0^T\int_0^l (-v_t^1\eta_t + av_x^1\eta_x + cv^1\eta)dxdt = \int_0^l \psi(\xi)\eta(\xi,0)d\xi + \int_0^T\int_0^l g\eta dxdt, \tag{11}$$

которое представляет собой тождество, на котором базируется определение обобщенного решения начально-краевой задачи

$$u_{tt} - (au_x)_x + cu = f, \tag{12}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \tag{13}$$

Известно [13], что эта задача, если выполняются условия теоремы, однозначно разрешима в $W_2^1(Q_T)$ и справедлива оценка $||v||_{W_2^1} \leqslant C||f||_{L_2}$.

Более того, если $a,\ \ a_t, a_x\ \ c,\ \ c_t \in C(\bar{Q}_T), f_t \in L_2(Q_T)$, то это решение принадлежит $W_2^1(Q_T)$ [13, с. 216]. Для таких решений справедливо равенство

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,\tau)u_x^2(x,\tau)]dx = \int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^2 dxdt - 2\int_0^\tau\int_0^l cuu_t dxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l fu_t dxdt, \tag{14}$$

из которого нетрудно стандартными методами получить неравенство

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + u_t^2(x,\tau) + u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant C_1\int_0^\tau\int_0^l [u^2 + u_x^2 + u_t^2]dxdt + c(\varepsilon)\int_0^\tau\int_0^l u_t^2 dxdt + \varepsilon\int_0^\tau\int_0^l f^2 dxdt. \tag{15}$$

Вернемся к задаче 2. Как было замечено, v^1 можно рассматривать как решение первой начально-краевой задачи для уравнения

$$v_{tt}^1 - (av_x^1)_x + cv^1 = f(x,t),$$

которое существует, единственно и удовлетворяет неравенству $||v^1||_{W_2^1(Q_T)} \leqslant C||f||_{L_2(Q_T)}$.

Теперь из (10) найдем u^1 :

$$u^1 = \int_0^l Hu^1 d\xi = v^1.$$

Из (9) найдем $v^2(x,t)$, учитывая, что при выполнении условия теоремы правая часть уравнения относительно v^2 будет по-прежнему принадлежать $L_2(Q_T)$ вместе с производной по t

$$\int_0^T\int_0^l (-v_t^2\eta_t + av_x^2\eta_x + cv^2\eta)dxdt = \int_0^l \psi(\xi)\eta(\xi,0)d\xi + \int_0^T\int_0^l g\eta dxdt - \int_0^T\int_0^l \eta\int_0^l Pu^1 d\xi dxdt.$$

Продолжим этот процесс, в итоге построим последовательность (v^n, u^n).

Перейдем к выводу оценок. Обозначим

$$z^n = v^n - v^{n-1},$$
$$r^n = u^n - u^{n-1}.$$

Тогда из (9) получим

$$\int_0^T\int_0^l(-z_t^n\eta_t+az_x^n\eta_x+cz^n\eta)dxdt=-\int_0^T\int_0^l\eta(x,t)\int_0^l Pr^{n-1}d\xi dxdt, \tag{16}$$

где

$$r^{n-1}+\int_0^l Hr^{n-1}dx=z^{n-1}. \tag{17}$$

Пусть $F=\int_0^l Pz^{n-1}d\xi$. Получим оценку для z^n, использовав неравенство (15)

$$||z^n||^2_{W_2^1(Q_T)}\leqslant\varepsilon M||F||^2_{L_2}.$$

Теперь оценим правую часть этого неравенства

$$||F||^2_{L_2}=\int_0^\tau\int_0^l(\int_0^l Pr^{n-1}d\xi)^2dxdt\leqslant P_1\int_0^\tau\int_0^l(r^{n-1})^2dxdt,$$

где $P_1=max\int_0^l P^2d\xi$. Тогда

$$||z^n||^2_{W_2^1(Q_\tau)}\leqslant\varepsilon MP_1||r^{n-1}||^2_{L_2(Q_\tau)}. \tag{18}$$

Проведем оценку функции $(r^n)^2$. Функция r^n удовлетворяет равенству $r^n=z^n-\int_0^l Hr^ndx$. Тогда, применив неравенство Коши, нетрудно получить

$$(r^n)^2\leqslant 2(z^n)^2+2h_0\int_0^l(r^n)^2dx,$$

откуда при $1-2h_0l>0$ следует

$$||r^n||^2_{L_2(Q_T)}\leqslant C_1||z^n||^2_{L_2(Q_T)},$$

$C_1=\frac{2}{1-2h_0l}$. Дифференцируя $r^n=z^n-\int_0^l Hr^ndx$ по t и по x, аналогично получим еще два неравенства

$$||r_t^n||^2_{L_2(Q_T)}\leqslant C_2||z_t^n||^2_{L_2(Q_T)},\quad ||r_x^n||^2_{L_2(Q_T)}\leqslant C_3||z_x^n||^2_{L_2(Q_T)},$$

где постоянные C_2,C_3 зависят только от l,h. Окончательно получим

$$||r^n||^2_{W_2^1(Q_\tau)}\leqslant N||r^{n-1}||^2_{W_2^1(Q_\tau)}. \tag{19}$$

Из (18), (19) имеем

$$||z^n||_{W_2^1(Q_\tau)}\leqslant\sqrt{\varepsilon B}||z^{n-1}||_{W_2^1(Q_\tau)},||r^n||_{W_2^1(Q_\tau)}\leqslant\sqrt{\varepsilon B}||r^{n-1}||^2_{W_2^1(Q_\tau)}, \tag{20}$$

где мы обозначили $B=NMP_1$.

Выберем ε_1 так, чтобы $\sqrt{\varepsilon B}<1$, тогда ряды $\sum_{n=1}^\infty r^n$ и $\sum_{n=1}^\infty z^n$ сходятся.
Рассмотрим частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^\infty z^n=\sum_{n=1}^\infty(v^n-v^{n-1})$, $\sum_{n=1}^\infty r^n=\sum_{n=1}^\infty(u^n-u^{n-1})$ $S^1=v^1-$ $-v^0$, так как $v^0=0$, получаем $S^1=v^1,S^2=v^1+v^2-v^1=v^2$. Аналогично $S_1=u^1-u^0$, так как $u^0=0$, получаем $S-1=u^1,S-2=u^1+u^2-u^1=u^2$. Продолжив этот процесс, получим $S^n=v^n$ и $S_n=u^n$, значит, последовательности частичных сумм сходятся. Следовательно, построенная последовательность (u^n,v^n) также сходится.
Перейдя к пределу при $n\to\infty$

$$\int_0^T\int_0^l(-v_t^n\eta_t+av_x^n\eta_x+cv^n\eta)dxdt+\int_0^T\int_0^l\eta\int_0^l Pu^{n-1}d\xi dxdt=\int_0^l\psi(\xi)\eta(\xi,0)d\xi+\int_0^T\int_0^l g\eta dxdt,$$

$$u^{n-1}=\int_0^l Hu^{n-1}d\xi=v^{n-1},$$

легко убеждаемся в том, что предел выделенной подпоследовательности действительно есть искомое обобщенное решение задачи 2.

Теорема 2. Если выполняются условия

$$a,\ \ a_t, a_x\ \ c,\ \ c_t \in C(\bar{Q}_T),\ \ a(x,t) > 0\ \ \forall (x,t) \in \bar{Q}_T;$$
$$f, f_t \in L_2(Q_T),\ \ K_i \in C^2(\bar{Q}_T),\ \ K_i(0) = K_i(l) = 0,$$

тогда существует единственное решение задачи 1.

Действительно, если выполняются условия теоремы 2, то выполняются и все условия теоремы 1. Тогда существует единственное решение задачи 2, причем $u \in W_2^2(Q_T)$. Очевидно, что в силу граничных условий $v(0,t) = v(l,t) = 0$ выполняются интегральные условия (3), а также начальные условия (2). Подставив (4) в (5) после элементарных, хотя и громоздких преобразований приходим к выводу, что u удовлетворяет уравнению (1).

Литература

[1] Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy //Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21. № 2. P. 155–160. DOI: 10.1090/qam/160437.

[2] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024. URL: http://www.mathnet.ru/links/458e6fce912264a194717e273d833c8d/zvmmf7694.pdf.

[3] Пулькина Л.С. Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 1991. № 11. С. 48–51. URL: http://www.mathnet.ru/links/117798e729d69dadb1c531679395a347/ivm5192.pdf.

[4] Пулькина Л.С. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения // Математические заметки. 1992. Т. 51. Вып. 3. С. 91–96. URL: http://www.mathnet.ru/links/04e6ed7312767968341c39957076bc09/mzm4503.pdf.

[5] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661. URL: http://www.mathnet.ru/links/d6caa4125858ad5643c36ff8c4e87741/de10157.pdf.

[6] Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 3. С. 435–445. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm277.

[7] Пулькина Л.С. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1084–1089. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11533369.

[8] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1072–1077. URL: http://www.mathnet.ru/links/b77b7025135a962928616c1be7573af7/de11542.pdf.

[9] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Издательство "Самарский университет", 2012. 194 с.

[10] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179. URL: http://www.mathnet.ru/links/8b1d9b77de9edd2b738fa99e4b18867a/de11554.pdf.

[11] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral condition // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016. № 193. P. 1–1. URL: https://pdfs.semanticscholar.org/5550/c097496f428d827925bfb987497a291bee78.pdf?_ga=2.141811954.1367780915.1591514604-1525477732.1586505106.

[12] Пулькина Л.С., Киричек В.А. Разрешимость нелокальной задачи для гиперболического уравнения с вырождающимися интегральными условиями // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 2. С. 229–245. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1707.

[13] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

References

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, no. 2, pp. 155–160. DOI: 10.1090/qam/160437. [in English].

[2] Kamynin L.I. *Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviyami* [A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition]. *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1964, 4:6, pp. 33–59. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1 [in Russian].

[3] Pulkina L.S. *Ob odnoi neklassicheskoi zadache dlya vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya* [A nonclassical problem for a degenerate hyperbolic equation]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Soviet Mathematics (Izv. VUZ. Matematika)], 1991, vol. 35, no. 11, pp. 49–51. Available at: http://www.mathnet.ru/links/117798e729d69dadb1c531679395a347/ivm5192.pdf [in Russian].

[4] Pul'kina L.S. *Ob odnoi nelokal'noi zadache dlya vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya* [Certain nonlocal problem for a degenerate hyperbolic equation]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1992, 51:3, pp. 286–290. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01206393 [in Russian].

[5] Il'in V.A., Moiseev E.I. *O edinstvennosti resheniya smeshannoi zadachi dlya volnovogo uravneniya s nelokal'nymi granichnymi usloviyami* [Uniqueness of the solution of a mixed problem for the wave equation with nonlocal boundary conditions]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2000, 36:5, pp. 728–733. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754231 [in Russian].

[6] Pulkina L.S. *(*Smeshannaya zadacha s integral'nym usloviem dlya giperbolicheskogo uravneniya) [A Mixed Problem with Integral Condition for the Hyperbolic Equation]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2003, vol. 74, no. 3, pp. 411–421. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1026167021195 [In Russian].

[7] Pulkina L.S. *Nachal'no-kraevaya zadacha s nelokal'nym granichnym usloviem dlya mnogomernogo giperbolicheskogo uravneniya* [Initial-boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2008, vol. 44, no. 8, pp. 1119–1125. DOI: 10.1134/S0012266108080090 [in Russian].

[8] Lazetic N.L. *O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka* [On the classical solvability of the mixed problem for a second-order one-dimensional hyperbolic equation]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2006, 42:8, pp. 1134–1139. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106080088 [in Russian].

[9] Pulkina L.S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equatins]. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii universitet 2012, 194 p. [in Russian].

[10] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii* [On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2006, 42:9, pp. 1233–1246. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266106090023 [in Russian].

[11] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral condition. *(*Electronic Journal of Differential Equations), 2016, vol. 2016, p. 193. Available at: https://pdfs.semanticscholar.org/5550/c097496f428d827925bfb987497a291bee78.pdf?_ga=2.141811954.1367780915.1591514604-1525477732.1586505106. [in English].

[12] Pulkina L.S., Kirichek V.A. *Razreshimost' nelokal'noi zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s vyrozhdayushchimisya integral'nymi usloviyami* [Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with degenerate integral conditions]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 229–245. DOI: 10.14498/vsgtu1707 [in Russian].

[13] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=442669 [in Russian].