

УДК 539.376
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82

Дата поступления статьи: 3/VII/2019
Дата принятия статьи: 15/VIII/2019

Л.В. Степанова, О.Н. Белова, В.А. Туркова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ М. УИЛЬЯМСА ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЦИФРОВОЙ ФОТОУПРУГОСТИ И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

© *Степанова Лариса Валентиновна* — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: stepanova1v2015@yandex.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

Белова Оксана Николаевна — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: belovaonik@yandex.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

Туркова Вера Александровна — старший преподаватель кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: turkova.va@ssau.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-6975-9440>

АННОТАЦИЯ

В статье описан способ определения параметров механики разрушения: коэффициентов интенсивности напряжений, Т-напряжений и коэффициентов высших приближений многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины, основанный на экспериментальном методе цифровой фотоупругости и методе конечных элементов, реализованном в многофункциональном комплексе SIMULIA Abaqus. В рамках натурального эксперимента изготовлена и испытана целая серия образцов с трещинами и надрезами, с помощью которых реализован нормальный отрыв и смешанное нагружение образца с трещиной. С помощью основного закона фотоупругости вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины. Полученные конечно-элементные решения задач для образцов той же конфигурации дали возможность вычисления коэффициентов асимптотического разложения. Сравнение коэффициентов, найденных экспериментально и численно, показало, что экспериментальные и численные значения коэффициентов разложения не отличаются друг от друга более чем на пять процентов, что говорит о хорошем совпадении численных расчетов с экспериментом.

Ключевые слова: цифровая фотоупругость, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, многопараметрическое описание поля напряжений у вершины трещины, смешанное деформирование, коэффициент интенсивности напряжений, Т-напряжения, коэффициенты высших приближений.

Цитирование. Степанова Л.В., Белова О.Н., Туркова В.А. Определение коэффициентов разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины с помощью метода цифровой фотоупругости и метода конечных элементов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 62–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82>.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19-01-00631.

UDC 539.376
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82

Submitted: 3/VII/2019
Accepted: 15/VIII/2019

L.V. Stepanova, O.N. Belova, V.A. Turkova

DETERMINATION OF THE WILLIAMS SERIES EXPANSION'S COEFFICIENTS USING DIGITAL PHOTOELASTICITY METHOD AND FINITE ELEMENT METHOD²

© *Stepanova Larisa Valentinovna* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: stepanovlv@samsu.ru. **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

Belova Oksana Nikolaevna — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: belovaonik@yandex.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

Turkova Vera Alexandrovna — senior lecturer of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

E-mail: turkova.va@ssau.ru. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-6975-9440>

ABSTRACT

In the present work, photoelastic and finite element methods have been employed to study the near crack tip fields in isotropic linear elastic cracked bodies under mixed mode loading. The investigated fracture results have been obtained for a series of cracked specimens by testing plates with two parallel cracks, two inclined parallel cracks, three-point bend specimens, four-point bend specimens, inclined edge crack triangular shape specimens subjected to symmetric three point bend loading. The multi-parameter Williams series expansion is used for the crack tip field characterization. Digital photoelasticity method is utilized for determination of the Williams series expansion's coefficients. The unknown coefficients in the multi-parameter equation are determined using a linear least squares method in an over-deterministic manner. Together with the experimental determination of the fracture mechanics parameters finite element method is invoked to describe the crack tip stress field. Coefficients of higher order terms are either found numerically by finite element method. A good agreement is found between the numerical and experimental results. The significant advantages using multi-parameter equations in the analysis of the stress field are shown and the errors that a study with a limited number of terms produce is demonstrated. The comparison with finite element analysis highlighted the importance and precision of the photoelastic observation for the evaluation of the fracture mechanics parameters. The experimental SIF, T-stress values and coefficients of higher-order terms estimated using the digital photoelasticity method for the extensive series of cracked specimens are compared with finite element analysis (FEA) results, and are found to be in good agreement.

Key words: digital photoelasticity, finite element method, crack tip stress and strain fields, multi-parameter stress field description, mixed-mode loading, stress intensity factor, T-stress, coefficients of higher - order terms, asymptotic methods and perturbation theory in solid mechanics

Citation. Stepanova L.V., Belova O.N., Turkova V.A. *Opredelenie koeffitsientov razlozheniya M. Uil'yamsa polya napryazhenii u vershiny treshchiny s pomoshch'yu metoda tsifrovoi fotouprugosti i metoda konechnykh elementov* [Determination of the Williams series expansion's coefficients using digital photoelasticity method and finite element method]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 3, pp. 62–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-3-62-82> [in Russian].

Введение

Экспериментальные исследования в механике деформируемого твердого тела вызывают все возрастающий интерес и пристальное внимание как в России, так и за рубежом [1; 2]. Число публикаций, посвященных экспериментальным методам в механике деформируемого твердого тела в целом, интерференционно-оптическим методам в частности, возрастает из года в год. Можно привести публикации

²This work was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project 19-01-00631.

2017–2018 годов, посвященные только классическим интерференционно-оптическим методам: фотоупругости и (или) спектрометрии и их комбинации [3–10]. Все указанные публикации посвящены развитию цифровых методов обработки всей совокупности экспериментальной информации, получаемой с помощью метода фотоупругости, переживающего в настоящее время ренессанс. Интерференционные картины изохроматических полос и полос изоклин записываются с помощью современной регистрирующей техники и обрабатываются посредством новых, быстрых, специально ориентированных на фотоупругость алгоритмов.

Так, например, в [11] разработана модель приближённого нахождения траектории распространения трещины разрушения в статически нагруженных элементах сварных конструкций. В основу модели положены результаты исследований авторов методом фотоупругости и натурных испытаний трещиностойкости сварных соединений с угловыми швами с позиций механики разрушения. Наряду с этим использован аппарат дифференциальной геометрии, в частности, свойства геодезических линий и градиентного спуска применительно к траектории распространения трещины. Во второй части работы [12] в рамках разработанной модели с позиций механики разрушения сформулирован критерий начального страгивания трещины из вершины трещиноподобного дефекта. Результаты натурных испытаний статической трещиностойкости сварных соединений с угловыми швами показали приемлемое для инженерных приложений совпадение с предложенным подходом в определении траектории трещин.

В [13] отмечается, что метод получения плоских картин напряжений внутри тел сложной формы, в том числе на начальных этапах проектирования до изготовления детали из металла, успешно практикуется при просвечивании на специальных установках поляризованным светом моделей деталей, сделанных из оптически прозрачных материалов.

Современный метод – метод корреляции цифровых изображений – стал в настоящее время, по всей видимости, одним из основных экспериментальных методов регистрации полей деформаций и перемещений в деформируемом твердом теле. Метод широко используется для определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в различных классах материалов. Из последних работ можно выделить [16–30].

В работе [14] рассматривается метод трех экспозиций для отдельного получения главных напряжений методом голографической фотоупругости с использованием двух объемных моделей рельса с наклейками из различных оптически активных материалов. Приведен сравнительный анализ экспериментальных данных с аналитическим решением задачи для железнодорожного рельса, который показал хорошую сходимость результатов.

В статье [15] предложена методика анализа интерференционных полос при измерении остаточных напряжений в элементах конструкций методом наращивания тонкой прорези. Это позволит автоматизировать процесс исследования напряженно-деформированного состояния образцов поляризационно-оптическим методом. Показана возможность программной реализации данной методики на примере разработанного приложения. Эта программа позволяет автоматизированно определять поля максимальных касательных напряжений, формировать матрицы значений напряжений с привязкой к геометрии.

Можно привести самые последние монографии [18; 27], посвященные интерференционно-оптическим методам и их приложениям к задачам механики разрушения.

Следует особо выделить исследования И.А. Разумовского и его коллег [28; 29]. В [28] вводится в рассмотрение зона неупругого деформирования в окрестности вершины трещины как область, в которой поля напряжений и перемещений не могут быть описаны с помощью классического решения линейной механики разрушения – решения М. Уильямса. Для представления поля напряжений вне зоны неупругого деформирования используется указанное разложение М. Уильямса, в котором требуется удерживать значительное количество регулярных слагаемых. В качестве методов измерений в [28] используются оптико-цифровые методы, обеспечивающие получение значительных объемов экспериментальной информации в виде полей перемещений поверхности исследуемого образца непосредственно в цифровом виде. В [29] изложены результаты исследований в области экспериментальных (экспериментально-расчетных) методов исследования параметров нагруженности элементов конструкций. Авторы особое внимание уделяют теоретическим и программным разработкам, основанным на методологии обратных задач экспериментальной механики. Приведены примеры решения задач нестационарной теплопроводности при ограниченном объеме экспериментальной информации, определения высокоградиентных неоднородных полей остаточных напряжений, дефектоскопии элементов конструкций.

В большинстве монографий и научной периодической литературы отмечается появление и быстрое распространение новых методов экспериментальной регистрации полей напряжений и деформаций (например, системы кинематических измерений позволяют определить поля напряжений и деформаций, по меньшей мере, на поверхности испытываемых образцов). Вместе с развивающимися вычислительными техниками и возможностями стало остро необходимым получение экспериментальной информации, которая может быть правильно обработана и сравнена с численными расчетами. Например, размещение

датчиков по всей поверхности образца требует оптимального управления всей собираемой информацией. Следует отметить также, что в последнее время, с одной стороны, наблюдается разрыв между вычислительными возможностями, новыми полученными численными результатами, новыми экспериментальными техниками, а с другой — традиционными испытательными процедурами, которые хорошо разработаны и протестированы. Однако это не позволяет получать экспериментальные данные в требуемом количестве (данные по всей поверхности образца, данные по всей изохроматической полосе в случае фотоупругости). Таким образом, возникает необходимость тесной связи между экспериментальными методами измерений и компьютерным имитационным моделированием. Компьютерные вычисления должны учитывать экспериментальные результаты, а результаты экспериментов должны иметь возможность быть сравненными с конечно-элементными вычислениями [31–40].

Новые и существующие направления в экспериментальных исследованиях полей напряжений и деформаций активно развиваются в нашей стране и за ее пределами и составляют актуальнейшую задачу как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Можно, например, отметить цикл работ В.С. Писарева, И.Н. Одинцева и их коллег, посвященный экспериментальным методам исследований напряжений в твердых телах [41–45].

Вышеуказанные работы посвящены различным теоретическим и практическим аспектам оптико-корреляционных методов экспериментальной механики: методу спекл-интерферометрии и методу цифровой корреляции изображений. Эти методы используются для бесконтактной и высокоточной идентификации перемещений на поверхности деформируемого твердого тела. Показано, что методы корреляции цифровых изображений и методы корреляционной цифровой спекл-интерферометрии являются высокоэффективными средствами экспериментальной механики, с помощью которых можно получить сведения не только о деформированном состоянии объекта в отдельных точках, но и о континуальном формате. С их использованием открываются новые возможности для анализа напряженно-деформированного состояния, для изучения процессов нелинейного деформирования и разрушения твердых тел вследствие значительной по объему и качеству информации, получаемой экспериментатором. Активному внедрению данного инструментария в инженерную практику будет помогать как совершенствование аппаратной составляющей, так и развитие программных средств обработки экспериментальной информации. Основной вывод, следующий из большого объема публикаций, посвященных экспериментальным методам: дизайн и оптимизация конструкций требуют подхода, базирующегося на синтезе вычислительных и экспериментальных техник. В рамках настоящего исследования используется экспериментальный и конечно-элементный метод для определения напряжений и деформаций в образцах различной формы с трещинами и надрезами. Поэтому научная проблема – экспериментально-теоретическое исследование полей напряжений и деформаций в твердых телах под нагрузкой, на решение которой направлена данная работа, представляет собой анализ полей напряжений с помощью многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в изотропном линейно-упругом материале.

1. Многопараметрическое асимптотическое разложение М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины

Асимптотическое представление М. Уильямса [46; 47] поля напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в виде асимптотического ряда по степеням расстояния от кончика трещины r определяется следующим выражением:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_{m,ij}^{(k)}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

где $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ – универсальные угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые в ходе решения краевой задачи; r – расстояние от вершины трещины; θ – полярный угол; a_k^m – масштабные (амплитудные) коэффициенты, зависящие от геометрии образца с трещиной и приложенной нагрузки; постоянная m определяет тип нагружения и принимает значение 1 для нагружения, отвечающего нормальному отрыву, значение 2 – поперечному сдвигу. Универсальные угловые распределения компонент тензора напряжений $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$, фигурирующие в (1), хорошо известны и могут быть найдены в [46; 47]

$$\begin{aligned}
f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= k [(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2, \\
f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= k [(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2, \\
f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= k [-(k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\
f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -k [(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\
f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -k [(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\
f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= k [-(k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Поле перемещений у вершины трещины находится с помощью соотношений [53]

$$u_i(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} a_k^m \tilde{u}_k^{m,i}(\theta) r^{k/2}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_k^{1,1}(\theta) &= (\varkappa + k/2 + (-1)^k) \cos(\theta/2) - (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta, \\
\tilde{u}_k^{1,2}(\theta) &= (\varkappa - k/2 - (-1)^k) \sin(\theta/2) + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \\
\tilde{u}_k^{2,1}(\theta) &= -(\varkappa + k/2 - (-1)^k) \sin(\theta/2) + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \\
\tilde{u}_k^{2,2}(\theta) &= (\varkappa - k/2 + (-1)^k) \cos(\theta/2) + (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta,
\end{aligned} \tag{4}$$

\varkappa – константа плоской задачи теории упругости, равная $3 - 4\nu$ для плоского деформированного состояния, и $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ плоского напряженного состояния, $\mu = E/(2(1 + \nu))$ – модуль сдвига, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Все многообразие конфигураций тел с трещинами, находящихся под действием разнообразных систем нагрузок, отражается в коэффициентах асимптотического разложения $a_k^m(1)$.

В [48–52] было показано, что с удалением от вершины трещины становятся существенными высшие приближения в полном асимптотическом разложении поля напряжений: чем дальше точка, в которой определяется поле напряжений, находится от вершины трещины, тем больше слагаемых следует удерживать в асимптотическом разложении. Поэтому целью настоящей работы является определение масштабных множителей a_k^m – коэффициентов полного асимптотического разложения в окрестности вершины трещины для целого ряда образцов с трещинами и надрезами экспериментально методом цифровой фотоупругости и численно посредством метода конечных элементов. Все это реализуется в программном комплексе SIMULIA Abaqus.

Особенно важное значение влияние высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса приобретает при обработке экспериментальной информации вне зависимости от метода исследования полей у вершины трещины. Это остается справедливым как для классического метода фотоупругости, так и для новой техники, вошедшей в употребление – метода корреляции цифровых изображений.

Поэтому в настоящей статье с помощью метода фотоупругости определены наряду с коэффициентами интенсивности напряжений и Т-напряжениями коэффициенты высших приближений асимптотических разложений поля напряжений у вершины трещины в целом ряде образцов с трещинами и надрезами.

2. Метод цифровой фотоупругости

Проведена большая серия экспериментов с помощью метода фотоупругости на проекционно-поляризационной установке ППУ-7 на различных образцах с трещинами и надрезами. Были изготовлены прямоугольные пластины с системой взаимодействующих трещин с двумя горизонтальными параллельными трещинами, с двумя горизонтальными, расположенными на одной прямой трещинами. Были рассмотрены балки с центральной трещиной для испытаний на трехточечный изгиб с симметричными опорами и несимметричными опорами и балки для испытаний на четырехточечный изгиб с несимметричным расположением точек приложения сил для моделирования смешанного нагружения (для моделирования трещин, находящихся в условиях смешанного нагружения). Для проведения эксперимента были изготовлены образцы с разрезами из эпоксидной смолы ЭД-20, эпоксидного клея ЭДП и двухкомпонентной прозрачной эпоксидной смолы Арт-Эко. Картины изохроматических полос для различных типов образцов с трещинами и надрезами при действии различных нагрузок показаны на рис. 1–8. На рис. 1 показано поле изохроматических полос в пластинах с двумя параллельными горизонтальными и двумя параллельными наклонными трещинами. На рис. 2 приведены картины изохроматических полос вблизи двух параллельных взаимодействующих трещин в пластинах, находящихся под действием одноосной растягивающей нагрузки величиной 50 и 75 кг соответственно. На рис. 3 слева изображено поле изохроматических полос у вершин двух боковых надрезов в пластине. На рис. 3 справа представлена картина

изохроматических полос вокруг двух коллинеарных наклонных трещин в растягиваемой пластине. Картина изохроматических полос в балке с надрезом при испытаниях на изгиб (нормальный отрыв) (сверху) и картина изохроматических полос в балке с наклонным надрезом (смешанное нагружение) изображены на рис. 4. Поле изохром в балке с надрезом (смешанное нагружение) сверху: действует сила 25 кг, снизу – 50 кг приведено на рис. 5. Картины изохроматических полос в балке с несимметричными точками приложения нагрузки величиной 75 и 100 кг показаны на рис. 6. Картины изохроматических полос в образце треугольной формы с надрезом приведены на рис. 7 и 8.

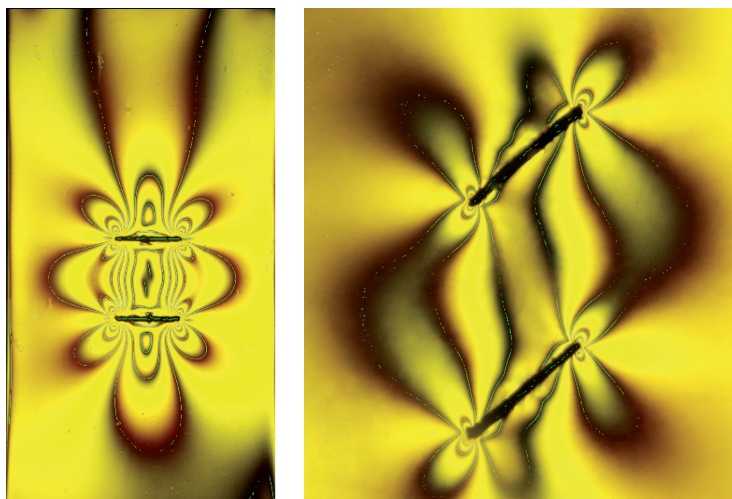


Рис. 1. Картина изохроматических полос вблизи двух горизонтальных параллельных трещин (слева) и двух наклонных параллельных трещин в растягиваемой пластине
 Figure 1. Picture of isochromatic stripes near two horizontal parallel cracks (left) and two inclined parallel cracks in a stretched plate

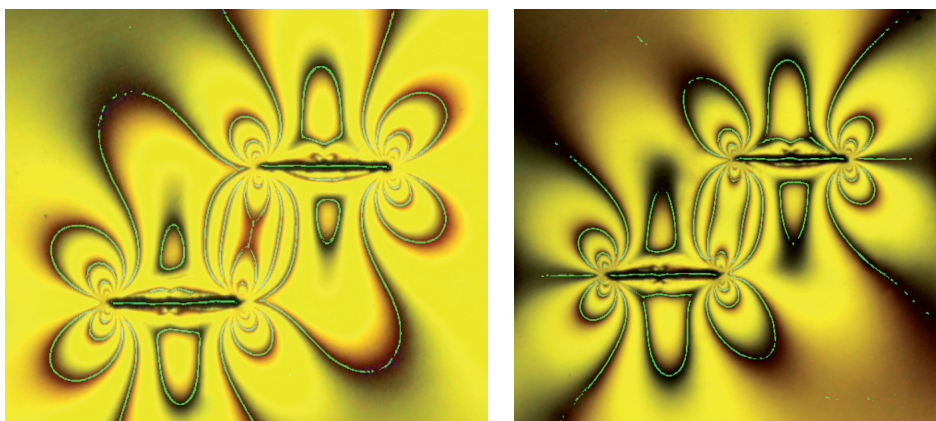


Рис. 2. Поле изохроматических полос в пластине с двумя горизонтальными трещинами под действием растягивающей нагрузки 50 кг (слева) и 75 кг (справа)
 Figure 2. Field of isochromatic strips in a plate with two horizontal cracks under a tensile load of 50 kg (left) and 75 kg (right)

На рис. 1–8 на каждой изохроме можно увидеть линии, выделяющие точки с минимальной освещенностью. Данные точки находятся автоматически в ходе работы процедуры, разработанной в [58], где для расшифровки картин изохром разработано приложение, позволяющее практически полностью автоматизировать эту процедуру, избавив от рутинной и трудоемкой работы, которая практически полностью обычно выполняется вручную. На примере классической задачи о диске, сжатом диаметрально противоположными силами, подробно описан алгоритм работы разработанного программного комплекса, включающий в себя следующие основные этапы: предобработка изображения, локализация интерференционных полос, их трассировка. В результате работы приложения создается текстовый файл, содержащий все данные, необходимые для дальнейшего определения напряженно-деформированного состояния тела (номера изохроматических полос и координаты точек, принадлежащих данной полосе).

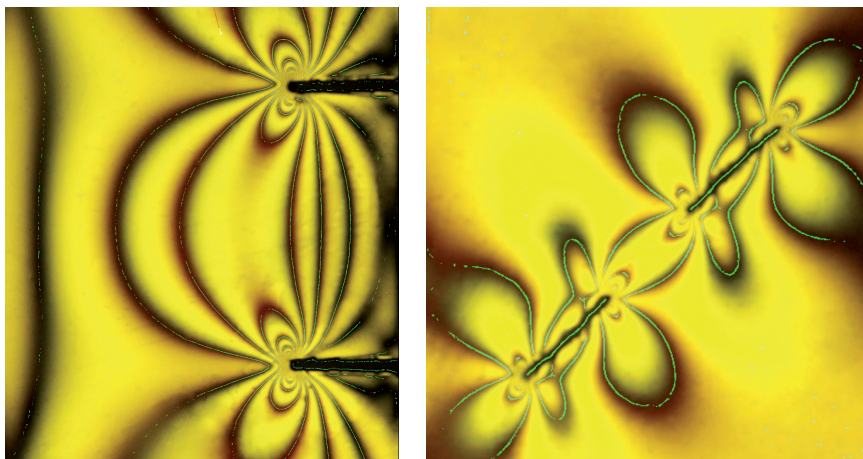


Рис. 3. Поле изохроматических полос у вершин двух боковых надрезов в пластине (слева) и картина изохроматических полос вокруг двух коллинеарных наклонных трещин в растягиваемой пластине (справа)

Figure 3. Field of isochromatic strips at the vertices of two side cuts in the plate (left) and the picture of isochromatic strips around two collinear inclined cracks in the stretch plate (right)

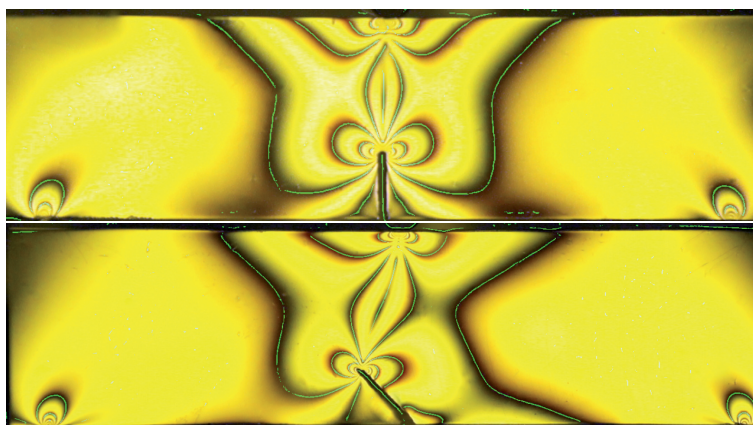


Рис. 4. Картина изохроматических полос в балке с надрезом при испытаниях на изгиб (нормальный отрыв) (сверху) и картина изохроматических полос в балке с наклонным надрезом (смешанное нагружение)

Figure 4. Picture of isochromatic strips in a notched beam during bending tests (normal separation) (top) and picture of isochromatic strips in a beam with notched incision (mixed loading)

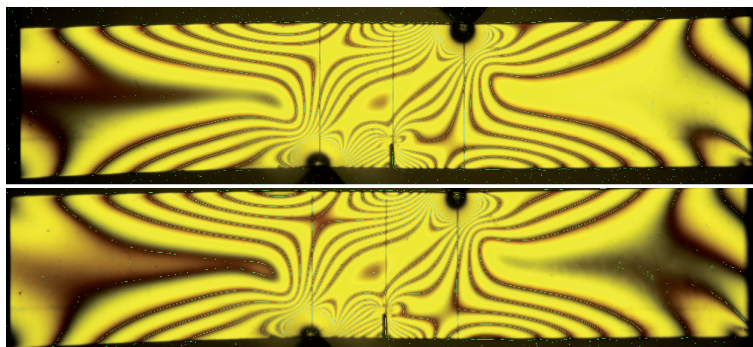


Рис. 5. Картина изохроматических полос в балке с надрезом (смешанное нагружение) сверху: действует сила 25 кг, снизу – 50 кг

Figure 5. Picture of isochromatic strips in a notched beam (mixed loading) from above: force of 25 kg acts, from below – 50 kg

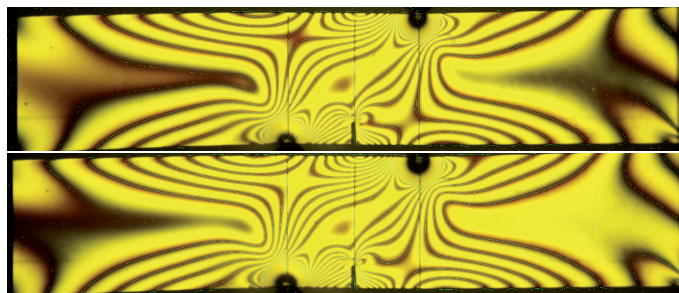


Рис. 6. Картина изохроматических полос в балке с надрезом (смешанное нагружение) сверху: действует сила 75 кг, снизу – 100 кг

Figure 6. Picture of isochromatic stripes in a notched beam (mixed loading) from above: force of 75 kg acts, from below – 100 kg

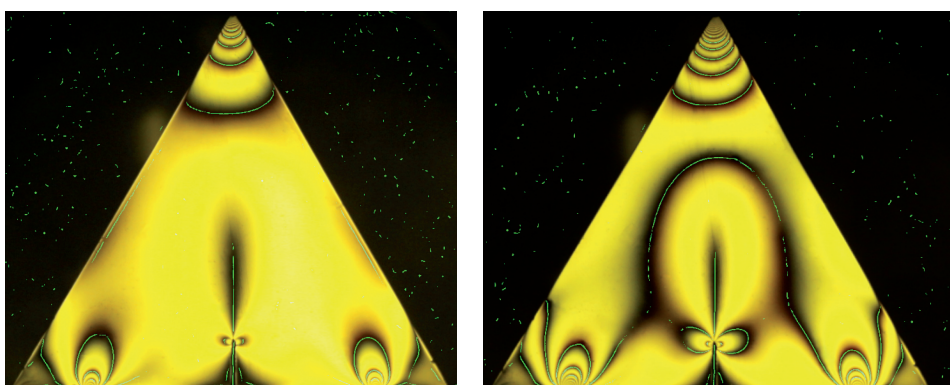


Рис. 7. Картина изохроматических полос в образце треугольной формы с надрезом при нагрузке $P = 25$ кг (слева) и $P = 50$ кг (справа)

Figure 7. Picture of isochromatic stripes in a triangular sample with a notch under load $P = 25$ kg (left) and $P = 50$ kg (right)

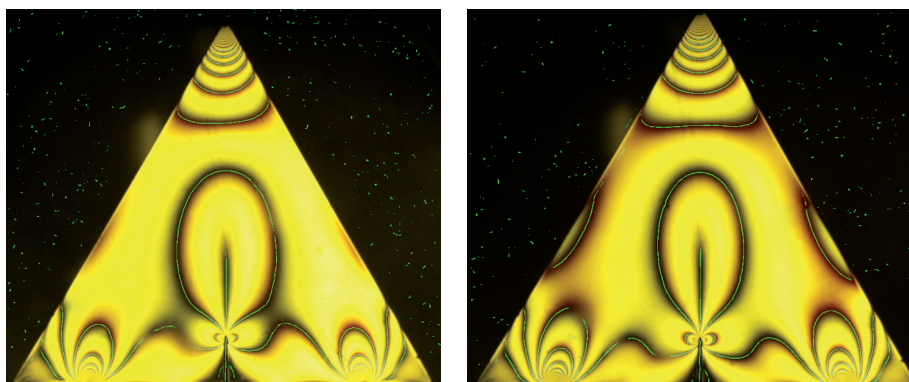


Рис. 8. Картина изохроматических полос в образце треугольной формы с надрезом $P = 100$ кг (слева) и $P = 125$ кг (справа)

Figure 8. Picture of isochromatic stripes in a triangular sample with an incision of $P = 100$ kg (left) and $P = 125$ kg (right)

Далее полученный текстовый файл является исходным файлом для определения параметров механики разрушения – для нахождения амплитудных коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса.

Для каждого образца с трещиной и системы нагрузок существует своя система коэффициентов (масштабных, амплитудных) множителей a_m^k . В большинстве инженерных приложений в асимптотическом разложении М. Уильямса удерживается только первый или первые два слагаемых, коэффициенты при которых носят название коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжения:

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(0), \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(0), \quad T = a_2^1 f_{1,11}^{(2)}(0). \quad (5)$$

Однако в последние годы в механике хрупкого разрушения сложилось ясное понимание необходимости удержания высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса [39–57]. В этих работах отмечается потребность развития методов и подходов, позволяющих получать аналитические зависимости коэффициентов от геометрии образца и системы приложенных нагрузок и, следовательно, расширять таблицы, содержащие найденные оценки для коэффициентов интенсивности напряжений для различных образцов, выражениями для коэффициентов высших приближений. Численные значения коэффициентов многопараметрических разложений могут быть найдены с помощью компьютерного имитационного моделирования в пакетах, реализующих метод конечного элемента. Однако значение наличия коэффициентов высших приближений, определенных экспериментально, сложно переоценить. Поэтому в настоящей статье с помощью основного закона фотоупругости

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N f_\sigma / h \quad (6)$$

и большой серии экспериментов определены коэффициенты высших приближений полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершин трещин в экспериментальных образцах различной конфигурации. В работе создан и отлажен комплекс программ для анализа и численной обработки всей совокупности экспериментальной информации. В первой программе данные фотоупругих измерений собраны для выбранного количества точек в исследуемом образце. Алгоритм программы базируется на том факте, что каждый пиксель фотографии имеет значение интенсивности в диапазоне от 0 до 255; поэтому пиксель, соответствующий значению 0,0, на фотографии изображается черным цветом, а пиксель со значением 255 изображается белым цветом. Следовательно, пиксели с более низкими значениями интенсивности отвечают более темному цвету. Созданная программа используется для определения значений интенсивности точек, лежащих внутри изохроматических полос. Эта процедура выполняется несколько раз для различных линий в радиальных направлениях. В результате определяются наиболее темная точка каждой изохромы. Вычисленные координаты этих наиболее темных точек используются как входные данные для работы второй программы, написанной на основе метода наименьших квадратов и процедуры метода Ньютона-Рафсона. Программы объединены в единый комплекс, позволяющий определить поля напряжений в исследуемом образце. В алгоритме реализована возможность учета высших членов в асимптотическом решении задачи (в полном решении М. Уильямса) и использования высших приближений в оптико-механическом законе. Экспериментальные данные (порядок изохроматических полос, координаты точек, принадлежащих изохроматическим полосам) являются исходной информацией для алгоритма, разработанного в системе компьютерной алгебры Waterloo Maple Release 17. Программный код позволяет выбрать любое наперед заданное число имеющихся экспериментальных точек и вычислить коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса многопараметрического асимптотического представления поля напряжения у вершины трещины.

3. Вычислительная процедура

Если в асимптотическом разложении М. Уильямса удерживать K слагаемых, отвечающих нормальному отрыву, и M слагаемых, отвечающих поперечному сдвигу, то оптико-механический закон (6) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{N f_\sigma}{h} \right)^2 &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 / 4 + \sigma_{12}^2 = \\ &= \left[\sum_{k=1}^K a_k^1 r^{k/2-1} f_{1,11}^{(k)}(\theta) + \sum_{k=1}^M a_k^2 r^{k/2-1} f_{2,11}^{(k)}(\theta) - \right. \\ &- \left. \sum_{k=1}^K a_k^1 r^{k/2-1} f_{1,22}^{(k)}(\theta) - \sum_{k=1}^M a_k^2 r^{k/2-1} f_{2,22}^{(k)}(\theta) \right]^2 + \\ &+ \left[\sum_{k=1}^K a_k^1 r^{k/2-1} f_{1,12}^{(k)}(\theta) + \sum_{k=1}^M a_k^2 r^{k/2-1} f_{2,12}^{(k)}(\theta) \right]^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, получена система $K + M$ нелинейных алгебраических уравнений относительно масштабных множителей a_1^1, \dots, a_K^1 и a_1^2, \dots, a_M^2 . Решение полученной системы нелинейных алгебраических уравнений представляет самостоятельный интерес. Для решения системы уравнений (7) был использован переопределенный метод [59], широко используемый в настоящее время [60–61].

В соответствии с переопределенным методом вводится в рассмотрение функция:

$$g_m = \left\{ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right\}_m^2 + (\sigma_{12})_m^2 - \left\{ \frac{N_m f_\sigma}{h} \right\}_m^2. \quad (8)$$

Очевидно, что если для масштабных множителей a_1^1, \dots, a_K^1 и a_1^2, \dots, a_M^2 выбраны некоторые начальные приближения, то в общем случае введенная функция g_m не будет обращаться в нуль, поскольку амплитудные множители не известны. Для уточнения значений масштабных множителей a_1^1, \dots, a_K^1

и a_1^2, \dots, a_M^2 в рамках переопределенного метода вводится итерационная процедура, основанная на разложении функции g_m в ряд Тейлора. Разложение функции g_m в ряд Тейлора имеет вид

$$(g_m)_{i+1} = (g_m)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_K^1} (\Delta a_K^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^2} (\Delta a_1^2)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^2} (\Delta a_2^2)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_M^2} (\Delta a_M^2)_i, \quad (9)$$

где i — номер итерации, $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \dots, \Delta a_K^1, \Delta a_1^2, \Delta a_2^2, \dots, \Delta a_M^2 = (a_{n(i+1)}^1 - a_{n(i)}^1)$ и $(a_{n(i+1)}^2 - a_{n(i)}^2)$.

Уточненные значения масштабных множителей a_1^1, \dots, a_K^1 и a_1^2, \dots, a_M^2 определяются таким образом, чтобы $(g_m)_{i+1} = 0$, и, таким образом, уравнение (9) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$-(g_m)_i = \frac{\partial g_m}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_K^1} (\Delta a_K^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^2} (\Delta a_1^2)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^2} (\Delta a_2^2)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_M^2} (\Delta a_M^2)_i. \quad (10)$$

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений (10), можно получить новые уточненные значения масштабных (амплитудных) множителей a_1^1, \dots, a_K^1 и a_1^2, \dots, a_M^2 . Следует отметить, что в ходе вычислений легко найти все частные производные, фигурирующие в системе (10):

$$\frac{\partial g_m}{\partial a_N^1} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})_m \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_N^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_N^1} \right)_m + 2 \left(\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_N^1} \right)_m. \quad (11)$$

Частные производные компонент тензора напряжений по амплитудным множителям вычисляются по формулам

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^1} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^1} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^1} \end{array} \right\} = \frac{k}{2} r^{\frac{k-2}{2}} \left\{ \begin{array}{c} \left[2 + (-1)^k + \frac{k}{2} \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ \left[2 - (-1)^k - \frac{k}{2} \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ - [(-1)^k + \frac{k}{2}] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \end{array} \right\} \quad (12)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^2} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^2} \end{array} \right\} = -\frac{k}{2} r^{\frac{k-2}{2}} \left\{ \begin{array}{c} \left[2 - (-1)^k + \frac{k}{2} \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ \left[2 + (-1)^k - \frac{k}{2} \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ - [(-1)^k - \frac{k}{2}] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \end{array} \right\}. \quad (13)$$

Итерационная процедура завершается при выполнении принятого критерия сходимости расчета. На практике применялись два критерия. Первый критерий основан на оценке значений разности между амплитудными множителями на i -й и $i+1$ -й итерациями (в расчетах принималось значение 10^{-6}). Второй критерий основан на дополнительной оценке порядка изохроматической полосы. Новые уточненные значения масштабных множителей используются для вычисления порядка ихороматической полосы на каждой итерации и сравниваются с экспериментально определенным порядком изохроматической полосы. Итерационный процесс завершается, если выполнен критерий

$$\frac{\sum |N_{theory} - N_{exp}|}{\text{Общее количество экспериментальных точек}} \leq \text{заданная точность}. \quad (14)$$

Результаты вычислений сведены в таблицы. В табл. 1 приведены результаты расчетов параметров механики разрушения для пластины с двумя горизонтальными параллельными трещинами, изображенной на рис. 1 (слева). В силу симметрии у каждой вершины трещины значения коэффициентов интенсивности напряжений, Т-напряжений и высших приближений совпадают.

Экспериментально определенные параметры механики разрушения для пластины с двумя наклонными параллельными трещинами, изображенной на рис. 1 (справа), приведены в табл. 2. Во втором столбце табл. 2 сведены результаты расчетов для левой вершины верхней трещины, в третьем столбце приведены параметры для правой вершины верхней трещины, в четвертом — для левой вершины нижней трещины, в пятом столбце — для правой вершины нижней трещины.

В табл. 3 приводятся вычисленные коэффициенты многопараметрического разложения для балки с надрезом, испытанной на трехточечный изгиб.

В табл. 4 приведены результаты расчетов балки с наклонным под углом 25° к вертикали надрезом в условиях трехточечного изгиба.

Таблица 1

Коэффициенты высших приближений многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса для пластины с двумя горизонтальными параллельными трещинами (рис. 1 (слева))

Table 1

Coefficients of higher approximations of the multi-parameter asymptotic expansion of M. Williams for a plate with two horizontal parallel cracks (Fig. 1 (left))

$a_1^1 (MPa \cdot cm^{0.5})$	50.43
$a_2^1 (MPa)$	-24.35
$a_3^1 (MPa \cdot cm^{-0.5})$	3.05
$a_4^1 (MPa \cdot cm^{-1})$	0.01
$a_5^1 (MPa \cdot cm^{-1.5})$	-0.03
$a_6^1 (MPa \cdot cm^{-2.0})$	0.0003
$a_7^1 (MPa \cdot cm^{-2.5})$	-0.001

Таблица 2

Коэффициенты высших приближений многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса для пластины с двумя наклонными параллельными трещинами (рис. 1 (справа))

Table 2

Coefficients of higher approximations of the multi-parameter asymptotic expansion of M. Williams for a plate with two inclined parallel cracks (Fig. 1 (right))

$a_1^1 (MPa \cdot cm^{0.5})$	32.25	35.71	35.8	32.12
$a_2^1 (MPa)$	-3.35	-7.42	-7.12	-3.41
$a_3^1 (MPa \cdot cm^{-0.5})$	1.01	2.03	1.99	1.02
$a_4^1 (MPa \cdot cm^{-1})$	0.02	0.005	0.0045	0.017
$a_5^1 (MPa \cdot cm^{-1.5})$	-0.013	-0.02	-0.018	-0.016
$a_6^1 (MPa \cdot cm^{-2.0})$	0.0002	0.0001	0.00021	0.00019
$a_7^1 (MPa \cdot cm^{-2.5})$	-0.002	-0.0012	-0.013	-0.0017
$a_2^3 (MPa \cdot cm^{0.5})$	25.59	26.76	27.2	24.9
$a_3^3 (MPa \cdot cm^{0.5})$	1.25	1.87	1.76	1.25
$a_2^4 (MPa \cdot cm^{0.5})$	0.0001	0.0013	0.0014	0.0001
$a_2^5 (MPa \cdot cm^{0.5})$	-0.05	-0.045	-0.065	-0.039

Таблица 3

Коэффициенты высших приближений многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса для балки с надрезом, испытанной на трехточечный изгиб

Table 3

Coefficients of higher approximations of the multi-parameter asymptotic expansion of M. Williams for a notched beam tested for three-point bending

$a_1^1 (MPa \cdot cm^{0.5})$	12.62
$a_2^1 (MPa)$	-4.91
$a_3^1 (MPa \cdot cm^{-0.5})$	0.99
$a_4^1 (MPa \cdot cm^{-1})$	0.001
$a_5^1 (MPa \cdot cm^{-1.5})$	-0.0025
$a_6^1 (MPa \cdot cm^{-2.0})$	0.00007
$a_7^1 (MPa \cdot cm^{-2.5})$	-0.0001

4. Вычислительный эксперимент: конечно-элементные решения в МКЭ-пакете SIMULIA Abaqus

4.1. Пластина с двумя горизонтальными трещинами одинаковой длины в условиях одноосного растяжения

Наряду с методом цифровой фотоупругости для рассматриваемых конфигураций образцов были получены конечно-элементные решения. Первой конфигурацией стала пластина с двумя горизонтальными

Таблица 4

Коэффициенты высших приближений многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса для балки с наклонным под углом 25° к вертикали надрезом в условиях трехточечного изгиба

Table 4

Coefficients of higher approximations of the multi-parameter asymptotic expansion of M. Williams for a beam with a slant inclined at an angle of 25° to a vertical under conditions of a three-point bending

$a_1^1 (MPa \cdot cm^{0.5})$	7.85
$a_2^1 (MPa)$	-11.31
$a_3^1 (MPa \cdot cm^{-0.5})$	0.51
$a_4^1 (MPa \cdot cm^{-1})$	0.0009
$a_5^1 (MPa \cdot cm^{-1.5})$	-0.025
$a_6^1 (MPa \cdot cm^{-2.0})$	0.00004
$a_7^1 (MPa \cdot cm^{-2.5})$	-0.0002
$a_2^1 (MPa \cdot cm^{0.5})$	-4.109
$a_2^3 (MPa \cdot cm^{-0.5})$	0.27
$a_2^4 (MPa \cdot cm^{-1})$	0.037
$a_2^5 (MPa \cdot cm^{-1.5})$	-0.0017

параллельными трещинами. Конечно-элементные решения были получены в многофункциональном комплексе SIMULIA Abaqus. Результаты конечно-элементного решения представлены на рис. 9 и 10.

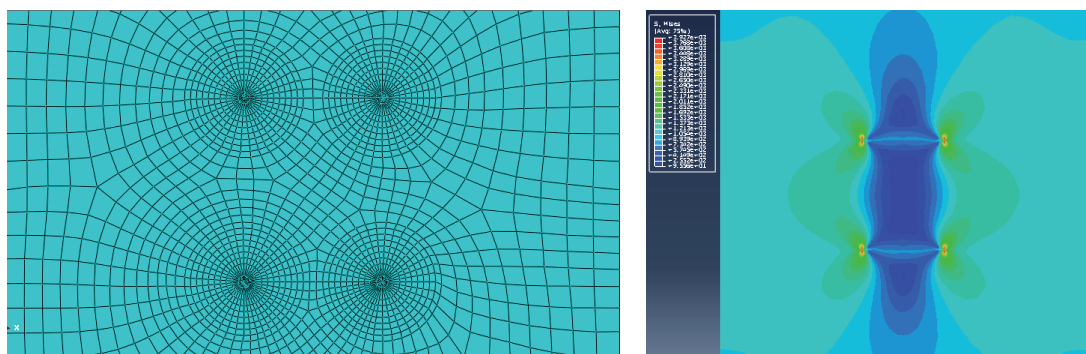


Рис. 9. Конечно-элементное разбиение пластины с двумя трещинами: сингулярные элементы у вершин каждой из трещин (слева), распределение интенсивности касательных напряжений в пластине
Figure 9. Finite-element partition of a plate with two cracks: singular elements at the vertices of each of the cracks (left), intensity distribution of shear stresses in the plate

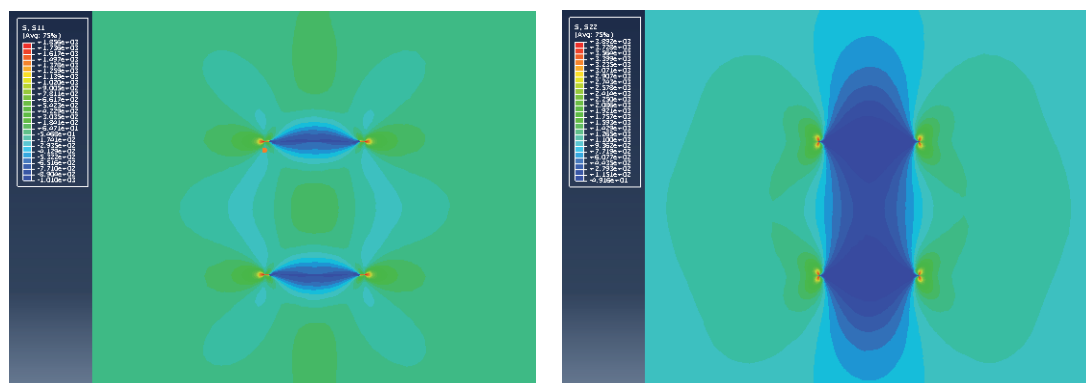


Рис. 10. Распределение компонент тензора напряжений σ_{11} (слева) и σ_{22} (справа) в пластине
Figure 10. Distribution of stress tensor components σ_{11} (left) and σ_{22} (right) in the plate

После определения напряженно-деформированного состояния в пластине с двумя параллельными горизонтальными трещинами можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений и T-напря-

жения. Было установлено, что при приложении нагрузки, равной 1000 кг, коэффициенты интенсивности напряжений равны: в силу симметрии рассматриваемой геометрии коэффициенты интенсивности напряжений у каждой вершины равны и составляют $K_I = 1264 \text{ кГ/см}^{3/2}$. Т-напряжения равны $T = -973.9 \text{ кГ/см}^2$.

4.2. Пластина с двумя наклонными параллельными трещинами одинаковой длины в условиях одноосного растяжения

Следующей конфигурацией является пластина с двумя наклонными параллельными трещинами. Целью является определение коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещин и коэффициентов высших приближений. Результаты конечно-элементного моделирования приведены на рис. 11 и 12. На рис. 11 (слева) показано типичное конечно-элементное разбиение пластины с двумя параллельными наклонными трещинами с сингулярными конечными элементами, окружающими каждую вершину трещины в пластине. Распределение интенсивности касательных напряжений показано на рис. 11 (справа).

Максимальное главное напряжение в пластине и компонента тензора деформаций ε_{11} показаны на рис. 12.

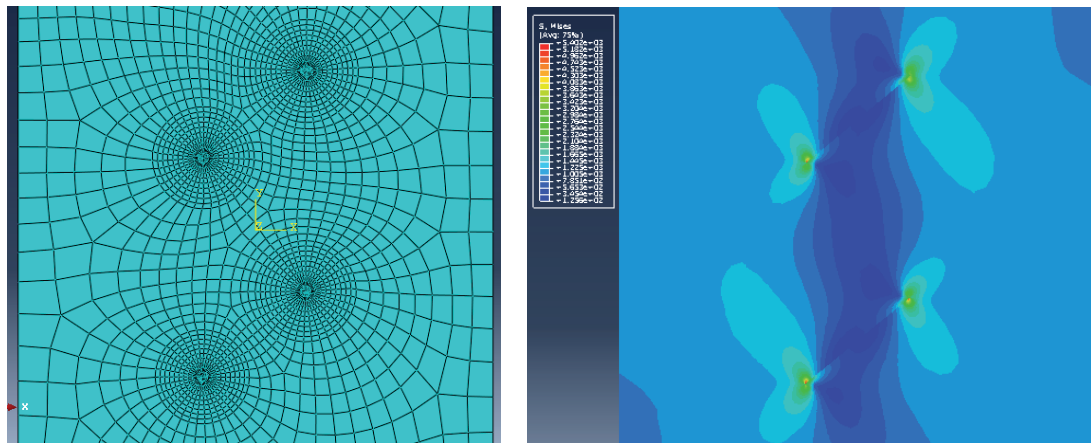


Рис. 11. Конечно-элементное разбиение пластины с двумя наклонными параллельными трещинами: сингулярные элементы у вершин каждой из трещин (слева), распределение интенсивности касательных напряжений в пластине

Figure 11. Finite-element partition of a plate with two inclined parallel cracks: singular elements at the vertices of each of the cracks (left), intensity distribution of shear stresses in the plate

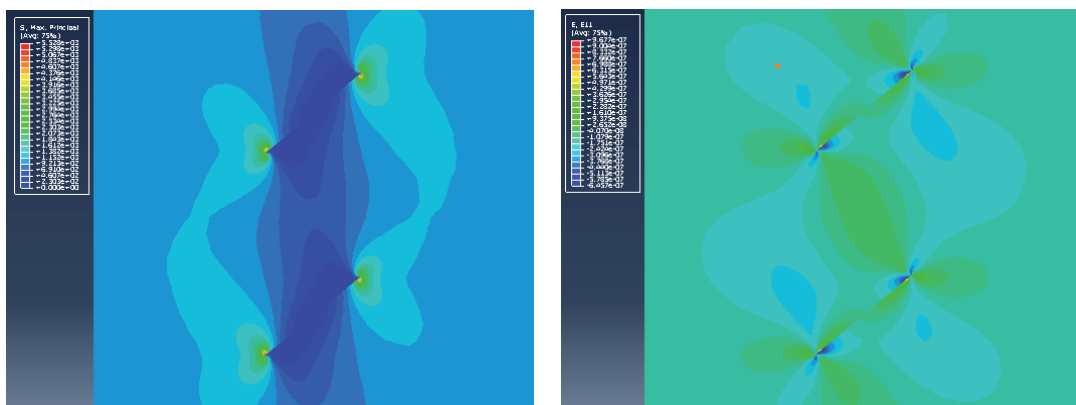


Рис. 12. Максимальное главное напряжение σ_1 (слева) и компонента тензора деформаций ε_{11} (справа) в пластине

Figure 12. The maximum principal stress σ_1 (left) and the component of the strain tensor ε_{11} (right) in the plate

Полученные значения коэффициентов интенсивности напряжений приведены ниже. Для левой вершины верхней трещины коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжений равны

$$K_I = 815.3 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad K_{II} = 641.5 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad T = -133.4 \text{ кГ}. \quad (15)$$

Для правой вершины верхней трещины коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжений равны

$$K_I = 895.2 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad K_{II} = 670.7 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad T = -296.6 \text{ кГ}. \quad (16)$$

Для левой вершины нижней трещины коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжений равны

$$K_I = 898.7 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad K_{II} = 665.6 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad T = -308.2 \text{ кГ}. \quad (17)$$

Для правой вершины нижней трещины коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжений равны

$$K_I = 818.9 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad K_{II} = 636.6 \text{ кГ/см}^{3/2}, \quad T = -147.5 \text{ кГ}. \quad (18)$$

4.3. Трехточечный изгиб балки с вертикальным и наклонным надрезом

Одним из удобных образцов для исследования в механике разрушения является балка с вертикальным надрезом. Результаты конечно-элементного моделирования трехточечного изгиба балки с вертикальным надрезом приведены на рис. 13.

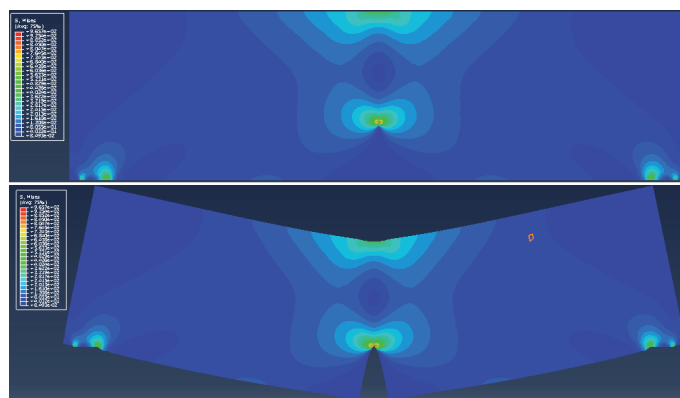


Рис. 13. Распределение интенсивности касательных напряжений в балке с вертикальным надрезом в недеформированной конфигурации (вверху), распределение интенсивности касательных напряжений в балке с вертикальным надрезом в деформированной конфигурации (внизу)

Figure 13. Intensity distribution of shear stresses in a beam with a vertical notch in an undeformed configuration (above), intensity distribution of shear stresses in a beam with a vertical notch in a deformed configuration (bottom)

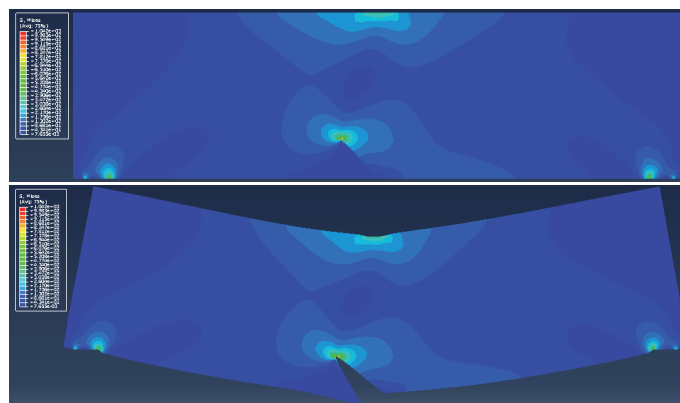


Рис. 14. Распределение интенсивности касательных напряжений в балке с наклонным под углом 25° надрезом в недеформированной конфигурации (вверху), распределение интенсивности касательных напряжений в балке с наклонным надрезом в деформированной конфигурации (внизу)

Figure 14. Intensity distribution of tangential stresses in a beam with an inclined angle of 25° notch in an undeformed configuration (above), intensity distribution of tangential stresses in a beam with an inclined notch in a deformed configuration (bottom)

На рис. 13 показано распределение интенсивности напряжений в образце с надрезом. Вычисленные значения коэффициента интенсивности напряжений и Т-напряжения равны $K_I = 316 \text{ кг/см}^{3/2}$ и $T = -16.74 \text{ кг}$ соответственно.

На рис. 14 показано распределение интенсивности напряжений в образце с наклонным надрезом. Вычисленные значения коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжения равны $K_I = 197.4 \text{ кг/см}^{3/2}$, $K_{II} = -10.3 \text{ кг/см}^{3/2}$ и $T = -453.1 \text{ кг}$ соответственно.

Выводы и обсуждение результатов

Выполнена большая серия экспериментов на смешанное нагружение оптически чувствительных образцов с трещинами и надрезами с помощью интерференционно-оптического метода механики деформируемого твердого тела – метода цифровой фотоупругости. В результате проведенных экспериментов были получены картины интерференционных полос: изохром и изоклин для образцов с двумя горизонтальными и наклонными коллинеарными трещинами одинаковой длины. Наряду с пластинами были проведены испытания балок с вертикальными и наклонным надрезами для реализации смешанного нагружения. Выбранные типы образцов на смешанное нагружение позволяют эффективно исследовать смешанное деформирование образцов и моделировать смешанное нагружение образца с трещиной или угловым вырезом для всего диапазона значений параметра смешанности нагружения, характеризующего вид нагружения: параметр смешанности нагружения изменяется от 0 (что отвечает поперечному сдвигу) до 1 (что соответствует трещине нормального отрыва). Была дана интерпретация изохроматических полос для каждого типа образца. Проведенные эксперименты нацелены на вычисление коэффициентов полного асимптотического разложения полей напряжений и перемещений у вершины трещины, в котором удерживаются высшие приближения. Проведенные с помощью метода конечных элементов вычисления также позволили вычислить параметры механики разрушения – коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса. Сравнение экспериментальных и конечно-элементных расчетов показало их хорошее совпадение: расхождение между экспериментальными и конечно-элементными расчетами не превышает 5 процентов.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку работы (проект 19-01-00631).

Литература

- [1] Jobin T.M., Khanderi S.N., Ramji M. Experimental of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital elasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2020. V. 126. P. 105855.
- [2] Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the rigid line inclusion tip embedded in an epoxy matrix using digital image correlation, Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.102425.
- [3] Brinez J.C., Martinez A.R., Branch J.W. Computational hybrid phase shifting technique applied to digital photoelasticity // Optik. 2018. V. 157. P. 287–297. DOI: 10.1016/j.ijleo.2017.11.060.
- [4] Hariprasad M.P., Ramesh K. Analysis of contact zones from whole field isochromatics using reflection photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2018. V. 105. P. 86–92. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.005.
- [5] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2018. V. 109. P. 7–16. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.05.004.
- [6] A low-level stress measurement method by integrating white light photoelasticity and spectrometry / P.C. Sung [et al.] // Optics and Laser Technology. 2018. V. 98. P. 33–45. DOI: 10.1016/j.optlastec.2017.07.022.
- [7] Patil P., Vysasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2017. V. 93. P. 182–194. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2017.02.003.
- [8] Ramakrishnan V., Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part II: Novel fringe resolution guided scanning scheme // Optics and Lasers in Engineering. 2017. V. 92. P. 141–149. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.05.010.
- [9] Ramakrishnan V., Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part I: Critical assessment of existing schemes // Optics and Lasers in Engineering. 2017. V. 92. P. 129–140. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.06.016.
- [10] Photostress analysis of stress-induced martensite phase transformation in superelastic NiTi / B. Katachi [et al.] // Materials and Science and Engineering A. 2017. V. 688. P. 202–209. DOI: 10.1016/j.msea.2017.01.111.

- [11] Гоогe С.Ю., Таболин И.С., Шрон Л.Б. Фотоупругость и траектория трещин разрушения. Часть 1. Теоретические основы // Ученые записки Крымского инженерно-педагогического университета. 2017. № 4(58). С. 120–128. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32400940>.
- [12] Гоогe С.Ю., Таболин И.С., Шрон Л.Б. Фотоупругость и траектория трещин разрушения. Часть 2. Продолжение. Результаты эксперимента // Ученые записки Крымского инженерно-педагогического университета. 2018. № 1(59). С. 176–182. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=34958078>.
- [13] Демидов А.С. Метод фотоупругости и его применение в лабораториях МАИ // Двигатель. 2018. № 3(117). С. 10–11. URL: <http://engine.aviaport.ru/issues/117/pics/pg10.pdf>.
- [14] Брюховецкая Е.В., Конищева О.В., Кудрявцев И.В. Исследование напряженного состояния железнодорожного рельса трехэкспозиционным методом голографической фотоупругости // Журнал Сибирского федерального университета. Сер.: Техника и технология. 2019. Т. 12. № 3. С. 323–330. DOI: 10.17516/1999-494X-0139.
- [15] Челябинина О.И., Исаченко В.В. Автоматизация процессов исследования остаточных напряжений методом цифровой фотоупругости // Приложение к журналу Вестник Тамбовского университета. 2018. С. 307–309. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122p-307-309.
- [16] Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stress / V.S. Pisarev [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. 2017. V. 179. P. 348–374. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.029
- [17] Investigation of effective stress intensity factors during overload fatigue cycles using photoelastic and DIC techniques / J.M. Vasco-Olmo [et al.] // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2018. V. 97. P. 73–86.
- [18] Advancement of Optical Methods and Digital Image Correlation in Experimental Mechanics by Luciano Lamberti, Ming-Tzer Lin and others. Springer, 2018, 242 p. DOI: 10.1007/978-3-319-41600-7
- [19] Molimard J. Experimental Mechanics of Solids and Structures. London: Willey, 2016. 149 p. URL: <https://b-ok.cc/book/2713894/fbbb66>.
- [20] Experimental Stress Analysis for Materials and Structures: Stress Analysis Models for Developing Design Methodologies (Springer Series in Solid and Structural Mechanics). New York: Springer, 2015. 498 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06086-6.
- [21] Grediac M., Hild F. Full-field Measurements and Identification in Solid Mechanics. London: ISTE, 2011. URL: <https://avidreaders.ru/read-book/full-field-measurements-and-identification-in.html>
- [22] Pierron F., Grediac M. The Virtual Fields Method, Extracting Constitutive Mechanical Parameters from Full-Field Deformation Measurements. New York: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4614-1824-5.
- [23] Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях / под ред. В.Э. Вильдемана. М.: Физматлит, 2012. 204 с. URL: https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1782532#1.
- [24] Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics, V. 3: Proceedings of the 2016 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics. S. Yoshida, L. Lamberti. Springer, 2016. 219 p. DOI: 10.1007/978-3-319-41600-7.
- [25] Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics, Volume 3: Proceedings of the 2014 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics. Helena Jin, Cesar Sciammarella (Eds.). Springer, 2015. 421 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06986-9.
- [26] Rotating Machinery, Hybrid Test Methods, Vibro-Acoustics and Laser Vibrometry, Volume 8. Proceedings of the 34th IMAC, A Conference and Exposition on Dynamics of Multiphysical Systems: From Active Materials to Vibroacoustic. Berlin: Springer, 2016. 462 p. DOI: 10.1007/978-3-319-54648-3
- [27] Shukla A., Dally J.W. Experimental Solid Mechanics // College House Enterprises, 2014. 688 p.
- [28] Чернятин А.С., Разумовский И.А., Матвиенко Ю.Г. Оценка размеров зоны неупругого деформирования у вершины трещины на основе анализа полей перемещений // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 12. С. 45–51. URL: <https://www.zldm.ru/jour/article/view/348>.
- [29] Разумовский И.А., Чернятин А.С., Фомин А.В. Экспериментально-расчетные методы определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2013. Т. 79. № 10. С. 57–64. URL: <http://old-zldm.ru/content/article.php?ID=1664>.
- [30] On the validation of the integrated DIC with tapered double cantilever beams test / T.M. Grabis [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. 2018. V. 191. P. 311–323. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.12.015.
- [31] Левин В.А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. I. М.: Физматлит, 2015. 456 с.
- [32] Левин В.А., Вершинин А.В. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. II. М.: Физматлит, 2015. 544 с.

- [33] Galvanetto U., Aliabadi M.H.F. (Editors). *Multiscale Modeling in Solid Mechanics: Computational Approaches (Computational and Experimental Methods in Structures)*. London: Imperial College Press, 2009. 352 p. URL: <https://ru.b-ok.org/book/1059039/7e5258>.
- [34] Carlomagno G.M., Poljak D., Brebbia C.A. *Computational Methods and Experimental Measurements XVII (Wit Transactions on Modelling and Simulation)*. WIT Press, 2015. 564 p.
- [35] Vesely V., Sobek J., Seitzl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip // *International Journal of Fatigue*. 2016. Vol. 89. P. 20–35. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016.
- [36] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // *International Journal of Fatigue*. 2016. V. 89. P. 99–107. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010.
- [37] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. V. 143. P. 32–46.
- [38] Чернятин А.С. Оценка взаимного влияния пересекающихся сквозных трещин // *Известия высших учебных заведений. Сер.: Машиностроение*. 2015. № 11(668). С. 62–67. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24863396>.
- [39] Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика*. 2015. № 4. С. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12.
- [40] Lopez-Moreno A., Zanganeh M. Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study // *International Journal of Fatigue*. 2016. V. 89. P. 11–19. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.03.006.
- [41] Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stress / V.S. Pisarev [et al.] // *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. V. 179. P. 348–374. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.029.
- [42] Residual stress determination by optical interferometric measurements of hole diameter increments / V. Pisarev [et al.] // *Optics and Lasers in Engineering*. 2018. V. 110. P. 437–456. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.06.022
- [43] Odintsev I.N., Plugatar T.P. Compensation for rigid body displacements in study of local deformations using electronic speckle pattern interferometry // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. V. 489. Issue 1. P. 012021. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012021
- [44] Применение оптико-корреляционных методов в задачах экспериментальной механики / И.Н. Одинцов [и др.] // *Прогрессивные технологии и системы машиностроения*. 2015. №1(51). С. 152–160. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23937434>.
- [45] Исследование процесса распространения трещины по данным измерений локального деформационного отклика. I. Поле действующих напряжений / С.И. Елеонский [и др.] // *Ученые записки ЦАГИ*. 2015. Т. 46. № 7. С. 55–80. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617>.
- [46] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. V. 49. P. 556–566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024
- [47] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 144–145, pp. 265–275. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012 [in English].
- [48] Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2019. Т. 22. № 3. С. 345–361. DOI: <https://doi.org/10.15372/SJNM20190307>.
- [49] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2019. Т. 25. № 1. С. 63–79. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79.
- [50] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть II // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2019. Т. 25. № 1. С. 80–96. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96>.
- [51] Теоретико-экспериментальное исследование направления роста трещины. Часть I / В.С. Долгих [и др.] // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2019. Т. 2. № 2. С. 30–54. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-30-54.
- [52] Теоретико-экспериментальное исследование направления роста трещины. Часть II / В.С. Долгих [и др.] // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2019. Т. 25. № 2. С. 55–74. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-55-74.

- [53] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity // *Engineering Fracture Mechanics*. 2001. № 68. P. 1609–1630. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00063-7.
- [54] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments // *AIP Conference Proceedings of the 10th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures*. 2016. P. 030029. DOI: 10.1063/1.4967050.
- [55] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material// *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. V. 10. №3. P. 367–393. DOI: 10.2140/jomms.2015.10.367
- [56] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // *Theoretical and applied Fracture Mechanics*. 2019. V. 99. P. 104–117. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.011.
- [57] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Lomakov P.N. A photoelastic study for multiparametric analysis of the near crack tip stress field under mixed mode loading// *Procedia Structural Integrity*. 2016. V. 2. P. 1797–1804.
- [58] Косыгин А.Н., Косыгина Л.Н. Цифровая обработка экспериментальных интерферограмм, полученных методом фотоупругости // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2019. Т. 25. № 2. С. 75–91. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-75-91>.
- [59] Ramesh K., Gupta M., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-revisited // *Engineering Fracture Mechanics*. 1997. V. 56. P. 1–25. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7)
- [60] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Solid State Phenomena*. 2015. V. 134. P. 218–241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013.
- [61] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECSO) // *Engineering Fracture Mechanics*. 2013. V. 102. P. 235–248. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.02.014

References

- [1] Jobin T.M., Khanderi S.N., Ramji M. Experimental of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital elasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, Vol. 126, p. 105855 [in English].
- [2] Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the rigid line inclusion tip embedded in an epoxy matrix using digital image correlation. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019. Volume 106. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.102425 [in English].
- [3] Brinez J.C., Martinez A.R., Branch J.W. Computational hybrid phase shifting technique applied to digital photoelasticity. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 2018, Vol. 157, pp. 287–297. DOI: 10.1016/j.ijleo.2017.11.060 [in English].
- [4] Hariprasad M.P., Ramesh K. Analysis of contact zones from whole field isochromatics using reflection photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, Vol. 105, pp. 86–92. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.005 [in English].
- [5] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, Vol. 109, pp. 7–16. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.05.004 [in English].
- [6] Sung P.C., Wang W.C., Hwang C.H., Lai G.-T. A low-level stress measurement method by integrating white light photoelasticity and spectrometry. *Optics and Laser Technology*, 2018, Vol. 98, pp. 33–45. DOI: 10.1016/j.optlastec.2017.07.022 [in English].
- [7] Patil P., Vysasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, Vol. 93, pp. 182–194. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2017.02.003 [in English].
- [8] Ramakrishnan V., Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part II: Novel fringe resolution guided scanning scheme. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, Vol. 92, pp. 141–149. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.05.010 [in English].
- [9] Ramakrishnan V., Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part I: Critical assessment of existing schemes. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, Vol. 92, pp. 129–140. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.06.016 [in English].
- [10] Katachi B., Choupani N., Khalil-Allafi J., Baghani M. Photostress analysis of stress-induced martensite phase transformation in superelastic NiTi. *Materials and Science and Engineering*, 2017, Vol. 688, pp. 202–209. DOI: 10.1016/j.msea.2017.01.111 [in English].

- [11] Googe S.Yu., Tabolin I.S., Shron L.B. *Fotouprugost' i traektoriya treshchin razrusheniya. Chast' 1. Teoreticheskie osnovy* [Photoelasticity and trajectory of fracture cracks. Part 1. The theoretical basis]. *Uchenye zapiski Krymskogo inzhenerno-pedagogicheskogo universiteta* [Scientific notes of the Crimean Engineering and Pedagogical University], 2017, № 4(58), pp. 120–128. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32400940> [in Russian].
- [12] Googe S.Yu., Tabolin I.S., Shron L.B. *Fotouprugost' i traektoriya treshchin razrusheniya. Chast' 2. Prodolzhenie. Rezul'taty eksperimenta* [Photoelasticity and trajectory of fracture cracks. Part 2. Continuation. Results of the experiment]. *Uchenye zapiski Krymskogo inzhenerno-pedagogicheskogo universiteta* [Scientific notes of the Crimean Engineering and Pedagogical University], 2018, № 1(59), pp. 176–182. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=34958078> [in Russian].
- [13] Demidov A.S. *Metod fotouprugosti i ego primeneniye v laboratoriyakh MAI* [Photoelasticity method and its application in MAI]. *Dvigatel'*, 2018, no. 3(117), pp. 10–11. Available at: <http://engine.aviaport.ru/issues/117/pics/pg10.pdf> [in Russian].
- [14] Bryukhovetskaya E.V., Konischeva O.V., Kudryavcev I.V. *Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya zhelezodorozhnogo rel'sa trekhekspozitsionnym metodom golograficheskoi fotouprugosti* [Research of the Stress State of the Rail by Three-Exposition Method of Holographic Photoelasticity]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii* [Journal of Siberian Federal University. Engineering and Technologies], 2019, Vol. 12, № (3), pp. 323–330. DOI: 10.17516/1999-494X-0139 [in Russian].
- [15] Chelyapina O.I., Isachenko V.M. *Avtomatizatsiya protsessov issledovaniya ostatochnykh napryazhenii metodom tsifrovoi fotouprugosti* [Automation of residual stress study by digital photoelasticity method]. *Prilozhenie k zhurnalu Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences], 2018, pp. 307–309. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122p-307-309 [in Russian].
- [16] Pisarev V.S., Matvienko Y.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stress. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, Vol. 179, pp. 348–374. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.029 [in English].
- [17] Vasco-Olmo J.M., Yang B., James M.N., Diaz F.A. Investigation of effective stress intensity factors during overload fatigue cycles using photoelastic and DIC techniques. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2018, Vol. 97, pp. 73–86. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.07.011 [in English].
- [18] Advancement of Optical Methods and Digital Image Correlation in Experimental Mechanics. Luciano Lamberti, Ming-Tzer Lin and others (Eds.). Springer, 2018, 242 p. DOI: 10.1007/978-3-319-41600-7 [in English].
- [19] Molimard J. *Experimental Mechanics of Solids and Structures*. London: Willey, 2016. 149 p. Available at: <https://b-ok.cc/book/2713894/fbbb66> [in English].
- [20] *Experimental Stress Analysis for Materials and Structures: Stress Analysis Models for Developing Design Methodologies* (Springer Series in Solid and Structural Mechanics). New York: Springer, 2015. 498 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06086-6 [in English].
- [21] Grediac M., Hild F. *Full-field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. London: ISTE, 2011. Available at: <https://avidreaders.ru/read-book/full-field-measurements-and-identification-in.html> [in English].
- [22] Pierron F., Grediac M. *The Virtual Fields Method, Extracting Constitutive Mechanical Parameters from Full-Field Deformation Measurements*. New York: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4614-1824-5.
- [23] *Eksperimental'nye issledovaniya svoystv materialov pri slozhnykh termomekhanicheskikh vozdeistviyakh. Pod red. V.E. Vil'demana* [Experimental study of material properties under complex thermomechanical loadings. Vildemann V.E. (Ed.)]. M.: Fizmatlit, 2012, 204 p. Available at: https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1782532#1 [in Russian].
- [24] Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics, Volume 3: Proceedings of the 2016 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics. Yoshida S., Lamberti L., Sciammarella C. (Eds.). Springer, 2017. 219 p. DOI: 10.1007/978-3-319-41600-7 [in English].
- [25] Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics, Vol. 3: Proceedings of the 2014 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics. Helena Jin, Cesar Sciammarella (Eds.). Springer, 2015, 421 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06986-9 [in English].
- [26] Rotating Machinery, Hybrid Test Methods, Vibro-Acoustics and Laser Vibrometry, Volume 8. Proceedings of the 34th IMAC, A Conference and Exposition on Dynamics of Multiphysical Systems: From Active Materials to Vibroacoustic. Berlin: Springer, 2016. 462 p. DOI: 10.1007/978-3-319-54648-3 [in English].
- [27] Shukla A., Dally J.W. *Experimental Solid Mechanics*. College House Enterprises, LLC, 2014. 688 p.
- [28] Chernyatin A.S., Razumovsky I.A., Matvienko Yu.G. *Otsenka razmerov zony neuprugogo deformirovaniya u vershiny treshchiny na osnove analiza polei peremeshchenii* [Evaluation of the Size of Inelastic Strain Zone at the Top of the Crack Based on Analysis of the Displacement Fields]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2016, Vol. 82, № 12, pp. 45–51. Available at: <https://www.zldm.ru/jour/article/view/348> [in Russian].

- [29] Razumovskii I.A., Chernyatin A.S., Fomin A.V. *Ekspierimental'no-raschetnye metody opredeleniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya elementov konstrukttsii* [Experimental and Computational Methods for Determining the Stress-Strain State of Structural Elements]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2013, Vol. 79, № 10, pp. 57–64. Available at: <http://old-zldm.ru/content/article.php?ID=1664> [in Russian].
- [30] Grabois T.M., Hegggers J., Ponson L., Hild F., Filho R.D.T. On the validation of the integrated DIC with tapered double cantilever beams test. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, Vol. 191, pp. 311–323. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.12.015 [in English].
- [31] Levin V.A. *Modeli i metody. Obrazovanie i razvitie defektov. Nelineinaya vychislitel'naya mekhanika prochnosti. Tom I* [Models and methods. Formation and development of defects. Nonlinear computational mechanics of strength. Vol. I]. M.: Fizmatlit, 2015, 456 p. [in Russian].
- [32] Levin V.A., Vershinin V.A. *Chislennyye metody. Parallelnyye vychisleniya na EVM. Nelineinaya vychislitel'naya mekhanika prochnosti. Tom II* [Numerical methods. Parallel calculations on computers. Nonlinear computational mechanics of strength. Vol. II]. M.: Fizmatlit, 2015, 544 p. [in Russian].
- [33] Galvanetto U., Aliabadi M.H.F. (Editors). *Multiscale Modeling in Solid Mechanics: Computational Approaches (Computational and Experimental Methods in Structures)*. London: Imperial College Press, 2009. 352 p. Available at: <https://ru.b-ok.org/book/1059039/7e5258> [in English].
- [34] Carlomagno G.M., Poljak D., Brebbia C.A. *Computational Methods and Experimental Measurements XVII (Wit Transactions on Modelling and Simulation)*. WIT Press, 2015. 564 p. [in English].
- [35] Vesely V., Sobek J., Seitzl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip. *International Journal of Fatigue*, 2016, Vol. 89, pp. 20–35. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016 [in English].
- [36] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, 2016, Vol. 89, pp. 99–107. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010 [in English].
- [37] Malikova L. Multiparameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, Vol. 143, pp. 32–46 [in English].
- [38] Chernyatin A.S. *Otsenka vzaimnogo vliyaniya peresekayushchikhsya skvoznykh treshchin* [Evaluation of the Mutual Effect of Through Crossing Cracks]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroyeniye* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2015, № 11(668), pp. 62–67. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24863396> [in Russian].
- [39] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. *Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie M. Uil'yamsa u vershin dvukh kollinearnykh treshchin konechnoi dliny v beskonechnoi plastine* [Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2015, № 4, pp. 188–225. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.12 [in Russian].
- [40] Lopez-Moreno A., Zanganeh M. Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study. *International Journal of Fatigue*, 2016, Vol. 89, pp. 11–19. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.03.006 [in English].
- [41] Pisarev V.S., Matvienko Y.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stress. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, Vol. 179, pp. 348–374. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.029 [in English].
- [42] Pisarev V., Odintsev I., Eleonsky S., Apalkov A. Residual stress determination by optical interferometric measurements of hole diameter increments. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, Vol. 110, pp. 437–456. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.06.022 [in English].
- [43] Odintsev I.N., Plugatar T.P. Compensation for rigid body displacements in study of local deformations using electronic speckle pattern interferometry. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, Vol. 489, Issue 1, p. 012021. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012021
- [44] Odintsev I., Apal'kov A., Komarov A., Pluginuri T., Usov S. *Primenenie optiko-korrelyatsionnykh metodov v zadachakh eksperimental'noi mekhaniki* [The application of optical correlation techniques in problems of experimental mechanics]. *Progressivnyye tekhnologii i sistemy mashinostroyeniya* [Progressive technologies and systems of mechanical engineering], 2015, № 1(51), pp. 152–160. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23937434> [in Russian].
- [45] Eleonskii S.I., Odintsev I.N., Pisarev V.S., Chernov A.V. *Issledovanie protsessa rasprostraneniya treshchiny po dannym izmerenii lokal'nogo deformatsionnogo otklika. I. Pole deistviyushchikh napryazhenii* [Study of the crack propagation process using measurements of strain field. I. Stress field]. *Uchenye zapiski TsAGI* [TsAGI Science Journal], 2015, Vol. 46, № 7, pp. 55–80. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617> [in Russian].
- [46] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, Vol. 49, pp. 556–566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024 [in English].

- [47] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, Vol. 144–145, pp. 265–275. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012 [in English].
- [48] Stepanova L.V. *Asimptoticheskii analiz polya napryazhenii u vershiny treshchiny (uchet vysshikh priblizhenii) = Asymptotic analysis of the crack tip stress field consideration of higher order terms. Numerical Analysis and Applications*, 2019, Vol. 12(3), pp. 284–296. DOI: <https://doi.org/10.15372/SJNM20190307> [in Russian].
- [49] Stepanova L.V. *Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Ul'yamsa polya napryazhenii na opisaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny. Chast' I* [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part I]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, № 1, pp. 63–79. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79 [in Russian].
- [50] Stepanova L.V. *Vliyanie vysshikh priblizhenii v asimptoticheskom razlozhenii M. Ul'yamsa polya napryazhenii na opisaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya u vershiny treshchiny. Chast' II* [Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, № 1, pp. 80–96. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96> [in Russian].
- [51] Dolgikh V.S., Pulkin A.V., Mironova E.A., Peksheva A.A., Stepanova L.V. *Teoretiko-eksperimental'noe issledovanie napravleniya rosta treshchiny. Chast' I* [Theoretical and experimental investigation of crack propagation direction. Part I]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 2, № 2, pp. 30–54. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-30-54 [in Russian].
- [52] Dolgikh V.S., Pulkin A.V., Mironova E.A., Peksheva A.A., Stepanova L.V. *Teoretiko-eksperimental'noe issledovanie napravleniya rosta treshchiny. Chast' II* [Theoretical and experimental investigation of crack propagation direction. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, № 2, pp. 55–74. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-55-74 [in Russian].
- [53] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, Vol. 68, pp. 1609–1630. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00063-7 [in English].
- [54] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments. *AIP Conference Proceedings of the 10th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures*, 2016, p. 030029. DOI: 10.1063/1.4967050 [in English].
- [55] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2015, Vol. 10, № 3, pp. 367–393. DOI: 10.2140/jomms.2015.10.367 [in English].
- [56] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity. *Theoretical and applied Fracture Mechanics*, 2019, Vol. 99, pp. 104–117. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.011 [in English].
- [57] Stepanova L.V., Roslyakov P.S., Lomakov P.N. A photoelastic study for multiparametric analysis of the near crack tip stress field under mixed mode loading. *Procedia Structural Integrity*, 2016, Vol. 2, pp. 1797–1804. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.226 [in English].
- [58] Kosygin A.N., Kosygina L.N. *Tsifrovaya obrabotka eksperimental'nykh interferogramm, poluchennykh metodom fotouprugosti* [Digital processing of interferograms obtained by the photoelasticity method]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, № 2, pp. 75–91. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-75-91> [in Russian].
- [59] Ramesh K., Gupta M., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, Vol. 56, Issue 1, pp. 25–41, 43–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7) [in English].
- [60] Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Solid State Phenomena*, 2015, Vol. 134, pp. 218–241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013 [in English].
- [61] Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECS). *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, Vol. 102, pp. 235–248. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.02.014 [in English].