УДК 519.999
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38

Дата поступления статьи: 10/ *VII*/2019
Дата принятия статьи: 23/ *VIII*/2019

Ю.О. Яковлева, А.В. Тарасенко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РИМАНА

© *Яковлева Юлия Олеговна* — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
E-mail: julia.yakovleva@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Тарасенко Анна Валерьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
E-mail: tarasenko.a.v@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0487-8262

АННОТАЦИЯ

В статье на плоскости двух независимых переменных исследуется задача Коши для одной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка. Исследуемая система дифференциальных уравнений гиперболических уравнений четвертого порядка не содержит производных меньше четвертого порядка. Регулярное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка построено в явном виде. Решение рассматриваемой задачи Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка найдено методом Римана. Также в работе приведена матрица Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка. Матрица Римана получена через гипергеометрические функции матричного аргумента.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка, гиперболическое уравнение, регулярное решение, метод Римана, задача Коши, функция Римана, матрица Римана, гипергеометрические функции матричного аргумента.

Цитирование. Яковлева Ю.О., Тарасенко А.В. Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 33–38. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38.

UDC 519.999
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38

Submitted: 10/*VII*/2019
Accepted: 23/*VIII*/2019

Ju.O. Yakovleva, A.V. Tarasenko

THE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER BY THE RIMAN METHOD

© *Yakovleva Julia Olegovna* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, 443100, Russian Federation.
E-mail: julia.yakovleva@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Tarasenko Anna Valer'evna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya street, 443100, Russian Federation.
E-mail: tarasenko.a.v@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0487-8262

ABSTRACT
In the article the Cauchy problem for the one system of the differential equations of the fourth order is received in the plane of two independent variables. This system of the hyperbolic differential equations of the fourth order does not contain derivatives less than the fourth order. The regular solution of the Cauchy problem for the system of the hyperbolic differential equations of the fourth order is explicitly built. The solution of the Cauchy problem for the system of the hyperbolic differential equations of the fourth order is found by the Riman method. In the paper the matrix of Riman for the system of the hyperbolic differential equations of the fourth order is constructed also. The matrix of Riman is expressed through hypergeometrical functions of matrix argument.

Key words: system of hyperbolic differential equations of the fourth order, hyperbolic equation, regular solution, method of Riman, Cauchy problem, function of Riman, matrix of Riman, hypergeometrical functions of matrix argument.

Citation. Yakovleva Ju.O., Tarasenko A.V. *Reshenie zadachi Koshi dlya sistemy uravnenii giperbolicheskogo tipa chetvertogo poryadka metodom Rimana* [The solution of Cauchy problem for the hyperbolic differential equations of the fourth order by the Riman method]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 3, pp. 33–38. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-3-33-38 [in Russian].

1. Предварительные сведения

Исследование и решение краевых задач для гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений — один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это легко объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их важными практическими приложениями.

Гиперболические уравнения с двумя независимыми переменными третьего и более высокого порядка широко применяются как математические модели различных процессов, например, нестационарного прямолинейного течения несжимаемой жидкости второго порядка [1]; течения жидкости Навье — Стокса — Олдройта [2]; колебания упруговязкой нити [3] и других.

В начало современной теории гиперболических уравнений в частных производных основной вклад был внесен Б. Риманом, который получил интегральное представление задачи Коши в форме, аналогичной представлениям решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с помощью функций Грина. При этом предполагается существование вспомогательной функции, так называемой функции Римана, которая обладает рядом известных свойств [4; 5].

В дальнейшем метод Римана для уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными развивался в работах А.П. Солдатова, М.Х. Шханукова [6], О.М. Джохадзе [7] и других. В указанных работах функция Римана вводится как решение некоторой специальной задачи Гурса. В работах В.И. Жегалова, А.Н. Миронова и Е.А. Уткиной [8, 9] предлагается способ нахождения функции Римана как решения интегрального уравнения.

А.А. Андреевым и Ю.О. Яковлевой рассмотрены и решены методом Римана задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений третьего и четвертого порядка [10]. Полученные результаты могут быть обобщены для систем линейных уравнений гиперболического типа частного вида с кратными характеристиками третьего и четвертого порядка. Такое обобщение возможно, так как с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра [11] можно определить значение аналитической функции на множестве постоянных квадратных матриц. Если ограничиться множеством матриц, являющихся значениями некоторых аналитических функций от одной матрицы, то определение легко обобщается на случай аналитических функций многих комплексных переменных, что позволяет, в свою очередь, доопределять целый ряд специальных функций на матричные значения входящих в них параметров.

2. Основные результаты

В плоскости независимых переменных $\{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$U_{xxyy} + TU = 0, \tag{1}$$

где $U\,(x,\, y)$ — искомая m-мерная вектор-функция, T — постоянная квадратная матрица порядка $(m{\times}m)$.

Задача Коши. Определить регулярное решение $U\,(x,\, y) \in C^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ системы уравнений (1) в плоскости $\{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$, которое удовлетворяет следующим условиям на нехарактеристической линии $y = x$:

$$U\,(x,\, y)\,|_{y=x} = A_1(x),$$
$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial n}|_{y=x} = A_2(x),$$
$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial n^2}|_{y=x} = A_3(x),$$
$$\frac{\partial^3 U(x,y)}{\partial n^3}|_{y=x} = A_4(x),$$

где $A_i(x) \in C^3(R)$, $i = 1,..,4$ — заданные вектор-функции, $\overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — нормаль к нехарактеристической линии.

Нехарактеристическая линия системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка не может дважды пересекать любую характеристику из любого другого семейства [12].

Будем полагать, что $M^*V \equiv V_{xxyy} + V\Omega$ — сопряженный оператор по Лагранжу для MU. Тогда, применяя векторный аналог тождества Грина

$$V(MU) - (M^*V)U \equiv \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

где

$$P = VU_{xyy} - V_{xyy}U,\, Q = -V_xU_{xy} + V_{xy}U_x,$$

в области $D_0 = \{(x,\, y) : 0 < x < x_0,\, 0 < y < y_0\}$, получим следующее соотношение:

$$\int\limits_{D_0} (V(MU) - (M^*V)U)dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} Pdy - Qdx, \tag{2}$$

где $\Gamma = \overline{D_0} \backslash D_0$.

Матрицей Римана для системы уравнений (1) называется решение $V = V(x_0,\, y_0; x,\, y)$ задачи

$$M^*V = 0,$$
$$V(x_0,\, y_0; x,\, y)|_{x=x_0} = \Theta,$$
$$V(x_0,\, y_0; x,\, y)|_{y=y_0} = \Theta,$$
$$V_x(x_0,\, y_0; x,\, y)|_{x=x_0} = (y - y_0)E,$$
$$V_y(x_0,\, y_0; x,\, y)|_{y=y_0} = (x - x_0)E,$$

где $(x_0,\, y_0)$ – произвольная точка плоскости $\{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$, E, Θ — единичная и нулевая матрицы порядка n соответственно.

Используя определение обобщенной гипергеометрической функции матричного аргумента [10; 13], матрица Римана имеет вид

$$V(x_0,\, y_0; x,\, y) = (x - x_0)\,(y - y_0)\ {}_0F_3\left(1,\, \frac{3}{2},\, \frac{3}{2};\, \frac{(x - x_0)^2(y - y_0)^2}{16}T\right).$$

Если $U(x, y)$ — решение системы уравнений (1), а $V = V(x_0, y_0; x, y)$ удовлетворяет матричному уравнению $M^*V = 0$, то получим

$$\int_{x_0}^{y_0} \left[V_x(x_0, y_0; x, y)\, U_{xy}(x, y) - V_{xy}(x_0, y_0; x, y)\, U_x(x, y)\right]|_{y=x} dx-$$

$$-\int_{x_0}^{y_0} \left[V_x(x_0, y_0; x, y)\, U_{xy}(x, y) - V_{xy}(x_0, y_0; x, y)\, U_x(x, y)\right]|_{y=y_0} dx-$$

$$-\int_{x_0}^{y_0} \left[V(x_0, y_0; x, y)\, U_{xyy}(x, y) - V_{xyy}(x_0, y_0; x, y)\, U(x, y)\right]|_{x=x_0} dy+$$

$$+\int_{x_0}^{y_0} V(x_0, y_0; x, y)\, U_{xyy}(x, y)\,|_{y=x} dy-$$

$$-\int_{x_0}^{y_0} V_{xyy}(x_0, y_0; x, y)\, U(x, y)\,|_{y=x} dy = 0.$$

Принимая во внимание результаты, полученные в работах [6; 8], где было доказано существование и единственность функции Римана $v(x_0, y_0; x, y)$, можно сделать вывод о существовании и единственности решения поставленной задачи Коши для системы (1).

U, U_x, U_{xy}, U_{xyy}, заданные на $y = x$ при $x \in \mathbb{R}$, найдем из условий задачи Коши.

$$\begin{gathered}
U(x, x) = A_1(x),\\
U_x(x,x) - U_y(x,x) = A_2(x),\\
U_x(x,x) + U_y(x,x) = A_1'(x),\\
U_{xx}(x,x) - U_{yy}(x,x) = A_2'(x),\\
U_{xx}(x,x) - 2U_{xy}(x,x) + U_{yy}(x,x) = A_3(x),\\
U_{xx}(x,x) + 2U_{xy}(x,x) + U_{yy}(x,x) = A_1''(x),\\
U_{xxx}(x,x) + 3U_{xxy}(x,x) + 3U_{xyy}(x,x) + U_{yyy}(x,x) = A_1'''(x),\\
U_{xxx}(x,x) - U_{xxy}(x,x) - U_{xyy}(x,x) + U_{yyy}(x,x) = A_3'(x),\\
U_{xxx}(x,x) + U_{xxy}(x,x) - U_{xyy}(x,x) - U_{yyy}(x,x) = A_2''(x),\\
U_{xxx}(x,x) - 3U_{xxy}(x,x) + 3U_{xyy}(x,x) - U_{yyy}(x,x) = A_4(x).
\end{gathered}$$

Тогда получаем, что

$$\begin{gathered}
U_x(x,x) = \frac{A_1'(x) + A_2(x)}{2},\\
U_{xy}(x,x) = \frac{A_1''(x) - A_3(x)}{4},\\
U_{xyy}(x,x) = \frac{A_1'''(x) + A_4(x) - A_2''(x) - A_3'(x)}{8}.
\end{gathered}$$

Следовательно, решением задачи Коши является вектор-функция:

$$U(x_0, y_0) = A_1(y_0) + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{y_0} \left[(x-y_0)\,{}_0F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \tau T\right)(A_1''(x) - A_3(x))\right] dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int_{x_0}^{y_0} \left[(x-x_0)(x-y_0)\,{}_0F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \tau T\right)(A_1'''(x) - A_2''(x) - A_3'(x))\right] dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int_{x_0}^{y_0} \left[((x-x_0)(x-y_0)+1)\,{}_0F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \tau T\right)(A_4(x) - 4A_1'(x) - 4A_2(x))\right] dx+$$

$$+\frac{1}{72}\int_{x_0}^{y_0} \left[(x-x_0)^2(x-y_0)^3 T\,{}_0F_3\left(2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; \tau T\right)(A_1''(x) - A_3(x))\right] dx-$$

$$-\frac{1}{9}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^2(x-y_0)^2T\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau T\right)\left(A_1'(x)+A_2(x)\right)\right]dx-$$

$$-\frac{1}{3600}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^4(x-y_0)^4T^2\,{}_0F_3\left(3,\,\frac{7}{2},\,\frac{7}{2};\,\tau T\right)\left(A_1'(x)+A_2(x)\right)\right]dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^2(x-y_0)\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau T\right)A_1(x)\right]dx-$$

$$-\frac{1}{225}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^4(x-y_0)^3T^2\,{}_0F_3\left(3,\,\frac{7}{2},\,\frac{7}{2};\,\tau T\right)A_1(x)\right]dx-$$

$$-\frac{1}{529600}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^6(x-y_0)^5T^3\,{}_0F_3\left(4,\,\frac{9}{2},\,\frac{9}{2};\,\tau T\right)A_1(x)\right]dx, \qquad (3)$$

где $\tau=\frac{(x-x_0)^2(x-y_0)^2}{16}$.

Легко убедиться, что вектор-функция $U\,(x,\,y)$ удовлетворяет условиям задачи Коши и системе уравнений (1).

Заключение

Единственность решения задачи Коши следует из единственности матрицы Римана [6; 8]. Существование решения задачи Коши доказано конструктивно.

Выполненные исследования позволяют сформулировать теорему.

Теорема. Если вектор-функции $A_1(x)$, $A_2(y)$, $A_3(x)$, $A_4(x)\in C^3(\mathbb{R})$, то существует единственное регулярное решение $U\,(x,\,y)\in C^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ задачи Коши в плоскости независимых переменных $\{(x,\,y): x\in\in\mathbb{R},\,y\in\mathbb{R}\}$ для системы уравнений (1), которое имеет вид (3).

Литература

[1] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с. URL: https://www.studmed.ru/trusdell-k-pervonachalnyy-kurs-racionalnoy-mehaniki-sploshnyh-sred_f4d30841e26.html.

[2] Осколков А.П. О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей // Труды математического института АН СССР. 1975. № 127. С. 32–57. URL: http://www.mathnet.ru/links/18cdbc2d48dbb3a524f8f4b7db3aaaea/tm3147.pdf.

[3] Герасимов А.Н. Проблема упругого последействия и внутреннее трение // Прикладная математика и механика. 1937. Т. 1. № 4. С. 493–536.

[4] Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations. New York; London: Interscience Publishers, 1962. 830 pp. URL: https://www.studmed.ru/courant-r-hilbert-d-methods-of-mathematical-physics-vol-2-partial-differential-equations_982b6204949.html.

[5] Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss., 1860. Vol. 8. P. 43–68.

[6] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 547–552.

[7] Джохадзе О.М. Функция Римана для гиперболических уравнений и систем высокого порядка с доминированными младшими членами // Дифференц. уравн. 2003. Т. 39. № 10. С. 1366–1378. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/de/v39/i10/p1366.

[8] Жегалов В.И., Миронов А.Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 23–30. URL: http://mi.mathnet.ru/eng/ivm/y2002/i5/p23

[9] Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999. № 10. С. 73–76. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/ivm/y1999/i10/p73

[10] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2011. Т. 3. № 24. С. 35–41. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu996.

[11] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 С. URL: http://lib.brsu.by/sites/default/files/books/

[12] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с. URL: http://ind.pskgu.ru/ebooks/tihonov.html.

[13] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с. URL: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm.

References

[1] Trusdell K. *Pervonachal'nyi kurs ratsional'noi mekhaniki sploshnykh sred* [Initial course of rational mechanics of solid media]. Moscow: Mir, 1975, 592 p. Available at: https://www.studmed.ru/trusdell-k-pervonachalnyy-kurs-racionalnoy-mehaniki-sploshnyh-sred_f4d30841e26.html [in Russian].

[2] Oskolkov A.P. *O nekotorykh model'nykh nestatsionarnykh sistemakh v teorii nen'yutonovskikh zhidkostei* [Certain model nonstationary systems in the theory of non-Newtonian fluids]. *Trudy matematicheskogo instituta AN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1975, no. 127, pp. 37–66. Available at: http://www.mathnet.ru/links/18cdbc2d48dbb3a524f8f4b7db3aaaea/tm3147.pdf [in Russian].

[3] Gerasimov A.N. *Problema uprugogo posledeistviya i vnutrennee trenie* [The problem of elastic follow-up and internal friction]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1937, Vol. 1, no. 4, pp. 493–536 [in Russian].

[4] Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations. New York; London: Interscience Publishers, 1962, 830 pp. Available at: https://www.studmed.ru/courant-r-hilbert-d-methods-of-mathematical-physics-vol-2-partial-differential-equations_982b6204949.html [in English].

[5] Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. *Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss.*, 1860, vol. 8, pp. 43–68 [in German].

[6] Soldatov A.P., Shkhanukov M.H. *Kraevye zadachi s obshchim nelokal'nym usloviem A.A. Samarskogo dlya psevdoparabolicheskikh uravnenii vysokogo poryadka* [Edge tasks with common non-local condition of Samarskii A.A. for pseudo-parabolic equations of high order]. *DAN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1987, vol. 297, no. 3, pp. 547–552 [in Russian].

[7] Dzhokhadze O.M. *Funktsiya Rimana dlya giperbolicheskikh uravnenii i sistem vysokogo poryadka s dominirovannymi mladshimi chlenami* [The Riemann Function for Higher-Order Hyperbolic Equations and Systems with Dominated lower-Order Terms]. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2003, Vol. 39, no. 10, pp. 1440–1453. Available at: http://mi.mathnet.ru/rus/de/v39/i10/p1366 [in Russian].

[8] Zhegalov V.I., Mironov A.N. *O zadachakh Koshi dlya dvukh uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [On Cauchy problems for two partial differential equations]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], 2002, Vol. 46, no. 5, pp. 21–28. Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/ivm/y2002/i5/p23 [in Russian].

[9] Zhegalov V.I., Utkina E.A. *Ob odnom psevdoparabolicheskom uravnenii tret'ego poryadka* [On a third-order pseudoparabolic equation]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], 1999, Vol. 43, no. 10, pp. 70–73. Available at: http://mi.mathnet.ru/rus/ivm/y1999/i10/p73 [in Russian].

[10] Andreev A.A., Yakovleva J.O. *Zadacha Gursa dlya odnoi sistemy giperbolicheskikh differentsial'nykh uravnenii tret'ego poryadka s dvumya nezavisimymi peremennymi* [The Goursat problem for one hyperbolic system of the third order differential equations with two independent variables]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2011, Vol. 3, no. 24, pp. 35–41. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu996 [in Russian].

[11] Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Theory of matrices]. Moscow: Nauka, 1988, 549 p. Available at: http://lib.brsu.by/sites/default/files/books/

[12] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1972, 735 p. Available at: http://ind.pskgu.ru/ebooks/tihonov.html [in Russian].

[13] Bateman H. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsiya Lezhandra* [Higher transcendental functions. Hypergeometrical function. Legendre's function]. Moscow: Nauka, 1973, 296 p. Available at: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm [in Russian].