МАТЕМАТИКА

УДК 517.956
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-7-13

Дата поступления статьи: $1/X/2019$
Дата принятия статьи: $14/X/2019$

С.А. Алдашев, З.Н. Канапьянова

КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© *Алдашев Серик Аймурзаевич* — доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая, 050100 Республика Казахстан, г. Алматы, ул.Толе би, 86.
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8223-6900
Канапьянова Зауре Ниазбековна — докторант 2-курса, Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая, 050100 Республика Казахстан, г. Алматы, ул.Толе би, 86.
E-mail: kanapyanova81@bk.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2544-8197

АННОТАЦИЯ

При математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся трехмерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к вырождающимся трехмерным параболическим уравнениям. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к вырождающимся трехмерным гиперболо-параболическим уравнениям. Смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений хорошо изучена и ранее рассмотрена в работах различных авторов. В статьях профессора С.А. Алдашева доказана однозначная разрешимость смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Известно, что смешанные задачи для многомерных гиперболо-параболических уравнений исследованы мало. В статье найден новый класс вырождающихся трехмерных гиперболо-параболических уравнений, для которых смешанная задача имеет единственное решение и приведено явное представление ее классического решения.

Ключевые слова: корректность, смешанная задача, цилиндрическая область, вырождение, гиперболо-параболическое уравнение, функция Бесселя.

Цитирование. Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. Корректность смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гиперболо-параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 4. С. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-7-13.

UDC 517.956
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-7-13

Submitted: $1/X/2019$
Accepted: $14/X/2019$

S.A. Aldashev, Z.N. Kanapyanova

CORRECTNESS OF A MIXED PROBLEM FOR DEGENERATE THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATIONS

© *Aldashev Serik Aimurzaevich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, full professor, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, Abai Kazakh National Pedagogical University, 13, Dostyk ave., Almaty, 050100, Republic of Kazakhstan.
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8223-6900
Kanapyanova Zaure Niazbekovna —PhD student of the 2nd year of study, Institute of Mathematics, Physics and Computer Science, Abai Kazakh National Pedagogical University, 13, Dostyk ave., Almaty, 050100, Republic of Kazakhstan.
E-mail: kanapyanova81@bk.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2544-8197

ABSTRACT
In mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conducting, we obtain degenerate three-dimensional hyperbolic equations. If the medium has a high conductivity, then we come to degenerate three-dimensional parabolic equations. Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the medium's conductivity changes) is reduced to degenerate three-dimensional hyperbolic-parabolic equations. The mixed problem for multidimensional hyperbolic equations is well studied and has been previously considered in the works of various authors. In the articles of Professor S.A. Aldashev, the unique solvability of the mixed problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations is proved. It is known that mixed problems for multidimensional hyperbolic-parabolic equations have not been studied much. The paper finds a new class of degenerate three-dimensional hyperbolic-parabolic equations for which the mixed problem has a unique solution and gives an explicit representation of its classical solution.

Key words: correctness, mixed problem, cylindrical domain, degeneracy, hyperbolic-parabolic equation, Bessel function.

Citation. Aldashev S.A. *Korrektnost' smeshannoi zadachi dlya vyrozhdayushchikhsya trekhmernykh giperbolo-parabolicheskikh uravnenii* [Correctness of a mixed problem for degenerate three-dimensional hyperbolic-parabolic equations]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 4, pp. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-4-7-13 [in Russian].

Введение

Основная смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений хорошо изучена [1; 2]. Эта задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций рассмотрена в [3; 4].

Насколько известно, смешанные задачи для многомерных гиперболо-параболических уравнений исследованы мало [5; 6].

В данной статье найден новый класс вырождающихся трехмерных гиперболо-параболических уравнений, для которых смешанная задача однозначна разрешима и приведен явный вид классического решения.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек $(x_1,\, x_2,\, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|-$ длина вектора $x = (x_1, x_2)$ [1].

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, $\Gamma_\beta-$ части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$и $t < 0$; $\sigma_\alpha-$ верхнее, а $\sigma_\beta-$ нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α и Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_2.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся трехмерные гиперболо-параболические уравнения

$$0=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{2}p_i(t)u_{x_ix_i}-u_{tt}+\sum\limits_{i=1}^{2}a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0,\ t>0,\\ \sum\limits_{i=1}^{2}g_i(t)u_{x_ix_i}-u_t+\sum\limits_{i=1}^{2}d_i(x,t)u_{x_i}+e(x,t)u,\ t<0,\end{cases}\tag{1}$$

где $p_i(t)>0$ при $t>0$, $g_i(t)>0$ при $t<0$ и могут обращаться в нуль при $t=0$, $p_i(t)\in C([0,\alpha])\cap C^2((0,\alpha))$, $g_i(t)\in C([\beta,0])$, $i=1,2$.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными r,θ,t : $x_1= =r\cos\theta$, $x_2=r\sin\theta$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$.

Рассмотрим следующую смешанную задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t\neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta})\cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})\cap$ $\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta),\tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta),\quad u\Big|_{\sigma_\beta}=\varphi(r,\theta).\tag{3}$$

при этом $\psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta)$, $\psi_2(\beta,\theta)=\varphi(1,\theta)$.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t)\in C^1(\bar{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t)\in C^1(\bar{\Omega}_\beta)\cap$ $\cap C^2(\Omega_\beta)$, $i= =1,2$, $e(r,\theta,t)\leqslant 0$, $\forall(r,\theta,t)\in\Omega_\beta$. Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\varphi(r,\theta)\in C^1(\bar{S})\cap C^3(S)$, $\psi_1(t,\theta)\in C^1(\bar{\Gamma}_\alpha)\cap C^3(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta)\in C^1(\bar{\Gamma}_\beta)\cap C^3(\Gamma_\beta)$, то задача 1 однозначно разрешима, если выполняется условие

$$\cos\mu_{s,n}\alpha'\neq 0,\ s=1,2,\dots,\tag{4}$$

где $\mu_{s,n}-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_n(z)$, $\alpha'=\int\limits_0^\alpha\sqrt{\frac{[p_1(\xi)+p_2(\xi)]}{2}}d\xi$, $n=0,1,\dots$.

2. Разрешимость задачи 1

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). Ее решение будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=u_{10}(r,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(u_{1n}(r,t)\cos n\theta+u_{2n}(r,t)\sin n\theta),\tag{5}$$

где $u_{10}(r,t)$, $u_{1n}(r,t)$, $u_{2n}(r,t)-$ функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (5) в (1), в области Ω_β, в полярных координатах будем иметь

$$\begin{gathered}L_1u\equiv g_1(t)\left(\cos^2\theta u_{10rr}+\frac{\sin^2\theta}{r}u_{10r}\right)+g_2(t)\left(\sin^2\theta u_{10rr}+\frac{\cos^2\theta}{r}u_{10r}\right)-u_{10t}+\\ +d_1(r,\theta,t)\cos\theta u_{10r}+d_2(r,\theta,t)\sin\theta u_{10r}+e(r,\theta,t)u_{10}+\\ +\sum_{i=1}^{2}\Big\{g_1(t)\Big[\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr}+\sin n\theta u_{2nrr})+\frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr}+\sin n\theta u_{2nr})+\\ +\frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta u_{1nr}-\cos n\theta u_{2nr})+\frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\cos n\theta u_{2n}-\sin n\theta u_{1n})-\\ -\frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{1n}+\sin n\theta u_{2n})\Big]+g_2(t)\Big[\sin^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr}+\sin n\theta u_{2nrr})+\\ +\frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta u_{2nr}-\sin n\theta u_{1nr})+\frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr}-\sin n\theta u_{2nr})+\\ +\frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta u_{1n}-\cos n\theta u_{2n})-\frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1n}+\sin n\theta u_{2n})\Big]-u_{1nt}\cos n\theta-\\ -u_{2nt}\sin n\theta+d_1\Big[\cos\theta(\cos n\theta u_{1nr}+\sin n\theta u_{2nr})+\frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta u_{1n}-\cos n\theta u_{2n})\Big]+\\ +d_2\Big[\sin\theta(\cos n\theta u_{1nr}+\sin n\theta u_{2nr})+\frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta u_{2n}-\sin n\theta u_{1n})\Big]+\\ +e(\cos n\theta u_{1n}+\sin n\theta u_{2n})\Big\}=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Теперь полученное выражение (6) сначала умножим на $\rho(\theta)\neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\begin{gathered}\frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)-\rho_{10}u_{10t}+\frac{(g_1-g_2)}{r}d_{10}\left(u_{10rr}-\frac{1}{r}u_{10}\right)+\\ +a_{10}(r,t)u_{10r}+c_{10}(r,t)u_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{2}\Big[\frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{jn}(u_{jnrr}+\\ +\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn})-\rho_{jn}u_{jnt}+\frac{(g_1-g_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr}-\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)+\\ +\frac{(g_2-g_1)n}{2}e_{jn}\left(u_{jnr}-\frac{u_{jn}}{2r}\right)+a_{jn}(r,t)u_{jnr}+c_{jn}(r,t)u_{jn}\Big]\Big\}=0,\end{gathered}\tag{7}$$

$$\rho_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \rho_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,\ d_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,$$
$$d_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{1n}=-\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,$$
$$a_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho(d_1\cos\theta+d_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\ a_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho(d_1\cos\theta+d_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$
$$c_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\left[(d_1\sin\theta-d_2\cos\theta)\tfrac{n\sin n\theta}{r}+e\cos n\theta\right]d\theta,$$
$$c_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\left[(d_2\cos\theta-d_1\sin\theta)\tfrac{n\cos n\theta}{r}+e\sin n\theta\right]d\theta,\ n=0,1,\ldots.$$

Далее рассмотрим бесконечную систему систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)-\rho_{10}u_{10t}=0,\ g(t)=\frac{g_1(t)+g_2(t)}{2},\tag{8}$$

$$g(t)\rho_{j1}\left(u_{j1rr}+\frac{1}{r}u_{j1r}-\frac{u_{j1}}{r^2}\right)-\rho_{10}u_{j1t}=\frac{(g_2-g_1)d_{10}}{2}\left(u_{10rr}-\frac{u_{10r}}{r}\right)-a_{10}u_{10r}-c_{10}u_{10},\tag{9}$$

$$g(t)\rho_{jn}\left(u_{jnrr}+\tfrac{1}{r}u_{jnr}-\tfrac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)-\rho_{jn}u_{jnt}=-\tfrac{(g_1-g_2)d_{jn}}{2}\left(u_{jn-1rr}-\tfrac{1}{r}u_{jn-1r}-\right.$$
$$\left.-\tfrac{(n-1)^2}{r^2}u_{jn-1}\right)-\tfrac{(g_2-g_1)(n-1)}{r}e_{jn-1}\left(u_{jn-1r}-\tfrac{u_{jn-1}}{2r}\right)-$$
$$-a_{jn-1}u_{jn-1r}-c_{jn-1}u_{jn-1},\ j=1,2,\ n=2,3,\ldots.$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10},\,u_{jn}\}$, $j=1,2$, $n=1,2,...-$ решение системы (8), (9), то оно является и решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность [7] систем тригонометрических функций $\{\frac{1}{2},\cos n\theta,\sin n\theta,\ n==1,2,...\}$, на отрезке $[0,2\pi]$ из краевого условия (3) в силу (5) будем иметь

$$u_{10}(r,\beta)=\varphi_{210}(r),\ u_{10}(1,t)=\psi_{210}(t),\tag{10}$$

$$u_{jn}(r,\beta)=\varphi_{2jn}(r),\ u_{jn}(1,t)=\psi_{2jn}(t),\ j=1,2,\ n=1,2,\ldots,\tag{11}$$

$$\varphi_{210}(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2(r,\theta)d\theta,\ \varphi_{210}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_2(t,\theta)d\theta,$$

$$\varphi_{21n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2(r,\theta)\cos n\theta d\theta,\ \psi_{21n}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_2(t,\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\varphi_{22n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2(r,\theta)\sin n\theta d\theta,\ \psi_{22n}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_2(t,\theta)\sin n\theta d\theta,\ n=1,2,\ldots.$$

Таким образом, задача (1), (3) сведена к системе задач для уравнений (8), (9) с данными (10) и (11). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8), (9) можно представить в виде

$$g(t)\left(u_{nrr}+\frac{1}{r}u_{nr}-\frac{n^2}{r^2}u_n\right)-u_{nt}=f_n(r,t),\tag{12}$$

где $f_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r,t)\equiv 0$.

В [5; 6] показано, что краевые задачи для уравнения (12) с условиями (10) и (11) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (8), (10) ($j=1,\ n=0$), а затем (9), (11) ($j=1,2,\ n=1$), найдем последовательно все $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j=1,2, n=1,2,\ldots$.

Итак, показано, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta)L_1ud\theta=0.\tag{13}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty((0,2\pi))$ плотна в $L_2((0,2\pi))$, а $T(t)\in V_1$, V_1 плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V=V_0\otimes(0,2\pi)\otimes V_1$ плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ [7].

Отсюда и из (13) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)L_1 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = 0, \ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1),(3) в области Ω_β является функция (5), где $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j = 1,2$, $n = 1,2,...$ определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi(r,\theta), \psi_2(t,\theta)$, аналогично, как и в [8], можно показать, что полученное решение (5) принадлежит классу $C^1(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее из (5) при $t \to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = u_{10}(r,0) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n}(r,0)\cos n\theta + u_{2n}(r,0)\sin n\theta), \tag{14}$$

$$u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta) = u_{10t}(r,0) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1nt}(r,0)\cos n\theta + u_{2nt}(r,0)\sin n\theta), \tag{15}$$

при этом $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in C(\bar{S}) \cap C^2(S)$.

Следовательно, учитывая краевые условия (2), (14), (15) приходим в области Ω_α к смешанной задаче для вырождающихся гиперболических уравнений

$$L_2 u \equiv \sum_{i=1}^{2} p_i(t) u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0 \tag{16}$$

с данными

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u_t\Big|_S = \nu(r,\theta), \ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{17}$$

В [9] доказана следующая

Теорема 2. Если $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in C(\bar{S}) \cap C^2(S), \psi_1(t,\theta) \in C(\bar{\Gamma}_\alpha) \cap C^2(\Gamma_\alpha)$, то задача (16), (17) имеет единственное решение, если выполняется условие (4).

Далее, используя теорему 2, приходим к разрешимости задачи 1.

3. Единственность решения задачи 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем ее единственность решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* \upsilon \equiv \sum_{i=1}^{2} g_i(t) \upsilon_{x_i x_i} + \upsilon_t - \sum_{i=1}^{2} d_i \upsilon_{x_i} + d\upsilon = 0 \tag{18}$$

с данными

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \tau_{10}(r), \quad \upsilon\big|_{\Gamma_\beta} = 0, \tag{19}$$

где $d(x,t) = e - \sum\limits_{i=1}^{2} d_{ix_i}$, $\tau_{10}(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [7]. Решение задачи (18), (19) будем искать в виде (5). Тогда, аналогично п. 2, функции $\upsilon_{10}(r,t), \upsilon_{jn}(r,t), j = 1,2$, $n = 1,2,...$ будут удовлетворять системе уравнений вида (8), (9), где d_i заменены соответственно на $-d_i$, а e на d, $i = 1,2,$.

Из краевого условия (19) имеем

$$\upsilon_{10}(r,0) = \tau_{10}(r), \ \upsilon_{10}(r,\beta) = 0, \tag{20}$$

$$\upsilon_{jn}(r,0) = 0, \ \upsilon_{jn}(r,\beta) = 0, \ j = 1,2, \ n = 1,2,\dots. \tag{21}$$

Как ранее показано, каждое уравнение системы (8), (9) представимо в виде (12). В [8] показано, что краевые задачи для уравнения (12) с данными (20), (21) имеют единственные решения.

Таким образом, решение задачи (18), (19) в виде (5) построено.

Аналогичном образом строится решение этой задачи, если $\tau(r,\theta) = \tau_{1n}(r)\cos n\theta + +\tau_{2n}(r)\sin n\theta$, $i = 1,2,\dots$.

В результате интегрирования по области Ω_β тождество [10]

$$\upsilon L_1 u - u L_1^* \upsilon = -\upsilon P(u) + u P(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=\sum_{i=1}^{2} g_i(t)u_{x_i}\cos\left(N^{\perp},x_i\right),\ Q=\cos\left(N^{\perp},t\right)-\sum_{i=1}^{2} d_i\cos\left(N^{\perp},x_i\right),$$

а $N^{\perp}$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$, по формуле Грина получим

$$\int_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{22}$$

Поскольку система функций $\{1,\cos n\theta,\sin n\theta,\ n=1,2,...\}$ плотна в $L_2((0,2\pi))$ [7], то из (22) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0,\ \forall(r,\theta)\in S$.

Стало быть, по принципу экстремума для параболического уравнения $L_1u=0$ [11] имеем $u\equiv 0$ в $\bar{\Omega}_\beta$.

Отсюда следует, что $u_t(r,\theta,0)=\nu(r,\theta)=0,\forall(r,\theta)\in S$.

Таким образом, мы пришли к однородной смешанной задаче (16), (17), которая в силу теоремы 2 имеет тривиальное решение.

Следовательно, единственность решения задачи 1 доказана.

Так как в [9] получен явный вид решения задачи (16), (17), то можно записать явное представление и для задачи 1.

Литература

[1] Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения, М.: Гостехиздат, 1953. 279 с. URL: http://bookre.org/reader?file=579384.

[2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с. URL: http://bookre.org/reader?file=442669.

[3] Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. 1959. Т. 49(91). С. 29–84. URL: http://www.mathnet.ru/links/aee615ef85b73c2fbc4c0f4cd201c7f7/sm4910.pdf.

[4] Барановский Ф.Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости // Ученые записки Ленингр. пед. ин-та. 1958. Т. 183. С. 23–58.

[5] Aldashew S.A. Well-posedness of the mixed problem for degenerate multi-dimensional hyperbolic equations // Материалы межд. конференций, Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational Methods and Information Technologies. Киев: КНУ, 2018. С. 14–15.

[6] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений // Укр. мат. журн. 2020. Т. 72. № 2. С. 280–288. URL: http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/870.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. С. 543.

[8] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений // Научные ведомости БелГУ. Сер.: Математика, физика. 2016. № 27(248). Вып. 45. С. 16–25. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29201717.

[9] Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. Корректность смешанных задач для одного класса вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений // Тезисы докладов Узбекско-Российской научной конференции. Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Ташкент, 2019. 96 с. URL: http://numf2019.nuu.uz/numf2019.pdf.

[10] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с. URL: https://obuchalka.org/2012030763879/kurs-visshei-matematiki-tom-4-chast-2-smirnov-v-i-1974.html.

[11] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 527 с. URL: http://bookre.org/reader?file=579715.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. *Smeshannaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya* [Mixed problem for hyperbolic equation]. Moscow: Gostekhizdat, 1953, 279 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=579384 [in Russian].

[2] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=442669 [in Russian].

[3] Krasnov M.L. *Smeshannye kraevye zadachi dlya vyrozhdayushchikhsya lineinykh giperbolicheskikh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poryadka* [Mixed boundary value problems for degenerate linear hyperbolic second order differential equations]. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1959, vol. 49(91), pp. 29–84. Available at: http://www.mathnet.ru/links/aee615ef85b73c2fbc4c0f4cd201c7f7/sm4910.pdf [in Russian].

[4] Baranovskii F.T. *Smeshannaya zadacha dlya lineinogo giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka, vyrozhdayushchegosya na nachal'noi ploskosti* [Mixed problem for a linear second-order hyperbolic equation degenerating in the initial plane]. *Uchenye zapiski Leningr. ped. instituta*, 1958, vol. 183, pp. 23–58 [in Russian].

[5] Aldashev S.A. Well-posedness of the mixed problem for degenerate multi-dimensional hyperbolic equations. *Materials of the international conferences, Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational Methods and Information Technologies.* Kyiv: Kyiv National University named after T. Shevchenko, 2018, pp. 14–15.

[6] Aldashev S.A. *Korrektnost' smeshannoi zadachi v tsilindricheskoi oblasti dlya odnogo klassa mnogomernykh giperbolo-parabolicheskikh uravnenii* [Correctness of a mixed problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional hyperbolic-parabolic equations]. *Ukr. mat. zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal], 2020, vol. 72, no. 2, pp. 280–288. Available at: http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/870. [in Russian].

[7] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka, 1976, 543 p. Available at: http://mat.net.ua/mat/Kolmogorov-Funkanaliz.htm. [in Russian].

[8] Aldashev S.A. *Korrektnost' zadachi Dirikhle dlya vyrozhdayushchikhsya mnogomernykh giperbolo-parabolicheskikh uravnenii* [Correctness of the Dirichlet problem for degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations]. *(*Nauchnye vedomosti BelGU. Ser.: Matematika, fizika) [Research Bulletin of Belgorod State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 27(248), issue 45, pp. 16–25. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=29201717 [in Russian].

[9] Aldashev S.A., Kanapyanova Z.N. *Korrektnost' smeshannykh zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushchikhsya trekhmernykh giperbolicheskikh uravnenii* [Correctness of mixed problems for one class of degenerate three-dimensional hyperbolic equations]. In: *Tezisy dokladov Uzbeksko-Rossiiskoi nauchnoi konferentsii. Neklassicheskie uravneniya matematicheskoi fiziki i ikh prilozheniya* [Abstracts of the Uzbek-Russian scientific conference. Non-classical equations of mathematical physics and their applications]. Tashkent, 2019, 96 p. Available at: http://numf2019.nuu.uz/numf2019.pdf [in Russian].

[10] Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki. T. 4. Ch. 2* [Course of higher mathematics. Vol. 4. Part 2]. Moscow: Nauka, 1981, 550 p. Available at: https://obuchalka.org/2012030763879/kurs-visshei-matematiki-tom-4-chast-2-smirnov-v-i-1974.html [in Russian].

[11] Friedman A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial differential equations of parabolic type]. Moscow: Mir, 1968, 527 p. Available at: http://bookre.org/reader?file=579715 [in Russian].